



RÉGIME TRANSITOIRE DE LA RÉFLEXION DES ONDES ACOUSTIQUES SUR UNE LAME ÉPAISSE

par

Jacques de LUSTRAC

Assistant *

I. RÉGIME PERMANENT.

Nous examinons le cas d'une lame d'épaisseur d limitée par des plans parallèles, plongée dans un milieu indéfini d'impédance caractéristique Z_1 et illuminée par une onde plane en incidence normale (Fig. 1).

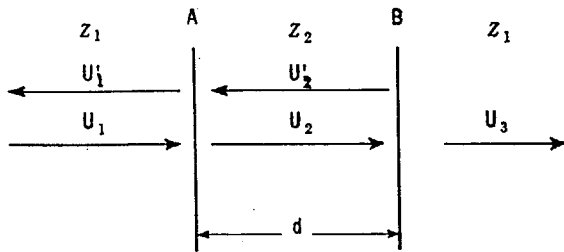


FIG. 1. — Schéma du mécanisme de réflexion des ondes acoustiques sur une lame épaisse.

— Soit Z_2 l'impédance caractéristique de la plaque ;

— soit λ la longueur d'onde dans la plaque :

$$k = 2\pi/\lambda,$$

en appliquant les conditions de continuité des vitesses et des pressions, on trouve le coefficient de réflexion, dont l'expression est (Fig. 2).

$$(1) \quad R = \frac{\left(\frac{Z_1}{Z_2} - \frac{Z_2}{Z_1}\right)^2}{4 \cot^2 kd + \left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1}\right)^2},$$

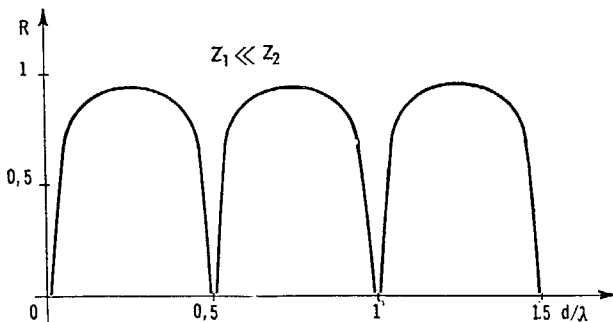


FIG. 2. — Variation du coefficient de réflexion R , d'une lame épaisse en fonction de d/λ .

— le coefficient de réflexion est fonction de Z_1/Z_2 et de d/λ il varie périodiquement et

— lorsque d est un multiple impair de $\lambda/4$, l'énergie réfléchie est maximale

$$R_{\text{Max}} = \left(\frac{Z_1^2 - Z_2^2}{Z_1^2 + Z_2^2}\right)^2,$$

— lorsque d est un multiple de $\lambda/2$, l'énergie réfléchie est nulle

$$R = 0.$$

II. RÉGIME TRANSITOIRE.

Mécanisme d'établissement du régime permanent

Soit une onde plane W_1 qui tombe en A, en incidence normale sur une lame épaisse à faces parallèles (A, B), milieu II, plongée dans un milieu I.

— Une partie de l'énergie de W_1 égale $R_1 W_1$, est réfléchie (R_1 étant le coefficient de réflexion du dioptré (I, II)). Le reste W_2 de l'énergie égale $W_1(1 - R_1)$ est transmise au milieu II et se propage dans la lame. W_2 est réfléchi en B par le dioptré (II, I), avec une intensité $W_3 = R_2 W_2$ (R_2 : coefficient de réflexion du dioptré (II, I)).

— Lorsque W_3 arrive à nouveau sur la face A, elle donne un nouvel état d'équilibre au dioptré (II, I). Une partie $W_4 = R_2 W_3$ est réfléchie et une autre partie $W_5 = T_2 W_3$ est transmise au milieu I. A cet instant l'onde de retour W'_1 vaut :

$$W'_1 = R_1 W_1 + W_5.$$

— Ce mécanisme va se reproduire, avec une convergence vers l'état d'équilibre du régime permanent qui s'établit donc par valeurs discrètes de W'_{1n} correspondant aux paliers de durée $t = 2d/c$ (c = célérité dans le milieu II).

Résonance de la lame.

Une partie W_2 de l'énergie pénètre dans la lame. En un aller-retour elle ne cède qu'une partie de son énergie $T_2 W_2 + T_2(1 - T_2) W_2$.

— Il y a donc accumulation d'énergie dans la

* Centre d'Étude des Phénomènes Aléatoires (CEPHAG), (associé au C.N.R.S.), Faculté des sciences, 46, avenue Félix-Viallet. 38 - Grenoble.

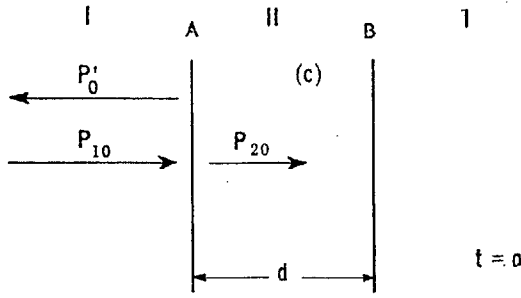


FIG. 3. — Schéma du mécanisme de réflexion des ondes sur un dioptre A.

lame pendant tout le temps où l'énergie reçue par la lame est supérieure à celle qu'elle transmet.

— Soit à l'instant $t = 0$ (P caractérisé par l'indice 0) (Fig. 3).

l'onde incidente P_{10} ,

l'onde réfléchie $P'_0 = r_{12} P_{10}$,

l'onde réfractée $P_{20} = \mathfrak{T}_{12} P_{10}$,

$$r_{12} = \frac{P'_0}{P_{10}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},$$

r_{12} caractérise la réflexion à la séparation des milieux I, II,

en outre : $r_{21} = -r_{12}$,

$$\mathfrak{T}_{12} = \frac{P_{20}}{P_{10}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

$$\mathfrak{T}_{21} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

$\mathfrak{T}_{21}$ caractérise la transmission du milieu II vers I.

— A l'instant $t = t_1 = 2d/c$, P_{20} est de retour sur la face A et on obtient un nouvel état d'équilibre. Par la superposition des états d'équilibre, on aura (Fig. 4).

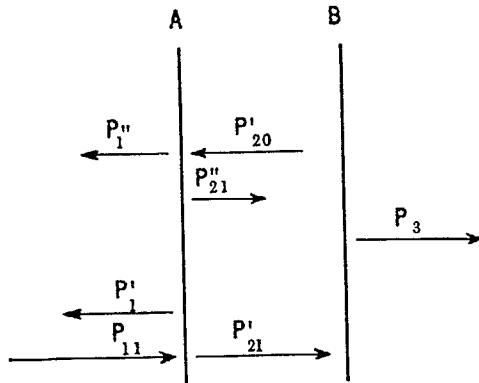


FIG. 4. — Schéma de la superposition des ondes réfléchies.

— onde incidente :

$$\rightarrow \begin{cases} P'_1 = r_{12} P_{11} & \text{par réflexion,} \\ P_{21} = \mathfrak{T}_{12} P_{11} & \text{par réfraction,} \\ P_{11} & \text{incidente.} \end{cases}$$

— onde de retour :

$$P'_{20} = r_{21} P_{20} = r'_{21} P'_{21} e^{-j2kd} = r_{21} \mathfrak{T}_{21} P_{11} e^{-j2kd},$$

donne :

$$P''_1 = \mathfrak{T}_{21} P_{20} = \mathfrak{T}_{21} \mathfrak{T}_{12} r_{21} P_{11} e^{-j2kd},$$

$$P_{21} = r_{21} P'_{20} = r_{21}^2 \mathfrak{T}_{12} P_{11} e^{-j2kd},$$

— onde réfléchie :

$$P_1 = P'_1 + P''_1 = r_{12} P_{11} + \mathfrak{T}_{21} \mathfrak{T}_{12} r_{21} P_{11} e^{-j2kd},$$

— onde réfractée :

$$P_{21} = P_{21}' + P_{21}'' = \mathfrak{T}_{12} P_{11} + \mathfrak{T}_{12} r_{21}^2 P_{11} e^{-j2kd},$$

— ou, en généralisant,

$$t = t_n = n 2d/c.$$

$$\bullet \quad P_n = r_{12} P_{1,n} + \mathfrak{T}_{21} r_{21} P_{2,(n-1)},$$

$$\bullet \quad P_{2,n} = \mathfrak{T}_{12} P_n + r_{21}^2 P_{2,(n-1)}.$$

$$P_n = r_{12} P_{1n} [1 - \mathfrak{T}_{12} \mathfrak{T}_{21} (e^{-j2kd} + r_{21}^2 e^{-j4kd} + \dots + r_{21}^{2(n-1)} e^{-j2nkd})],$$

et connaissant

$$P_{20} = \mathfrak{T}_{12} P_{10},$$

on peut calculer les autres termes.

En posant :

$$r_{12} = r, \quad e^{-j2kd} = \theta.$$

$$r_n = r[1 - \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 (\theta + r^2 \theta^2 + \dots + r^{2(n-1)} \theta^n)],$$

$$\bullet \quad r_n = r \left[1 - \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \sum_{m=1}^n r^{2(m-1)} \theta^m \right],$$

r étant toujours < 1 et $|\theta| = 1$ on a convergence de la série pour $n \rightarrow \infty$.

$$R_n = |r_n|^2, \quad (\text{module carré})$$

ou, en sommant la série

$$\bullet \quad r_n = r \left[1 - \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \theta \frac{(1 - r^{2n} \theta^n)}{1 - r^2 \theta} \right],$$

ou en remplaçant $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ par leur valeur :

$$\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 = 1 - r^2.$$

$$\bullet \quad r_n = r \left[1 - \theta \frac{(1 - r^2)}{1 - r^2 \theta} (1 - r^{2n} \theta^n) \right].$$

Note. On peut déduire les résultats précédents de la connaissance de la réponse percussionnelle $R(t)$. En faisant un raisonnement semblable à celui du (2) on trouve :

$$R(t) = r_1 \delta(t) + \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 r_2 \delta\left(t - \frac{2d}{c}\right) + \dots \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 r^{2n-1} \delta\left(t - \frac{2nd}{c}\right) + \dots$$

ou, en posant $2d/c = \tau$,

$$\bullet \quad R(t) = r[\delta(t) - \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{2(n-1)} \delta(t - n\tau)],$$

si l'on applique un signal de la forme

$$x(t) = P \cdot H(t) e^{j\omega t},$$

où $H(t)$ est la fonction de Heaviside

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) R(t - \theta) d\theta,$$

$$y(t) = r e^{j\omega t} P \left[1 - \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \sum_{m=1}^n r^{2(m-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\theta) \times e^{-j\omega(t-\theta)} \delta(t - m\tau - \theta) d\theta \right],$$

$$y(n\tau) = r P e^{j\omega t} [1 - \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \sum_{m=1}^n r^{2m} e^{-j\omega m\tau}],$$



ou

$$r_n = \frac{y(n\tau)}{P e^{j\omega\tau}} \quad \text{et} \quad e^{j\omega\tau} = \theta.$$

$$r_n = r \left[1 - \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2 \sum_{m=1}^n r^{2(m-1)} \theta^m \right],$$

On obtient le même résultat que précédemment, mais le développement est moins instructif quant à la formation des échos acoustiques.

III. CAS DE RÉFLEXION MAXIMALE OU MINIMALE.

Considérons le temps d'établissement d'un maximum ou d'un minimum.

III.1. Pour un maximum.

$$d = (2h + 1) \lambda / 4,$$

où h est entier ≥ 1 :

$$\theta = e^{-j\pi(2h+1)}, \quad \theta = -1.$$

On doit avoir :

$$R_{n \rightarrow \infty} = R_{\max} = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2},$$

$$R_{\infty} = r^2 \left| 1 + \frac{(1-r^2)}{(1+r^2)} (1 \pm \varepsilon) \right|_{\varepsilon \rightarrow 0}^2, \quad \text{quand } n \text{ croît,}$$

d'où

$$R_{\infty} = \frac{4r^2}{1+r^2}$$

On retrouve bien comme limite de R_n , $R_{\max}$ établi pour le régime permanent,

— Calcul de $R_n = r_n^2$

$$r_n = r \left[1 + \frac{1-r^2}{1+r^2} (1 + (-1)^{n+1} r^{2n}) \right],$$

$$R_n = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2} (1-r^2) r^{2n} \right]^2,$$

ou

$$R_n = R_{\max} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2} (1-r^2) r^{2n} \right]^2.$$

— Erreur sur la mesure du coefficient de réflexion maximal

$$R_{\max} - R_n = R_{\max} [2\alpha_n - \alpha_n^2],$$

où

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{1} (1-r^2) r^{2n}.$$

$R_{\max} - R_n$ est l'erreur que l'on commet quand on mesure $R_{\max}$ au temps $t = n\tau$, ($t = 2nd/c$).

— Analyse de l'écho.

L'écho détecté et amputé de sa composante continue se présente donc comme une suite de valeurs $R_n - R_{\max}$ dont la durée est $T = 2d/c$. On caractérisera ces valeurs par le rapport

$$\frac{R_n - R_{\max}}{R_{\max}} = -2\alpha_n + \alpha_n^2.$$

Dans le cas d'objets rigides immergés, α_n est petit et l'on a :

$$\frac{R_n - R_{\max}}{R_{\max}} \approx -2\alpha_n,$$

ou

$$\frac{R_n - R_{\max}}{R_{\max}} \simeq (-1)^{n+1} (1-r^2) r^{2n}.$$

On a tracé des courbes théoriques correspondant à une lame, d'acier, d'aluminium et de roche (Fig. 5).

III.2. Pour un minimum.

$$d = h \lambda / 2, \quad h : \text{entier} \geq 1,$$

$$\theta = e^{-j2\pi h} \equiv 1,$$

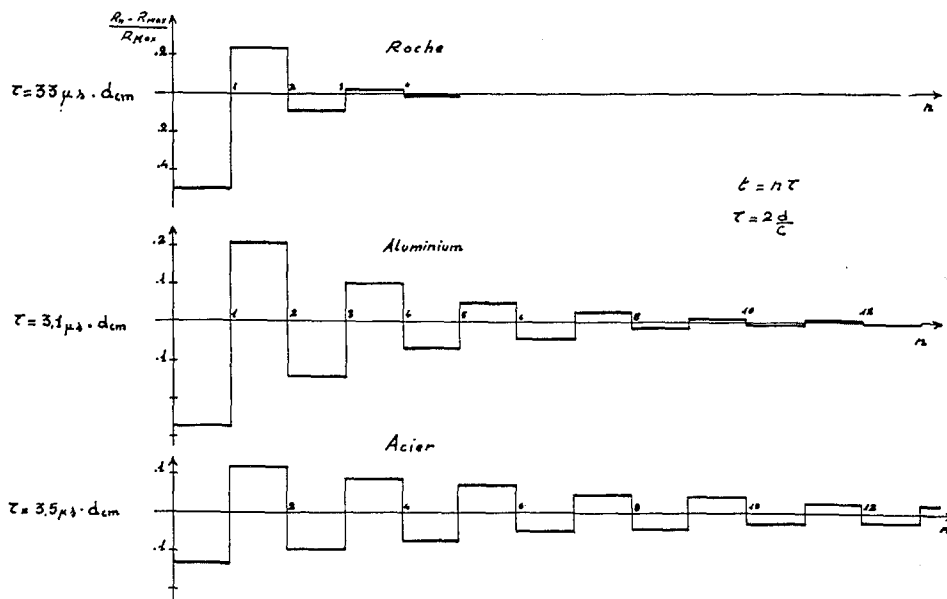


FIG. 5. — $R_n = r^{2(2n+1)}$, pour l'acier, l'aluminium, et la roche.

on vérifie que

$$R_{\infty} = 0,$$

$$r_n = r \left[1 - \frac{1-r^2}{1-r^2} (1-r^{2n}) \right],$$

$$r_n = r^{2n+1},$$

$$R_n = r^{2(2n+1)},$$

puisque $R_{\infty} = 0$, R_n représente l'erreur que l'on commet dans la mesure $R_{\infty} = 0$.

— Temps d'établissement d'un R_n donné.

$$\log_e R_n = 2(2n+1) \log_e r,$$

$$n = \frac{\log_e R_{12}}{4 \log_e r} - \frac{1}{2},$$

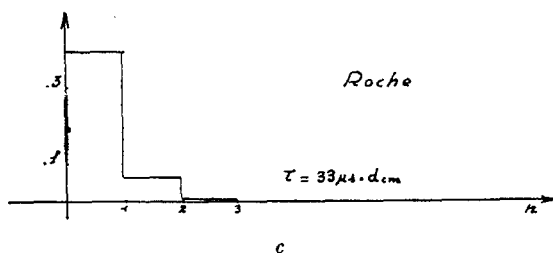
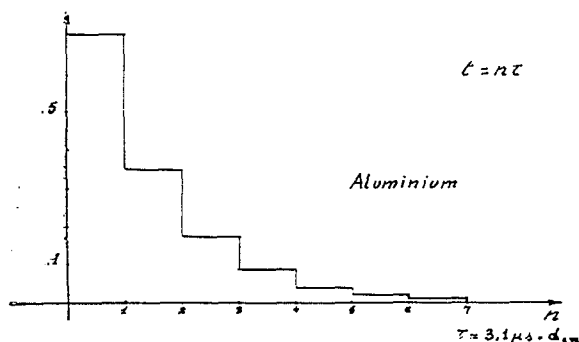
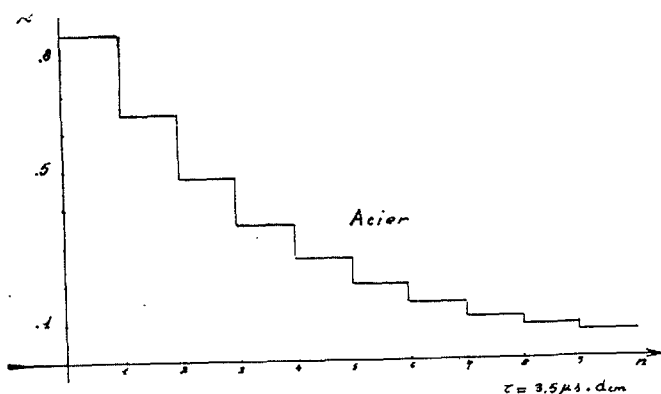


FIG. 6. — $(R_n - R_{\max})/R_{\max}$ en fonction de n , pour l'acier, l'aluminium et la roche.

où t_n = temps pour atteindre R_n ,

$$t_n = n2d/c,$$

$$t_n = \frac{d}{c} \left[\frac{\log_e R_n^2}{2 \log_e r} - 1 \right],$$

— Courbes r^{4n+2} (Fig. 6).

— On peut caractériser la décroissance de R_n par le rapport

$$\frac{R_n}{R_0} = r^{4n},$$

où

$$A_{n\text{dB}} = 10 \log_e \frac{R_n}{R_0},$$

$$A_{n\text{dB}} = n (40 \log_e r),$$

pour l'acier

$$A_n = -n 1,26 \text{ dB},$$

pour l'aluminium

$$A_n = -n 3 \text{ dB}.$$

IV. CONCLUSION.

Cette étude, dans laquelle nous avons établi le mécanisme de formation de l'écho acoustique, nous montre que le régime transitoire peut perturber notablement la mesure du coefficient de réflexion pendant des temps pouvant être plus de 20 fois supérieurs au temps de transit de l'onde dans la lame (d/c). On voit l'importance que peut prendre ce phénomène, si les mesures sont effectuées par technique sonar (impulsions) où l'on est très vite limité en temps.

D'autre part, le régime transitoire étudié fournit des renseignements intéressants quant à la détection des objets creux immergés, par analyse de l'écho. (Détermination du coefficient de réflexion et de l'épaisseur de la paroi).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LORD RAYLEIGH. Theory of Sound. (Théorie du Son). Mac Millan, (1929), II, 86 p.
- [2] GUIEYSSSE (L.) et SABATHÉ (P.). Acoustique sous-marine. Dunod, Fr., (1964), 44 p.
- [3] DODONOFF (D.). Réflexion des ondes acoustiques planes. Ann. Télécommunic. Fr., (janv. fév. 1965), 20, n° 1-2, pp. 5-10.
- [4] PIMONOW (L.). Théorie et pratique de l'analyse des vibrations en régime transitoire. — Ann. Télécommunic. Fr., (mai-juin 1958), 13, n° 5-6, pp. 125-152.
- [5] HASLETT. Determination of the reflectivities of solids. (Détermination de la réflexion des solides). Proc. Phys. Soc. (1962), 79, p. 559.