



ÉCRÊTAGE ET DIRECTIVITÉ

par

Anne-Marie FAUGERAS*

INTRODUCTION

L'écrtage est une opération extrêmement intéressante car elle permet d'utiliser les techniques digitales pour le traitement des signaux.

Nous savons que cette opération fait en général perdre très peu en rapport S/B , mais dans certains cas, elle provoque des inconvénients supplémentaires. M. le professeur Picinbono a étudié l'effet de l'écrtage sur la fonction de corrélation de deux signaux reçus par des antennes directives et montré les graves altérations qui en résultaient.

Nous vous proposons d'étudier l'influence de l'écrtage, avant formation de voies, sur le diagramme de directivité d'une base de réception linéaire et plus particulièrement en présence de plusieurs ondes.

I. RAPPEL DES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES DIAGRAMMES DE DIRECTIVITÉ.

L'existence d'ondes dans l'espace où est placée l'antenne provoque une loi d'illumination sur celle-ci. Dans le cas d'une antenne linéaire de longueur D recevant une onde de fréquence f dont le plan d'onde forme un angle α avec la base, cette loi est de la forme :

$$I(x) = A e^{j2\pi\left(fx + \frac{x \sin \alpha}{\lambda}\right)} \text{ entre } x = -D/2 \text{ et } x = D/2,$$

λ étant la longueur d'onde.

Le diagramme de directivité de la base est la transformée de Fourier de cette loi, soit en posant $x/\lambda = \tau$:

$$D(F) = A e^{j2\pi f \tau} \int_{-D/2\lambda}^{+D/2\lambda} e^{j2\pi(\tau \sin \alpha - \tau F)} d\tau.$$

C'est une courbe en $\frac{\sin u}{u}$, centrée sur $\sin \alpha$ de largeur $\Delta(F) = \frac{2\lambda}{D}$ entre les deux premiers minima.

Pour étudier les caractéristiques générales de cette directivité nous proposons d'assimiler la loi d'illumination $I(\tau)$ à une fonction du temps τ : le diagramme de directivité est alors le spectre d'amplitude de cette fonction, la direction θ étant liée à la fréquence par la relation

$$F = \sin \theta.$$

Les fréquences extrêmes utilisables sont -1 et $+1$ qui correspondent aux directions $-\pi/2$ et $+\pi/2$.

Si nous remplaçons la base uniforme par des éléments omnidirectionnels équidistants, ceci revient à échantillonner le signal $I(\tau)$ à la fréquence : $f = \lambda/d$, d étant la distance entre éléments ; le spectre du signal est alors la figure précédente translatée des fréquences $K(\lambda/d)$, K étant un entier quelconque nul, positif ou négatif.

On appelle habituellement les lobes de directivité qui apparaissent ainsi, des lobes images.

Application au diagramme de directivité sur bruit.

Nous pouvons appliquer cette propriété pour trouver le diagramme de directivité sur bruit, si l'onde reçue est un bruit blanc dont les fréquences extrêmes sont f_1 et f_2 et dont le plan d'onde fait un angle α avec la base. Nous obtenons un lobe principal en $\sin \alpha$ et des lobes images multiples placés entre

$$\sin \alpha + K(\lambda_1/d) \text{ et } \sin \alpha + K(\lambda_2/d).$$

Leur amplitude A_i est telle que :

$$\int A^2 df = \int A_i^2 dF.$$

La largeur équivalente du lobe principal est approximativement :

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2D}.$$

* Ingénieur à la société ALCATEL (Paris).

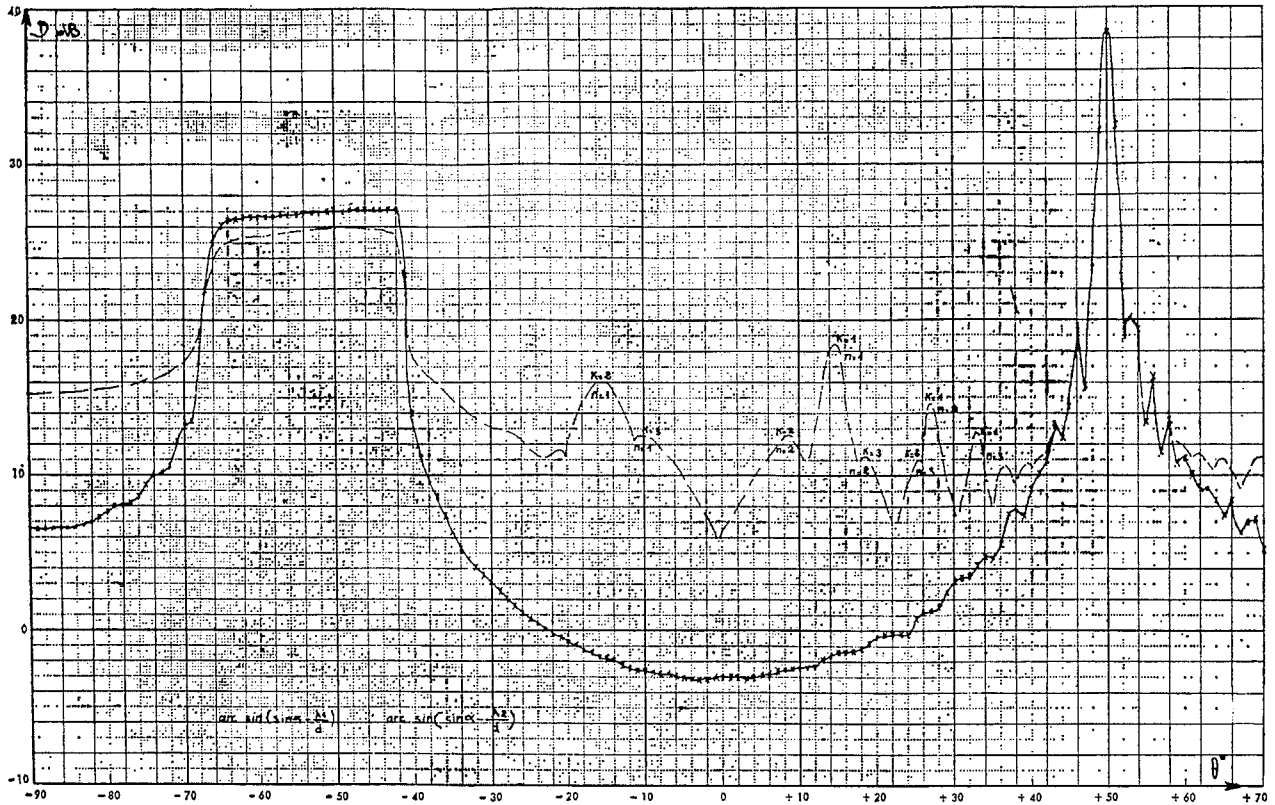


FIG. 1. — Directivité d'une base de 84 éléments en bruit ($d = 8,1$ cm ; $F = 12$ kHz ; $2\Delta f = 2$ kHz).

La largeur du lobe image est :

$$K \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{d}$$

et $D/d = 86$, le rapport entre A_i et A est de 11,6 dB (Fig. 1).

Le rapport des amplitudes est donc :

$$\frac{A_i}{A} = \sqrt{\frac{d}{D} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2K(\lambda_1 - \lambda_2)}}$$

Ces lobes n'existent que si $\sin \alpha + K(\lambda_2/d) < 1$, ou si $\sin \alpha - K(\lambda_2/d) < 1$.

Exemple : pour

$$f_1 = 11 \text{ kHz}, \quad f_2 = 13 \text{ kHz},$$

$$\lambda_1 = 13,6 \text{ cm}, \quad \lambda_2 = 11,5 \text{ cm dans l'eau de mer},$$

$$d = 8,1 \text{ cm}, \quad K = 1.$$

II. INFLUENCE DE L'ÉCRÊTAGE EN PRÉSENCE D'UNE SEULE ONDE.

Si nous écrêtons les signaux reçus par la base, la loi d'illumination devient :

$$I(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \exp [j2\pi (2n+1) [jt + \tau \sin \alpha]].$$

Après échantillonnage, le spectre présente des maximums en

$$\sin \alpha + \frac{K\lambda}{(2n+1)d}$$

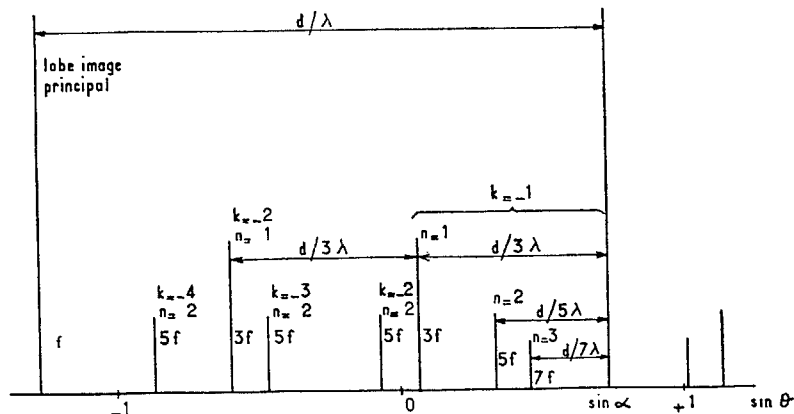


FIG. 2. — Répartition des lobes images d'une base formée d'éléments séparés par d après écrêtage en présence d'une seule onde.

sachant que les lobes images correspondent à des signaux de fréquence $(2n + 1)f$, que leur amplitude relative est $1/(2n + 1)$ et leur largeur $2\lambda/(2n + 1)D$.

Ces lobes apparaissent dans la zone utile, même si $d/\lambda < 1/2$ (Fig. 2).

Si le signal reçu est un bruit blanc de fréquence comprise entre f_1 et f_2 , après écrêtage et échantillonnage, on obtient :

— le lobe principal en $\sin \alpha$,

— les lobes images entre $\sin \alpha + K \frac{\lambda_1}{(2n + 1)d}$ et $\sin \alpha + K \frac{\lambda_2}{(2n + 1)d}$.

Nous retrouvons ces lobes sur la figure 1.

Si l'on filtre les signaux après écrêtage de façon à éliminer les harmoniques (ce qui impose une largeur de bande limitée sur bruit) les lobes parasites sur les fréquences harmoniques disparaissent et le diagramme de directivité n'est pas modifié par l'écrêtage. Dans tout ce qui suit, nous supposons que l'on filtre après écrêtage.

III. INFLUENCE DE L'ÉCRÊTAGE SUIVI DU FILTRAGE EN PRÉSENCE DE DEUX ONDES DE MEME FRÉQUENCE.

Si nous recevons simultanément deux ondes de même fréquence f et d'amplitudes A_1 et A_2 , telles que leur déphasage pour $\tau = 0$ soit φ , si α_1 et α_2 sont les angles entre leurs plans d'onde et la base, la loi d'illumination d'antenne est :

$$I(\tau) = e^{j2\pi f\tau} [A_1 e^{j2\pi \tau \sin \alpha_1} + A_2 e^{j2\pi \tau \sin \alpha_2 + \varphi}].$$

Étudions le cas simple où $A_1 = A_2 = 1$. Nous pouvons écrire $I(\tau)$ sous la forme :

$$I(\tau) = \cos \left[2\pi \tau \frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right] \times \exp \left[j2\pi \left(f\tau + \tau \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{2} \right) + j \frac{\varphi}{2} \right].$$

Après écrêtage et filtrage, on obtient :

$$I(\tau) = \exp \left[j2\pi \left(f\tau + \tau \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{2} \right) + j \frac{\varphi}{2} \right] \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} \cos(2n+1) \left[2\pi \tau \frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}{2} - j \frac{\varphi}{2} \right] \\ = e^{j2\pi f\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \times \\ \left[\exp \{ j2\pi \tau [\sin \alpha_1 - n(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)] - jn\varphi \} + \exp \{ j2\pi \tau (\sin \alpha_2 + n(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + jn\varphi) \} \right];$$

le spectre de ce signal se compose de lobes (Fig. 3)

en

$$\sin \alpha_1 - n(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + K\lambda/d$$

et

$$\sin \alpha_2 + n(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + K\lambda/d,$$

avec comme amplitude $2/(2n + 1)\pi$;

le déphasage φ n'intervient pas sur l'amplitude des lobes.

Remarquons que si 1 est l'amplitude du lobe principal sur une seule onde, l'amplitude de chacun des lobes, lorsqu'il y en a deux, est $\frac{2}{\pi}$, soit une perte d'environ 4 dB.

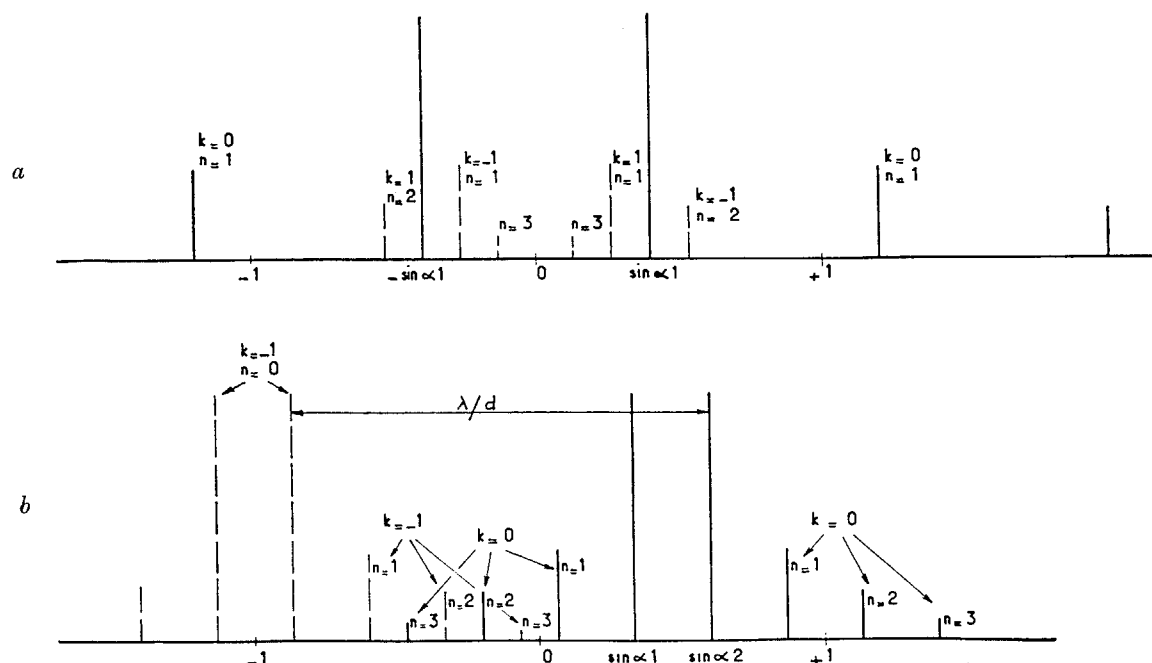


FIG. 3. — Répartition des lobes images d'une base formée d'éléments séparés par d après écrêtage.
a) en présence de deux ondes de direction α_1 , $-\alpha_1$;
b) en présence des deux ondes de direction α_1 , α_2 .



Un cas simple est celui où $\alpha_1 = -\alpha_2$, (Fig. 3a). Dans ce cas, on retrouve directement le spectre d'une sinusoïde écrêtée, de fréquence $\sin \alpha_1$, soient des lobes en :

$$\begin{aligned} &\pm \sin \alpha_1, \quad \text{d'amplitude } 2/\pi, \\ &\pm 3 \sin \alpha_1, \quad \text{d'amplitude } 2/3\pi \text{ etc....} \end{aligned}$$

Dans le cas général où les amplitudes ne sont pas égales, l'expression de la loi d'illumination après écrêtage est :

$$\frac{A_1 e^{j2\pi\tau\sin\alpha_1} + A_2 e^{j[2\pi\tau\sin\alpha_2 + \varphi]}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos [2\pi\tau(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + \varphi]}}.$$

si $A_1 \neq A_2$.

En développant en série, cette expression peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} &[A_1 e^{j2\pi\tau\sin\alpha_1} + A_2 e^{j(2\pi\tau\sin\alpha_2 + \varphi)}] \times \\ &[C_0 - C_1 \cos [2\pi\tau(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + \varphi] + \\ &C_2 \cos 2[2\pi\tau(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) + \varphi] - \dots], \end{aligned}$$

les termes en C_0, C_1 etc. sont décroissants. Le produit fait apparaître des termes en $\sin \alpha_1$ avec

comme amplitude $A_1 C_0 - (A_2 C_1/2)$, $\sin \alpha_2$ avec comme amplitude $(A_2 C_0 - [A_1 C_1/2]) e^{j\varphi}$, en $\sin \alpha_1 - n (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$ et $\sin \alpha_2 + n (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$, ainsi que tous les termes obtenus par translation de $K \lambda/d$.

Les amplitudes de chacun des termes sont fonction de A_1 et de A_2 et le plus faible est plus perturbé que le plus fort. La phase φ n'intervient pas dans le phénomène.

La variation de l'amplitude des composantes en $\sin \alpha_1$ et $\sin \alpha_2$ en fonction du rapport A_2/A_1 a l'allure indiquée figure 4.

Si $A_1 = A_2$, nous retrouvons $2/\pi$; lorsque A_2/A_1 diminue, l'amplitude de $\sin \alpha_1$ augmente et tend vers 1, celle de $\sin \alpha_2$ diminue de façon que leur rapport devienne inférieur à A_2/A_1 ; il tend vers $1/2 (A_2/A_1)$.

Nous avons représenté, en pointillé, l'amplitude qu'aurait la composante en $\sin \alpha_2$ si la composante en $\sin \alpha_1$ avait la valeur indiquée et qu'on n'ait pas écrêté. Nous retrouvons le phénomène du masquage du signal le plus faible par le plus fort, mais la perte sur l'amplitude ne peut dépasser le rapport 2.

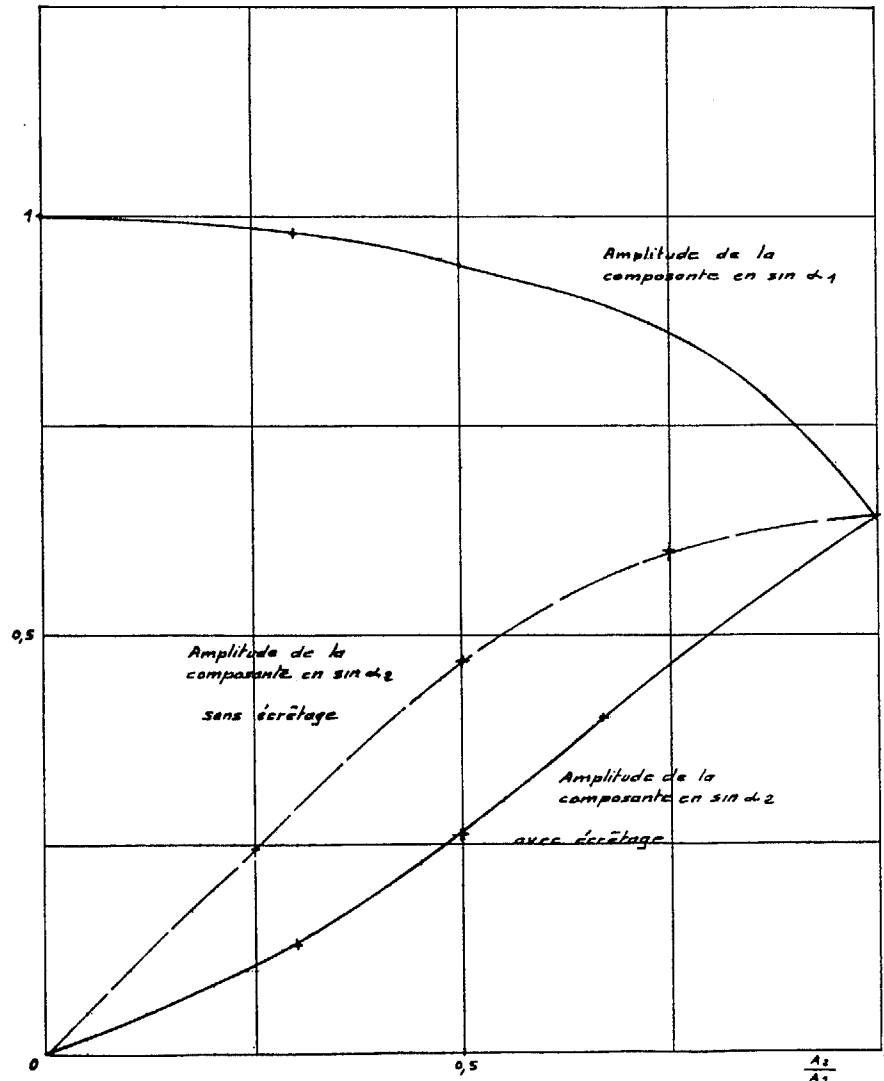


FIG. 4. — Variation de l'amplitude des composantes en $\sin \alpha_1$ et $\sin \alpha_2$, en fonction des rapports A_2/A_1 .



on peut écrire :

IV. INFLUENCE DE L'ÉCRÊTAGE SUIVI DU FILTRAGE EN PRÉSENCE DE PLUS DE DEUX ONDES DE MÊME FRÉQUENCE.

Lorsqu'il y a plus de deux ondes de même fréquence, les phénomènes restent les mêmes : l'amplitude de chacune des composantes est fonction des valeurs de A_1, A_2 etc.

En posant $\Omega_n = 2\tau \sin \alpha_n$, la loi d'illumination après écrêtage peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\sum_{n=1}^P A_n e^{j\Omega_n \tau + \varphi_n}}{\sqrt{\sum_{n=1}^P A_n^2 + \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P A_i A_j \cos[(\Omega_i - \Omega_j)\tau + \varphi_i - \varphi_j]}}$$

avec $i \neq j$;

si :

$$\sum_i \sum_j A_i A_j \cos[(\Omega_i - \Omega_j)\tau + \varphi_i - \varphi_j] < \sum_P A_P^2,$$

$$\left[\sum_P A_P \exp(j\Omega_P \tau + \varphi_P) \right] \left[C_0 + \sum_i \sum_j C_{1ij} \cos[(\Omega_i - \Omega_j)\tau + \varphi_i - \varphi_j] + \sum_i \sum_j C_{2ij} \cos 2[(\Omega_i - \Omega_j)\tau + \varphi_i - \varphi_j] + \dots \right]$$

Étudions l'amplitude du terme en $\sin \alpha_1$. Elle est égale à :

$$C_0 A_1 + \sum_j \frac{C_{1ij} A_j}{2},$$

de phase φ_1 provenant du produit $e^{j\Omega_1 \tau + \varphi_1} \times \cos[(\Omega_1 - \Omega_j)\tau + \varphi_1 - \varphi_j]$, mais dans le cas où

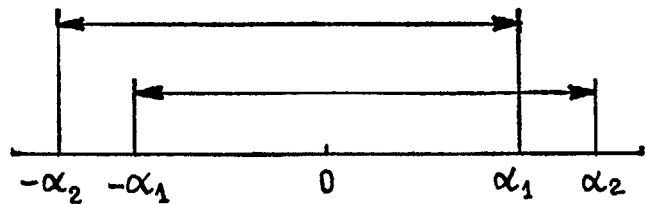


FIG. 5. Cas de quatre ondes.

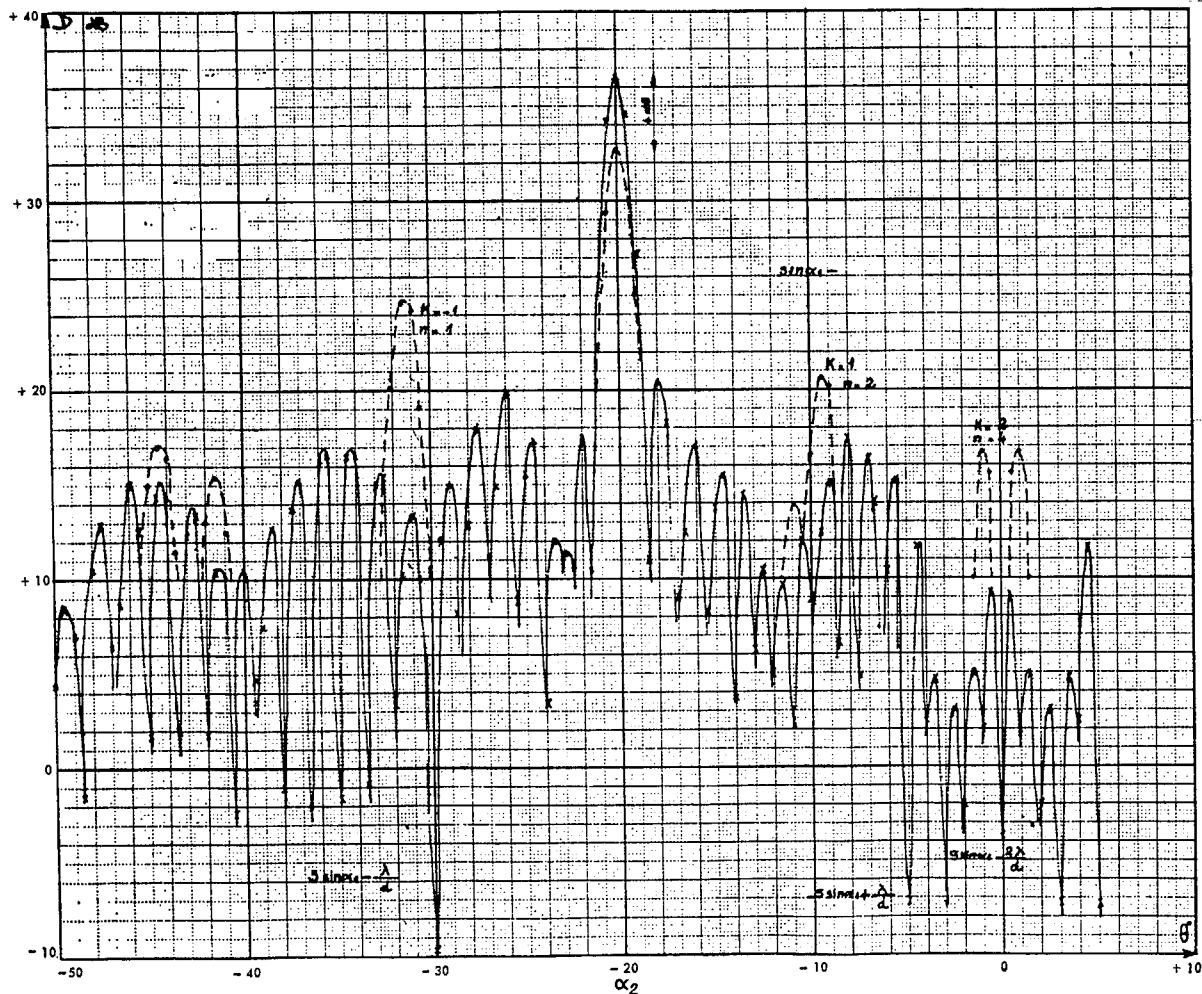


FIG. 6. — Représentation des calculs effectués pour la base dont la distance entre éléments est 8,1 cm, le nombre d'éléments étant 84 ; cas où : $\alpha_1 = +20^\circ$; $\alpha_2 = -20^\circ$; fréquence 12 kHz ; $\frac{d}{\lambda} = 0,65$.

$\Omega_K - \Omega_e = \Omega_1 - \Omega_j$, il se superpose une composante en $A_j C_{1K_e}$, de phase $\varphi_e - (\varphi_K - \varphi_e)$ et la phase relative des signaux joue sur l'amplitude.

Exemple.

Considérons le cas de quatre ondes dont les plans d'ondes font les angles $\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1$ et $-\alpha_2$ avec la base (fig. 5).

Examinons l'amplitude de la composante en $\sin \alpha_1$. Elle se compose d'un terme fonction de A_1, A_2, A_3 et A_4 et de phase φ_1 , mais il s'y superpose, à cause des égalités entre

$\sin \alpha_1 - \sin (-\alpha_2)$ et $\sin \alpha_2 - (-\sin \alpha_1)$ d'une part,

$\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2$ et $\sin (-\alpha_2) - \sin (-\alpha_1)$ d'autre part,

des termes de phase

$$\varphi_4 - (\varphi_2 - \varphi_3) \text{ et } \varphi_2 - (\varphi_3 - \varphi_4).$$

L'amplitude des composantes, dans ce cas, est fonction de la phase relative des signaux et la variation est d'autant plus importante sur la plus faible que le rapport des amplitudes est élevé.

V. APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

Nous avons fait des calculs complets pour la base suivante :

— distance entre éléments : 8,1 cm,

— nombre d'éléments : 84,

dans différents cas ainsi que le montrent les figures 6, 7, 8.

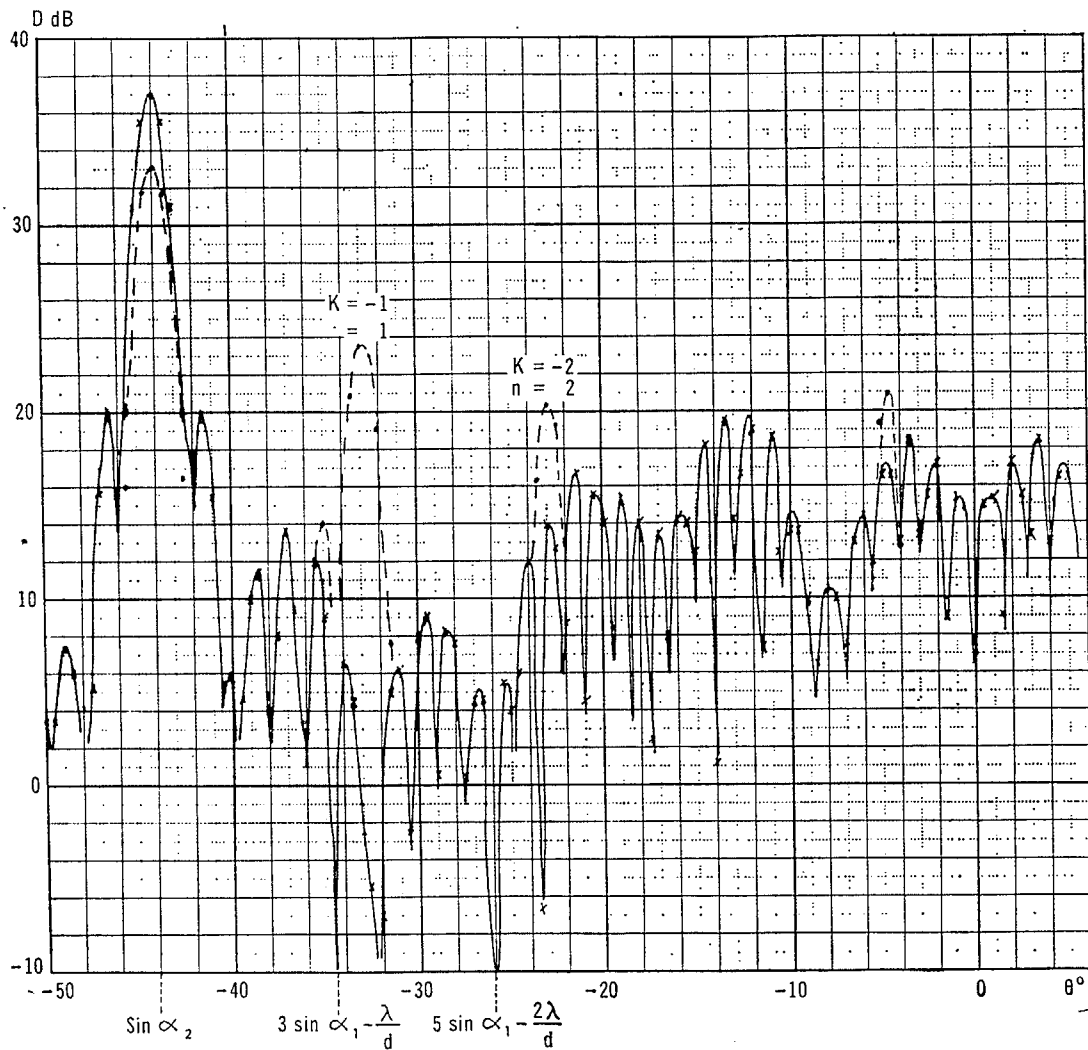


FIG. 7. — Cas où : $\alpha_1 = +44^\circ$; $\alpha_2 = -44^\circ$; fréquence 12 kHz; amplitudes égales. Sans écrêtage —x—x avec écrêtage et filtrage o — — o.

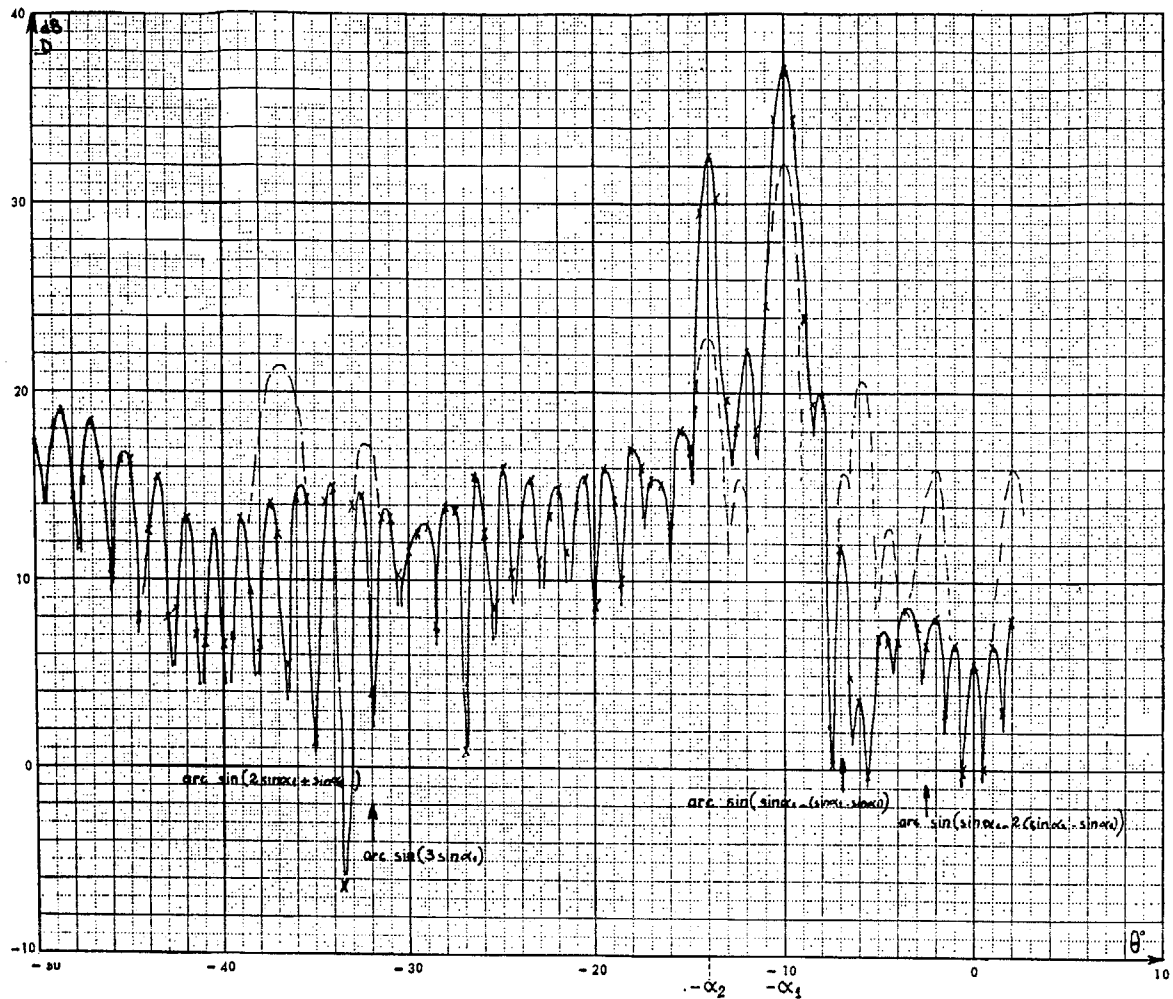


FIG. 8. — Cas où : $\alpha_1 = +10^\circ$; $\alpha_2 = +14^\circ$; $\alpha_3 = -10^\circ$; $\alpha_4 = -14^\circ$; $A_1 = A_3$; $A_2 = A_4$; $\frac{A_1}{A_2} = 1,8$; fréquence 12 kHz
 Sans écrêtage $\times - \times$; avec écrêtage et filtrage — — —.

CONCLUSION

Les conséquences de l'écrêtage sur le diagramme de directivité sont les suivantes :

— apparition de lobes parasites sur des fréquences harmoniques. Une solution simple réside dans le filtrage des signaux après écrêtage. Ce filtrage est aussi efficace sur bruit que sur des signaux sinusoïdaux,

— apparition de lobes parasites lorsqu'il y a présence simultanée de deux ondes de même fréquence. Ces lobes ne peuvent être filtrés car ils sont à cette même fréquence,

— masquage de l'onde la plus faible par la plus forte : le rapport d'amplitude entre les deux ondes est perturbé par l'écrêtage. De plus, dans certains cas particuliers, l'amplitude dépend des phases relatives.

Il paraît donc nécessaire de prendre des précautions avant d'écrêter.