



PROBLÈMES STATISTIQUES DE COMPTAGES RENCONTRÉS AU COURS DE L'ÉTUDE D'UN DOSIMÈTRE D'IRRADIATION A ALARME

par
Victor DELCROIX * et Georges BONNET
Professeur à la Faculté des sciences **

INTRODUCTION

Le dosimètre d'irradiation à alarme est destiné à équiper le personnel d'intervention des Services de protection contre les rayonnements. Appareil portable et individuel de petite dimension, alimenté par des accumulateurs miniatures, il avertit son détenteur qu'il a reçu une dose (*) prédéterminée.

Nous examinerons successivement la constitution et le fonctionnement de cet appareil, le modèle statistique d'étude et les résultats qu'on peut en tirer.

I. CONSTITUTION - FONCTIONNEMENT.

Ce dosimètre comprend essentiellement :

- un compteur Geiger Muller de petit volume,
- une alimentation haute tension,
- un système de discrimination et de démultiplication,
- une alimentation générale basse tension utilisant un accumulateur miniature fournissant 4 V environ.

Toutefois, le principe de fonctionnement de cet appareil est assez nouveau. En effet, le compteur Geiger Muller est alimenté en régime pulsé. Pour cela, la haute tension est appliquée sous forme de

créneaux de 2 μ s de large environ et de période variable, entre 0,6 ms et 30 ms. Le compteur est ainsi sensibilisé pendant une faible fraction du temps, ce qui permet :

1) de régler facilement la sensibilité exacte du dosimètre : il suffit en effet d'ajuster la période ou la largeur du créneau ;

2) d'utiliser des compteurs de sensibilité bien supérieure à celle réellement indispensable. Ces compteurs, de volume relativement importants, sont plus faciles à construire et moins chers ;

3) d'utiliser le procédé de coupure externe des compteurs Geiger Muller et de s'affranchir ainsi du temps mort propre du compteur qui est grand (100 μ s environ) et fluctuant ;

4) d'éviter le défaut majeur des compteurs de Geiger Muller utilisés avec une haute tension permanente dans de fortes intensités de dose, qui créent donc, dans le tube compteur, une ionisation importante. On constate en effet que le nombre d'impulsions par seconde, fourni par le compteur, diminue quand l'intensité du rayonnement augmente au-dessus d'une certaine valeur. Par contre, l'utilisation d'une haute tension pulsée permet d'éviter cet inconvénient puisque le compteur ne peut, en aucun cas, fournir plus d'impulsions que ne lui en fournit l'alimentation pulsée.

L'alimentation (Fig. 1) haute tension se compose donc d'une horloge qui fournit des signaux récurrents dont on peut faire varier la période pour choisir

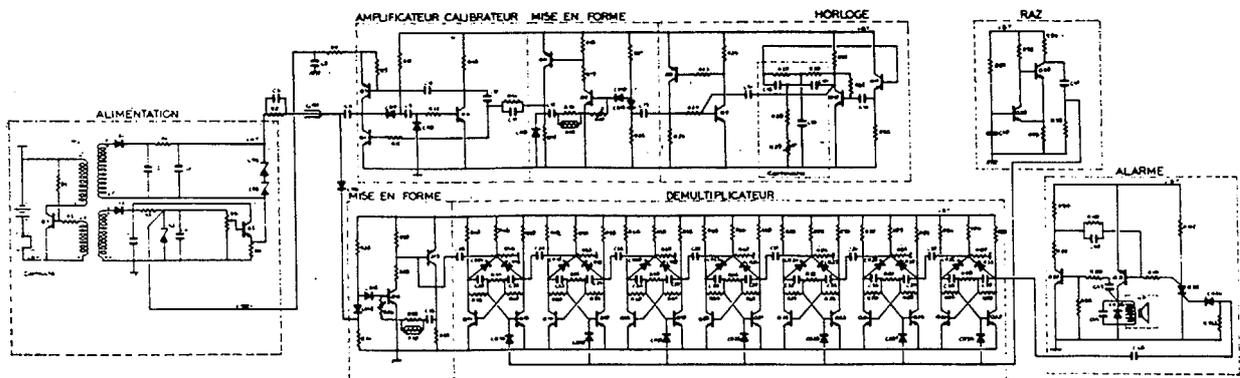


Fig. 1. — Schéma de principe du dosimètre à alarme.

* L. E. T. I. Centre d'études nucléaires de Grenoble.

** Centre d'Études des Phénomènes Aléatoires (CEPHAG), (associé au C.N.R.S.), 46, avenue Félix-Viallet. 38-Grenoble.

(*) La dose est représentative des dommages créés dans l'organisme humain par les rayonnements ionisants. Elle est définie comme une énergie massique. L'unité est le Rad qui vaut 100 ergs/gramme. Il faut également tenir compte de la nocivité plus ou moins grande du rayonnement ionisant (facteur *F*) et de la sensibilité plus ou moins grande des tissus vivants à un même rayonnement.



la gamme de l'appareil, d'un circuit de mise en forme fournissant les créneaux calibrés et d'un amplificateur qui fournit la haute tension proprement dite.

Si pendant la durée du créneau, un photon γ donne une impulsion utile, celle-ci, après séparation — grâce à un circuit discriminateur — des impulsions parasites provenant du circuit précédent, charge un registre composé de 8 bistables montés en série. Quand ce registre est rempli, l'impulsion de sortie attaque le dispositif d'alarme sonore.

La technologie employée est celle des circuits « fagots » noyés dans l'araldite ; la tension d'alimentation fournie par des accus est de 4 V, la consommation totale de 32 mA. Le fonctionnement est assuré avec une erreur globale de $\pm 20\%$ entre -10°C et $+45^\circ\text{C}$. Le poids de l'appareil est de 200 g environ.

II. MODÈLE STATISTIQUE D'ÉTUDE.

Nous nous sommes posés, à propos de cet appareil, deux questions :

— la première concerne son étalonnage. Elle peut se formuler ainsi : le dosimètre est soumis à un flux constant de rayonnement, quelle sera alors la fonction de répartition du temps au bout duquel l'alarme sera donnée ?

— la seconde concerne l'estimation de la dose : le dosimètre a déclenché au bout d'un temps donné, quelle est la valeur de la dose reçue par l'appareil ? C'est la question la plus importante.

Soit donc t_1, t_2, t_j, t_{j+1} la suite S des instants où il y a ionisation dans le compteur, mais pas forcément détection, comme nous l'avons vu plus haut. Cette suite S est un processus de Poisson que nous supposons stationnaire de densité ρ .

Le compteur ne peut fournir d'impulsion électrique utile que pendant les intervalles $(kT, kT + \tau)$ k entier. Il fournira effectivement une impulsion électrique utile (et une seule) à la date $U_n = kT + \tau$ que si, et seulement si, $kT < t_j < kT + \tau$. Il ne fournira aucune impulsion dans le cas contraire (Fig. 2).

On a donc affaire ici à un mécanisme d'effacement par échantillonnage périodique. Ce mécanisme démarre à l'instant 0 de la suite Σ et s'arrête quand N impulsions ont été enregistrées à la date $X = KT + \tau$ correspondant à U_N : la suite des k est donc $0, 1, 2 \dots K$ et N étant fixé, K est une variable aléatoire discrète telle que $K \geq N - 1$.

III. LOI DE LA DURÉE DU COMPTAGE : ASPECT ÉTALONNAGE.

Il s'agit de déterminer la loi de la variable aléatoire X qui représente la date du point U_N de la suite. Si p est la probabilité de trouver U_N à $KT + \tau$ on a :

p : probabilité d'avoir au moins un t_j compris entre kT et $kT + \tau$

$$\Pr : \{ \text{au moins un } t_j \in [kT, kT + \tau] \} = 1 - e^{-\rho\tau}.$$

La suite des t_j étant stationnaire et régie par un processus de Poisson, les tirages au sort qui gouvernent la présence ou l'absence d'un point de Σ à la fin de chaque intervalle d'échantillonnage sont indépendants.

Aussi les intervalles de temps $U_{n+1} - U_n = \theta_n$ sont-ils des variables aléatoires indépendantes de même loi et nous avons :

$$X = \sum_{n=1}^{N-1} \theta_n + \theta_0,$$

θ_n prend les valeurs discrètes $T, 2T \dots mT$; les probabilités respectives étant :

$$\Pr \{ \theta_n = T \} = p,$$

$$\Pr \{ \theta_n = 2T \} = \Pr \{ \text{Zéro } t_j \in (kT, kT + \tau), \text{ et au moins un } t_j \in (k-1, k+1 T + \tau) \},$$

$$= (1 - p) p,$$

$$\Pr \{ \theta_n = mT \} = (1 - p)^{m-1} \cdot p.$$

On en déduit aisément la fonction caractéristique des θ_n :

$$\begin{aligned} \varphi_1(U) &= E \{ e^{iU\theta} \} \\ &= \frac{p e^{iUT}}{1 - (1 - p) e^{iUT}}, \end{aligned}$$

d'où :

$$m_1 = E \{ \theta_1 \} = -i \left. \frac{d\varphi_1}{dU} \right|_{u=0} = T,$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1 - p}{p^2} T^2 = \frac{T^2}{4\text{sh}^2 \rho\tau/2},$$

et la fonction caractéristique de X .

$$\varphi(U) = \varphi_0(U) \varphi_1^{N-1}(U),$$

avec :

$$\varphi_0(U) = e^{i\omega(T-\tau)} \varphi(U).$$

Mais on peut en première approximation négliger θ_0 devant $\Sigma\theta_n$.

θ_0 est au plus de quelques millisecondes devant plusieurs secondes. On en déduit :

$$\varphi(U) = [\varphi_1(U)]^N,$$

et :

$$m = E(x) = (N - 1) E \{ \theta_1 \} = T \left[\frac{N}{1 - e^{-\rho\tau}} - 1 \right],$$

$$\sigma^2 = \frac{NT^2}{4\text{sh}^2 \rho\tau/2}.$$

L'inversion de la fonction caractéristique nous donne la fonction de répartition qui est d'une expression mathématique fort compliquée si $N\rho$ et τ sont quelconques, mais qui peut se simplifier si N , en particulier, est grand.



On peut ainsi démontrer [1], que si $\rho\tau \leq 0,1$, la fonction de répartition se met sous la forme :

$$F\#(y) = \Phi^{-1}(y) - \frac{1}{3} \Phi^{(2)}(y) \frac{1}{\sqrt{N}} + \dots,$$

avec :

$$y = \frac{X - m}{\sigma},$$

et où $\Phi^{(-1)}(y)$ est la fonction de répartition d'une variable réduite de Laplace, $\Phi(y)$ sa densité et $\Phi^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de cette densité.

Dans ces conditions σ^2 s'écrit :

$$\sigma^2 \# NT^2/\rho^2 \tau^2.$$

L'hypothèse $\rho\tau \leq 0,1$ est toujours justifiée, en effet on a :

$$\tau = 2,210^{-6} \text{ s} \quad \text{et} \quad \rho < 2000 \text{ s}^{-1}.$$

On voit de plus si $N \geq 100$, le terme en $\Phi^{(2)}(y)$ de l'expression de $F\#y$ est négligeable.

IV. ESTIMATION STATISTIQUE DU NOMBRE M DE PARTICULES.

Intéressons-nous maintenant au deuxième volet de l'étude : le dosimètre a déclenché au bout d'un temps donné, quelle est la valeur de la dose reçue par l'appareil ?

De façon plus précise, on peut énoncer le problème comme suit.

Soumis depuis la date $t = 0$ à un champ de rayonnement dont on ignore l'intensité, l'appareil vient d'enregistrer la $N^{\text{ième}}$ impulsion à l'époque $t = X$ et donne l'alarme. Il s'agit alors d'obtenir à partir de cette seule information de durée une estimation de la quantité de rayonnement reçu.

Il faut noter que cette information X est unique ; nous devons donc résoudre un problème de probabilité inverse considérant le nombre entier M comme la réalisation d'une variable aléatoire M^+ dont il faut déterminer la loi *a posteriori*.

Nous appliquerons la méthode de Bayes pour trouver la probabilité que la réalisation du processus observé corresponde à M points dans $[0, X]$ (événement A_n), sachant que la $N^{\text{ième}}$ impulsion a été enregistrée à la date X (événement B_n).

Moyennant certaines hypothèses simplificatrices [1], en particulier sur la loi *a priori* de A_n , nous arrivons aux résultats suivants obtenus à partir des moments de M^+ :

$$\langle M \rangle = E\{M^+\} \equiv (N+1) \frac{T}{\tau} \left(1 + \frac{N}{2K}\right),$$

$$\sigma_m^2 = \langle M \rangle + \frac{\langle M \rangle^2}{N+1}.$$

On peut également trouver la loi *a posteriori* du nombre de particules. Cette loi nous fournit l'intervalle de confiance : ceci nous donnera la réponse à la question suivante.

L'alarme étant déclenchée, entre quelles bornes se situe la dose reçue pour une probabilité d'erreur donnée ε ?

En fait, ici seule la borne supérieure nous intéresse pour des raisons évidentes.

Ceci se traduit par une courbe universelle donnant ε en fonction de $M^+ \tau/T$ (Fig. 2), où M^+ est la

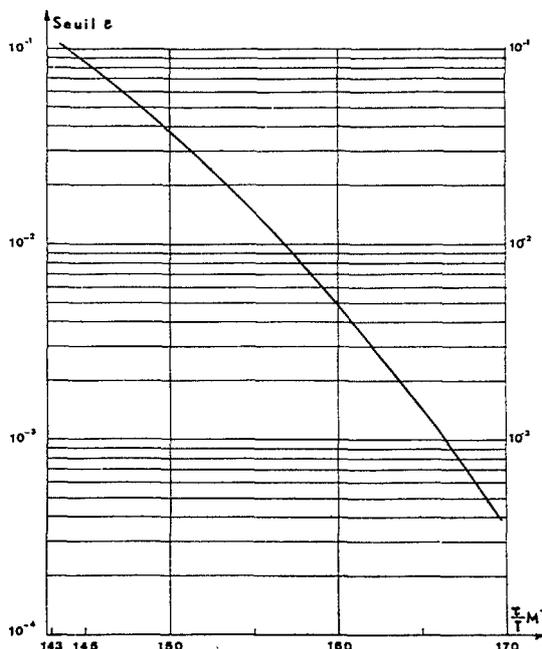


FIG. 2. — Courbe donnant la probabilité ε que M^+ soit supérieur à M en fonction de la variable réduite $\frac{\tau M^+}{T}$.

borne supérieure de la dose susceptible d'être dépassée avec une probabilité ε .

Un exemple pour terminer :
avec

$$\frac{T}{\tau} = 100, \quad N = 128, \quad K = 10^6,$$

nous avons :

$$\langle M \rangle = 12900, \quad \sigma_m = 1,414.$$

Borne de l'intervalle de confiance

$$\begin{aligned} M^+ &= 15686 \quad \text{pour} \quad \varepsilon = 1\%, \\ &= 16643 \quad \text{pour} \quad \varepsilon = 0,1\%. \end{aligned}$$

Ceci veut dire que l'on a 1 % de chance que la dose dépasse de 22 % la valeur présumée, et que l'on a 0,1 % de chance que la dose dépasse de près de 30 % la valeur présumée.

CONCLUSION

Sous réserve que $\rho\tau < 0,1$, $N > 100$,
— la durée X du comptage est laplacienne et on a approximativement :

$$m = \frac{NT}{\rho\tau}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

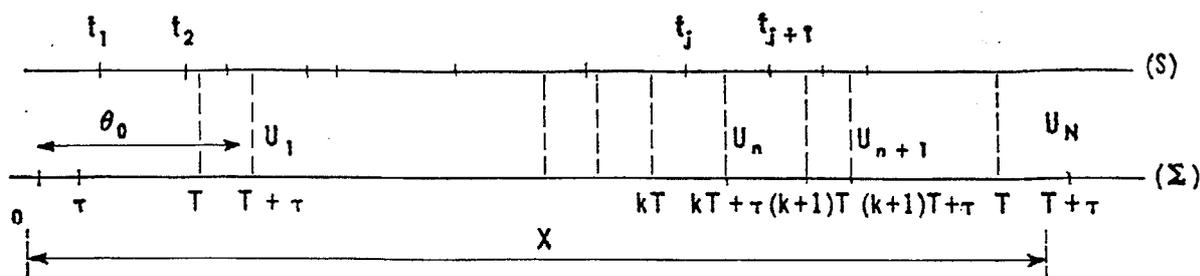


FIG. 3. — Schéma du processus d'effacement.

— estimation de la dose :

$$\langle M \rangle = E \{ M^+ \} = \frac{NT}{\tau},$$

$$\frac{\sigma_M}{\langle M \rangle} = \left[\frac{1}{N+1} + \frac{1}{\langle M \rangle} \right]^{1/2};$$

— l'intervalle de confiance est donné par la figure 3.

Remarque terminale.

Nous avons dit que les résultats obtenus n'étaient

valables que si N était grand. Ceci signifie en particulier qu'on commettrait une erreur importante si on déterminait la dose par lecture des bistables du registre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BONNET (G.), DELCROIX (V.), Problèmes statistiques de comptage liés à un effacement par échantillonnage. *Nucl. Inst. and Methods*. North Holland Publishing Co. (1967), 51, pp. 213-223.