



SUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES INCOMPLÈTEMENT DÉTERMINÉS

par

Théodore VOGEL *

I. INTRODUCTION.

La physique mathématique, (comme d'ailleurs la biologie mathématique, l'économie politique mathématique, etc., dans la mesure où ces disciplines existent) se propose d'étudier l'évolution au cours du temps d'êtres mathématiques appelés systèmes, axiomatiquement reliés aux observations sur des assemblages concrets d'objets, de manière que leur état soit caractérisé par un ensemble de grandeurs obtenues à partir d'observations minutieusement spécifiées. L'état du système à tout instant est donc représenté par un point d'un espace convenable, dit espace de phase, et l'évolution est représentée par une ligne de cet espace, graduée en temps, ou trajectoire, ou encore, si l'on considère le produit cartésien de l'espace de phase par la droite numérique représentant les temps (univers de phase), l'ensemble des points d'univers du système forme sa ligne d'univers ; la trajectoire est la projection de la ligne d'univers sur l'espace de phase.

L'immense majorité des problèmes que l'on traite en physique mathématique porte sur des systèmes déterminés, c'est-à-dire tels que si l'on connaît un sous-espace dit espace des causes, l'évolution entière s'ensuit sans ambiguïté. Plus encore, l'immense majorité des systèmes déterminés entre dans la catégorie des systèmes que l'on peut appeler fatals, où le sous-espace des causes se réduit à un point, celui qui représente l'état initial du système à l'instant où l'évolution commence. Parmi les systèmes fatals, on pensera en premier lieu à la classe dégénérée des systèmes dynamiques, où tout état observé peut être pris pour état initial et où l'évolution est régulière, sauf en des points exceptionnels dont l'ensemble est de mesure nulle ; on démontre qu'alors l'évolution peut être représentée, moyennant au besoin une transformation convenable, par la famille des solutions d'une équation différentielle vectorielle du type :

$$dP/dt = F(P, t).$$

Lorsque F ne dépend pas explicitement de t , on a affaire à un système autonome, dont le prototype est un champ ou écoulement stationnaire.

Les systèmes héréditaires, où l'évolution dépend non seulement de l'état observé P , mais encore de tous les états passés ou au moins de ceux qui sont

situés sur un arc limité de trajectoire en amont de P , sont évidemment fatals eux aussi, car la connaissance du point initial de la demi-trajectoire dans le passé est incluse dans celle de l'arc de trajectoire qui détermine l'évolution, de sorte qu'en partant de ce point initial, on peut construire toute la trajectoire élément par élément.

On ne manquera pas d'opposer à ces systèmes ceux dont on ne peut connaître, ou dont on ne cherche à connaître, que l'évolution probable. L'introduction même de cette notion n'implique-t-elle pas que plusieurs solutions sont possibles, n'exclut-elle pas, de ce fait, le déterminisme ? A y regarder de plus près, il semble que la distinction ne réside pas, le plus souvent, au niveau de l'évolution, où nous nous sommes placés, mais à celui, plus profond, de l'axiomatique qui relie les observations concrètes aux grandeurs d'état. Deux exemples illustreront ceci, et préciseront notre pensée.

1° Soit un système mécanique conservatif à n degrés de liberté. Dans la théorie classique, son état est une fonction numérique des observables : déplacements et quantités de mouvement, qui sont des nombres réels fournis par les indications des appareils de mesure ; l'espace des phases est donc une multiplicité à $2n$ dimensions. Quant à l'évolution, elle est régie par les équations de Hamilton, donc fatale.

Dans la théorie quantique, les notions d'observable, d'état et d'observation sont généralisées et subissent des modifications profondes. Un observable est désormais un opérateur assujéti à une algèbre spéciale ; s'il est unique, un état est un vecteur propre de cet opérateur ; tout résultat d'observation ne peut être qu'une valeur propre. Lorsqu'il y a un ensemble d'observables, il faudra, pour que l'observation puisse conduire à un résultat, qu'ils soient choisis de manière à être simultanément réduits à leurs axes par une même transformation ; ils définissent alors tous le même état, lequel est un point d'un espace de Hilbert. Les êtres auxquels on a affaire sont donc très différents des nombres réels de la théorie classique, et leur manipulation exige des précautions ; au surplus, leur interprétation est, pour l'instant, inconnue. Mais le point essentiel est que formellement le schéma directeur est toujours celui des équations de Hamilton (ou, après une transformation convenable, celui

* Directeur du Centre de Recherches Physiques du C. N. R. S., Marseille.



d'une équation d'onde du type de Schrödinger), l'évolution de la fonction d'onde est donc fatale. C'est au stade de l'interprétation des axiomes, (d'ailleurs discutée, mais ceci est hors de notre propos), qu'intervient la probabilité et l'indétermination. On admet en effet, dans une certaine école, que la mesure de l'observable Φ , peut donner le résultat arbitraire Φ' , avec une probabilité égale au carré du module du produit scalaire de Φ' par la fonction d'onde.

L'étude du système est donc ramenée à celle de la fonction d'onde, dont l'évolution est fatale, mais qui est liée aux résultats des observations par une relation probabiliste.

2° Considérons maintenant un système aléatoire caractérisé par la variable d'état $\hat{x}(t)$ qui suive un processus markovien homogène, c'est-à-dire tel que son évolution probable, à partir de l'époque t , ne dépende que de l'état observé en t et du temps écoulé depuis cet instant :

$$\text{Prob} \{ \hat{x}(t) = x \Rightarrow \hat{x}(t + \Delta t) < \xi \} = F(x, \xi; \Delta t).$$

On aperçoit immédiatement la parenté de cette catégorie de processus avec les systèmes dynamiques déterministes, où l'évolution exacte à toute époque $t + \Delta t$ ne dépend que de l'état observé à l'instant t .

Moyennant des hypothèses classiques de continuité et de monotonie sur la fonction de répartition F , on peut introduire les densités de probabilité de passage de l'état x à l'état ξ , définies par

$$F(x, \xi; \Delta t) = \int_{-\infty}^{\xi} p(x|u; \Delta t) du,$$

et l'on sait que p obéit à l'équation de Smoluchowski :

$$\forall \Delta t \geq 0; p(x|\xi; t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x|y; t) p(y|\xi; \Delta t) dy.$$

Enfin, des hypothèses supplémentaires de continuité conduisent à l'équation de Kolmogoroff en p considérée comme fonction de x et de t ,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(ap)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(bp)}{\partial x^2} = 0,$$

où

$$\begin{cases} a(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - x) p(x|\xi; \Delta t) d\xi, \\ b(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - x)^2 p(x|\xi; \Delta t) d\xi. \end{cases}$$

On a donc finalement affaire à une équation aux dérivées partielles en p , et l'évolution probable de x est ramenée à l'évolution fatale de p .

On voit que le caractère indéterminé du processus n'apparaît pas dans l'étude du système évolutif final, mais qu'il gît à un niveau plus profond, celui des hypothèses qui ont abouti à doter p d'un ensemble de propriétés. Il est bien difficile, dans un cas concret, de discuter de la légitimité de ces hypothèses, à moins de disposer de données statistiques très abondantes ; trop souvent, on cherche à intégrer l'équation déterministe de Kolmogoroff, au besoin de façon approchée, et l'on omet de justifier son substratum axiomatique.

Ce qui vient d'être montré sur deux exemples semble être vrai dans la plupart des cas traités en physique mathématique probabiliste. L'évolution d'un système indéterminé est ramenée à celle d'un système fatal, dont les variables d'état sont liées aux observables par des hypothèses plausibles certes, mais difficiles à vérifier, et qu'on omet même parfois d'expliciter. On peut alors se demander si ce qu'on gagne dans le détail des résultats, on ne le perd pas en partie dans l'incertitude sur l'adéquation du schéma adopté.

II. SYSTÈMES STRICTS ET SYSTÈMES AFFAIBLIS.

Certains systèmes incomplètement déterminés peuvent être abordés d'une autre façon, en se contentant de cerner l'ensemble des solutions possibles au lieu d'en rechercher de probables ou de sûres. Nous allons donner quelques indications sur les conclusions qu'on peut ainsi atteindre, en partant d'une axiomatique très faible ; on verra que des questions qualitatives très importantes peuvent recevoir une réponse utilisable.

Nous considérons des systèmes voisins, dans un certain sens, de systèmes fatals, voire dynamiques ; pour ne pas encombrer l'exposé de difficultés mathématiques non essentielles, nous partirons d'un système dynamique autonome décrit dans R^2 , mais le raisonnement s'étend sans difficulté à des espaces plus compliqués, pourvu qu'ils soient séparés et métriques.

Associons donc au « système strict »

$$dP/dt = F(P); P \in R^2, F \in C,$$

le « système affaibli »

$$\|dP/dt - F(P)\| < m,$$

où m est un nombre positif non nécessairement petit, et où la norme choisie est la distance euclidienne de deux points du plan. L'inégalité triangulaire donne

$$\|dP/dt\| < \|dP/dt - F\| + \|F\|,$$

de sorte qu'à l'intérieur du disque $\|F\| \leq m$, la vitesse d'évolution sera limitée à $2m$ en module, et aura un argument quelconque. Ainsi, au point de repos $\|F\| = 0$ du système strict, correspond un voisinage plus ou moins grand de ce point, à l'intérieur duquel l'affixe du système affaibli peut décrire n'importe quelle trajectoire, pourvu que ce soit à faible vitesse ; en particulier, des trajectoires fermées ou presque fermées sont possibles, d'ailleurs continues ou anguleuses, se recoupant ou non ; le système affaibli fera du bruit au voisinage de ce qui était pour le système strict du repos, mais ce bruit aura nécessairement une fréquence fondamentale assez basse si m est petit. Il va de soi qu'il sera aussi loisible à l'affixe de sortir du disque, toujours à vitesse modérée ; cette excursion sera sans conséquence si le point de repos était stable en régime



strict ; s'il était instable, le retour sera encore possible tant qu'un anneau de garde d'épaisseur m n'aura pas été franchi ; au delà, nous nous trouvons dans le cas qui va être examiné plus en détail.

Lorsque $\|F\| > m$, l'extrémité du vecteur vitesse dans le système affaibli devra se trouver dans le disque de rayon m ayant pour centre l'extrémité du vecteur vitesse du système strict ; on aura donc les limitations suivantes :

$$\|dP/dt\| \in [\|F\| - m, \|F\| + m] ;$$

$$\arg dP/dt \in [-\arcsin(m/\|F\|), +\arcsin(m/\|F\|)].$$

Des limitations semblables, mais où $\|F\|$ aura en général une valeur différente, s'appliqueront à la position $P(t + dt)$ de l'affixe, et ainsi de proche en proche. Superposons au réseau des trajectoires du système strict un double réseau de courbes les coupant sous les angles, fonctions de point, $\pm \arcsin(F/m)$, que l'on pourra appeler des « quasi-loxodromies » : en chaque point P , il passera deux de ces courbes, définissant deux régions opposées par le sommet et qu'on pourra nommer, par une association d'idées évidente, les deux demi-cônes de lumière orientés vers l'avenir et vers le passé, soit $C^+(P)$ et $C^-(P)$; la première région est le lieu de tous les affixes possibles dans l'avenir pour un système affaibli effectivement observé en P à l'instant présent ; la deuxième est le lieu de tous les affixes possibles dans le passé pour ce même système.

Contrairement à ce qui se passait pour le disque D , toute courbe tracée dans C n'est pas une trajectoire possible du système : en effet, l'inégalité qui le régit l'oblige, dans la région où nous nous trouvons, de descendre le flot du système strict, de sorte qu'on ne peut s'attendre à des crochets spectaculaires ; en revanche, le mouvement composant de vitesse inférieure à m pourra comporter des rotations et des retours pendulaires quelconques, et son effet sera en général de superposer au mouvement principal un bruit éventuellement aigu.

III. DESTIN FINAL D'UN SYSTÈME AFFAIBLI.

L'une des questions les plus importantes que l'on puisse se poser au sujet d'un système évolutif concerne son destin final (et éventuellement, lorsqu'il s'agit d'un système dynamique dont l'évolution est supposée indéfiniment prolongeable dans le passé, son destin pour $t = -\infty$). On sait que, pour les systèmes dynamiques, la considération des « ensembles-limites A et Ω » permet de partager l'espace de phase en cellules invariantes, à l'intérieur desquelles les deux ensembles limites sont les mêmes pour tous les mouvements, lesquels ne peuvent jamais quitter la cellule où ils ont pris naissance ; ces cellules sont limitées par des multiplicités séparatrices de dimension $n-1$, donc de dimension 1 dans le plan $n=2$; les séparatrices sont donc, dans le plan, des courbes et nécessairement des trajectoires, puisqu'aucun mouvement ne peut les tra-

verser ; de ces trajectoires, il peut y avoir deux espèces : celles qui passent par un col (et qui vont à un autre col ou à un point de repos à distance finie ou infinie) et les trajectoires fermées, qui sont des cycles limites et représentent des régimes périodiques atteints asymptotiquement par toutes les évolutions voisines.

Que devient ce tableau pour un système affaibli ? Les points de repos, on l'a vu, sont remplacés par des disques qui les estompent en quelque sorte ; dans le cas d'un col, les trajectoires non singulières du système strict ne passaient pas par le point de repos, mais toutes celles qui pénètrent dans le disque D peuvent correspondre à des mouvements affaiblis évoluant à leur gré dans D , donc y restant indéfiniment ou le quittant par n'importe lequel des quadrants. Il est bien évident qu'une séparatrice du système strict n'exerce sur ces mouvements aucune action prohibitive, et qu'elle peut être traversée, pourvu que la loi de limitation de vitesse soit observée. Les deux demi-séparatrices attractives sont donc entourées, pour le système affaibli, de zones effilées ou « moustaches » M , qui prolongent le disque D (Fig. 1). Nous sommes donc

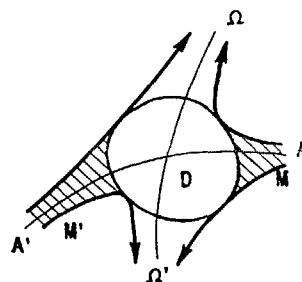


Fig. 1. — Disque entourant un col et moustaches.

en mesure de conclure aux destins possibles des mouvements affaiblis au voisinage d'un col du système strict ; s'ils ne pénètrent pas dans M , leurs ensembles limites restent respectivement, dans les quatre quadrants, A et Ω , A' et Ω , A' et Ω' , A et Ω' ; la liberté relative qui leur a été laissée n'a exercé aucun effet final. S'ils viennent de M , au contraire (ou de M'), trois états limites sont possibles : ou bien le mouvement s'enroule dans D , et le point de repos instable du système strict est remplacé par une petite zone de mouvements stables ; ou bien le mouvement suit son destin strict, par exemple tend vers Ω en venant de A , la traversée de D s'accompagnant éventuellement d'excursus aléatoires finalement sans effet ; ou bien enfin l'affixe en provenance de A tourne dans D , et ressort en direction de Ω' , c'est-à-dire en changeant complètement de destination. Cette dernière possibilité se présente pour des mouvements d'autant plus rares que m est petit, mais elle n'est jamais exclue si m n'est pas nul. Il n'est pas nécessaire de souligner que les lois des phénomènes naturels, même lorsqu'elles sont présentées sous forme stricte, restent entachées de quelque incertitude ; de sorte que l'existence d'un col pour un système strict suffit à jeter un

doute sur l'évolution des affixes qui en passent suffisamment près.

La situation précédente se complique encore lorsque la séparatrice issue d'un col aboutit à un autre col (Fig. 2) : les groupes des mouvements du

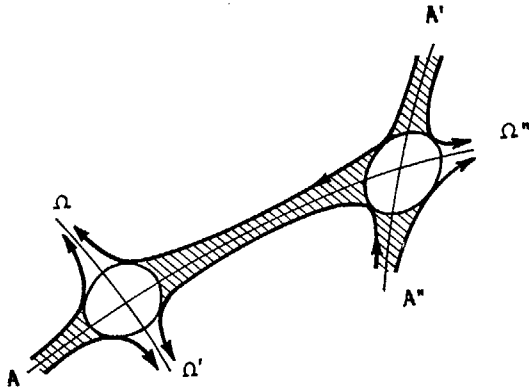


FIG. 2. — Cas d'une séparatrice allant de col à col.

système strict sont alors $A\Omega$, $A'\Omega$, $A'\Omega''$, $A''\Omega''$ et $A''\Omega'$; mais les mouvements affaiblis qui empruntent les moustaches peuvent également être des types nouveaux $A'\Omega'$ ou $A''\Omega$. Les deux cols peuvent se rapprocher indéfiniment sans que cette proposition soit en rien modifiée; de sorte qu'elle reste valable pour le cas d'un col d'ordre 2 (à trois moustaches), et plus généralement à un col d'ordre de multiplicité pair.

Examinons enfin le cas où la séparatrice est un cycle limite L ; l'une des cellules invariantes est alors intérieure à L , l'autre l'entoure; s'il s'agit d'un cycle simple (dont l'exposant caractéristique de Floquet n'est pas nul), les mouvements stricts tant extérieurs qu'intérieurs ont L pour ensemble limite Ω (cycle stable) ou A (cycle instable); L est entouré d'un anneau de garde d'épaisseur $2m$ où les mouvements du système affaibli peuvent évoluer avec une vitesse voisine de celle du régime périodique strict, en traversant au besoin le cycle: ces excursions sont sans importance si L est stable; au contraire, lorsque l'affixe du système affaibli traversera (comme il en a la facilité) un cycle instable, il pourra changer d'ensemble limite, et se diriger désormais vers Ω s'il vient de l'intérieur, ou vers Ω' s'il vient de l'extérieur, si faible que soit m .

Lorsqu'un deuxième cycle limite L' entoure L , on sait que leurs caractères de stabilité sont différents; les circonstances les plus intéressantes à signaler sont alors celles où $2m$ atteint la distance LL' : les deux anneaux de garde se touchent alors au moins en un point, et l'affixe du système affaibli pourra traverser toutes les régions du plan de phase de part en part, ce qui était évidemment interdit au mouvement strict. En particulier, ce cas se présentera lorsque les deux cycles, L , L' tendront l'un vers l'autre jusqu'à se confondre, c'est-à-dire lorsque le cycle unique sera d'ordre 2, ou plus généralement d'ordre $2p$; ce cas est caractérisé, du point de vue analytique, par l'annulation de l'exposant caractéristique de Floquet.

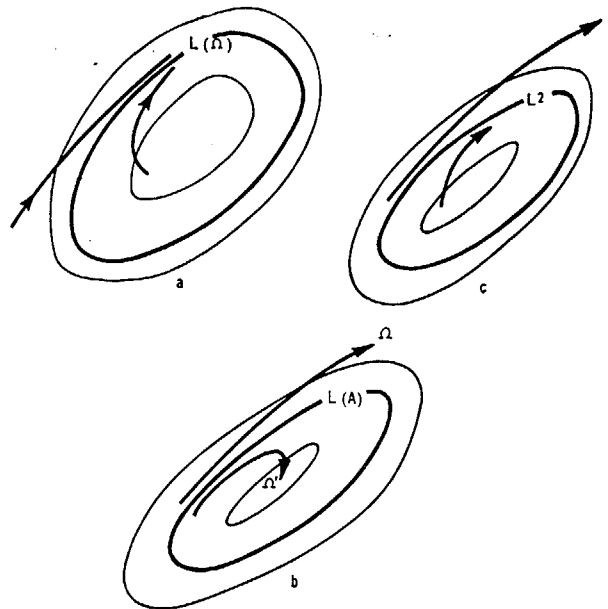


FIG. 3. — Cycles limites : a) stable d'ordre un, b) instable d'ordre un, c) semi-stable d'ordre deux.

IV. AFFAIBLISSEMENT ADVENTICE OU ESSENTIEL.

Reprenons le cas d'un système affaibli observé à l'instant t , où son état exact était représenté par le point P , non situé au voisinage d'un point de repos ou d'une séparatrice: ce qui adviendra du système dépend de la façon dont le demi-cône de lumière orienté vers l'avenir coupe les frontières de la cellule invariante qui contient P , et les disques D situés dans cette cellule, ainsi que leurs moustaches éventuelles.

Plusieurs possibilités doivent être envisagées, suivant les disques et les séparatrices ayant des points dans le cône de lumière de P :

a) en dehors de toute autre considération, si $C^+(P)$ contient un disque, le système affaibli pourra toujours, au lieu de suivre le destin du système strict, exécuter indéfiniment l'un des petits mouvements périodiques ou presque périodiques que nous avons décrits;

b) si $C^+(P)$ coupe une séparatrice telle que les mouvements stricts qui se déroulent de part et d'autre ont des ensembles limites A différents, mais même ensemble limite Ω , le destin du système affaibli sera le même que celui du système strict; ce sera le cas si la séparatrice va d'un col à l'infini, ou si elle est un cycle limite entièrement stable. Nous dirons alors que l'affaiblissement est adventice;

c) si la séparatrice coupée forme la frontière entre des mouvements stricts n'ayant pas même ensemble limite Ω , le système affaibli pourra avoir un destin radicalement différent de celui du système strict; tel sera le cas si la séparatrice va d'un col à un autre, ou a certaines singularités multiples, ou encore si elle est un cycle limite instable ou semi-stable;

d) si la séparatrice joint un point de repos stable



à un col simple, mais que $C^+(P)$ contienne des points du disque de ce col, le destin final du système affaibli pourra être différent de celui du système strict.

On voit que dans le cas *b*) l'indétermination du système affaibli n'empêche pas de prédire avec certitude son destin final.

Il est bien évident que pour un système strict donné, le cas où se trouve un système affaibli dépendra à la fois de la valeur de la borne m et de l'état P où l'observation effective aura été faite ; on pourra discuter en détail tout problème concret, et notamment rechercher les régions de l'espace de phase où se trouvent les états dont l'avenir ne peut être troublé par un affaiblissement m , voire par aucun affaiblissement.

V. INTERPRÉTATION ET EXTENSIONS POSSIBLES.

Pour conclure, revenons sur la signification du concept de système affaibli ; une interprétation possible est évidente, c'est celle qui considérera m comme une borne des erreurs d'observation sur la vitesse d'évolution ; la discussion à laquelle nous nous sommes livrés montre quels sont les systèmes stricts, c'est-à-dire quelles sont les lois d'évolution, qu'il n'est pas absurde d'adopter pour décrire des phénomènes observables avec telle ou telle précision.

On ne manquera pas de remarquer la parenté qui existe entre les considérations qui précèdent et la théorie des systèmes dynamiques « grossiers » ou « structurellement stables », définis par Andronov et Pontryagin. Cette espèce de stabilité est d'importance capitale pour qui essaie de mettre sur pied la théorie d'un phénomène observable, et il est étrange qu'elle ne soit pas mieux connue. Rappelons donc qu'un système

$$dP/dt = F(P, t),$$

est dit structurellement stable, s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout f satisfaisant à $\|f\| < \varepsilon$ les trajectoires du système troublé

$$dP/dt = F(P, t) + f(P, t)$$

puissent se déduire de celles du système originel au moyen d'un homéomorphisme où l'image d'un point reste dans le voisinage ε de l'original. Il est bien clair que dans ce cas les ensembles limites restent les mêmes, de sorte qu'un système structurellement stable peut être affaibli sans que son destin final soit modifié ; la réciproque n'est pas vraie, car un système à affaiblissement adventice peut fort bien exécuter, pour t fini, des excursions non négligeables. On vérifiera que les conditions

suffisantes pour qu'un système dynamique dans R^2 soit structurellement stable (théorème de De Baggis) sont essentiellement celles que nous avons obtenues plus haut pour que l'affaiblissement soit adventice.

On peut envisager la question des systèmes affaiblis d'un point de vue plus général que celui où nous nous sommes placés pour plus de simplicité : d'une part, supposons que (pour des raisons *a priori*, ou en vertu d'une première série d'expériences) on puisse définir, dans l'espace de phase, des fonctions de point qui minorent et majorent respectivement la vitesse d'évolution d'un système dont la loi est inconnue ; on pourra le considérer comme l'affaiblissement d'un système strict régi par une loi intermédiaire (par exemple la demi-somme du majorant et du minorant), avec le supremum de l'écart pour borne. Les considérations qui précèdent permettront alors d'énumérer les destins possibles du processus, pourtant mal connu, et même, si la loi stricte choisie remplit les conditions énoncées, de dire avec certitude vers quel ensemble limite il tend. D'autre part, il n'est pas nécessaire, pour que les considérations sur l'affaiblissement soient applicables, que le système strict soit dynamique, ni même que sa trajectoire possède une dérivée ; l'intégration par rapport au temps de la loi dynamique conduit à une relation fonctionnelle du type $P = GP$, et l'on pourra reprendre la théorie pour des systèmes régis par l'inégalité

$$\|P - GP\| \leq m.$$

Enfin, mentionnons en terminant la possibilité d'appliquer ici la notion d'« ensemble flou » due à Zadeh, en attribuant aux trajectoires possibles du système affaibli un nombre réel compris entre 0 et 1, dénotant son « degré d'appartenance » à la famille des évolutions possibles ; ce nombre pourra avoir la signification d'une probabilité, mais d'autres interprétations pourraient aussi se révéler fécondes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] VOGEL (Th.). Théorie des systèmes évolutifs. *Gauthier-Villars*, Paris, (1965), 172 p.
- [2] MYSKIS (A. D.), Théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles pour les cas non classiques, *C. R. école mathématique d'été*, Kanev (1963), pp. 60-79 (en russe).
- [3] VOGEL (Th.), Sur quelques types de systèmes évolutifs non dynamiques. in *Stability problems of solutions of differential equations*, (Problèmes de stabilité des solutions des équations différentielles). *Édition Oderisi*, Gubbio, Italie, (1966), pp. 251-293.
- [4] ZADEH (L. A.), Fuzzy sets. (Ensembles incomplètement déterminés). *Inform. and Control.*, U. S. A., (1965), 8, pp. 338-353.