



# RÉFLEXION SOUS-MARINE SUR UN FOND ALÉATOIRE

par

Daniel RAUCH \*

## I. PRÉLIMINAIRES [1].

Nous allons tout d'abord donner une solution d'un problème de probabilité qui nous sera utile dans la suite.

Etant donné une courbe aléatoire  $\xi(x)$ , quelle est la probabilité pour que  $\xi(x)$  prenne une valeur constante  $\theta$  dans l'intervalle  $(x_1, x_1 + dx)$  (Fig. 1), où  $x_1$  est une valeur fixée de  $x$  ?

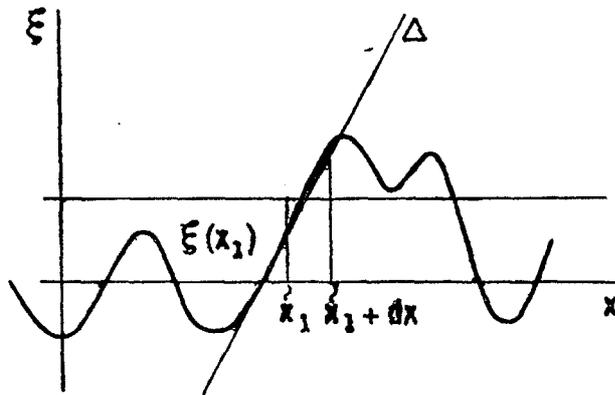


FIG. 1. — Courbe aléatoire  $\xi(x)$ .

On définit une courbe aléatoire par :

$$y = F(a_1, a_2, \dots, a_n; x),$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des variables aléatoires indépendantes ou non et où  $x$  est un paramètre de position.

Soit  $\xi(x) = F(a_1, a_2, \dots, a_n; x)$  une réalisation d'un tel processus aléatoire (continu); la probabilité pour que  $\xi(x)$  passe par la valeur  $\theta$  dans l'intervalle  $(x_1, x_1 + dx)$ , est égale à :

$$dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| p(\theta, \eta, x_1) d\eta,$$

où  $p(\xi, \eta, x_1)$  est la densité de probabilité au point  $x_1$  des variables aléatoires  $\xi, \eta$  :

$$\xi = F(a_1, a_2, \dots, a_n; x_1), \\ \eta = \left[ \frac{\partial F(a_1, a_2, \dots, a_n; x)}{\partial x} \right]_{x=x_1}.$$

On peut choisir en première approximation,  $dx$  suffisamment petit pour que la courbe soit assimilable à une droite. Son équation est :

$$y = (x - x_1) \eta(x_1) + \xi(x_1);$$

l'intersection avec la droite  $y = \theta$  a lieu pour :

$$x = \frac{\theta - \xi(x_1)}{\eta(x_1)} + x_1,$$

et par suite pour que  $x \in (x_1, x_1 + dx)$ , on doit avoir :

$$0 < \frac{\theta - \xi(x_1)}{\eta(x_1)} < dx;$$

si  $\xi(x_1) \leq \theta$  on a alors :  $\eta(x_1) \geq 0$ ,

$$\theta > \xi(x_1) > \theta - dx \eta(x_1).$$

La probabilité d'avoir un point d'intersection dans l'intervalle  $(x_1, x_1 + dx)$ ,  $\xi(x_1)$  étant inférieur à  $\theta$ , est égale à :

$$\int_0^{\infty} d\eta \int_{\theta - dx\eta}^{\theta} p(\xi, \eta, x_1) d\xi,$$

en seconde approximation, en supposant que :

$$p(\xi, \eta, x_1) \approx p(\theta, \eta, x_1),$$

l'intégrale est égale à :

$$dx \int_0^{\infty} |\eta| p(\theta, \eta, x_1) d\eta.$$

De même, si  $\xi(x_1)$  est supérieure à  $\theta$ , on a alors :

$$\eta(x_1) < 0, \quad \theta - dx\eta(x_1) > \xi(x_1) > \theta,$$

et la probabilité d'avoir un point d'intersection dans l'intervalle,  $\xi(x_1)$  étant supérieure à  $\theta$ , est égale à :

$$\int_{-\infty}^0 d\eta \int_{\theta}^{\theta - dx\eta} p(\xi, \eta, x_1) d\xi \approx \\ dx \int_{-\infty}^0 |\eta| p(\theta, \eta, x_1) d\eta.$$

La probabilité cherchée est la somme des deux soit :

$$dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta| p(\theta, \eta, x_1) d\eta.$$

## II. CALCUL DU NOMBRE ESCOMPTÉ DE RAYONS ATTEIGNANT LE RÉCEPTEUR [2].

a) Géométrie du système utilisé : cas de deux dimensions (Fig. 2).

Posons :

E : émetteur, coordonnées  $(0, b_e)$  ;

R : récepteur, coordonnées  $(a_r, b_r)$  ;

M : point de réflexion sur le fond.

\* Université de Clermont-Ferrand.

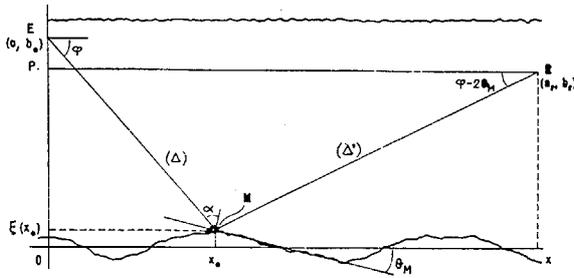


FIG. 2. — Géométrie du système : cas de 2 dimensions.

Soit  $\theta_M$ , l'angle de la tangente au processus en  $M$ , avec  $Ox$  ; pour que le rayon réfléchi passe par  $R$ ,  $\theta_M$  doit vérifier la relation :

$$\theta_M = \frac{1}{2} \left[ \varphi - \operatorname{arctg} \left( \frac{\xi(x_0) - b_r}{x_0 - a_r} \right) \right];$$

en effet :

$$\widehat{PRM} = \pi - \varphi - 2\alpha = \pi - \varphi - 2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi + \theta_M \right) = \varphi - 2\theta_M.$$

L'équation de la droite  $\Delta'$  passant par  $M$ , est donc :

$$\frac{y - b_r}{x - a_r} = \operatorname{tg} (\varphi - 2\theta_M).$$

Comme

$$\operatorname{tg} (\varphi - 2\theta_M) = \frac{\xi(x_0) - b_r}{x_0 - a_r},$$

on a 
$$\theta_M = \frac{1}{2} \left[ \varphi - \operatorname{arctg} \left( \frac{\xi(x_0) - b_r}{x_0 - a_r} \right) \right].$$

On travaille en eau profonde, dans les conditions suivantes :

$$\xi(x_0) \ll b_r, \quad \xi(x_0) \ll b_e, \quad \forall x_0;$$

et on considère un fond à pente douce, c'est-à-dire :

$$\left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]_{x=x_0} = \eta(x_0) = \operatorname{tg} \theta_M \approx \theta_M, \quad \forall x_0,$$

la probabilité d'avoir un rayon dans l'intervalle  $(x_0, x_0 + dx)$ , est égale à la probabilité, qu'il existe, que  $x \in (x_0, x_0 + dx)$ , tel que  $\theta = \theta_M$ .

$\xi(x_0)$  peut être considéré comme nulle. On est donc ramené au problème précédent portant sur les variables aléatoires  $\eta$  et  $\rho$  :

$$\eta = \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]_{x=x_0}, \quad \rho = \left[ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right]_{x=x_0},$$

et par suite, cette probabilité est égale à :

$$dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho| p(\theta_M, \rho, x_0) d\rho;$$

le nombre escompté de rayons atteignant le récepteur par réflexion, dans l'intervalle  $(x_1, x_2)$ , est :

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho| p(\theta_M, \rho, x) d\rho.$$

**b) Application à un processus gaussien stationnaire centré.**

Si le fond est une réalisation d'un processus aléatoire gaussien, alors la densité de probabilité  $p(\eta, \rho, x_0)$  est une densité gaussienne.

On trouve :

$$p(\eta, \rho, x_0) = \frac{1}{2\pi[-\psi''(0)\psi^{(4)}(0)]^{1/2}} \times \exp \left[ \frac{\eta^2}{2\psi''(0)} - \frac{\rho^2}{2\psi^{(4)}(0)} \right],$$

où  $\psi$  est la fonction de corrélation du processus ergodique ; en effet :

$$p(\eta, \rho, x_0) = \frac{1}{2\pi|M|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} X' M^{-1} X \right],$$

où

$$X = \begin{pmatrix} \eta \\ \rho \end{pmatrix}; \quad X' = (\eta, \rho),$$

et

$$M = \begin{pmatrix} \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\psi_\eta(\tau) = E \{ \eta(x_0) \eta(x_0 + \tau) \} =$$

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi'(x_0) \xi'(x_0 + \tau) dx_0 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ [\xi'(x_0 + \tau) \xi(x_0)]_0^T - \int_0^T \xi''(x_0 + \tau) \xi(x_0) dx_0 \right] \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(x_0 + \tau) \xi(x_0) dx_0 = \\ & \quad -\psi''(\tau); \end{aligned}$$

$$\mu_{22} = \psi_\eta(0) = -\psi''(0).$$

De la même manière, on montre que :

$$\mu_{32} = \mu_{23} = 0, \quad \mu_{33} = \psi^{(4)}(0),$$

$$M = \begin{pmatrix} -\psi''(0) & 0 \\ 0 & \psi^{(4)}(0) \end{pmatrix},$$

$$|M| = -\psi''(0) \cdot \psi^{(4)}(0),$$

et la probabilité cherchée est :

$$p(\eta, \rho, x_0) = \frac{1}{2\pi[-\psi''(0)\psi^{(4)}(0)]^{1/2}} \times \exp \left[ \frac{\eta^2}{2\psi''(0)} - \frac{\rho^2}{2\psi^{(4)}(0)} \right].$$

Dans l'intervalle  $(x_1, x_1 + dx)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{2\pi[-\psi''(0)\psi^{(4)}(0)]^{1/2}} \exp \left[ \frac{\theta_M^2}{2\psi''(0)} \right] \times \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho| \exp \left[ -\frac{\rho^2}{2\psi^{(4)}(0)} \right] d\rho \\ &= \frac{dx}{\pi} \left[ -\frac{\psi^{(4)}(0)}{\psi''(0)} \right]^{1/2} \exp \left[ \frac{\theta_M^2}{2\psi''(0)} \right]; \end{aligned}$$



Le nombre escompté de rayons atteignant le récepteur dans l'intervalle  $(x_1, x_2)$  est :

$$N(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\psi^{(4)}(0)}{\psi''(0)} \right]^{1/2} \int_{x_1}^{x_2} \exp \left[ \frac{\theta_{2M}^2}{2\psi''(0)} \right] dx,$$

où

$$\theta_M = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{b_e}{x} - \operatorname{arctg} \frac{b_r}{a_r - x} \right];$$

$$N(x_1, x_2) = -\frac{b_e}{\pi} \left[ -\frac{\psi^{(4)}(0)}{\psi''(0)} \right] \times \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \operatorname{cosec}^2 \varphi \exp \left[ \frac{\theta_{2M}^2}{2\psi''(0)} \right] d\varphi,$$

où

$$\theta_M = \frac{1}{2} \left[ \varphi - \operatorname{arccot} \left( \frac{a_r}{b_r} - \frac{b_c}{b_r} \cot \varphi \right) \right].$$

c) Généralisation au cas de trois dimensions (Fig. 3).

Nous faisons encore l'hypothèse de travail en eau profonde et de fond assez plat ; admettons aussi l'indépendance des variables  $\xi(x)$  et  $\xi(y)$ , le fond ne

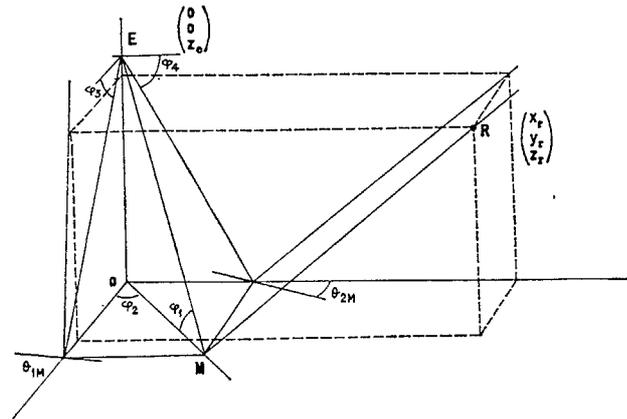


FIG. 3. — Géométrie du système : cas de 3 dimensions.

présentant pas alors de vallées trop prononcées, (cette restriction n'est pas nécessaire au développement des calculs mais les simplifie numériquement). Par suite :

$$P(\eta_1, \rho_1; \eta_2, \rho_2) = P(\eta_1, \rho_1) P(\eta_2, \rho_2).$$

La probabilité d'avoir un rayon provenant de E et passant par R dans la surface  $(dx, dy)$ , est égale au produit de la probabilité que  $\eta_1$  a, de prendre la valeur  $\theta_{1M}$  dans l'intervalle  $(x_0, x_0 + dx)$  et de la probabilité que  $\eta_2$  a, de prendre la valeur  $\theta_{2M}$  dans l'intervalle  $(y_0, y_0 + dy)$ .

Compte tenu des résultats précédents, cette probabilité est égale à :

$$p_1(dx, dy) = \frac{dx dy}{\pi^2} \left[ -\frac{\psi_1^{(4)}(0)}{\psi_1''(0)} \right]^{1/2} \left[ -\frac{\psi_2^{(4)}(0)}{\psi_2''(0)} \right]^{1/2} \times \exp \frac{1}{2} \left[ \frac{\theta_{1M}^2}{\psi_1''(0)} + \frac{\theta_{2M}^2}{\psi_2''(0)} \right],$$

où

$$\psi_1(\tau) = E[\xi_1(x_0) \xi_1(x_0 + \tau)] \quad \text{et}$$

$$\psi_2(\tau) = E[\xi_2(y_0) \xi_2(y_0 + \tau)];$$

le nombre escompté de rayons atteignant le récepteur dans la surface  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  est :

$$N(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{1}{\pi^2} \left[ -\frac{\psi_1^{(4)}(0)}{\psi_1''(0)} \right]^{1/2} \left[ -\frac{\psi_2^{(4)}(0)}{\psi_2''(0)} \right]^{1/2} \times \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \exp \left[ \frac{\theta_{1M}^2}{2\psi_1''(0)} + \frac{\theta_{2M}^2}{2\psi_2''(0)} \right] dx dy,$$

où

$$\theta_{1M} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{z_e}{x} - \operatorname{arctg} \frac{z_r}{x_r - x} \right] \quad \text{et}$$

$$\theta_{2M} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{z_e}{y} - \operatorname{arctg} \frac{z_r}{y_r - y} \right],$$

ou bien, en fonction des angles :

$$N(\varphi_1', \varphi_3'; \varphi_1'', \varphi_3'') = \frac{z_e^2}{\pi^2} \left[ -\frac{\psi_1^{(4)}(0)}{\psi_1''(0)} \right]^{1/2} \left[ -\frac{\psi_3^{(4)}(0)}{\psi_3''(0)} \right]^{1/2} \times \int_{\varphi_1'}^{\varphi_1''} \int_{\varphi_3'}^{\varphi_3''} \operatorname{cosec}^2 \varphi_3 \operatorname{cosec}^2 \varphi_4 \times \exp \left[ \frac{\theta_{1M}^2}{2\psi_1''(0)} + \frac{\theta_{2M}^2}{2\psi_3''(0)} \right] d\varphi_3 d\varphi_4,$$

où

$$\theta_{1M} = \frac{1}{2} \left[ \varphi_3 - \operatorname{arccot} \left( \frac{x_r}{z_r} - \frac{z_e}{z_r} \cot \varphi_3 \right) \right],$$

$$\theta_{2M} = \frac{1}{2} \left[ \varphi_4 - \operatorname{arccot} \left( \frac{y_r}{z_r} - \frac{z_e}{z_r} \cot \varphi_4 \right) \right].$$

## CONCLUSION

L'analyse numérique de ces formules a donné des résultats convenables ; on obtient des courbes en cloche pour les probabilités.

Si on reprend la formule, elle a un maximum pour  $\theta_M = 0$  c'est-à-dire que le point M optimum correspond au chemin parcouru le plus court.

L'hypothèse de travail en fond suffisamment plat peut être facilement levée ; en effet il suffit de considérer  $\operatorname{tg} \theta_M$  au lieu de  $\theta_M$ , mais cette étude ne tient pas compte des phénomènes d'ombre éventuels.

Dans le cas d'un fond gaussien, on voit qu'il suffit de connaître la fonction de corrélation ; il se pose donc le problème de son estimation (méthode de Partzen par exemple).

Des méthodes analogues à ce genre de travail donnent une solution au problème des chemins multiples en milieu aléatoire. Les résultats obtenus nécessitent la connaissance des distributions du milieu (estimation méthode de Gram-Charlier par exemple). Les résultats se simplifient beaucoup dans le cas gaussien mais cette hypothèse ne semble pas applicable au milieu marin.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] RICE (S. O.). Selected papers on noise and stochastic processes, *Dover publication*, New York.
- [2] MARTIN (J. J.). Time and frequency characteristics of an acoustic signal reflected from a rough boundary. Research paper P-243 (fév. 66) ; *Institute for defense analyses*.