DÉTECTION D'UN ÉCHO COUVERT PAR UN BRUIT BLANC

par

Jean VILLE

Professeur à la Sorbonne.

I. INTRODUCTION.

Dans un problème de détection acoustique, on se propose en fait, émettant un signal $s(t)$, recevant un signal $E(t)$, de savoir si le milieu réfléchissant présente une singularité que l'on peut raisonnablement interpréter comme créée par la présence d'un corps étranger au milieu.

Dans un modèle linéaire, l'écho $E(t)$ est de la forme

$$E(t) = \int s(t-\theta)\, A(\theta)\, d\theta + b(t),$$

$A(\theta)$ caractérisant la structure du milieu, $b(t)$ un bruit.

Le problème, connaissant $s(t)$ et $E(t)$, est d'estimer $A(\theta)$, et de reconnaître si $A(\theta)$ a la structure normale attachée au milieu, ou présente une singularité explicable uniquement par une anomalie de milieu.

Si $s(t)$ a été choisi, le problème de localisation de l'anomalie est un problème de *détection*. Le problème de détection supposé résolu, le problème du choix de la forme optimale de $s(t)$ est un problème de *modulation*.

Shannon a montré que sous des conditions très générales, le problème de modulation ne se pose pas, la précision de la détection ne dépendant pas de la forme de $s(t)$.

Nous étudions cette question, en faisant une hypothèse sur $A(\theta)$ et $b(t)$. Dans le cas d'un milieu non réverbérant, $b(t)$ est connu, *à une constante inconnue près*, par son spectre. On peut alors, si le spectre est plat, donner la loi de répartition de l'anomalie. Le choix de $s(t)$ est de pure commodité. Dans un milieu réverbérant, une composante de bruit a un spectre (toujours à une constante inconnue près) identique à celui du signal. Le problème général se complique alors à un tel point que l'on doit astreindre $s(t)$ à avoir pour fonction d'autocorrélation une fonction de Dirac, ce qui ramène au cas simple où lui-même est une fonction de Dirac, mais sans astreinte sur la puissance instantanée.

II. CAS D'UN BRUIT BLANC.

Supposons que nous recevions un écho de la forme :

$$E(t) = \alpha s(t-\theta) + \beta \rho(t), \tag{1}$$

où α, β, θ sont des paramètres inconnus, $s(t)$ un bruit blanc gaussien, $\rho(t)$ un signal de forme connue. L'observation de $E(t)$ permet d'obtenir des indications sur α, β, θ.

Notons que $E(t)$ n'est pas observable directement. Nous devons pour l'observer, le filtrer. Filtrons-le avec un filtre de réponse :

$$I_\tau(t) = \frac{\sin 2\pi \frac{t}{\tau}}{2\pi\, t}. \tag{2}$$

Ceci nous donne un écho :

$$E_\tau(t) = \int E(u)\, I_\tau(t-u)\, du, \tag{3}$$

lequel a pour expression :

$$E_\tau(t) = \alpha s_\tau(t-\theta) + \beta \rho_\tau(t). \tag{4}$$

Nous obtenons ainsi :

$$E_\tau^2(t) = \alpha^2 s_\tau^2(t-\theta) + 2\alpha\beta\rho_\tau(t)\, s_\tau(t-\theta) + \beta^2 \rho_\tau^2(t)$$

d'où

$$\mathcal{M}E_\tau^2(t) = \beta^2\, \mathcal{M}\rho_\tau^2(t) + \alpha^2 s_\tau^2(t-\theta).$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\mathcal{M}\rho_\tau^2(t) = \mathcal{M}\int du \int dv\, \rho(u)\, \rho(v)\, I_\tau(t-u)\, I_\tau(t-v),$$

$$= \iint du\, dv\, I_0(u-v)\, I_\tau(t-u)\, I_\tau(t-v),$$

$$= \int du\, I^2(t-u) = \frac{1}{\tau},$$

de sorte que

$$\mathcal{M}E_\tau^2(t) = \frac{\beta^2}{\tau} + \alpha^2 s_\tau^2(t-\theta)\;;$$

pour τ suffisamment petit, $s_\tau(t)$ se confond avec $s(t)$.

Si le bruit est assez important, nous avons une mesure de ce bruit en posant :

$$\beta^2 = \tau \frac{1}{T}\int_0^T E_\tau^2(t)\, dt. \tag{5}$$

Considérons maintenant le signal obtenu en faisant battre E_τ avec $s(t-u)$:

$$\gamma_\tau(u) = \int_0^T E_\tau(t)\, s(t-u)\, du. \tag{6}$$

Ce signal $\gamma_\tau(u)$ est connu puisque E est observé et s connu. Nous supposerons que $s(t)$ est normalisé, c'est-à-dire que :

$$\int s^2(t)\, dt = 1.$$

$\gamma_\tau(u)$ a une valeur moyenne :

$$\alpha \int_0^T s(t-\theta)\, s(t-u)\, dt = \alpha k(u-\theta), \tag{7}$$

indépendante de τ. $k(t)$ est la fonction d'autocorrélation du signal émis. Étudions la fluctuation de γ :

$$\gamma_\tau^2(u) = \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2\, E_\tau(t_1)\, E_\tau(t_2)\, s(t_1-u)\, s(t_2-u), \tag{8}$$

donc nous devons faire intervenir :

$$\mathcal{M} E_\tau(t_1)\, E_\tau(t_2) = \alpha^2\, s(t_1-\theta)\, s(t_2-\theta) + \beta^2\, \mathcal{M} \rho_\tau(t_1)\, \rho_\tau(t_2) ;$$

En ce qui concerne ρ_τ, on trouve que :

$$\mathcal{M} \rho_\tau(t_1)\, \rho_\tau(t_2) = I_\tau(t_2-t_1).$$

Il intervient ainsi dans $\gamma_\tau^2(u)$ une fluctuation due au bruit, laquelle a pour valeur :

$$\beta^2 \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2\, s(t_1-u)\, s(t_2-u)\, I_\tau(t_2-t_1).$$

Comme s est long par rapport à τ, I_τ se comporte comme une impulsion de Dirac, et la fluctuation due au bruit est β^2.

Nous pouvons ainsi considérer simplement (sans mentionner τ) :

$$\gamma(u) = \int_0^T E(t)\, s(t-u)\, dt.$$

En fin de compte, nous obtenons les estimations :

$$\beta^2 = \frac{\tau}{T} \int_0^T E_\tau^2(t)\, dt \quad \text{et} \quad \alpha k(u-\theta) \sim \gamma(u).$$

Nous insistons sur le fait que $\int_0^T E^2(t)\, dt$ n'est pas une donnée physique. Cette intégrale dépend du filtrage. C'est $\tau \int_0^T E^2(t)\, dt$ qui est attachée au bruit.

L'égalité $\alpha k(u-\theta) = \gamma(u)$ nous donne deux indications. En faisant coïncider le maximum de $k(u-\theta)$ avec celui de $\gamma(u)$, nous déterminons θ. En examinant le rapport γ/k, nous avons une indication sur la valeur de α. Si cette valeur est petite, il se peut que α ne soit pas significatif et que nous ayons simplement repéré une pointe du bruit.

Ayant ainsi reconnu que $\gamma(u)$ est une fonction attachée étroitement à l'estimation de α, on peut se demander si l'on peut retrouver ce résultat par d'autres considérations.

Si on suppose que α, β, θ sont des variables aléatoires, nous pouvons, en échantillonnant le signal à des instants multiples de τ, considérer la répartition liée de $\alpha, \beta, \theta, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots \rho_N$ avec

$$\rho_n = \rho_\tau(n\tau) \quad \text{et} \quad N = \frac{T}{\tau}.$$

Cette distribution est de la forme :

$$(2\pi)^{-N/2}\, \tau^N\, e^{-\frac{\tau}{2}\Sigma \rho_n^2}\, f(\alpha)\, g(\beta)\, h(\theta)\, d\alpha\, d\beta\, d\theta\, d\rho_1 \ldots d\rho_N.$$

En l'exprimant avec le changement de variables

$$E_n = E_\tau(n\tau) = \alpha s(n\tau-\theta) + \beta \rho_n,$$

ceci devient :

$$(2\pi)^{-N/2}\, \tau^N\, \beta^{-N} \exp\left[-\frac{\tau}{2\beta^2}\Sigma(E_n - \alpha s(n\tau-\theta)^2)\right] \times f(\alpha)\, g(\beta)\, h(\theta)\, d\alpha\, d\beta\, d\theta\, dE_1 \ldots dE_N.$$

ce qui, par intégration en β, α, θ nous donnerait la distribution *a posteriori* de α, β, θ.

Dans l'ignorance de f, g, h, nous les supposerons constantes. Il nous reste comme distribution :

$$\beta^{-N} \exp\left[-\frac{\tau}{2\beta^2}\Sigma[E_n - \alpha(n\tau-\theta)]^2\right] : \int \beta^{-N} \exp\left[-\frac{\tau}{2\beta^2}\Sigma[E_n - \alpha s(n\tau-\theta)]^2\right] d\alpha\, d\beta\, d\theta.$$

La fonction à intégrer présente une forte pointe pour une valeur voisine de $\bar\beta$, où $\bar\beta$ est définie par :

$$\bar\beta^2 = \frac{\tau}{T} \int_0^T E_\tau^2(t)\, dt.$$

Nous remplacerons donc β par cette valeur, et aurons une distribution jointe de la forme suivante, tenu compte que l'exposant se présente sous forme d'intégrale :

$$\exp\left[-\frac{1}{2\bar\beta^2} \int [E_\tau(t) - \alpha s(t-\theta)]^2\, dt\right] = \exp\left[-\frac{1}{2\bar\beta^2}\left[\frac{T}{\tau}\bar\beta^2 - 2\alpha\gamma(\theta) + \alpha^2\right]\right].$$

Cette expression est à normaliser (il faut la diviser par son intégrale en α et θ). La normalisation n'étant pas affectée par un facteur constant, nous pouvons l'écrire :

$$\frac{1}{\bar\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\bar\beta^2}[\alpha - \gamma(\theta)]^2\right] \exp\left[\frac{1}{2\bar\beta^2}\gamma^2(\theta)\right].$$

L'intégration en α donne 1.

Nous obtenons comme distribution :

$$\frac{1}{\bar\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\bar\beta^2}(\alpha - \gamma(\theta))^2\right] \times \frac{\exp\left[\frac{1}{2\bar\beta^2}\gamma^2(\theta)\right]}{\int_0^T \exp\left[\frac{1}{2\bar\beta^2}\gamma^2(\theta)\right] d\theta}\, d\alpha\, d\theta,$$

ce qui montre que $\gamma^2(\theta)$ est, à une constante près, *le logarithme de la distribution a posteriori* de θ. Donc, sous les hypothèses faites, le calcul de β et de $\gamma(u)$ est un résumé exhaustif.

Il reste maintenant à voir si le θ ainsi trouvé correspond à une réalité. Le θ choisi correspondra à une pointe de $\gamma(u)$. Cette pointe correspond à une certaine valeur du rapport $\gamma(\bar\theta) : \bar\beta$.

Or, θ *une fois choisi*, α est une variable de *valeur moyenne* $\gamma(\theta)$, et de dispersion $\bar\beta$. α n'a une valeur significative que si la valeur moyenne $\gamma(\theta)$ est grande par rapport à $\bar\beta$. Le rapport $\gamma(\theta)/\bar\beta$ mesure donc la véracité de l'hypothèse que le θ estimé est un véritable θ, correspondant à un écho effectif, et non à une pointe accidentelle du bruit.

Ayant ainsi traité le problème de détection, on peut songer à choisir la forme de $s(t)$. Nous avons vu que $\gamma(u)$ avait une valeur moyenne $\alpha k(u-\theta)$ et que, par conséquent, pour $u = \theta$, cette valeur moyenne est α (puisque k est la fonction de corrélation d'un signal normalisé). Cette valeur moyenne est indépendante de la *forme* du signal ; il n'y a pas théoriquement de problème de modulation.

On peut se demander maintenant comment se présente la question lorsque le bruit n'est plus blanc. Dans ce cas, la distribution de départ est de la forme :

$$2\pi^{-N/2}|\mathrm{M}|^{-1/2}\,e^{-\frac{1}{2}\Sigma\rho_{ij}\mu_{ij}\rho_j}\times$$
$$f(\alpha)\,g(\beta)\,h(\theta)\,d\alpha\,d\beta\,d\theta\,d\rho_1\ldots d\rho_N,$$

avec

$$m_{ij} = \mathcal{M}\rho_i\rho_j,\quad \mathrm{M} = [m_{ij}],\quad [\mu_{ij}] = \mathrm{M}^{-1}.$$

Nous voyons que $\Sigma\rho_n^2$ a été remplacé par $\Sigma\mu_{ij}\,\rho_i\,\rho_j$. Nous avions substitué à $\Sigma\rho_n^2$ l'expression $\frac{1}{\tau}\int_0^T \rho^2(t)\,dt$. Nous aurons à substituer à $\sum_{ij}\mu_{ij}\,\rho_i\,\rho_j$ une expression de la forme :

$$\frac{1}{\tau^2}\int_0^T d\nu\int_0^T du\;\mu(u-\nu)\,\rho(u)\,\rho(\nu).$$

avec

$$\mu(u-\nu) = \mu_{ij},\quad u = \tau_i \quad \text{et} \quad \nu = \tau_j.$$

Nous aurons alors :

$$m_{ij} = m(u-\nu) = \mathcal{M}\rho(u)\,\rho(\nu),$$

et la relation liant M à M^{-1} sera :

$$\Sigma\, m_{ih}\,\mu_{hj} = \delta_{ij} \qquad \text{(indice de Kronecker)},$$
$$\Sigma_\nu\, m(u-\nu)\,\mu(\nu-w) = \delta_{u/\tau,\,w/\tau}\;;$$

ou encore, en passant à l'intégration :

$$\frac{1}{\tau}\int_0^T m(u-\nu)\,\mu(\nu-w)\,d\nu = \delta_{u/\tau,\,w/\tau}.$$

Nous poserons alors

$$\int_0^T m(u-\nu)\,\mu(\nu-w)\,d\nu = \mathrm{A}\delta(u-w),$$

δ étant une impulsion de Dirac approchée, et A une constante.

Si on suppose T grand, on voit que l'opération $\int \rho^2(t)\,dt$ qui consistait à moduler le bruit avec lui-même, est remplacée par une opération faisant battre le bruit avec le bruit passé à travers un filtre qui le transformerait en bruit blanc.

En transposant ce qui a été dit sur le signal à former à la réception, on voit que la forme optimale est :

$$\int \mathrm{E}(u)\,\mu(u-\nu)\,s(\nu-\theta)\,du\,d\nu,$$

ce qui, lorsque $\mu(u-\nu)$ est une impulsion de Dirac, correspond bien au signal :

$$\int \mathrm{E}(t)\,s(t-\theta)\,dt.$$

envisagé plus haut.

Le calcul montre que le résultat est toujours indépendant de la forme du signal émis et qu'il semble donc qu'il n'y ait pas de problème de modulation. Seules semblent intervenir des considérations de commodité. En effet, pour $m(u-\nu)$ quelconque, la fonction $\mu(u-\nu)$ peut être difficile à former, et par conséquent le réseau détecteur peut être compliqué.

Nous allons maintenant examiner ce qui se passe dans un milieu bruyant et réverbérant.

Nous supposons le bruit propre à spectre plat, et que le bruit de réverbération a même spectre que le signal émis. Le signal reçu est donc de la forme :

$$\mathrm{E}_i = \alpha\, s_i(\theta) + \beta\rho_i + \gamma\delta_i,$$

ρ_i étant le bruit de réverbération normalisé, δ_i le bruit propre, normalisé.

α, β, γ sont des paramètres inconnus. La distribution qui interviendra sera donc :

$$P = |\beta^2 M + \gamma^2 I|^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(E^*-\alpha S^*)\,[\beta^2 M + \gamma^2 I]^{-1}(E-\alpha S)\right\},$$

M étant la matrice de corrélation du signal, I la matrice unité. E et S sont les vecteurs représentant l'écho et le signal émis.

Nous intégrerons en β et γ. Mais ici, l'artifice qui nous permettait d'évaluer les valeurs estimées de β ou de γ ne réussit plus.

Cet artifice consiste au fond à utiliser le fait que la valeur moyenne de l'exposant, dans une loi de Gauss, est égale au nombre de dimensions, ce qui donne :

$$\mathrm{E}^*[\beta^2 M + \gamma^2 I]^{-\frac{1}{2}} E \sim N.$$

Lorsque β *ou* γ est nul, ceci nous donne immédiatement la valeur de celui des deux qui n'est pas nul. Lorsque β et γ interviennent *à la fois*, il nous manque une équation. Naturellement, nous pouvons joindre à l'équation ci-dessus l'équation supplémentaire : $\delta P/\delta\beta = 0$, mais nous voyons que puisque β ne peut se mettre en facteur, cette dernière équation est impraticable. La seule manière d'opérer est de former la fonction d'autocorrélation de E, ce qui nous donnerait une matrice π voisine de $\beta^2 M + \gamma^2 I$ et de procéder ensuite à l'ajustement de β et de γ. Ceci paraît impossible techniquement.

Le procédé simple ne réussit que si I et M sont voisines, auquel cas $\beta^2 + \gamma^2$ *sort* du déterminant. On se retrouve ramené au cas classique. Ceci explique pourquoi, en présence de réverbération et de bruit, on est amené à utiliser un signal dont la fonction d'autocorrélation soit une impulsion de Dirac. Un tel signal, s'il n'est pas lui-même une impulsion, doit avoir le caractère d'un bruit. La théorie des signaux pseudo-aléatoires permet de concilier qu'un signal soit certain et ait les caractéristiques d'un bruit blanc.