QUELQUES PROPRIÉTÉS DE SYSTÈMES DE DÉTECTION DE SIGNAUX PAR TRAITEMENT QUADRATIQUE GÉNÉRALISÉ

par

Pierre-Yves ARQUÈS

Faculté des sciences de Grenoble *

I. INTRODUCTION.

On présente ici quelques résultats théoriques relatifs à la détection de signaux aléatoires par une classe d'appareils comportant une opération quadratique, l'optique étant celle de la détection de la présence d'un signal dans un bruit parasite. Le problème général correspondant est, connaissant les propriétés statistiques de deux fonctions aléatoires et étant donné une tranche temporelle d'une réalisation de l'une d'elles, de déterminer « au mieux » de laquelle des deux fonctions provient l'échantillon. Le problème peut alors être abordé par l'intermédiaire de la théorie statistique de la détection.

On adoptera ici un point de vue beaucoup plus restreint. Le critère de détection utilisé sera celui du rapport signal sur bruit de sortie. En outre, on supposera les bruits parasites stationnaires, gaussiens dans leur ensemble, et les signaux aléatoires stationnaires.

Parmi les appareils de détection maintenant bien connus, utilisés en détection « passive », on peut citer le quadrateur-intégrateur (une entrée) et le corrélateur (2 entrées) [1]. En vue d'accroître le pouvoir de détection d'une part, la directivité de l'antenne de réception d'autre part, on a considéré des systèmes ayant un plus grand nombre d'entrées : somme-carré-intégration, corrélation « par paires » (ou « intraclasse »), corrélation de deux demi-antennes, systèmes du type « multiplicative arrays » [2, 3].

Dans tous ces systèmes, l'intégration de sortie est forte, en fait déterminée par la durée supposée ou possible du signal. La structure du système étant donnée, on a montré, pour certains d'entre eux, que l'on pouvait optimaliser le filtrage d'entrée au sens du critère du rapport signal sur bruit de sortie (filtre d'Eckart pour le quadrateur-intégrateur). On a également cherché à comparer ces différents systèmes entre eux. A deux entrées, par exemple, pour des signaux identiques, les performances du système « somme-carré-intégration » sont supérieures (en rapport signal sur bruit) à celles du corrélateur. Celui-ci possède cependant l'avantage sur le premier d'avoir une composante de sortie nulle en absence de signal si les deux bruits parasites d'entrée sont non corrélés, ce qui est intéressant du point de vue pratique, en raison de la non-stationnarité des bruits réels. En fait, cette propriété disparaît dans le cas général où les bruits d'entrée sont corrélés. Et par ailleurs, l'utilisation de contrôles automatiques de gain permet de réguler la composante continue de sortie du système somme-carré-intégration.

II. SYSTÈME QUADRATIQUE GÉNÉRALISÉ.

Les systèmes précédemment cités sont structurés de manière identique : ils effectuent sur la matrice colonne (ou le vecteur) dont les n éléments sont les fonctions d'entrée la même suite d'opérations linéaire, quadratique puis linéaire.

On peut donc introduire un système quadratique généralisé dont les systèmes précédents sont des cas particuliers [2, 4].

Les n fonctions d'entrée (représentées par la matrice colonne $n|1$, $V_0(t)$) attaquent une matrice $m|n$ de filtres linéaires (représentée par la matrice $m|n$, $R(t)$, des réponses percussionnelles ou $G(\nu)$ des gains complexes) ; m est, *a priori*, quelconque par rapport à $n (m \gtrless n)$; les m fonctions de sortie de ce premier étage (linéaire), représentées par une matrice colonne, $m|1$, $V_1(t)$, subissent un traitement quadratique représenté par une matrice de multiplication q, $m|m$, à éléments constants ; la sortie de cet étage est la forme quadratique par rapport à la matrice V_1, associée à la matrice q, c'est-à-dire la quantité $\sum_{ij} q_{ij} \; V_{1i} \; V_{1j}$; cette sortie est filtrée dans un filtre passe-bas (intégrateur) de réponse percussionnelle $R_I(t)$ et de gain complexe $G_I(\nu)$. Les fonctions, les réponses percussionnelles et q sont supposées réelles. Sans perte de généralité q peut être supposée symétrique [2, 4].

Les fonctions aux différents étages du système s'écrivent sous forme matricielle (Fig. 1) [5] :

$$(1) \quad V_1(t) = (R * V_0)\ (t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\theta)\ V_0\ (t-\theta)\, d\theta,$$

$$(2) \quad V_2(t) = \widetilde{V}_1(t)\ q\ V_1(t),$$

$$(3) \quad V_3(t) = (R_I * V_2)\ (t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_I(\theta)\ V_2\ (t-\theta)\, d\theta.$$

* Centre d'Étude des Phénomènes Aléatoires (CEPHAG) (associé au C.N.R.S.), 46, avenue Félix-Viallet. 38 - Grenoble.

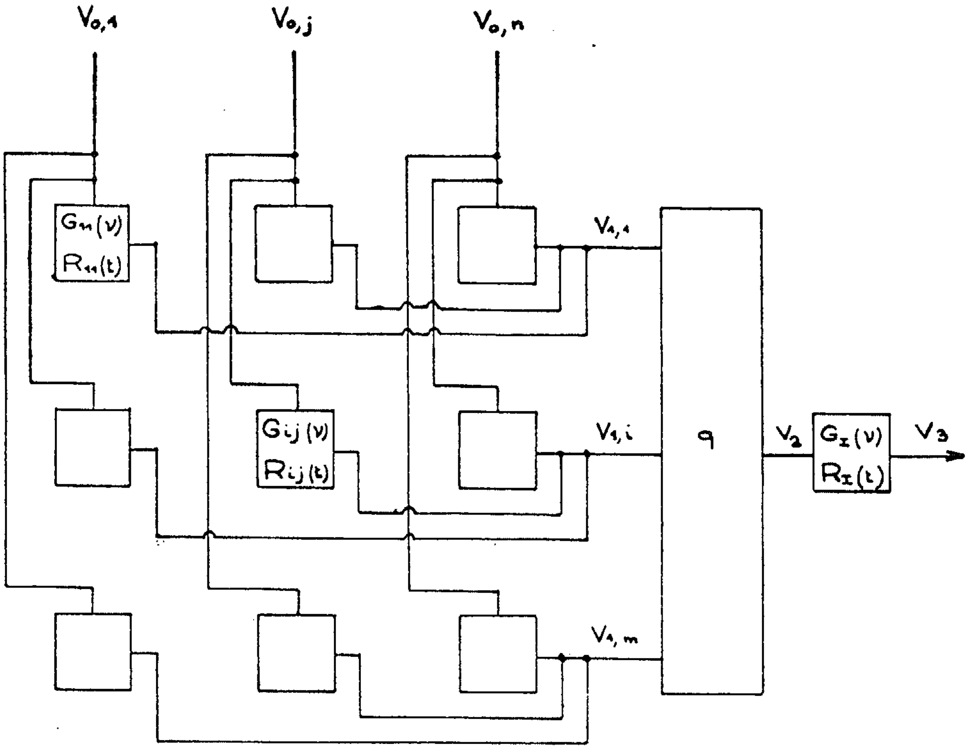

FIG. 1. — Système de traitement quadratique généralisé à n entrées.

On peut alors chercher à déterminer les propriétés statistiques de la sortie d'un tel système pour une matrice de fonctions d'entrée donnée. Sous l'hypothèse de n fonctions d'entrée, stationnaires, gaussiennes dans leur ensemble, on peut effectivement calculer les cumulants (ou semi-invariants) de la fonction aléatoire de sortie [2, 6]. La connaissance des cumulants revient à celle des moments, ou encore à celle de la fonction caractérisitique sous forme de série. On pourrait par exemple en déduire, dans des conditions données, les probabilités instantanées de fausse alarme et de détection à la sortie, sous forme de développements en série tels que ceux de Gram-Charlier ou d'Edgeworth.

On en déduit en outre immédiatement, et sous une forme qui se révèle exploitable, le rapport signal sur bruit de sortie défini comme le rapport de l'augmentation de la valeur moyenne de sortie due au signal à l'écart-type du bruit de sortie :

$$(4) \qquad \left[\frac{S}{B}\right]_s^2 = \frac{[\mathrm{E}\{V_{3.S\otimes B}\} - \mathrm{E}\{V_{3.B}\}]^2}{\mathrm{E}\{V_{3.B}^2\} - \mathrm{E}^2\{V_{3.B}\}},$$

l'indice B représentant les fonctions bruits et l'indice $S \otimes B$ les fonctions mélange de signal et bruit.

III. SYSTÈMES QUADRATIQUES A INTÉGRATION FORTE OPTIMAUX.

Une application importante des résultats précédents est la recherche des systèmes quadratiques optimaux par rapport au critère du rapport signal sur bruit de sortie. Quoique l'optimalisation puisse se faire avec un filtre de sortie quelconque, il faut particulariser ce filtre pour expliciter les résultats.

Le calcul des variations permet de déterminer les systèmes optimaux parmi, d'une part, les systèmes quadratiques généralisés à intégration forte et, d'autre part, les systèmes quadratiques généralisés à intégration forte soumis à certaines contraintes, en particulier la donnée de la forme d'une ou des deux matrices constituantes ou la donnée de la matrice de multiplication [2, 4]. L'optimalisation est faite pour un nombre d'entrées n donné, pour un ensemble de fonctions bruit gaussiennes (dans leur ensemble), stationnaires et centrées, et pour un ensemble de fonctions signal et bruit stationnaires et centrées ; ces deux ensembles de fonctions aléatoires ont respectivement $\gamma_B(\nu)$ et $\gamma_{S\otimes B}(\nu)$ (supposées données) pour matrices de densités spectrales d'intercorrélation, avec det $\gamma_B(\nu) \neq 0$ presque partout.

On supposera éventuellement que les matrices $\gamma(\nu)$ sont nulles en dehors d'un domaine de ν borné ou que le système ne traite qu'un tel domaine borné (ce qui en fait correspond à la réalité physique) pour éviter que le rapport signal sur bruit de sortie ne devienne infini.

Un système de traitement quadratique à n entrées, à intégration forte, optimal vis-à-vis du critère du rapport signal sur bruit sera tel que

$$(5) \quad \mathrm{G}^+(\nu)\, q\, \mathrm{G}(\nu) = K\gamma_B^{-1}(\nu)\,[\gamma_{S\otimes B}(\nu) - \gamma_B(\nu)]\,\gamma_B^{-1}(\nu),$$

(K constante réelle, non nulle, arbitraire).

Le rapport signal sur bruit maximal à la sortie est donné par

$$(6)\quad \left[\frac{S}{B}\right]^2_{s,\,\mathrm{MAX}} = T \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\,[(\gamma_{S\otimes B}(\nu)\,\gamma_B^{-1}(\nu) - I)^2]\,\mathrm{d}\nu,$$

avec T tel que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G_I(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2T}\,G_I^2(0).$$

Dans les mêmes conditions, si q est donnée, $G(\nu)$ optimale devra satisfaire à :

$$(7)\quad \left[\gamma^{(\nu)}_{S\otimes B} - \gamma_B(\nu) - \frac{1}{K}\,\gamma_B(\nu)\,G^+(\nu)\,q\,G(\nu)\,\gamma_B(\nu)\right] \times G^+(\nu)\,q = 0.$$

Elle fournit alors un optimum sous réserve de la contrainte, mais qui peut éventuellement être celui trouvé sans contrainte.

Deux ensembles de fonctions d'entrée étant donnés, il existe en général plus d'un système quadratique optimal (sans contrainte). On s'efforcera généralement de trouver les plus simples.

On constate d'après l'expression (5) que les matrices $Q(\nu) = G^+(\nu)\,q\,G(\nu)$ et $[\gamma_{S\otimes B}(\nu) - \gamma_B(\nu)]$ ont même rang et même signature puisque $\det \gamma_B(\nu) \neq 0$. La détermination du système réside donc dans le comportement des valeurs caractéristiques de $[\gamma_{S\otimes B}(\nu) - \gamma_B(\nu)]$.

On montre qu'à partir de toute matrice symétrique réelle q, telle que :

— le rang de q est supérieur ou égal au rang de $[\gamma_{S\otimes B} - \gamma_B]$,

— la signature (p_q, n_q) de q et la signature (p_γ, n_γ) de $[\gamma_{S\otimes B}\ \&\ \gamma_B]$ sont telles que ($p_q \geqslant p_\gamma$ et $n_q \geqslant n_\gamma$) ou ($p_q \geqslant n_\gamma$ et $n_q \geqslant p_\gamma$), on peut réaliser au moins un système quadratique optimal par rapport au critère du rapport signal sur bruit : on détermine $G(\nu)$ et q sous forme d'expressions matricielles comportant un certain arbitraire. En particulier sera optimal le système constitué d'une matrice $G(\nu)$ $m|n$ et d'une matrice q $m|m$, $(m \geqslant n)$ telles que

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} G(\nu) = \varkappa(\nu)\;{}_D\gamma^{1/2}_{S.B}(\nu)\;v^+(\nu)\;\gamma_B^{-1}(\nu) \\ q = \Lambda S \tilde{\Lambda}, \end{array}\right.$$

$\varkappa(\nu)$ et $\tilde{\Lambda}$ sont des matrices $m|n$ arbitraires, la première à éléments complexes dépendant de ν, la seconde réelle et constante ; $v(\nu)$, S, ${}_D\gamma^{1/2}_{S.B}(\nu)$ sont des matrices $n|n$, la première unitaire, la seconde diagonale d'éléments 1, — 1 ou 0, la troisième diagonale à éléments réels positifs fonction de ν ; ces matrices sont telles que :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} v^+(\nu)\,[\gamma_{S\otimes B}(\nu) - \gamma_B(\nu)]\,v(\nu) = {}_D\gamma^{1/2}_{S.B}(\nu)\;S\;{}_D\gamma^{1/2}_{S.B}(\nu), \\ \varkappa^+(\nu)\,\Lambda S \tilde{\Lambda}\,\varkappa(\nu) = KS. \end{array}\right.$$

Dans (8) la matrice q est, à une congruence près, la matrice S des signes des valeurs caractéristiques de la matrice hermitienne $[\gamma_{S\otimes B} - \gamma_B]$. En particulier, si $[\gamma_{S\otimes B} - \gamma_B]$ a seulement m valeurs caractéristiques non identiquement nulles, le système précédent peut se réduire à une matrice q $m|m$ et une matrice $G(\nu)$ $m|n$: ce système sera celui ayant la matrice de multiplication d'ordre le plus faible.

Si chaque bruit est indépendant de chaque signal (ce n'est pas toujours le cas, par exemple en réverbération ou en bruit de signal) et si les bruits et les signaux sont additifs à l'entrée, un système optimal sera obtenu avec $q = I$ matrice unité d'ordre m, puisqu'alors $\gamma_{S+B} - \gamma_B = \gamma_S$. Si en outre les signaux sont identiques sur les n entrées (ils ne le sont pas toujours, en particulier s'il y a N sources indépendantes de signal ou en cas de propagation aléatoire), un système optimal est le système somme-carré-intégration (un seul quadrateur pour constituer q car γ_S est de rang 1) ; on retrouve alors les résultats de B. Picinbono concernant le filtrage optimal dans ce cas.

Si l'on se donne des contraintes sur q (par exemple son ordre ou q elle-même), on peut trouver une matrice $Q(\nu)$ (c'est-à-dire un système) optimale à partir de q (sans perte due à la contrainte) si les conditions précédentes sur le rang et la signature de q sont vérifiées. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, on pourra déterminer une matrice $G(\nu)$ optimale (optimum sous réserve de la contrainte : q donnée).

L'application en cas particulier à la corrélation permet entre autres de déterminer en corrélation par paires pour des signaux et bruits additifs et indépendants entre eux, des signaux identiques entre eux et des bruits indépendants sur les n entrées :

— la matrice complète de filtrage optimale,

— la matrice diagonale de filtrage optimale (sous réserve de la contrainte),

et de comparer les résultats entre eux. En outre, on retrouve et on étend pour des cas plus généraux de signaux et bruits les résultats de B. Picinbono concernant le filtrage optimal en corrélation à deux entrées.

On a également déterminé les cumulants de la sortie d'un système quadratique généralisé, à intégration forte, lesquels se réduisent à une forme plus simple que dans le cas général [2, 6].

IV. LE CORRÉLATEUR PAR PAIRES COMME SYSTÈME OPTIMAL.

Dans le cas général à n entrées un système optimal peut être obtenu à partir d'une matrice de filtrage à n^2 filtres et d'une matrice de multiplication formée par la matrice S des signes des valeurs caractéristiques de $[\gamma_{S\otimes B} - \gamma_B]$ et comportant donc n quadrateurs.

On peut chercher si, en acceptant une complication de la matrice q, il est possible de réduire le nombre de filtres d'entrée, le système restant optimal. Ce problème semble devoir être résolu par cas particuliers comme par exemple celui de savoir sous quelles hypothèses pour les fonctions d'entrée une matrice diagonale de filtrages associée à une matrice de corrélation par paires constitue un système optimal.

Le système doit vérifier l'égalité matricielle (5) où q est la matrice $n|n$:

$$q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & & & & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

On suppose toujours les bruits d'entrée gaussiens dans leur ensemble, stationnaires, centrés et les n ensembles bruits et signaux d'entrée stationnaires et centrés. On constate sur l'expression précédente qu'un corrélateur par paires à matrice de filtrages diagonale est optimal si les n bruits d'entrée sont indépendants, et si les deux matrices de densités spectrales d'intercorrélation sont telles que

$$\gamma_{S\otimes B}(\nu) - \gamma_B(\nu) = a^+(\nu)\, I_c \tilde{I}_c\, a(\nu) - a^+(\nu)\, a(\nu),$$

$a(\nu)$ étant une matrice diagonale à éléments fonction de ν, et I_c la matrice colonne $n|1$ dont les éléments sont tous égaux à 1.

Cette dernière expression peut encore se mettre sous la forme

$$\gamma_{S\otimes B}(\nu) - \gamma_B(\nu) = b(\nu)\, b^+(\nu) - B(\nu),$$

$b(\nu)$ étant une matrice colonne $n|1$ quelconque à éléments fonction de ν et $B(\nu)$ une matrice diagonale $n|n$ dont l'élément (i, i) est le carré du module de l'élément $(i, 1)$ de $b(\nu)$.

Les signaux ne se présentent pas alors comme des fonctions aléatoires supplémentaires s'ajoutant aux fonctions bruits. Ils sont représentés, sur les n entrées où étaient présents n bruits stationnaires indépendants, par l'apparition d'une certaine intercorrélation entre les n fonctions d'entrée, sans modification de la densité spectrale de chacune des n entrées.

A deux entrées le « corrélateur par paires » se réduit au « corrélateur ». Ce dernier constituera un système optimal pour des bruits gaussiens, stationnaires et centrés, et des fonctions bruit et signal stationnaires et centrées, de matrices de densités spectrales d'intercorrélation respectives :

$$\gamma_B(\nu) = \begin{bmatrix} \gamma_1(\nu) & 0 \\ 0 & \gamma_2(\nu) \end{bmatrix}, \qquad \gamma_{S\otimes B}(\nu) = \begin{bmatrix} \gamma_1(\nu) & \gamma(\nu) \\ \gamma^*(\nu) & \gamma_2(\nu) \end{bmatrix}.$$

Un corrélateur optimal, indépendamment des contraintes à intégration forte, sera composé des matrices

$$G(\nu) = |K|^{1/2}\, e^{i\xi(\nu)} \begin{bmatrix} \dfrac{\gamma^*(\nu)}{\gamma_1(\nu)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\gamma_2(\nu)} \end{bmatrix}, \qquad q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

avec K constante réelle arbitraire et $\xi(\nu)$ fonction réelle arbitraire de ν. Ce cas peut correspondre par exemple à la détection de signaux aléatoires présents sur deux entrées munies de contrôle automatique de gain (à constante de temps petite devant la durée des signaux), les densités spectrales du signal et du bruit d'une même entrée étant identiques à un facteur près.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Blanc-Lapierre (A.), Picinbono (B.). Propriétés statistiques du bruit de fond. — *Masson*, Paris (1961).

[2] Arquès (P. Y.). Étude de systèmes de détection de signaux par traitement quadratique généralisé et de certaines de leurs propriétés statistiques de sortie. *Thèse de Doctorat d'État*, Grenoble (1966), N° d'enregistrement aux archives originales du Centre de documentation du C. N. R. S. : A. O. 1015.

[3] Tucker (D. G.). Multiplicative arrays in radio-astronomy and sonar. — *J. Brit., IRE*, **25**, (1963), p. 113.

[4] Arquès (P. Y.), Optimalisation des systèmes de détection à n entrées de signaux aléatoires comportant un traitement quadratique et une intégration forte. *Annales Télécommunic.*, **20**, n° 5-6, (mai-juin 1965).

[5] Symboles du Calcul Matriciel. *A. F. N. O. R.*, NF X 02-110, (avril 1962).

[6] Arquès (P. Y.). Calcul des cumulants de la fonction de sortie d'un système de détection quadratique généralisé. *C. R. Acad. Sci.*, (1966), **262**, pp. 353-356.