



# SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE BRUITS SOUS-MARINS

par

Jean-Yves JOURDAIN \*

## I. INTRODUCTION.

La plupart des appareils de détection et plus généralement de traitement du signal sont conçus à partir de l'hypothèse que les signaux aléatoires traités suivent une loi normale. Cette hypothèse, qui se justifie bien *a priori* pour de nombreux phénomènes physiques, est simplificatrice dans le calcul et la réalisation de nombreux appareillages. Il nous a paru bon de vérifier la nature de certains bruits réels.

M. Boutheon, en 1965 au CEPHAG, avait fait une étude dans ce sens sur des bruits parasites sous-marins [1]. Les résultats de ses tests de normalité n'avaient pas été très encourageants. Il faut cependant considérer qu'il disposait d'enregistrements magnétiques de bruits, qui n'avaient pas la qualité de ceux que nous possédons aujourd'hui. Nous avons repris et continué l'étude qu'il avait entreprise.

## II. CONDITIONS EXPÉRIMENTALES.

Cette étude a été faite à partir de bruits parasites sous-marins enregistrés à bord d'un mobile immergé par un magnétophone LEACH MTR 1200 (Fig. 1.).

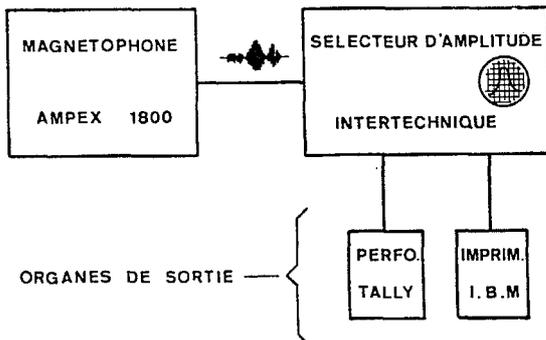


FIG. 1. — Chaîne de mesure et sortie des résultats.

Les enregistrements ont été réalisés à la vitesse de 155 cm/s (60 inches/s) en modulation de fréquence, bande passante 0 — 40 kHz. Le bruit enregistré a été filtré et régulé ; sa bande passante relative  $\Delta f/f = 0,1$  est assez faible.

Ces enregistrements sont lus par un AMPEX 1800 dans les mêmes conditions de vitesse et de mode.

Ils ont une durée moyenne de 1 minute et 30 secondes. En sortie de magnétophone, ils sont échantillonnés à une fréquence qui est toujours inférieure à 1000 Hz.

Les  $N$  impulsions obtenues peuvent-elles être considérées comme  $N$  réalisations indépendantes d'une même variable aléatoire ?

L'indépendance est assurée par la cadence très faible d'échantillonnage. Un tracé de la fonction de corrélation montre qu'elle peut être considérée comme nulle pour des retards supérieurs à 800  $\mu$ s. La question reste de savoir si l'hypothèse d'une loi normale constitue un modèle statistique valable ou s'il faut la rejeter. Le test de normalité le plus simple, quand il faut estimer des paramètres est celui du  $\chi^2$ . Cependant la sévérité de ce test est telle qu'avant de l'appliquer nous avons tracé la courbe des fréquences et la fonction de répartition des échantillons, afin d'en vérifier l'allure.

Le bruit échantillonné rentre dans un sélecteur d'amplitude dont le rôle est de classer dans le canal  $i$  les impulsions dont l'amplitude est comprise entre  $a_i$  et  $a_i + \Delta a$  soit  $a_{i+1}$ . Ce sélecteur visualise la courbe : nombre de « coups » (en ordonnée) en fonction du numéro du canal (en abscisse), c'est-à-dire, la courbe des fréquences de l'échantillon.

Soit  $n_i$  le nombre d'impulsions classées dans le canal  $i$ ,  $N$  est la somme des  $n_i$ .

Une estimation de la moyenne est :

$$m = \frac{i \sum n_i}{N}$$

Une estimation de la variance est :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (i - m)^2 n_i$$

## III. TRAITEMENTS STATISTIQUES [1] [2].

Les courbes de fréquence ont été tracées sur un papier semi-logarithmique, afin de les comparer facilement toutes au graphe de la loi normale  $N(0,1)$  qui apparaît comme une parabole. Pour ce, on a porté en abscisse la variable réduite  $\frac{i - m}{\sigma}$  et en ordonnée  $\frac{\sigma n_i}{N}$ . La figure 2 montre le tracé pour un échantillon ; on remarque que les points expérimentaux se placent très près de la parabole.

\* Ingénieur au Centre d'Étude des Phénomènes Aléatoires (GEPHAG), (associé au C. N. R. S.), Faculté des sciences, 46, avenue Félix-Viallet, 38 — Grenoble.

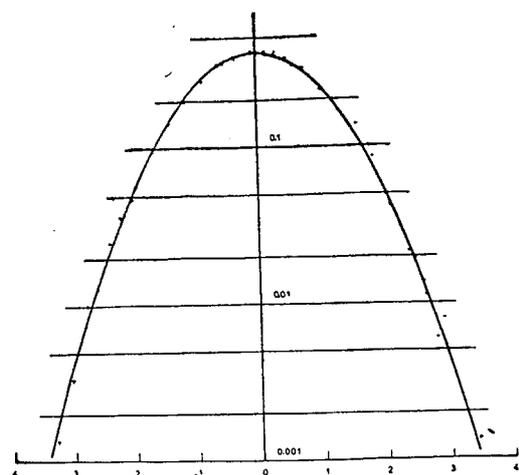


FIG. 2. — Échantillon P 11 A 4.  
Fonction : densité de probabilité, représentation parabolique.

La fonction de répartition a été tracée sous forme de droite de Henry, c'est-à-dire en échelle gauss-arithmétique. Nous avons pris la variable réduite et la fonction de répartition normée afin de comparer à la même droite théorique. La figure 3 en montre

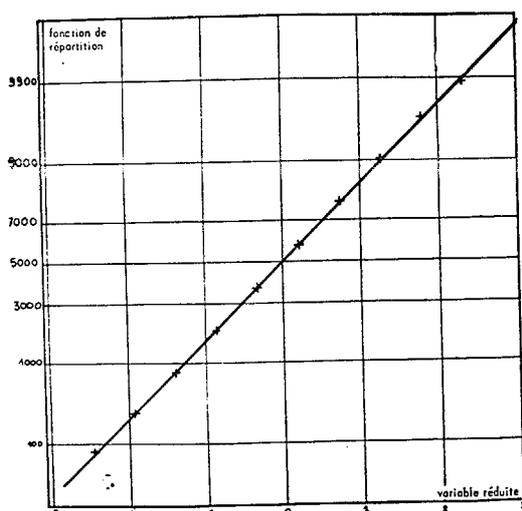


FIG. 3. — Échantillon P 9 A4. Droite de Henry.

un tracé : les points se placent sur la droite théorique. Ce test graphique n'est pas très sévère ; il est cependant très sensible aux mauvaises estimations de paramètres qui se traduisent par une translation ou une rotation (ou les deux) de la droite.

Ces résultats peuvent être considérés comme satisfaisants. Les mêmes tracés, effectués par M. Boutheon [1] pour le bruit électrique dans une résistance, qui est gaussien, avaient conduit à une dispersion autour des courbes théoriques à peine plus faible.

Pour avoir des résultats plus quantitatifs, il faut faire un test d'ajustement — test de l'hypothèse paramétrique : la loi suivie est une loi normale, contre l'hypothèse : la loi suivie n'est pas une loi normale. Ce test de normalité permet d'atteindre la probabilité de se tromper quand on rejette l'hypothèse d'une loi normale. Notre point de vue n'étant pas

d'accepter ou de rejeter la loi normale comme loi théorique, mais plutôt de voir dans quelle mesure elle est un modèle statistique satisfaisant, nous ne ferons pas les considérations habituelles de seuil. Ajoutons qu'il ne saurait être question de puissance de test, puisqu'il n'y a pas vraiment alternative.

Test du  $\chi^2$  [4,5].

La loi empirique de l'échantillon est à comparer à la loi normale  $N(m, \sigma)$ . Le test du  $\chi^2$  prend comme mesure de la déviation :

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^k \frac{(n_i - N \cdot p_i)^2}{N \cdot p_i}$$

où, après avoir partagé l'axe des amplitudes en  $k$  classes, nous notons :

$n_j$  : nombre de réalisations de l'échantillon appartenant à la classe  $j$ ,

$p_j$  : probabilité correspondante donnée par la loi  $N(m, \sigma)$ ,

$N$  : taille de l'échantillon.

Chaque terme de la somme représente sur une classe pondérée par  $N/p_j$  une distance entre les deux lois.

Quand  $N$  tend vers l'infini et sous l'hypothèse qu'aucun des  $p_j$  n'est nul,  $\chi^2$  est une variable aléatoire de loi asymptotique, la loi du  $\chi^2$  à  $k - 1 - p$  degré de liberté ( $p$  est le nombre de paramètres estimés) dont la densité est donnée par :

$$h_n(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \chi^{2(\frac{n}{2}-1)} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

$n$  : nombre de degré de liberté.

Il faut faire deux remarques pour le choix des classes.

— On ne teste pas exactement la loi  $N(m, \sigma)$  mais toute loi donnant les mêmes probabilités  $p_j$  :  $j \in (0, \dots, k)$ , d'où la nécessité de prendre un nombre pas trop restreint de classes.

— On utilise, pour obtenir la forme asymptotique de la loi suivie par  $\chi^2$ , la formule de Stirling et l'on doit respecter ses conditions d'utilisation ; en particulier, cela nous oblige à ce que chaque classe soit bien remplie.

Tous nos échantillons sont de taille supérieure à 10 000 et nous choisissons 5 ou 8 classes, les plus équiprobables possibles. Les valeurs de  $\chi^2$  trouvées, pour tous les échantillons étudiés, dans l'hypothèse gaussienne, ont une probabilité au moins égale à 0,5 d'être dépassées.

Nous donnons comme exemple, tableau I, l'appréciation du test à l'échantillon P<sub>11</sub>A<sub>4</sub> (cet échantillon a déjà été cité comme exemple plus haut pour la représentation de la densité de probabilité) :

— moyenne estimée : 76, 00 (l'unité étant un canal qui représente l'amplitude),

— écart type estimé : 18,365.

Les probabilités  $p_j$  ont été calculées à partir des tables de M. Boll.

Les calculs ont été programmés et effectués sur une calculatrice PIL 8-48. On trouve un  $\chi^2$  égal



TABLEAU I.

RÉSULTATS DE TEST DU  $\chi^2$  A L'ÉCHANTILLON  $P_{11} A_4$

$j$	0	1	2	3	4	5
$j$	0	61	72	81	92	200
$u_j$	-4,1383	-0,8168	-0,2178	0,2722	0,8712	6,752
$n_j$		5 735	5 706	5 366	5 545	5 299
$p_j$		0,2070038	0,2067710	0,1934734	0,2009118	0,1918233

à 0, 6020, ce qui permet de conclure que l'hypothèse gaussienne est dans ce cas très satisfaisante ; il y a en effet 76 % de chance pour la distribution d'un échantillon d'être plus « éloignée » de la distribution théorique qu'elle ne l'est dans cette réalisation particulière.

IV. STABILITÉ DE LA FONCTION DE CORRÉLATION.

Nous avons tracé la fonction de corrélation de ces bruits avec le corrélateur à quantification que C. Lardat [6] réalisa en 1966. Nous avons utilisé aussi le corrélateur en temps réel de J. Berthier, qui a l'avantage de visualiser la fonction de corrélation sur un écran oscilloscopique.

Nous avons estimé la fonction de corrélation d'abord sur la totalité de l'échantillon, puis en découpant celui-ci par section. La figure 4 montre la fonction de corrélation estimée sur trois parties différentes d'un même échantillon.

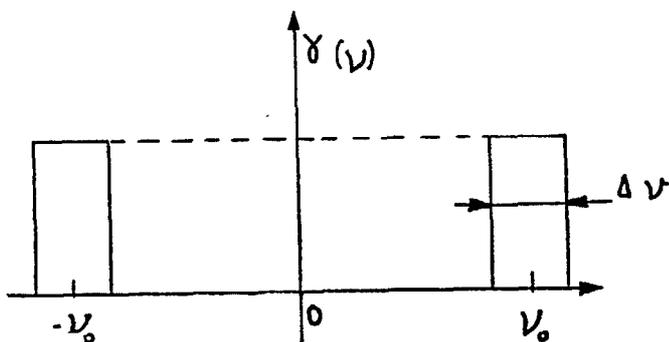


FIG. 4. — Densité spectrale énergétique d'un bruit blanc filtré comme modèle.

Considérons un bruit blanc filtré dans un filtre rectangulaire de bande passante  $\Delta\nu$  autour de  $\nu_0$ . Sa densité spectrale énergétique est  $\gamma(\nu)$  :

$$\gamma(\nu) = \nu_0 \quad \text{si } \nu \in \Delta_1 \cup \Delta_2,$$

$$\gamma(\nu) = 0 \quad \text{si non,}$$

avec

$$\Delta_1 : \left( -\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}, -\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2} \right),$$

$$\Delta_2 : \left( \nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}, \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2} \right).$$

Par transformation de Fourier, on atteint la fonction de corrélation :

$$\Gamma(\tau) = \int_{\Delta_1 \cup \Delta_2} e^{2\pi i\nu\tau} \gamma_0 \, d\nu ;$$

$$\Gamma(\tau) = \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} (e^{2\pi i\nu\tau} + e^{-2\pi i\nu\tau}) \gamma_0 \, d\nu,$$

soit :

$$(\Gamma\tau) = 2\gamma_0 \Delta\nu \frac{\sin \pi \Delta\nu \tau}{\pi \Delta\nu \tau} \cos 2\pi \nu_0 \tau.$$

La figure 5 montre une superposition de la fonction de corrélation de l'échantillon  $P_2$  et de la courbe théorique obtenue à partir de la formule ci-dessus.

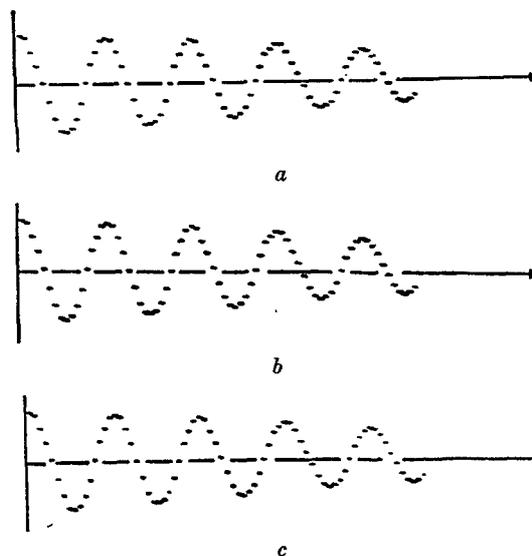


FIG. 5. — Fonction de corrélation normalisée. Échantillon  $P_2$ . a) estimée au début de  $P_2$ . b) estimée au milieu de  $P_2$ , c) estimée à la fin de  $P_2$ .

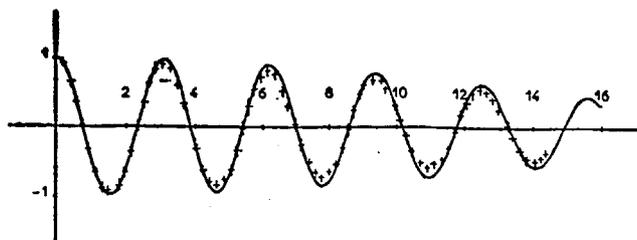


FIG. 6. — Fonction de corrélation. — Courbe théorique : bruit blanc filtré, ++ points expérimentaux.

### V. CONCLUSION.

Il semble que l'hypothèse gaussienne soit satisfaisante pour de nombreuses applications, ce qui justifie *a posteriori* la réalisation de quelques appareils de traitement du signal. L'effet de la régulation ne s'arrête pas à fixer l'écart type, mais stabilise la fonction de corrélation, du moins dans les conditions expérimentales étudiées pour lesquelles la fonction de corrélation a trait à un bruit à variance

régulée, filtré, à bande relativement étroite. Une étude théorique et expérimentale, qui fera l'objet d'un prochain article, se poursuit au CEPHAG dans ce sens.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOUTHEON (M.). Contribution à la détection directive de signaux faibles. Thèse soutenue à la *Faculté des Sciences de Grenoble* (1966).
- [2] BARRA (H.), Cours du C. E. S. de Statistique. *Université de Grenoble*.
- [3] KENDALL (M. G.), STUART. The advanced theory of Statistics. *C. Griffin and Co Ltd., London*.
- [4] MOURIER (E.), Conférence à l'Institut Polytechnique de Grenoble. *Rapport CEPHAG* (à paraître).
- [5] BOLL (M.). Tables numériques universelles. *Dunod, Paris* (1964).
- [6] LARDAT (C.). Étude et application de deux procédés d'estimation de la fonction d'intercorrélation de deux signaux. Thèse soutenue à la *Faculté des Sciences de Grenoble* (décembre 1966).