



DISPOSITIF PRÉDICTEUR DE BRUIT UTILISABLE EN SPECTROMÉTRIE NUCLÉAIRE

par

Jerzy BENDA *

et

Jacques FREYCENON **

I. INTRODUCTION

Les mesures de spectrométrie en physique nucléaire ont pour but de déterminer la densité de probabilité $P(E) dE$ de l'énergie E de particules détectées au cours d'une expérience. La valeur de l'énergie est obtenue en général par la mesure de l'amplitude (qui lui est proportionnelle) d'une impulsion de tension apparaissant à la sortie d'un préamplificateur associé au détecteur. Cette impulsion peut être assimilée à un échelon de tension, elle décroît avec une longue constante de temps de l'ordre de la milliseconde. Du bruit de fond, ayant sa source dans le détecteur et dans l'étage d'entrée du préamplificateur, est superposé au signal ; on démontre que sa densité spectrale énergétique $\overline{e^2}(\omega)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$\overline{e^2}(\omega) = K \left(1 + \frac{k^2}{\omega^2} \right);$$

K et k sont des constantes qui dépendent des paramètres électriques du détecteur et de l'étage d'entrée du préamplificateur. Pour déterminer $P(E) dE$ avec précision, il faut accumuler un grand nombre de mesures effectuées avec une erreur aussi faible que possible. On pose ainsi un problème de filtrage optimal dont la solution est classique.

Mais l'appareil de mesure (analyseur d'amplitude) universellement utilisé dans ces expériences, exige, pour fonctionner dans de bonnes conditions, que les signaux qu'on lui envoie aient une forme déterminée :

— leur temps de montée doit être compris entre deux limites (0,1 et 10 μ s par exemple),

— leur sommet, où est faite la mesure d'amplitude, doit être arrondi (ou mieux, plat).

Enfin, la distribution des événements dans le temps est aléatoire ; il faut donc assurer aux impulsions une décroissance suffisamment rapide pour que la probabilité d'empilement (chevauchement partiel de deux ou plusieurs impulsions) soit faible.

La recherche de dispositifs de filtrage satisfaisant le mieux à ces différentes conditions ne peut être mise en équation comme un problème d'optimalisation. Un bilan actuel de cette recherche peut être brièvement présenté ainsi :

1) Des études théoriques [1], [2], [3] ont montré que le filtre optimal n'est pas physiquement réalisable, mais que l'on peut construire des circuits permettant d'obtenir à peu près la réponse indiciale optimale. Ces circuits sont cependant trop complexes pour être efficacement utilisés dans un laboratoire de physique.

2) Deux types de réseaux ont reçu une très large diffusion en spectrométrie nucléaire pour filtrer le bruit et mettre en forme les signaux. L'un comporte une double différentiation à ligne à retard suivi d'une intégration RC : il donne des signaux brefs et peut être utilisé à des taux de répétition élevés de détection (50 000 détections par seconde et plus), mais son effet de filtrage du bruit est relativement faible. L'autre, qui comporte une seule différentiation CR suivie d'une intégration RC, assure un filtrage du bruit plus prononcé, mais forme des impulsions plus longues. Le calcul montre que le meilleur rapport signal à bruit est obtenu lorsque les constantes de temps RC et CR sont égales entre elles, d'une part, et égales, d'autre part, à l'inverse de la constante k de la densité spectrale du bruit ; dans ces conditions, le rapport signal à bruit n'est que 26 % plus faible que celui du filtre optimal théorique.

3) L'apparition récente de détecteurs à semi-conducteurs et de transistors à effet de champ ayant un très faible bruit propre a suscité des recherches nouvelles de filtres [4], [5] ou de dispositifs non linéaires ou variables dans le temps [6] en vue de mieux approcher la précision maximale théorique tout en acceptant un taux de comptage élevé.

C'est dans cette perspective que s'inscrit le dispositif utilisant un filtre prédicteur qui est présenté ici. On verra qu'il peut constituer un accessoire d'une chaîne de spectrométrie en usage dans un laboratoire permettant à la fois d'améliorer le rapport signal à bruit et de raccourcir la durée des impulsions.

II. PRINCIPE DU DISPOSITIF

Une chaîne de spectrométrie nucléaire comprend essentiellement les éléments suivants :

- un détecteur lié à un préamplificateur,
- un amplificateur dans lequel est en général

(*) De l'École Polytechnique de Varsovie.

(**) Département d'Électronique Générale. Centre d'Études Nucléaires de Saclay.

placé le filtre de mise en forme des impulsions, — un analyseur d'amplitude.

Le bruit de fond à la sortie de l'amplificateur de mise en forme est partiellement corrélé, c'est-à-dire que l'amplitude qu'il a, à un instant quelconque, dépend, dans une certaine mesure, de son passé. On peut donc utiliser l'« histoire » du bruit jusqu'à l'instant d'apparition d'une impulsion pour prédire, avec plus ou moins de « bonheur », quelle sera sa valeur à l'instant où arrivera le sommet de l'impulsion. Cette valeur prédite doit permettre de diminuer en moyenne, l'erreur statistique commise sur la mesure d'énergie.

Le dispositif expérimental que l'on peut imaginer suivant ce principe est simple (Fig. 1). Si l'on savait

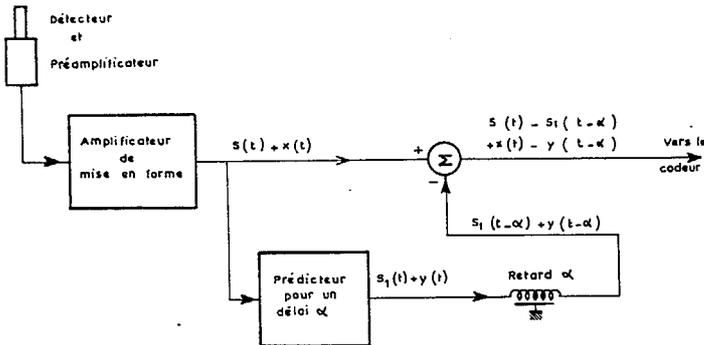


FIG. 1. — Dispositif expérimental.

faire un filtre prédictif idéal qui réponde à la tension de bruit $x(t)$ sortant de l'amplificateur de mise en forme par une tension $y(t)$ rigoureusement égale à $x(t + \alpha)$, on obtiendrait une tension de bruit $\varepsilon(t)$ nulle en permanence à la sortie du circuit Σ qui fait la différence de $x(t)$ appliqué à l'entrée « + » et de $y(t)$ retardé de α , $y(t - \alpha)$ appliqué à l'entrée « — ». Lorsqu'un signal $S(t)$ superposé à $x(t)$ (mais non corrélé avec ce bruit) se présente à l'instant t_0 , il apparaît inchangé à la sortie du circuit Σ jusqu'à l'instant $t_0 + \alpha$ où le signal $S_1(t)$, réponse du prédictif à $S(t)$ arrive à l'entrée « — ». Si $S(t)$ (qui est une fonction certaine sauf pour son amplitude), atteint son maximum à l'instant $t_0 + \tau$, il suffit que le délai α soit supérieur ou égal à τ pour que la mesure de l'amplitude ne soit pas perturbée par $S_1(t)$.

Le prédictif idéal n'existe pas, mais la théorie du filtrage donne un moyen de calculer la réponse indicielle du prédictif optimal pour le délai α qui donne, en valeur quadratique moyenne, la plus faible erreur $\varepsilon(t) = x(t) - y(t - \alpha)$. L'amélioration du rapport signal à bruit que l'on doit attendre du dispositif dépend de l'efficacité de la prédiction qui est d'autant meilleure que le délai α est plus court ; on choisira donc $\alpha = \tau$.

A chaque type de filtre utilisé dans l'amplificateur de mise en forme correspond un prédictif optimal dont la réponse indicielle peut être calculée à partir de la densité spectrale énergétique du bruit $x(t)$. On a choisi de faire ce calcul pour la mise en forme CR — RC qui est la plus courante.

III. LE DISPOSITIF PRÉDICTEUR APPLIQUÉ A UNE MISE EN FORME CR-RC

La fonction de transfert d'un filtre comportant une différentiation et une intégration de même constante de temps CR = RC = $\tau = \frac{1}{a}$ est :

$$T(s) = \frac{as}{(s + a)^2}$$

La densité spectrale énergétique $\Phi_x(\omega)$ du bruit $x(t)$ sortant de ce filtre lorsque la densité spectrale à l'entrée est

$$\bar{\varepsilon}^2(\omega) = K \left(1 + \frac{k^2}{\omega^2} \right), \quad (0 \leq \omega < +\infty),$$

est :

$$\Phi_x(\omega) = Ka^2 \frac{\omega^2 + k^2}{(\omega^2 + a^2)^2}$$

La réponse indicielle du prédictif optimal que l'on calcule pour un délai de prédiction α est :

$$h_{opt}(t) = [(k - a)\alpha + 1] e^{-a\alpha} \delta(t) - \alpha(k - a)^2 e^{-a\alpha} e^{-kt}$$

On reconnaît aisément la réponse d'un filtre obtenu en mettant en parallèle :

— un amplificateur (ou atténuateur) de gain

$$[(k - a)\alpha + 1] e^{-a\alpha},$$

— un intégrateur RC de constante de temps RC = $1/k$ suivi d'un amplificateur (ou d'un atténuateur) de gain $\alpha/k (k - a)^2 e^{-a\alpha}$.

La réponse de l'amplificateur de mise en forme, au signal issu du préamplificateur qui peut être assimilé à un échelon de tension d'amplitude A , est :

$$S(t) = Aat e^{-at}$$

Ce signal atteint son amplitude maximale A/e à l'instant $t = 1/a = \tau$. Le délai de prédiction le plus court nécessaire sera donc $\alpha = \tau$, ce qui donne pour $h_{opt}(t)$:

$$h_{opt}(t) = \frac{k}{a} e^{-1} \delta(t) - \frac{a}{k} \left(\frac{k}{a} - 1 \right)^2 e^{-1} k e^{-kt}$$

L'erreur quadratique moyenne de la prédiction de $x(t)$ par le filtre ayant cette réponse indicielle est :

$$\bar{\varepsilon}_{opt}^2 = \frac{1}{4} \pi K k \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{5\gamma^2 - 4\gamma + 1}{\gamma^2 + 1} \right], \quad \left(\gamma = \frac{k}{a} \right)$$

En calculant le rapport $\xi = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{x^2}$, on peut estimer l'efficacité de la prédiction ; on a :

$$\bar{x}^2 = \int_0^{+\infty} \Phi_x(\omega) d\omega = \frac{1}{4} \pi K k \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma}$$

d'où :

$$\xi = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{x^2} = 1 - \frac{5}{e^2} + \frac{4}{e^2} \frac{\gamma + 1}{\gamma^2 + 1}$$

On voit que ce rapport est d'autant plus faible que γ est grand, et qu'il tend vers $1 - \frac{5}{e^2} = 0,324$ quand γ croît indéfiniment.



Mais il ne faut pas perdre de vue que le but du dispositif est d'améliorer le rapport signal à bruit et non de diminuer le bruit seul. Un accroissement de γ (par une augmentation de $\tau = 1/a$), qui permet effectivement d'améliorer la prédiction du bruit pour un délai $\alpha = \tau$, correspond cependant à une détérioration du rapport signal à bruit à la sortie de l'amplificateur de mise en forme (maximum pour $\gamma = 1$). Ce rapport doit donc être pris en considération pour déterminer les conditions optimales d'utilisation du filtre prédicteur.

Il est d'usage, en instrumentation nucléaire, de considérer le rapport bruit à signal plutôt que le rapport signal à bruit, et l'on se conformera à cet usage pour que les résultats obtenus ici soient directement comparables à ceux que l'on trouve dans la littérature.

Pour comparer les différents filtres sur le plan du rapport bruit à signal, leur efficacité est exprimé en fonction des constantes K et k qui déterminent la densité spectrale du bruit à sa source, et de l'amplitude maximale de la réponse du filtre à un saut de tension d'amplitude unitaire.

Pour la mise en forme CR — RC employée seule, l'amplitude de la réponse à un échelon-unité est $1/e$, ce qui donne, pour le bruit $x(t)$ de puissance :

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{4} \pi K k \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma},$$

le rapport bruit à signal :

$$\left[\frac{b}{s} \right]_1 = e \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{Kk} \sqrt{\frac{\gamma^2 + 1}{2\gamma}};$$

Ce rapport est minimum pour $\gamma = 1$; il prend alors la valeur (*) :

$$\left[\frac{b}{s} \right]_2 = e \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{Kk} = 3,4 \sqrt{Kk}.$$

L'utilisation du dispositif prédicteur conduit au rapport bruit à signal :

$$\left[\frac{b}{s} \right]_2 = \frac{\sqrt{\bar{\epsilon}^2}}{1/e} = e \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{Kk} \sqrt{\frac{\gamma^2 + 1}{2\gamma} \left[1 - \frac{1}{e^2} \frac{5\gamma^2 - 4\gamma + 1}{\gamma^2 + 1} \right]};$$

On trouve que $(b/s)_2$ est minimum pour $\gamma = 1,63$ et vaut :

$$[b/s]_2 = 3,04 \sqrt{Kk},$$

soit une amélioration de 10,5 % par rapport à $(b/s)_0$. Calculant $h_{\text{opt}}(t)$ pour cette valeur de γ , on trouve :

$$h_{\text{opt}}(t) = 0,6 \delta(t) - 0,09 k e^{-kt}.$$

La constante de temps optimale correspondante de la mise en forme CR — RC n'est plus $\tau = 1/k$ mais $\tau = 1,63 \ 1/k$.

(*) A titre de comparaison, on aurait $b/s = 2,506 \sqrt{Kk}$ pour le filtre optimal théorique.

Il ressort du calcul de $h_{\text{opt}}(t)$ que le gain de la voie intégration dans les conditions optimales est faible. On est en droit de se demander ce que donnerait l'usage d'un simple atténuateur en guise de prédicteur.

En prenant pour $h(t)$ l'expression :

$$h(t) = m \delta(t),$$

on trouve qu'il faut donner à m la valeur :

$$m = \frac{1}{e} \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 + 1},$$

pour rendre minimale la valeur quadratique moyenne du bruit $\epsilon(t)$. On a alors le rapport bruit à signal :

$$\left[\frac{b}{s} \right]_3 = e \sqrt{\frac{\pi}{2}} K k \sqrt{\frac{\gamma^2 + 1}{2\gamma} \left[1 - \frac{1}{e^2} \left[\frac{2\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \right]^2 \right]},$$

qui est minimal pour $\gamma = 1,59$ et vaut alors :

$$[b/s]_3 = 3,05 \sqrt{Kk}.$$

On voit que l'on obtient à peu de chose près le même résultat qu'avec le prédicteur complet : une amélioration de 10 % du rapport bruit à signal.

Quelques mesures effectuées en établissant le dispositif expérimental présenté sur la figure 1 ont montré que l'on peut atteindre effectivement, une amélioration de 10 % environ du rapport bruit à signal dans les mesures de spectrométrie.

IV. RACCOURCISSEMENT DES SIGNAUX.

La durée d'un signal, théoriquement infinie dans le cas de la mise en forme CR — RC par exemple, ne peut recevoir une définition bien rigoureuse. Deux grandeurs ont été proposées dans la littérature pour la mesurer :

— le temps de séjour (« dwell time ») défini arbitrairement par T. V. Blalock [4] comme le temps, mesuré en prenant $1/k$ pour unité, au bout duquel le signal se retrouve à 2 % de son amplitude maximale,

— la largeur équivalente, mesurée également en prenant $1/k$ pour unité, qui est la durée d'une impulsion rectangulaire ayant pour amplitude l'amplitude maximale du signal, et pour surface l'intégrale de la valeur absolue du signal (les surfaces au-dessous de l'axe des temps sont donc additionnées et non soustraites).

On peut calculer que dans le cas où l'on utilise le prédicteur complet (atténuateur et intégrateur en parallèle), l'expression mathématique du signal appliqué au codeur d'amplitude qui était, sans le dispositif prédicteur :

$$S(t) = at e^{-at},$$

devient :

$$V(t) = \begin{cases} at e^{-at}, & t \leq 1/a, \\ \frac{1}{e} e^{-k(t-1/a)}, & t \geq 1/a. \end{cases}$$



Il est remarquable que le prédicteur optimal permette de transformer en une décroissance exponentielle pure de constante de temps $1/k$ ($k = 1,63 a$) la décroissance plus lente du signal initial.

En n'utilisant qu'un atténuateur pour constituer le prédicteur, on obtient :

$$V(t) = \begin{cases} at e^{-at}, & t \leq 1/a, \\ (1,432 - 0,432 at) e^{-at}, & t \geq 1/a, \end{cases}$$

pour la valeur optimale $\gamma = 1,59$.

Le tableau I donne les valeurs que l'on peut calculer pour le temps de séjour et la largeur équivalente de ces impulsions :

TABLEAU I

	CR — RC SEULE	CR — RC AVEC LE PRÉDICTEUR	
		ATTÉNUATEUR SEUL	PRÉDICTEUR COMPLET
Temps de séjour	$6,8 \frac{1}{k}$	$4,75 \frac{1}{k}$	$5,55 \frac{1}{k}$
Largeur équivalente	$2,72 \frac{1}{k}$	$2,17 \frac{1}{k}$	$2,17 \frac{1}{k}$

On voit que dans les conditions de minimum de bruit, le dispositif utilisant un prédicteur permet de diminuer de 20 à 30 % la durée des signaux envoyés au convertisseur, autorisant ainsi un taux de comptage moyen des impulsions plus élevé pour une même probabilité d'empilements.

CONCLUSION

L'étude du dispositif utilisant un filtre prédicteur de bruit associé à une mise en forme CR — RC montre que les caractéristiques d'une chaîne de spectrométrie existant dans un laboratoire peuvent être nettement améliorées par l'emploi de cet accessoire.

Toutefois, on doit s'interroger sur l'intérêt pratique que peuvent offrir ces résultats, car les mêmes améliorations du rapport bruit à signal et de la durée des impulsions sont obtenues en ajoutant une intégration au filtre CR — RC. La mise en

forme CR — (RC)² a en effet, dans les conditions optimales, les caractéristiques suivantes :

$$\frac{b}{s} = 3,04 \sqrt{Kk},$$

$$\text{temps de séjour} : 4,6 \frac{1}{k}$$

$$\text{largeur équivalente} : 2,14 \frac{1}{k}$$

Les arguments suivants permettent de fournir une réponse favorable à cette question :

— il est évident que le même principe d'un dispositif prédicteur peut être utilisé en association avec la mise en forme CR — (RC)². On peut calculer que, dans les conditions optimales, le rapport signal à bruit serait amélioré de 7 % (3,5 % seulement pour un atténuateur seul) et que la durée de l'impulsion serait également diminuée ;

— il n'est pas certain que le dispositif, tel qu'il a été envisagé ici, soit optimisé du point de vue du délai de la prédiction. On a choisi en effet de prédire le bruit au sommet de l'impulsion, où le signal cesse de croître ($\frac{dS}{dt} = 0$) alors que l'efficacité de la prédiction se détériore. Il faudrait entreprendre une nouvelle étude, calculant b/s en fonction de α et de γ , et chercher pour quelles valeurs de α et de γ est obtenu le minimum de ce rapport. On s'aperçoit rapidement que la solution de ce problème ne peut pas être obtenue algébriquement et doit être programmée sur un calculateur ;

— enfin, il est possible que certains types de filtres se prêtent mieux que d'autres à ce procédé. Et, en tout cas, le bruit étant corrélé à la sortie de la mise en forme, le rapport bruit à signal ne peut qu'être diminué par le prédicteur optimal.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BALDINGER (E.), FRANZEN (W.). Amplitude and time measurements in nuclear physics. *Advances in electronics and electron physics. Academic Press, New-York (1956), 3, p. 256.*
- [2] WILSON (T.). *Phil. Mag.* 41, (1950), 66.
- [3] GENIN (R.). *Électronique et Physique nucléaire. Herman (1953).*
- [4] BLALOCK (T. V.). Optimization of semi-conductor preamplifiers for use with semi-conductor radiation detectors. *Rapport O. R. N. L., 1055 (fév. 1965).*
- [5] BLANKENSHIP (D.), NOWLIN (C.). New concepts in nuclear pulse amplifier design. *I. E. E. E. Trans. N. S. (1966), N. S.-13, pp. 495-513.*
- [6] RADEKA (V.), KARLOVAC (N.). Least square error amplitude measurement of pulse signals in the presence of noise. (*A paraître dans « Nuclear instruments and methods »*).