



EXTENSION DE LA NOTION DE FONCTION D'AMBIGUITÉ A DES SIGNAUX ALÉATOIRES

par

Geneviève GARAMPON,

Georges BONNET

Assistant

Professeur

Faculté des sciences de Grenoble *

Liste des symboles utilisées

L^2	Espace des fonctions de carré sommable.
\forall	Quel que soit.
$ $	Module.
$\ \ $	Norme.
$\langle F, G \rangle$	Produit scalaire des éléments fonctionnels F et G.
\in	Appartient à.
$\langle \rangle$	Valeur moyenne.
\Rightarrow	D'où résulte.
$(*)$	Produit de convolution.
\neq	Différent de.
\mathbf{R}	Ensemble des nombres réels.
$E \{ \}$	Espérance mathématique.
$\Gamma(t, t')$	Covariance de la fonction aléatoire $X(t)$.
σ^2	Variance de la fonction aléatoire $X(t)$.
$\tilde{C}(\tau)$	Covariance réduite de la fonction aléatoire $X(t)$.
δ_{ij}	Symbole de Kronecker.
$\Pi_T(t)$	Fonction projectrice.
$\Lambda_{2T}(t)$	Fonction de corrélation de la fonction projectrice.
Ent	Partie entière de.
$\mathcal{F}(f)$	Transformée de Fourier de f .
\rightleftarrows	Transformation de Fourier.
o	Reste de l'ordre de.
$\gamma(\nu)$	Distribution spectrale énergétique de $X(t)$.

I. POUVOIR DE RÉOLUTION ET FONCTIONS D'AMBIGUITÉ.

I.1. Introduction.

Les performances d'un système de détection active, du type sonar ou radar, se traduisent par le comportement de celui-ci face aux deux problèmes suivants :

- la *détection* proprement dite, c'est-à-dire la perception de l'écho réfléchi par une cible, cet écho étant noyé dans le bruit apporté par le canal de transmission émetteur-cible-récepteur. En cela, les *considérations énergétiques* s'avèrent primordiales ;
- le pouvoir de résolution relatif à des cibles de

distances et de vitesses radiales voisines. Ce sont ici des considérations de *forme de signal* qui dominent. Sous cet aspect, on se trouve conduit à rechercher la « *potentialité* » d'une forme de signal en se plaçant dans des conditions idéales, aux termes desquelles sont considérées comme négligeables tant la dégradation apportée par le bruit que les déformations subies pendant la transmission. C'est alors à la *fonction d'ambiguïté* qu'est dévolu le rôle de caractériser quantitativement ce pouvoir séparatif irréductible d'un signal.

Nous rappellerons succinctement quelques aspects essentiels de la fonction d'ambiguïté, puis nous nous attacherons à étendre cette notion au cas de *signaux aléatoires*. Après quoi, nous rechercherons dans quelle mesure l'apport de ces signaux aléatoires permet de simplifier le délicat problème de synthèse d'une fonction d'ambiguïté, tout en respectant certaines contraintes technologiques considérées comme souhaitables.

I.2. Forme analytique de l'écho.

En schématisant à l'extrême le processus de formation de l'écho, on adopte le modèle d'un réflecteur ponctuel animé de la vitesse \vec{v} (la considération du mouvement tangent amène à la traiter comme uniforme) et situé en \vec{r}_0 à la date de référence $t = 0$ de l'émission. Si $S(\vec{r}, t)$ représente au point r le signal scalaire issu de l'émetteur placé à l'origine o des coordonnées, l'équation de propagation dans le milieu isotrope de célérité c , soit :

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] S = 0,$$

conduit à décrire l'écho \bar{S} perçu en o par la relation

$$\bar{S}\left(t + \frac{r}{c}\right) = \frac{\text{const.}}{r^2} S\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} t.$$

Dans l'hypothèse où la vitesse radiale

$$V_r = \frac{(\vec{V}, \vec{r})}{V_r} = \alpha c,$$

* Centre d'Étude des Phénomènes Aléatoires (CEPHAG), (associé au C. N. R. S.), 46, avenue Félix-Viallet. 38 — Grenoble.

est faible devant $c(\alpha \ll 1)$, et où r_0 est grand devant la distance parcourue par la cible pendant la durée de son illumination, on obtient la représentation simplifiée du signal-écho (à un facteur près qui sera négligé dans tout ce qui suit) :

$$\bar{S}(t) = S(kt - \theta),$$

avec

$$k = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \# 1 - 2\alpha \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2|r_0|}{c(1+\alpha)} \# \frac{2r_0}{c} (1-\alpha).$$

L'action du canal sur S se traduit donc par une affinité et une translation. D'autre part, dans le domaine de la détection acoustique ou électromagnétique, les conditions expérimentales sont telles que les signaux s'obtiennent par modulation et possèdent un spectre étroit autour d'une fréquence centrale ν_0 . Dans ces conditions, l'emploi du signal analytique de Gabor-Ville [1, 2] s'avère précieux : on écrit pour le signal d'émission ($r = 0$).

$$S(\vec{0}, t) = \text{Re } X(t) = \text{Re } [A(t) e^{2\pi i \nu_0 t}],$$

où $A(t)$ est dénommée « amplitude complexe » du signal analytique $X(t)$. Les différentes hypothèses adoptées permettent alors une formulation très simple de l'écho [3] qui apparaît comme la résultante :

- d'une translation dans le temps : le « retard » ;
- d'une translation en fréquence, le « décalage Döppler », $\varphi = 2\alpha\nu_0$.

D'où l'expression approchée du signal analytique associé à l'écho :

$$\bar{X}(t) = A(t - \theta) \exp 2\pi i(\nu_0 + \varphi)(t - \theta),$$

(le signe — devant θ permet de considérer ce « retard » comme positif).

I.3. Fonction d'ambiguïté.

Pour étudier le problème de la séparation entre échos, supposons que le récepteur ait à traiter conjointement :

- $X_1(t)$, écho renvoyé par une cible de caractéristiques retard-Döppler (θ, φ) ;
- $X_2(t)$, écho renvoyé par une seconde cible de caractéristiques ($\theta + \tau, \varphi + f$).

Faisons les hypothèses suivantes sur $X(t)$: tout d'abord il s'agit d'une fonction déterministe ; d'autre part, le fait que le signal fourni par l'émetteur est nécessairement d'énergie finie implique que ce signal analytique $X(t)$, ainsi que l'amplitude complexe $A(t)$ sont des fonctions de L^2 (carré sommable).

Traduire la différence entre X_1 et X_2 revient à considérer une *distance* entre ces fonctions ; dans l'hypothèse où les échos sont traités dans un récepteur quadratique, cette dernière quantité se confond

alors avec la distance au sens du carré de la norme dans L^2 soit

$$D(X_2, X_1) = \|X_2 - X_1\|^2 = \|X_2\|^2 + \|X_1\|^2 - 2\text{Re} \langle X_2, X_1 \rangle.$$

Or l'expression de $X_1(t)$, par exemple,

$$X_1(t) = A(t - \tau) e^{2\pi i(\nu_0 + \varphi)(t - \tau)},$$

montre que les normes des échos sont indépendantes du retard ou du décalage Döppler : $\|X_1\|^2 = \|X_2\|^2 = \|A\|^2$. Il en résulte que c'est le produit scalaire $\langle X_2, X_1 \rangle$ qui traduit seul l'écart entre des échos ayant subi des retards ou des décalages Döppler différents. Il faut donc considérer :

$$\begin{aligned} \langle X_2, X_1 \rangle &= \int_{R^1} X_2^*(t) X_1(t) dt \\ &= e^{2\pi i(\nu_0 + \varphi + f)\tau} \int_{R^1} A(t - \theta) A^*(t - \theta - \tau) \times \\ &\quad e^{-2\pi i f(t - \theta)} dt. \end{aligned}$$

Le facteur de phase $e^{2\pi i(\nu_0 + f + \varphi)\tau}$ représente un découpage très fin à une fréquence élevée (sauf pour des valeurs très faibles de τ qu'il serait illusoire de considérer) et, par là-même, ne peut intervenir dans le problème de résolution. Il s'ensuit que l'aptitude d'un système de détection à séparer les échos est traduite par la seule quantité

$$(1) \quad \Psi(\tau, f) = \int_{R^1} A(t) A^*(t - \tau) e^{-2\pi i f t} dt.$$

C'est la *fonction d'ambiguïté de Woodward* [4] dont on trouvera une étude détaillée dans [5]. Le terme « ambiguïté » traduit le fait que deux échos seront d'autant plus difficiles à discerner — et donneront lieu à une interprétation « ambiguë » dans certains domaines de l'espace (τ, f) — que $2 \text{Re} \langle X_2, X_1 \rangle$ (et par suite Ψ) sera plus proche de $\|A\|^2$, et donc la distance plus proche de zéro. $\Psi(\tau, f)$ dépend uniquement de l'amplitude complexe $A(t)$, donc est liée essentiellement à la *forme du signal*.

Il n'apparaît pas inutile de bien préciser ici un point de vue souvent passé sous silence dans l'abondante littérature traitant de ce sujet : c'est que, la notion de fonction d'ambiguïté découlant de la distance dans L^2 , son emploi n'a de sens *qu'en association avec un traitement quadratique*. Il serait donc vain de tirer des conclusions à partir de la structure de cette fonction d'ambiguïté s'il devait s'agir de les appliquer à un récepteur autre que quadratique.

L'inégalité de Schwartz montre que

$$|\Psi(\tau, f)| \leq \Psi(0, 0) = \|A\|^2,$$

ce qui conduit à utiliser une fonction réduite valant 1 pour $\tau = f = 0$, soit

$$(1a) \quad \chi(\tau, f) = \Psi(\tau, f) / \Psi(0, 0),$$

et douée de la propriété d'être bornée et normée à l'unité :

$$|\chi(\tau, f)| \leq 1, \quad \text{et} \quad \int_{R^2} |\chi|^2 d\tau df = 1$$





Il en résulte immédiatement que $|\Psi|^2$, fonction non négative et bornée, peut être interprétée comme la densité de la répartition de la mesure $\|A\|^2$ (carré de l'énergie du signal) dans le plan retard-Döppler. D'autres interprétations peuvent être trouvées à la fonction d'ambiguïté, qu'il n'est pas inutile d'évoquer rapidement avant d'en généraliser le domaine d'application.

1.3.1. Ambiguïté et incertitude.

La relation d'incertitude temps-fréquence qui découle *uniquement* des propriétés de la transformation de Fourier exprime, d'une manière apparemment indépendante, l'impossibilité d'une localisation absolue, à la fois dans le temps t et en fréquence ν : on a la relation entre premiers moments

$$\Delta t \cdot \Delta \nu \geq 1/4\pi.$$

Ce fait est indépendant de toute hypothèse probabiliste mais peut conduire, par analogie avec la mécanique quantique, à considérer t et ν comme des *observables* liées aux opérateurs \mathbf{t} et $\mathbf{\nu}$; pour être en accord avec la relation d'incertitude, il convient alors d'adopter la relation de commutation

$$[\mathbf{t}, \mathbf{\nu}] = i/2\pi.$$

Dans le même esprit, le signal est à considérer comme l'élément $|X\rangle$ d'un espace vectoriel et, dans une base $|t\rangle$ continue, orthonormée et complète où \mathbf{t} est diagonal, $(\mathbf{t}|t\rangle = t|t\rangle)$ sa « représentation — t » est justement $X(t) = \langle t|X\rangle$. Il en résulte que la valeur moyenne de tout opérateur \mathbf{Q} s'exprime, après le choix du signal $|X\rangle$, par

$$\langle \mathbf{Q} \rangle = \frac{\langle X|\mathbf{Q}|X\rangle}{\langle X|X\rangle} = \frac{1}{\|X\|^2} \langle X|\mathbf{Q}|X\rangle.$$

En particulier, on peut ainsi déterminer la fonction caractéristique de la répartition conjointe de \mathbf{t} et $\mathbf{\nu}$; en utilisant le lemme de Glauber, nous avons

$$\begin{aligned} \Phi(u, \nu) &= \langle e^{i(u\mathbf{t} + \nu\mathbf{\nu})} \rangle = \\ &= \langle e^{iut} e^{i\nu\nu} e^{-[iut, i\nu\nu]/2} \rangle = \\ &= \frac{e^{iuv/4\pi}}{\langle X|X\rangle} \langle X|e^{iut} e^{i\nu\nu}|X\rangle. \end{aligned}$$

La relation de commutation permet de déterminer l'élément de matrice en représentation — t de l'opérateur $e^{i\nu\nu}$ dénommé « translation-temps » :

$$\langle t'|e^{i\nu\nu}|t''\rangle = \delta(t' - t'' + \nu/2\pi).$$

Comme, d'autre part, $\langle t|e^{iut}|t'\rangle = e^{iut} \delta(t - t')$, l'usage des relations de fermeture conduit immédiatement à

$$\begin{aligned} \Phi(u, \nu) &= \frac{e^{iuv/4\pi}}{\langle X|X\rangle} \int_{R^3} \langle X|t\rangle \langle t|e^{iut}|t'\rangle \\ &= \frac{e^{iuv/4\pi}}{\langle X|X\rangle} \int_{R^3} X^*(t) X\left(t + \frac{\nu}{2\pi}\right) e^{iut} dt. \end{aligned}$$

Utilisant l'écriture $X(t) = A(t) e^{2\pi i\nu_0 t}$, nous obtenons alors

$$\Phi(u, \nu) = \frac{e^{i(\nu_0 + \frac{\nu}{2\pi})\nu}}{\|A\|^2} \int_{R^1} A(t) A^*\left(t - \frac{\nu}{2\pi}\right) e^{iut} dt,$$

ce qui montre, compte tenu de la suppression du facteur de phase dans l'expression (1) de $\Psi(\tau, f)$ que

$$\chi(\tau, f) \equiv \Phi(-2\pi f, 2\pi\tau).$$

Ainsi, la fonction d'ambiguïté réduite s'assimile-t-elle à la *fonction caractéristique de la répartition conjointe temps-fréquence*, ce qui la relie directement à la relation d'incertitude. Un tel point de vue rejoint celui de J. Ville [2], et il est remarquable de constater combien la méthode intuitive de cet auteur fut en avance sur le formalisme de la mécanique quantique.

1.3.2. Ambiguïté et filtre adapté.

Se plaçant au point de vue des réalisations pratiques, plusieurs auteurs — voir l'excellente synthèse [6] — rattachent la fonction d'ambiguïté à l'emploi d'une détection cohérente.

L'involution $X \rightarrow X^\#$, par laquelle

$$X^\#(t) = X^*(-t),$$

pourrait être nommé « *signal adapté* » à $X(t)$, permet de définir *a priori* le « *filtre adapté* » au même signal par le produit de convolution

$$F[X] = X^\# * X.$$

Ce filtre a donc pour réponse percussionnelle le signal adapté $X^\#(t)$. Il se trouve que le filtre adapté vient se confondre avec le filtre optimal relatif au critère de rapport signal/bruit, dans le cas, très restrictif mais commode à considérer, d'un bruit à corrélation microscopique et de conditions idéalisées pour lesquelles le principe de causalité n'entretrait pas en ligne de compte. L'emploi du filtre adapté correspond bien à un traitement quadratique, $[(X^\# * X)]$ est une forme hermitique définie positive] et, comme nous l'avons fait remarquer, la considération de la fonction d'ambiguïté est alors tout à fait légitime.

On peut montrer que, si un signal est transmis à travers un filtre de réponse percussionnelle $H(t)$, c'est le même filtre qui opère sur son signal analytique et c'est le filtre associé de réponse percussionnelle $e^{-2\pi i\nu_0 t} H(t)$ qui opère sur l'amplitude complexe (ν_0 étant la fréquence porteuse). Le filtre adapté à $X(t) = A(t) e^{2\pi i\nu_0 t}$ a pour réponse percussionnelle $X^\#(t) = A^\#(t) e^{2\pi i\nu_0 t}$, et par suite le filtre associé qui opère sur les amplitudes complexes a pour réponse percussionnelle $A^\#(t) = A^*(-t)$ [12].

Considérons alors un écho défini par un retard τ et un décalage Döppler f ; il a pour amplitude complexe, relativement à la même fréquence porteuse ν_0 ,

$$\begin{aligned} A'(t) &= e^{-2\pi i\nu_0 t} A(t - \tau) e^{2\pi i(\nu_0 + f)(t - \tau)} = \\ &= A(t - \tau) e^{-2\pi i(\nu_0 + f)\tau} e^{2\pi i f t}. \end{aligned}$$



Dans ces conditions, la valeur à la date de référence $t = 0$ de l'amplitude complexe de la réponse du filtre adapté excité par cet écho s'exprime par :

$$(A^{\#} * A')_{(0)} = e^{-2\pi i(\nu_0 + f)\tau} \int_{R^1} A^*(t) A(t - \tau) e^{2\pi i f t} dt.$$

En supprimant le facteur de phase, on trouve que cette réponse coïncide avec la conjuguée $\psi^*(\tau, f)$ de la fonction d'ambiguïté (1).

Une telle interprétation physique s'avère particulièrement commode du point de vue pratique, à cause de l'emploi très répandu des filtres adaptés.

Cependant, outre sa lourdeur manifeste et son cadre restreint, elle présente l'inconvénient de ne pas mettre en relief l'aspect du pouvoir de séparation lié à la notion fort simple de distance qui, de notre point de vue, caractérise au mieux la fonction d'ambiguïté : ici, les grandeurs τ et f ne représentent plus explicitement des différences de retards et des différences de décalages Döppler entre deux échos. Il serait préférable à ce point de vue de parler de filtre adapté à un certain retard τ et à un certain décalage Döppler f entre deux échos.

En tout état de cause, l'interprétation évoquée ne saurait se substituer à une définition.

Notons enfin que la notion de fonction d'ambiguïté a pu être étendue au diagramme de rayonnement des antennes [7].

II. NOTION DE FONCTION D'AMBIGUÏTÉ ÉTENDUE A DES SIGNAUX ALÉATOIRES.

Il est tentant de songer à utiliser une notion se rattachant à celle de fonction d'ambiguïté dans des cas où l'amplitude complexe du signal (de fréquence porteuse ν_0) est une fonction aléatoire. Il convient cependant de bien préciser le sens qu'on attachera alors à une telle notion : ainsi, il est bien évident que le signal émis, de même que les différents échos qu'on en perçoit, résultent tous d'une même réalisation $A_k(t)$ de la fonction aléatoire $A(t)$. Dans ces conditions, on est pleinement, en droit (sous réserve de convergence) d'utiliser la notion de distance au sens de la norme dans L^2 — et partant celle de fonction d'ambiguïté — puisque $A_k(t)$ est de fait une fonction déterministe pour une émission donnée et un appareil émetteur déterminé.

S'il s'agit au contraire de dégager des propriétés générales portant sur une série d'émissions ou sur un lot d'appareils de même fabrication, il nous faut alors raisonner sur l'ensemble des réalisations de $A(t)$. C'est ainsi que nous commencerons par considérer l'espérance mathématique de la fonction d'ambiguïté $E \{ \Psi(\tau, f) \}$; cette quantité n'aura bien entendu une signification pratique que dans la mesure où elle représente une grandeur centrale autour de laquelle les écarts statistiques demeurent relativement faibles sur l'ensemble des réalisations. C'est pourquoi il est en outre nécessaire d'étudier l'importance de la variance $E \{ \Psi^2 \} - |E \{ \Psi \}|^2$ comparativement à cette grandeur centrale. Pré-

cisons bien le sens physique de ces deux grandeurs : l'espérance traduit le comportement moyen d'une classe d'appareils, la variance (ou fluctuation) traduisant le défaut de reproductibilité.

Intuitivement, le fait qu'une moyenne temporelle intervienne dans la détermination d'une fonction d'ambiguïté nous fait pressentir que les écarts statistiques seront d'autant plus faibles (et la notion d'espérance d'ambiguïté d'autant plus significative) que la durée du signal sera plus importante et simultanément la composante aléatoire de $A(t)$ dotée d'une certaine stationnarité. C'est ce que nous nous attacherons à préciser.

II.1. Espérance d'ambiguïté.

Prenons pour amplitude complexe la quantité

$$(2) \quad A(t) = P(t) + X(t) Q(t),$$

où $P(t)$ et $Q(t)$ sont des fonctions déterministes, supposées de L^2 , de telle façon que leurs fonctions d'ambiguïté existent suivant la définition (1) ; ainsi

$$\Psi_P(\tau, f) = \int_{R^1} P(t) P^*(t - \tau) e^{-2\pi i f t} dt,$$

et de même $Q(t) \rightarrow \Psi_Q(\tau, f)$. $X(t)$ est une fonction aléatoire (f. a.), de second ordre ($E \{ |X(t)|^2 \} < +\infty$) définie sur la catégorie d'épreuves \mathcal{E} . Nous la supposons centrée [dans le cas contraire $Q(t) E \{ X(t) \} \in L^2$ serait inclus dans $P(t)$]. Nous définissons alors sur la même catégorie \mathcal{E} la fonction aléatoire d'ambiguïté décrite par la relation (1) et, compte tenu de (2) et de ce que $E \{ X(t) \} = 0 \forall t$, son espérance mathématique s'exprime par

$$(3) \quad E \{ \Psi(\tau, f) \} = \Psi_P(\tau, f) +$$

$$\int_{R^1} \Gamma(t, t - \tau) Q(t) Q^*(t - \tau) e^{-2\pi i f t} dt,$$

où $\Gamma(t, t')$ est la covariance de $X(t)$.

$$(4) \quad \Gamma(t, t') = E \{ X(t) X^*(t') \}.$$

L'inégalité de Schwartz donne alors

$$|E \{ \Psi(\tau, f) \}| \leq E \{ \Psi(0, 0) \}.$$

Il est préférable de réduire à l'unité la valeur à l'origine de (3), ce qui nous amène à utiliser de préférence l'espérance mathématique sur \mathcal{E} de la fonction d'ambiguïté réduite, décrite par :

$$(5) \quad \chi(\tau, f) = \frac{E \{ \Psi(\tau, f) \}}{E \{ \Psi(0, 0) \}} =$$

$$\frac{\Psi_P(\tau, f) + \int_{R^1} \Gamma(t, t - \tau) Q(t) Q^*(t - \tau) e^{-2\pi i f t} dt}{\int_{R^1} [|P(t)|^2 + E \{ |X(t)|^2 \} |Q(t)|^2] dt},$$

d'où

$$|\chi(\tau, f)| \leq \chi(0, 0) = +1.$$

Nous nommerons cette quantité $\chi(\tau, f)$ « espérance d'ambiguïté ».

Il semble qu'on ne puisse déduire des renseigne-



ments intéressants de cette définition qu'en formulant quelques hypothèses sur l'allure de la covariance, et nous ne nous attacherons ici à son étude que dans le cas particulier où $\Gamma(t, t')$ est stationnaire. D'ailleurs la présence du facteur $Q(t)$ permet, à partir de ce cas particulier, de traiter toute une classe de fonctions aléatoires non stationnaires. Il est bon auparavant de nous pencher sur un exemple bien connu pour lequel $\Gamma(t, t')$ n'est pas stationnaire : celui du signal binaire latticiel.

II.2. Signal binaire latticiel.

Considérons une partition de l'axe des temps en intervalles adjacents, mais disjoints, θ_j de durée commune θ , ceci à partir d'une date de référence

$$t_0 \in \left[-\frac{\theta}{2}, +\frac{\theta}{2} \right].$$

Donc

$$\theta_j = \left[t_0 + \left(j - \frac{1}{2} \right) \theta, t_0 + \left(j + \frac{1}{2} \right) \theta \right],$$

pour j entier de $-\infty$ à $+\infty$. On construit une fonction aléatoire $X(t)$ de module 1 (donc de second ordre) par tirages au sort indépendants du signe de $X(t)$ dans chaque θ_j et l'on obtient ainsi

$$(6) \quad X(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_j \Pi_{\theta/2}(t - t_0 - j\theta),$$

où les ε_j sont des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire qui prend les valeurs ± 1 ou -1 avec des probabilités égales ; d'où résulte

$$(7) \quad E \{ \varepsilon_j \} = 0, \quad E \{ \varepsilon_j \varepsilon_k \} = \delta_{jk}.$$

Π est la fonction projectrice, définie par

$$(8) \quad \Pi_T(t) \begin{cases} = 1, & t \in [-T, +T], \\ = 0, & \text{si non,} \end{cases}$$

et dont nous utiliserons la propriété suivante :

$$(9) \quad \Pi_T(t - \tau) \Pi_T(t - \tau') = \Pi_{2T}(\tau - \tau') \Pi_W \left(t - \frac{\tau + \tau'}{2} \right),$$

avec

$$W = T - \frac{1}{2} |\tau - \tau'|,$$

$X(t)$ est donc centrée et sa covariance s'exprime, étant donné (7) et (9), par :

$$(10) \quad \Gamma(t, t - \tau) = E \{ X(t) X(t - \tau) \} = \Pi_{\theta}(\tau) \sum_j \Pi_{(\theta-|\tau|)/2}(t - t_0 - \tau/2 - j\theta).$$

On a bien $\Gamma(t, t) = E \{ X^2 \} = +1$ et l'on constate en outre que cette covariance n'est pas stationnaire.

Prenons pour amplitude complexe d'un signal la fonction de support $[-T, +T]$:

$$(11) \quad A(t) = \Pi_T(t) X(t),$$

construite à partir de $X(t)$ définie en (6).

Nous obtenons un signal de durée $2T$, le signal

binaire latticiel tronqué, dont la figure 1 montre une réalisation. La relation (11) correspond dans (2) à

$$(12) \quad P(t) \equiv 0 \quad \text{et} \quad Q(t) = \Pi_T(t).$$

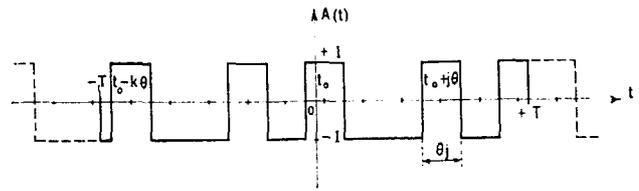


FIG. 1. — Amplitude complexe du signal binaire latticiel tronqué.

Deux cas présentent un intérêt pratique :

a) Ou bien le découpage par Π_T est lié invariablement à t_0 et des considérations technologiques conduisent alors à choisir $t_0 = 0$ et $2T$ multiple impair de θ

$$(13) \quad 2T = (2k + 1) \theta \quad (K \text{ entier positif}).$$

Le signal est formé de $2K + 1$ échantillons indépendants $\varepsilon_j \Pi_{\theta/2}(t - j\theta)$, avec j variant de $-K$ à $+K$, et l'on a, en portant (10) et (12) dans (5) :

$$\chi(\tau, f) = \frac{1}{2T} \Pi_{\theta}(\tau) \sum_{j=-K}^{+K} \int_{R^1} e^{-2\pi i f t} \times \Pi_{(\theta-|\tau|)/2}(t - \tau/2 - j\theta) dt.$$

En utilisant la transformée de Fourier sin $2\pi f A/\pi f$ de $\Pi_A(t)$, on retrouve ainsi le résultat connu [8], compte tenu de (13) :

$$(14) \quad \chi(\tau, f) = \frac{1}{2k + 1} \Lambda_{\theta}(\tau) \frac{\sin \pi f(\theta - |\tau|)}{\pi f(\theta - |\tau|)} \times \frac{\sin (2k + 1) \pi f \theta}{\sin \pi f \theta} e^{-\pi i f \tau}.$$

On a posé (voir Fig. 2) :

$$(15) \quad \Lambda_{\theta}(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta} \right) \Pi_{\theta}(\tau) \equiv \frac{1}{\theta} (\Pi_{\theta/2} * \Pi_{\theta/2})(\tau),$$

fonction proportionnelle au carré de convolution de $\Pi_{\theta/2}(t)$ ou encore — Π étant paire — à sa fonction de corrélation (on nomme parfois Λ « fonction triangle »).

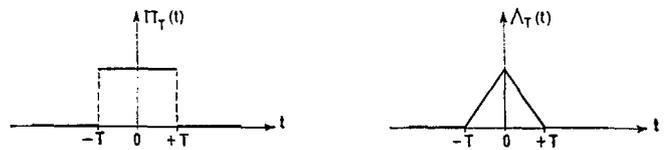


FIG. 2. — Fonction projectrice Π et fonction Λ associée.

b) Ou bien le découpage est indépendant de t_0 sur chaque épreuve, ce qui revient à considérer t_0 comme aléatoire à distribution uniforme dans $[-\theta/2, +\theta/2]$. La covariance s'obtient par l'espérance mathématique de (10) relativement à la variable t_0 , ce qui donne

$$(16) \quad E \{ X(t) X(t - \tau) \} = E_{t_0} \{ \Gamma(t, t - \tau) \} = \Pi_{\theta}(\tau) \times \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\theta/2}^{+\theta/2} \Pi_{(\theta-|\tau|)/2}(t - t_0 - (\tau/2) - j\theta) dt_0 = (1 - |\tau|/\theta) \Pi_{\theta}(\tau) = \Lambda_{\theta}(\tau).$$



Il s'agit dès lors d'une *covariance stationnaire* et ce cas entre dans le cadre de l'étude générale que nous abordons maintenant.

III. CAS DES FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES.

Si $X(t)$ est stationnaire, sa variance σ^2 est constante et sa covariance $\Gamma(t, t')$ ne dépend que de $\tau = t - t'$. Introduisons la covariance réduite (que nous supposons de carré sommable)

$$(17) \quad C(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \Gamma(t, t - \tau), \\ = \frac{1}{\sigma^2} E \{ X(t) X^*(t - \tau) \} \Rightarrow C(0) = +1,$$

et portons-la dans (5); l'espérance d'ambiguïté devient

$$(18a) \quad \chi(\tau, f) = \frac{1}{\langle |A|^2 \rangle} [\Psi_p(\tau, f) + \sigma^2 C(\tau) \Psi_q(\tau, f)],$$

où

$$\langle |A|^2 \rangle = \int_{R^1} [|P(t)|^2 + \sigma^2 |Q(t)|^2] dt.$$

Une propriété très importante ressort de cette formule: le « pouvoir de résolution en Döppler », notion associée à $\chi(0, f)$, est *indépendant de la loi de la fonction aléatoire stationnaire* $X(t)$; seule la variance intervient dans ce pouvoir de résolution, de par le poids qu'elle apporte à la superposition $\Psi_p(0, f) + \sigma^2 \Psi_q(0, f)$. Par contre, la loi temporelle de $X(t)$ intervient directement dans $\chi(\tau, 0)$, donc dans le « pouvoir de résolution en distance ».

On ne peut manquer d'apercevoir ici la grande facilité qu'est susceptible d'apporter au *problème de synthèse* d'une fonction d'ambiguïté l'utilisation d'une composante aléatoire: le plus simple semble d'abord de prendre $P(t) = 0$, ce qui réduit (18a) à

$$(18b) \quad \chi(\tau, f) = C(\tau) \chi_q(\tau, f), \quad (P \equiv 0).$$

On peut alors songer à déterminer $Q(t)$ de manière à obtenir pour $\chi(\tau, f)$ la loi désirée d'évolution en Döppler; il reste ensuite à déterminer la covariance de la composante aléatoire $X(t)$, de façon à ajuster la loi d'évolution en distance. Enfin, l'addition d'un signal $P(t)$ peut permettre d'effectuer des corrections résiduelles. Un tel problème est trop vaste pour être traité ici et, désireux de dégager quelques propriétés significatives des signaux aléatoires, nous nous bornerons désormais à traiter le cas

$$P(t) \equiv 0 \quad Q(t) = \Pi_T(t) \text{ (projectrice)}.$$

Un tel choix s'impose pour des raisons de simplicité: mais on sait également quel grand intérêt technologique représente une puissance d'antenne constante — du moins en moyenne — pendant toute la durée $2T$ de l'émission.

III.1. Signal aléatoire de puissance moyenne constante et de durée $2T$.

Toujours dans l'hypothèse où $X(t)$ est aléatoire stationnaire centrée, nous adoptons donc

$$A(t) = X(t) \Pi_T(t).$$

Alors, étant donné que

$$\chi_q(\tau, f) = \frac{1}{2T} \int_{R^1} e^{-2\pi i f t} \Pi_T(t) \Pi_T(t - \tau) dt, \\ = \frac{1}{2T} \Pi_{2T}(\tau) \int_{R^1} e^{-2\pi i f t} \Pi_{T-|\tau|/2} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) dt, \\ = \frac{1}{2T} \Pi_{2T}(\tau) \frac{\sin \pi f (2T - |\tau|)}{\pi f} e^{-\pi i f \tau},$$

nous obtenons, en portant dans (18b) et compte tenu de l'écriture (15):

$$(19a) \quad \chi(\tau, f) = C(\tau) \Lambda_{2T}(\tau) \frac{\sin \pi f (2T - |\tau|)}{\pi f (2T - |\tau|)} e^{-\pi i f \tau}.$$

Nous ne nous intéresserons là encore qu'aux variations de $|\chi(\tau, f)|$,

$$(19b) \quad |\chi(\tau, f)|^2 = |C(\tau) \Lambda_{2T}(\tau)|^2 \left(\frac{\sin \pi f (2T - |\tau|)}{\pi f (2T - |\tau|)} \right)^2.$$

Il apparaît ainsi que:

a) le pouvoir de résolution en Döppler *dépend uniquement de la durée* $2T$ du signal. A la limite, on a: $\lim_{T \rightarrow \infty} |\chi(\tau, f)|^2 = |C(\tau)|^2 \delta_{f,0}$, ($\delta_{f,0}$ nul pour $f \neq 0$; $= 1$ pour $f = 0$);

b) dans l'hypothèse — qu'il s'avèrera nécessaire de respecter — où $2T$ est grand devant la mémoire statistique du signal, alors le pouvoir de résolution en distance *dépend uniquement de la covariance*.

III.2. Variance de la fonction d'ambiguïté.

Le calcul de la valeur quadratique moyenne $E \{ |\Psi|^2 \}$ nécessite la considération du moment réduit du quatrième ordre

$$(20) \quad M(\tau, \alpha) = \frac{1}{\sigma^4} E \{ X(t) X^*(t - \tau) \times \\ X^*(t - \alpha) X(t - \tau - \alpha) \}.$$

Celui-ci est tel que $M(\tau, \alpha) = M(\alpha, \tau)$ et, étant donné les propriétés de stationnarité,

$$M(-\tau, -\alpha) = M(\tau, \alpha);$$

$$M(-\tau, \alpha) = M(\tau, -\alpha) = M^*(\tau, \alpha).$$

Partant de la définition (1) et de la propriété (9), nous avons tout d'abord

$$\psi(\tau, f) = \Pi_{2T}(\tau) \int_{R^1} \Pi_{T-|\tau|/2} \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \times \\ X(t) X^*(t - \tau) e^{-2\pi i f t} dt,$$

ce qui conduit pour $|\Psi|^2$ à une intégrale double en t et t' . Nous posons $\alpha = t - t'$ puis $\beta = t - \tau/2$, et une première intégration en β fait apparaître le carré de convolution [cf. (15)]:

$$\Pi_{T-|\tau|/2} * \Pi_{T-|\tau|/2} = (2T - |\tau|) \Lambda_{2T-|\tau|}(\alpha).$$

Un calcul très simple conduit ainsi à l'expression suivante :

$$(21) \quad E \{ |\psi(\tau, f)|^2 \} = 2T\sigma^4 \Lambda_{2T}(\tau) \int_{R^1} e^{-2\pi i/\alpha} \times \Lambda_{2T-|\tau|}(\alpha) M(\tau, \alpha) d\alpha.$$

Au lieu de considérer la variance de $\Psi(\tau, f)$, il est préférable de faire intervenir une grandeur réduite ; nous nommerons *fluctuation* l'écart moyen quadratique relatif, rapporté au point origine où $\lambda(0, 0) = 1$ soit

$$\varepsilon(\tau, f) = \left[\frac{E \{ |\psi(\tau, f)|^2 \} - |E \{ \psi(\tau, f) \}|^2}{|E \{ \psi(0, 0) \}|^2} \right]^{1/2}, \\ = \left[\frac{1}{4T^2 \sigma^4} E \{ |\psi(\tau, f)|^2 \} - |\chi(\tau, f)|^2 \right]^{1/2}.$$

Or, si nous considérons que $\Lambda_{2T-|\tau|}(\alpha)$ a pour transformée de Fourier

$$(22) \quad \lambda_{2T-|\tau|}(f) = \mathcal{F} \Lambda_{2T-|\tau|}(\alpha) = |2T - |\tau|| \left[\frac{\sin \pi f(2T - |\tau|)}{\pi f(2T - |\tau|)} \right]^2,$$

et que $\Lambda_{2T}^2(\tau) = \frac{1}{2T} \Lambda_{2T}(\tau) |2T - |\tau||$, nous pouvons écrire d'après (19b) :

$$|\chi(\tau, f)|^2 = \frac{1}{2T} |C(\tau)|^2 \Lambda_{2T}(\tau) \int e^{-2\pi i/\alpha} \Lambda_{2T-|\tau|}(\alpha) d\alpha.$$

Alors, compte tenu de (21), nous obtenons comme expression de la fluctuation

$$(23) \quad \varepsilon(\tau, f) = \sqrt{\frac{\Lambda_{2T}(\tau)}{2T} \int_{R^1} e^{-2\pi i/\alpha} \Lambda_{2T-|\tau|}(\alpha) [M(\tau, \alpha) - |C(\tau)|^2] d\alpha}.$$

Dans la mesure où l'intégrale demeure bornée lorsque $T \rightarrow \infty$, ce qui, nous le verrons, correspond à la majorité des cas intéressants, $\varepsilon(\tau, f)$ décroît comme $1/\sqrt{T}$ lorsque $T \rightarrow \infty$.

A l'opposé

$$\lim_{T \rightarrow 0} \varepsilon(\tau, f) = \Lambda_{2T}(\tau) \sqrt{M(\tau, 0) - |C(\tau)|^2}, \quad \forall f.$$

Pour que l'emploi de signaux aléatoires ait une valeur pratique, il convient qu'on puisse caractériser un signal par la seule valeur moyenne $\chi(\tau, f)$; il faut par suite que la fluctuation ε soit faible partout : nous en déduisons la nécessité d'utiliser des signaux de longue durée, en prenant $2T$ très grand devant la mémoire statistique de $X(t)$, autrement dit, très grand devant son « temps de corrélation ».

Dans la plupart des cas, il s'avère utile de calculer l'intégrale dans (23) par l'intermédiaire de la transformée de Fourier de $M(\tau, \alpha)$:

$$(24) \quad \mu(\tau, \nu) = \int_{R^1} e^{-2\pi i\nu\alpha} M(\tau, \alpha) d\alpha.$$

De son côté, la transformée de Fourier de $\Lambda_{2T-|\tau|}(\alpha)$ est celle, $\lambda_{2T-|\tau|}(\nu)$, donnée par (22). Le théorème

de Plancherel conduit alors à l'expression suivante de ε :

$$(25) \quad \varepsilon(\tau, f) = \sqrt{\frac{\Lambda_{2T}(\tau)}{2T} [(\lambda_{2T-|\tau|}(\nu) * \mu(\tau, \nu))_{(f)} - |C(\tau)|^2 \lambda_{2T-|\tau|}(f)]}.$$

IV. PREMIÈRE APPLICATION : SIGNAL ALÉATOIRE GAUSSIEN.

Dans le cadre du paragraphe III.1, considérons $X(t)$ comme stationnaire, centrée, réelle et de Laplace-Gauss. Si $C(\tau)$ est la covariance réduite de la fonction gaussienne, l'espérance d'ambiguïté est toujours donnée par la formule (19).

Le moment du quatrième ordre s'exprime de manière simple et nous avons :

$$M(\tau, \alpha) = C^2(\tau) + C^2(\alpha) + C(\alpha + \tau) C(\alpha - \tau).$$

De ce fait, la forme (23) de la fluctuation devient

$$\varepsilon(\tau, f) = \sqrt{\frac{\Lambda_{2T}(\tau)}{2T} \int_{R^1} e^{-2\pi i/\alpha} \Lambda_{2T-|\tau|}(\alpha) [C^2(\alpha) + C(\alpha + \tau) C(\alpha - \tau)] d\alpha}.$$

Pour dégager des résultats pratiques, faisons l'approximation suivante : soit $(-\theta, +\theta)$ le domaine dans lequel $C(\tau)$ diffère sensiblement de zéro ; alors, dans le plan τ, α :

— $C^2(\alpha)$ est sensiblement contenu dans le ruban horizontal $\alpha \in (-\theta, +\theta)$;

— $C(\alpha + \tau) C(\alpha - \tau)$ dans le carré ayant ses sommets sur les axes et inscrit dans le cercle de rayon θ centré sur l'origine.

Puisque, pour les raisons évoquées précédemment, nous choisissons une durée $2T$ du signal grande devant θ , nous pouvons alors remplacer $\Lambda_{2T-|\tau|}$ par 1 dans l'intégrand, ce qui nous donne l'approximation

$$\varepsilon^2(\tau, f) \approx \frac{\Lambda_{2T}(\tau)}{2T} \int_{R^1} e^{-2\pi i/\alpha} \times [C^2(\alpha) + C(\alpha + \tau) C(\alpha - \tau)] d\alpha, \quad (T \gg \theta).$$

Si nous utilisons la transformée de Fourier $\gamma(\nu) \int \sigma^2$ de $C(\tau)$, $\gamma(\nu)$ étant la densité spectrale énergétique, le théorème de Plancherel donne pour l'intégrale précédente l'équivalence

$$\frac{1}{\sigma^4} \int_{R^1} \{ 1 + \exp[-2\pi i\tau(\nu - 2f)] \} \gamma(f - \nu) \gamma(\nu) d\nu.$$

Alors, les densités spectrales étant non négatives, nous pouvons majorer par le produit de convolution, ce qui donne finalement :

$$(26) \quad \varepsilon(\tau, f) \leq \sqrt{\frac{\Lambda_{2T}(\tau)}{T\sigma^4} (\gamma * \gamma)_{(f)}}, \quad (T \gg \theta).$$

Pour donner un exemple simple, bien que grossier, supposons que $X(t)$ soit à bande limitée, avec une densité spectrale uniforme dans $(-F, +F)$:

$$\gamma(\nu) = \frac{\sigma^2}{2F} \Pi_F(\nu).$$



Il en résulte que θ est de l'ordre de quelques $(1/F)$ donc $2TF \gg 1$. En portant dans (26) nous aurons, d'après (15) :

$$\varepsilon(\tau, f) \leq \sqrt{\frac{\Lambda_{2F}(f) \Lambda_{2T}(\tau)}{2FT}} \leq 1/\sqrt{2TF}.$$

Le support de ε dans le plan τ, f est le rectangle

$$\tau \in [-T, +T], \quad f \in [-F, +F],$$

et ε atteint son maximum $(2TF)^{-1/2}$ pour $\tau = f = 0$. Une bonne reproductibilité entre réalisations de $\chi(\tau, f)$ impose ici le choix d'un produit TF supérieur ou égal à 100.

On pourrait également songer à utiliser un signal gaussien échantillonné, ce qui simplifierait beaucoup la technologie de l'émetteur. Dans ces conditions, l'espérance d'ambiguïté devient

$$\chi(\tau, f) = \text{arc sin } C(\tau) \cdot \Lambda_{2T}(\tau) \frac{\sin \pi f(2T - |\tau|)}{\pi f(2T - |\tau|)} e^{-\pi i f \tau},$$

où $C(\tau)$ représente toujours la covariance réduite de la fonction gaussienne.

Le calcul du moment du quatrième ordre conduit à considérer des primitives d'intégrales elliptiques et n'est donc pas très significatif. Il est évident que, pour $TF \gg 1$, le comportement de la fluctuation ne va pas s'écarter sensiblement de celui que nous avons vu précédemment.

V. SECONDE APPLICATION : SIGNAL BINAIRE LATTICIEL TRONQUÉ.

Nous avons vu au paragraphe II.2 que la fonction aléatoire latticielle

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_k \Pi_{\theta/2}(t - t_0 - k\theta).$$

est stationnaire si t_0 est une variable aléatoire à répartition uniforme dans $(-\theta/2, +\theta/2)$. Sa covariance réduite vaut alors $\Lambda_{\theta}(\tau)$. Le signal $X(t) \Pi_T(t)$, de durée $2T$, a ainsi pour espérance d'ambiguïté d'après (19a)

$$(27) \quad \chi(\tau, f) = \Lambda_{\theta}(\tau) \Lambda_{2T}(\tau) \frac{\sin \pi f(2T - |\tau|)}{\pi f(2T - |\tau|)} e^{-\pi i f \tau}.$$

V.1. Comparaison avec le signal à date de référence fixe.

On ne peut manquer d'être frappé par la très grande différence d'aspect entre cette expression et la fonction d'ambiguïté (14) relative au cas — non stationnaire — où t_0 est fixé ($t_0 = 0$). Bien qu'il ne soit pas anormal en soi que deux modèles dissemblables conduisent à des résultats différents, on est en droit de supposer que les deux formulations devraient tendre à se confondre lorsque le nombre $2K + 1$ d'échantillons correspondant à la durée $2T$, devient important : dans ces conditions, en effet, le fait que les deux échantillons extrêmes soient ou

non tronqués par Π_T se doit d'être de peu de poids. C'est cette exigence de l'intuition physique que nous allons vérifier en reconsidérant la relation (14) :

a) Le terme $\sin(2K + 1)\pi f\theta / \sin \pi f\theta$ présente des maximums absolus pour les valeurs de f multiples entières de $1/\theta$: ces maximums seront très prononcés si $2K + 1$ est un nombre élevé, donc si

$$2T = (2K + 1)\theta \gg \theta.$$

Dans cette hypothèse, $\chi(\tau, f)$ ne peut être sensible qu'à l'intérieur de bandes horizontales entourant les droites $f = m/\theta$ (m entier) et ayant pour largeur quelques $1/(2K + 1)\theta$ (ou quelques $1/2T$). Nous avons alors :

$$\sin(2K + 1)\pi f\theta = (-)^m \sin 2\pi \left(f - \frac{m}{\theta}\right) T,$$

$$\sin \pi f\theta = (-)^m \sin \pi\theta \left(f - \frac{m}{\theta}\right) \# (-)^m \pi\theta \left(f - \frac{m}{\theta}\right),$$

pour $f \# \frac{m}{\theta},$

et, *a fortiori*, puisque la présence de $\Lambda_{\theta}(\tau)$ dans (14) impose $|\tau| \leq \theta$:

$$\sin \pi f(\theta - |\tau|) \# (-)^m \pi(\theta - |\tau|) \left(f - \frac{m}{\theta}\right), \quad \left(f \# \frac{m}{\theta}\right).$$

b) Portons ces approximations dans (14) ; nous obtenons

$$\chi(\tau, f) \# (-)^m \Lambda_{\theta}(\tau) \left[\frac{\sin \pi(f - m/\theta) 2T}{\pi f 2T} \right] e^{-\pi i f \tau},$$

$$\left(f \# \frac{m}{\theta} \text{ et } T \gg \theta\right).$$

Pour $m = 0$ et compte tenu de ce que $|\tau| \leq \theta \ll 2T$ cette expression s'avère équivalente à (27). Pour les valeurs $m = \pm 1, \pm 2$, etc., le terme entre crochets apporte, au voisinage de $f = m/\theta$, une contribution majorée par $\left| \frac{1}{m\pi} \cdot \frac{2T}{\theta} \right|$; celle-ci est négligeable d'après l'hypothèse faite. Il y a donc concordance entre (14) et (27) lorsque $\theta \ll 2T$, et le fait que t_0 soit fixé ou aléatoire est alors sans conséquence.

V.2. Aspects de la fluctuation.

Le calcul du moment d'ordre quatre, $M(\tau, \alpha)$, est assez long et délicat ; il est traité séparément dans l'appendice où est également recherchée la transformée de Fourier $\mu(\tau, \alpha)$. On trouve, $\lambda_T(\nu)$ étant la transformée de Fourier de $\Lambda_T(t)$, telle qu'elle est donnée en (22) :

— pour $|\tau| \in [0, \theta/2]$,

$$\mu(\tau, \nu) = \frac{|\tau|}{\theta} \lambda_T(\nu) + \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta}\right)^2 \delta(\nu) +$$

$$\frac{|\tau|}{\theta^2} \sum_{n \neq 0} \lambda_T\left(\frac{n}{\theta}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{\theta}\right),$$

la sommation portant sur n entier de $-\infty$ à $+\infty$ sauf $n = 0$;

— pour $|\tau| \in [\theta/2, \theta]$:

$$\mu(\tau, \nu) = \frac{|\tau|}{\theta} \lambda_T(\nu) + \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta}\right)^2 \delta(\nu) + \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta}\right) \sum_{n \neq 0} \lambda_{\theta-|\tau|} \left(\frac{n}{\theta}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{\theta}\right) ;$$

— pour $|\tau| > \theta$, en posant $\tau' = |\tau| - \theta$ Ent $\left\lfloor \frac{|\tau|}{\theta} \right\rfloor$:

$$\mu(\tau, \nu) = \frac{\tau'}{\theta} \lambda_{\tau'}(\nu) + \left(1 - \frac{\tau'}{\theta}\right) \lambda_{\theta-\tau'}(\nu).$$

D'autre part, nous savons que

$$|C(\tau)|^2 = \Lambda_{\theta}^2(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta}\right)^2 \Pi_{\theta}(\tau).$$

Nous obtenons la fluctuation en portant ces différentes valeurs dans (25). Nous constatons tout d'abord que la composante $-\frac{1}{2} |C(\tau)|^2 \lambda_{2T-|\tau|}(f)$ est entièrement compensée pour toutes les valeurs de τ . Nous trouverons par exemple, dans la zone où $|\tau| < \theta/2$:

$$\varepsilon^2(\tau, f) = \frac{\Lambda_{2T}(\tau)}{2T} \left[\frac{|\tau|}{\theta} (\lambda_{2T-|\tau|}(\nu) * \lambda_{\tau}(\nu)) + \frac{|\tau|}{\theta^2} \sum_{n \neq 0} \lambda_{\tau} \left(\frac{n}{\theta}\right) \lambda_{2T-|\tau|} \left(f - \frac{n}{\theta}\right) \right].$$

a) $\tau \in \left[-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right]$. Plaçons-nous dans des conditions, les seules intéressantes, pour lesquelles $T \gg \theta$ et *a fortiori* $T \gg |\tau|$. Nous obtenons alors, étant donné les propriétés

$$\lim_{T/\theta \rightarrow \infty} \lambda_T(\nu) = \delta(\nu) ;$$

$$\lim_{T/\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \lambda_T(\nu) = \delta_{\nu,0}, \quad \begin{cases} = 1 & \text{pour } \nu = 0, \\ = 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

l'expression approchée suivante :

$$\varepsilon^2(\tau, f) = \Lambda_{2T}(\tau) \left[\frac{\tau^2}{2T\theta} \left(\frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau}\right)^2 + \frac{\tau^2}{\theta^2} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\sin n \pi \tau / \theta}{n \pi \tau / \theta}\right)^2 \delta_{f, n/\theta} \right], \quad (T \gg \theta).$$

On remarque tout d'abord que $\varepsilon^2(0, f) = 0, \forall f$: il n'y a aucune fluctuation sur l'axe $\tau = 0$ et l'espérance mathématique est une description exhaustive de l'ambiguïté en « Döppler pur ». On voit ensuite que la partie principale de la fluctuation est distribuée sur des segments de droite

$$\tau \in \left(-\frac{\theta}{2}, +\frac{\theta}{2}\right) ; \quad f = \frac{n}{\theta}$$

(n entier $\neq 0$) et que ε^2 y tend *localement* vers une limite non nulle lorsque la durée $2T$ du signal augmente indéfiniment : il y a donc dans ces zones $f \approx n/\theta$ une incertitude gênante quant au pouvoir de résolution en Döppler. La source de ce défaut est à rechercher dans la *structure latticielle* du signal utilisé et ce comportement est à rapprocher de

celui que nous venons d'évoquer au paragraphe V.1. Par contre, la contribution complémentaire à ε^2 laquelle est distribuée de façon continue de part et d'autre de l'axe $f = 0$, décroît vers zéro comme $1/T$; elle est bornée par $\theta/8T = 1/8FT$ si nous convenons d'adopter $F = 1/T$ comme fréquence de coupure du spectre énergétique de $X(t)$.

b) $|\tau| \in (\theta/2, \theta)$. On trouve pareillement, dans la même hypothèse $T \gg \theta$:

$$\varepsilon^2(\tau, f) = \Lambda_{2T}(\tau) \left[\frac{\tau^2}{2T\theta} \left(\frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta}\right)^2 \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\sin n \pi (1 - |\tau|/\theta)}{n \pi (1 - |\tau|/\theta)}\right)^2 \delta_{f, n/\theta} \right].$$

Il subsiste le même défaut dans les zones $f \approx n/\theta$ et la même distribution continue que précédemment, décroissant comme $1/T$ et bornée par $1/2 FT$.

c) Enfin, pour $|\tau| > \theta$ et $T \gg \theta$, en écrivant $\tau' = |\tau| - \theta$. Ent (τ/θ) :

$$\varepsilon^2(\tau, f) = \frac{\theta}{2T} \Lambda_{2T}(\tau) \left[\left(\frac{\tau'}{\theta}\right)^2 \left(\frac{\sin \pi f \tau'}{\pi f \tau'}\right)^2 + \left(1 - \frac{\tau'}{\theta}\right)^2 \left(\frac{\sin \pi f (\theta - \tau')}{\pi f (\theta - \tau')}\right)^2 \right].$$

Il ne subsiste qu'une distribution continue tendant vers zéro comme $1/T$ et ε^2 y est borné par $1/4 FT$.

VI. SIGNAUX BINAIRES ASSOCIÉS A DES PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT. EXEMPLE DES PROCESSUS DE POISSON.

Par extension de ce qui précède, nous désignerons comme « signal binaire » une fonction réelle alternée $X(t)$ de module égal à 1, et dont les changements de signe ont lieu aux instants successifs d'un processus ponctuel. Ce type de signal présente deux particularités :

a) il offre tout d'abord un gros intérêt technologique dû, comme nous l'avons fait remarquer, à une puissance d'émission rigoureusement constante pendant la durée du signal et à une grande facilité de modulation, celle-ci réduite à une multiplication de la porteuse par $+1$ ou -1 ;

b) le moment réduit du quatrième ordre est tel que $M(0, \alpha) = 1, \forall \alpha$, et la covariance réduite telle que $C(0) = 1$. Par suite, $M(0, \alpha) - |C(0)|^2 \equiv 0$ et, en nous reportant à la formule (23), nous voyons que $\varepsilon(0, f) = 0, \forall f$. Il n'y a donc pas de fluctuations statistiques sur l'axe $\tau = 0$, ce que nous avons justement constaté sur le cas particulier du paragraphe précédent. L'espérance mathématique $\chi(0, f)$ décrit donc entièrement le comportement en Döppler pur et ce comportement n'est autre que celui de l'amplitude complexe $\Pi_{\tau}(t)$, cela indépendamment du choix de la covariance $C(\tau)$.

L'exemple précédent du signal binaire latticiel correspond à un processus ponctuel de renouvellement, mais avec une répartition latticielle des intervalles, puisque ceux-ci ne peuvent prendre que des



valeurs multiples entières de θ . Il nous a révélé le défaut de ce type : l'existence de zones de forte ambiguïté (en moyenne quadratique) là où la fréquence Döppler avoisine un multiple entier de $1/\theta$. Un autre défaut de la répartition latticielle existe également, qui a trait à l'ambiguïté en distance : pour des raisons de commodité, la suite des signes est obtenue habituellement à partir d'un registre à décalage, lequel ne peut fournir qu'un code périodique. La fonction $X(t)$ est alors à *covariance périodique* et, de ce fait on rencontre avec des signaux de très grande durée des zones d'ambiguïté au voisinage des multiples entiers de la période du code (voir par exemple [9]).

On comprend dès lors qu'il soit tentant d'utiliser des signaux conservant les avantages du précédent, essentiellement ceux liés à l'aspect binaire, tout en s'affranchissant de ses inconvénients. Nous abandonnerons donc la répartition latticielle des intervalles au profit d'une répartition continue et cette fonction de répartition sera choisie de façon à obtenir la covariance $C(\tau)$ désirée, ce que l'on sait faire [10] tout en conservant l'indépendance successive des intervalles. Nous sommes ainsi conduits tout naturellement à envisager des *signaux binaires associés à des processus de renouvellement*.

Signal binaire poissonnien.

On considère un processus de Poisson stationnaire, de densité ρ , auquel on associe le signal binaire $X(t)$, comme défini sur la figure 3.

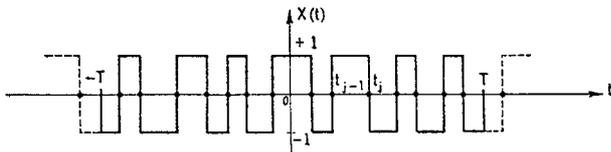


FIG. 3. — Signal binaire poissonnien.

Le signal $\Pi_T(t) X(t)$, de durée $2T$, a pour covariance réduite $C(\tau) = e^{-2\rho|\tau|}$, et pour espérance d'ambiguïté d'après (19a) :

$$(28) \quad \chi(\tau, f) = e^{-2\rho|\tau|} \Lambda_{2T}(\tau) \frac{\sin \pi f(2T - |\tau|)}{\pi f(2T - |\tau|)} e^{-\pi i/\tau}.$$

Nous retrouvons évidemment le comportement attendu pour $\chi(0, f)$ et $\chi(\tau, 0) = C(\tau)$.

Le caractère de périodicité que nous avons remarqué dans l'espérance d'ambiguïté du signal binaire latticiel a maintenant disparu. Ceci est déjà un avantage notoire de l'utilisation du signal binaire poissonnien. Les variations de $|\chi(\tau, f)|$ sont données par la figure 4.

Variance de $X(\tau, f)$:

Le moment du quatrième ordre d'un basculeur poissonnien a été étudié dans [11] ; pour le cas particulier qui nous intéresse nous avons

$$M(\tau, \alpha) = \exp \{ -4\rho \cdot \text{Inf} [|\tau|, |\alpha|] \}.$$

Un calcul très simple donne alors la transformée de Fourier de ce moment, relative à α , soit :

$$\mu(\tau, \varphi) = \frac{2\rho}{4\rho^2 + \pi^2 \varphi^2} + e^{-4\rho|\tau|} \times \left\{ \delta(\varphi) - \frac{\sin 2\pi\varphi|\tau|}{\pi\varphi} - \frac{2\rho \cos 2\pi\varphi\tau - \pi\varphi \sin 2\pi\varphi|\tau|}{4\rho^2 + \pi^2 \varphi^2} \right\}.$$

Si nous portons l'expression de $\mu(\tau, \varphi)$ dans (25), nous voyons que le terme

$$(\lambda_{2T-|\tau|}(v) * e^{-4\rho|\tau|} \delta(v))_{(f)} = e^{-4\rho|\tau|} \lambda_{2T-|\tau|}(f),$$

se trouve exactement compensé par le terme

$$-|C(\tau)|^2 \lambda_{2T-|\tau|}(f) \quad \text{puisque} \quad |C(\tau)|^2 = e^{-4\rho|\tau|}.$$

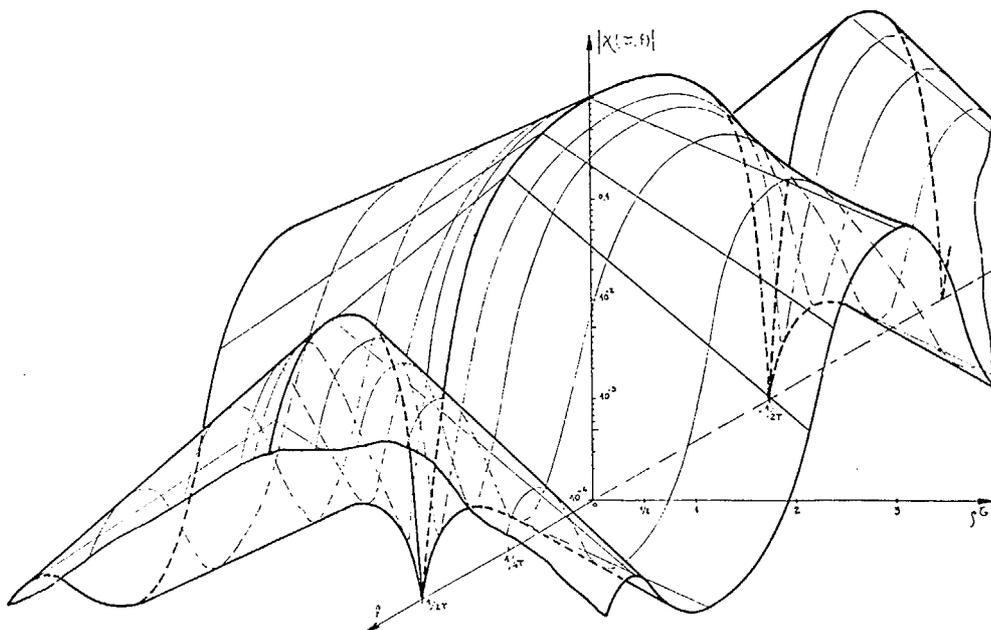


FIG. 4. — Variations de $|\chi(\tau - f)|$. Signal binaire poissonnien avec a) $\rho T = 100$.

b) $f \gg 1/T$.



L'expression de la fluctuation devient alors :

$$\varepsilon^2(\tau, f) = \frac{\Lambda_{2T}(\tau)}{2T} \left(\lambda_{2T-|\tau|}(\nu) * \left[\frac{2\rho}{4\rho^2 + \pi^2 \nu^2} - e^{-4\rho|\tau|} \left\{ \frac{\sin 2\pi\nu|\tau|}{\pi\nu} + \frac{2\rho \cos 2\pi\nu\tau - \pi\nu \sin 2\pi\nu|\tau|}{4\rho^2 + \pi^2 \nu^2} \right\} \right] \right)_f.$$

Nous pouvons considérer que τ reste compris dans un certain domaine en dehors duquel l'exponentielle $e^{-\rho|\tau|}$ est sensiblement nulle.

D'autre part, la forme (28) de l'espérance d'ambiguïté montre que, si $\rho T \ll 1$, le terme exponentiel demeure voisin de l'unité dans tout le domaine $\tau \in [-2T, +2T]$. Dans ces conditions $\chi(\tau, f)$ représente la fonction d'ambiguïté d'un signal $\Pi_T(t)$, c'est-à-dire l'impulsion radar conventionnelle : ce cas est évidemment de peu d'intérêt. Les conditions intéressantes dans lesquelles nous nous placerons sont donc

$$(29) \quad \rho T \gg 1.$$

Intervient alors une propriété déjà mentionnée au paragraphe V.2. :

$$\lim_{\rho T \rightarrow \infty} \lambda_{2T-|\tau|}(\nu) = \delta(\nu),$$

ce qui conduit, pour $\varepsilon^2(\tau)$, à l'expression approchée

$$(30) \quad \varepsilon^2(\tau, f) = \frac{\Lambda_{2T}(\tau)}{4\rho T} \cdot \frac{4\rho^2}{4\rho^2 + \pi^2 f^2} \times \left[1 - e^{-4\rho|\tau|} \left(\frac{2\rho \sin 2\pi f|\tau|}{\pi f} + \cos 2\pi f\tau \right) \right].$$

— ε varie donc proportionnellement à $1/\sqrt{\rho T}$,

— il est plus facile d'étudier séparément en fonction de f et de τ les variations de $\varepsilon^2(\tau, f)$.

a) En fonction de τ , l'allure de $\varepsilon^2(\tau, f)$ peut être ainsi schématisée :

— pour $\tau \gg 1/\rho$, ε^2 tend vers une valeur constante (uniquement fonction de f) :

$$\frac{4\rho^2}{4\rho^2 + \pi^2 f^2};$$

— pour $0 < \rho\tau < 1$, le terme en

$$e^{-4\rho|\tau|} \left(\frac{2\rho \sin 2\pi f|\tau|}{\pi f} + \cos 2\pi f\tau \right),$$

introduit une modulation d'amplitude.

Les variations de $\varepsilon^2(\tau, f)$ sont données par la figure 5.

b) On constate que la courbe $f/\rho = 0$ joue le rôle d'enveloppe pour toutes les courbes $f/\rho = \text{constante}$. Son développement à l'origine est donné par

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \varepsilon^2(\tau, 0) = 8\rho^2 \tau^2 + \mathbf{O}(\tau^3),$$

donc, à l'origine, les courbes $f/\rho = \text{constante}$ ont une forme parabolique.

c) En fonction de f , dès lors que $\tau > 1/\rho$, $\varepsilon^2(\tau, f)$ varie comme

$$\frac{4\rho^2}{4\rho^2 + \pi^2 f^2} \quad (\text{raie de Lorentz}).$$

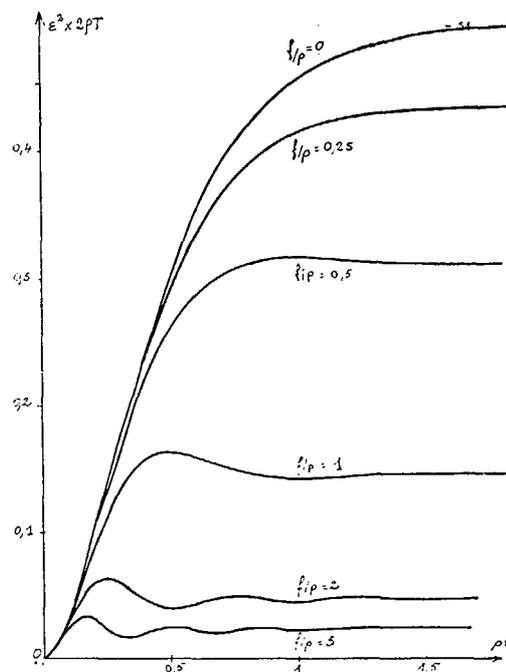


FIG. 5. — Coupes de $\varepsilon^2(\tau, f)$ dans des plans $f/\rho = k$.

d) Finalement nous pouvons, $\forall f$ et $\tau \in [-2T, +2T]$, majorer par $\varepsilon^2(\tau, f) \leq 1/2 \sqrt{\rho T}$.

Il est important de noter qu'à l'intérieur d'un certain domaine ($\tau \ll 1/\rho$) autour de l'origine (c'est-à-dire là où $E\{\chi\}$ est non négligeable), les fluctuations sont très faibles. L'information que donne alors $E\{\chi(\tau, f)\}$ peut être considérée comme valable d'une réalisation à l'autre, ou d'un appareil à l'autre.

Enfin, et ceci constitue l'un des avantages primordiaux du signal binaire poissonnien, nous constatons encore ici que le défaut de périodicité propre à la structure latticielle utilisée auparavant a également disparu. $\varepsilon^2(\tau, f)$ tend vers une valeur constante dès que $\rho\tau > 1$; et lorsque la durée du signal $2T$ augmente indéfiniment, $\varepsilon^2(\tau, f)$ tend vers zéro, $\forall \tau$ et f .

VII. CONCLUSION.

Nous avons vu que, dans des conditions somme toute assez générales, il est tout à fait légitime de parler de fonction d'ambiguïté pour des signaux aléatoires. Effectivement la stabilité de cette notion semble assurée dès lors que la durée du signal est suffisamment grande devant sa mémoire statistique.

Une conséquence immédiate de l'élargissement de ce concept est qu'il devient tout à fait naturel d'envisager l'étude des propriétés conjointes d'un signal et d'un bruit dans le cadre d'une fonction d'ambiguïté. C'est alors que le problème de synthèse pourra être traité d'une manière à la fois plus riche et plus concrète en considérant pour ce faire un critère d'optimisation du pouvoir séparateur en présence de bruit. Des études théoriques et expérimentales sont entreprises sur ce point dans notre laboratoire.



APPENDICE

MOMENT DU QUATRIÈME ORDRE
DU SIGNAL BINAIRE LATTICIEL.

Considérons le signal $X(t)$ décrit par la formule (6) et rendu stationnaire par le fait que t_0 est à distribution uniforme suivant les modalités du paragraphe II.2. Il s'agit de déterminer :

$$M(\tau, \alpha) = E \{ X(t) X(t-\tau) X(t-\alpha) X(t-\tau-\alpha) \}.$$

Les propriétés de stationnarité et de symétrie donnent

$$M(\tau, \alpha) = M(-\tau, -\alpha) = M(\tau, -\alpha) = M(-\tau, \alpha) = M(\alpha, \tau),$$

et il suffit de calculer dans le premier quadrant pour $\alpha \geq \tau \geq 0$.

$$(A-1) \quad M(\tau, \alpha) = E \{ X(0) X(\tau) X(\alpha) X(\tau + \alpha) \}.$$

D'autre part, $M(\tau, \alpha)$ garde la même valeur si l'on remplace $X(t)$ par $-X(t)$; on prendra donc $X(0) = +1$. Nous aurons $M(\tau, \alpha) = 1$ si les quatre points $0, \tau, \alpha, \tau + \alpha$ sont dans le même intervalle θ , ou bien sont deux par deux dans les mêmes intervalles ; $M = 0$ dans les autres cas. Ayant adopté $\alpha \geq \tau \geq 0$ la première condition nécessaire est donc :

$$(A-2) \quad 0 \leq \tau \leq \theta, \text{ avec } \alpha \geq \tau \geq 0.$$

On écrira $x = -t_j$, la distance séparant l'origine arbitraire 0 du dernier point frontière

$$t_j = t_0 + (j - 1/2) \theta$$

de la partition.

1. Premier cas : $\alpha \in (\tau, \theta)$.

Deux possibilités :

a) ou bien les quatre points sont dans le même intervalle θ_m ; il faut pour cela

$$x \geq 0, \quad \tau + \alpha + x \leq \theta \quad (\text{Fig. A-1}),$$

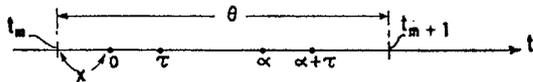


FIG. A-1. — Premier cas de figure pour $\alpha \in (\tau, \theta)$.

donc

$$\begin{cases} \tau \leq \alpha \leq \theta - \tau, \\ \Rightarrow \tau \leq \theta/2. \end{cases}$$

La probabilité que le produit ait la valeur 1 est ici

$$P_a = \Pr \{ x \in (0, \theta - \alpha - \tau) \}, \\ P_a = 1 - (\alpha + \tau)/\theta ;$$

b) ou bien 0 et $\tau \in \theta_m$; α et $\alpha + \tau \in \theta_{m+1}$ (Fig. A-2) ; il faut que :

- 1) $x \geq 0,$
- 2) $x + \tau \leq \theta,$
- 3) $x + \alpha \geq \theta,$
- 4) $x + \alpha + \tau \leq 2\theta ;$

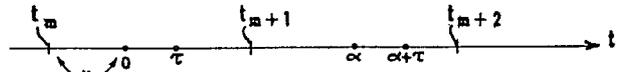


FIG. A-2. — Second cas de figure pour $\alpha \in (\tau, \theta)$.

d'où l'on tire $\theta + \tau \leq x + \alpha + \tau \leq \theta + \alpha \leq 2\theta$ vu que $\alpha \leq \theta$. La condition $\alpha \geq \tau$ est remplie par hypothèse. La probabilité que le produit ait la valeur 1 est

$$P_b = \Pr \{ x \in (\theta - \alpha, \theta - \tau) \}, \\ P_b = (\alpha - \tau)/\theta ;$$

c) en regroupant on obtient :

- $\tau \leq \theta/2, \quad \alpha \in (\tau, \theta - \tau), \quad M = P_a + P_b = 1 - \frac{2\tau}{\theta}$ (zone |||||, fig. A-3),
- $\tau \in (\theta/2, \theta) \quad \alpha \in (\tau, \theta),$
- $\tau \in (0, \theta/2) \quad \alpha \in (\theta - \tau, \theta)$ } $M = P_b = \frac{\alpha - \tau}{\theta}$ (zone ||||, fig. A-3).

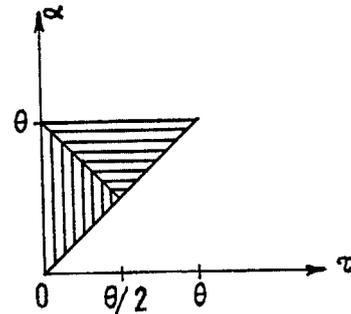


FIG. A3. — Premier cas : $\alpha \in (\tau, \theta)$.

2. Second cas : $\alpha \in (k\theta, (k + 1) \theta)$; k entier ≥ 1 .

a) Ou bien 0 et $\tau \in \theta_m$; α et $\alpha + \tau \in \theta_{m+k}$ (Fig. A-4a).

il faut que :

- 1) $x \geq 0,$
- 2) $x + \tau \leq \theta,$
- 3) $x + \alpha \geq k\theta,$
- 4) $x + \alpha + \tau \leq (k + 1) \theta,$

soit

$$k\theta + \tau \leq \alpha + \tau \leq x + \alpha + \tau \leq (k + 1) \theta \leq \alpha + \theta,$$

vu que $\alpha \geq k\theta$.

La condition nécessaire est $(k + 1)\theta \geq \alpha + \tau$,

- $k\theta \leq \alpha \leq (k + 1) \theta - \tau.$

La probabilité que le produit ait la valeur 1 est :

$$P_a = \Pr \{ x \in (0, (k + 1) \theta - \alpha - \tau) \}, \\ \Rightarrow P_a = k + 1 - (\alpha + \tau)/\theta.$$



b) Ou bien 0 et $\tau \in \theta_m$; α et $\tau + \alpha \in \theta_{m+k+1}$.
(Fig. A-4b)

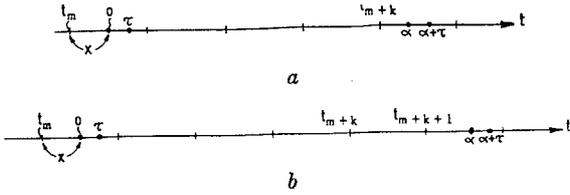


FIG. A-4a et b. — Possibilités de figures quand $\alpha \in (k\theta, (k+1)\theta)$.
Second cas : $\alpha \in (k\theta, (k+1)\theta)$.

il faut que :

- 1) $x \geq 0$, 2) $x + \tau \leq \theta$,
- 3) $x + \alpha \geq (k+1)\theta$, 4) $x + \alpha + \tau \leq (k+2)\theta$,

soit

$$\tau + \alpha \leq (k+1)\theta + \tau \leq x + \alpha + \tau \leq \theta + \alpha \leq (k+2)\theta,$$

vu que

$$\alpha \leq (k+1)\theta.$$

La condition nécessaire est que

- $\alpha \in (k\theta + \tau, (k+1)\theta)$.

La probabilité que le produit ait la valeur 1 est :

$$P_b = \Pr \{ x \in ((k+1)\theta - \alpha, \theta - \tau) \},$$

$$\Rightarrow P_b = \frac{\alpha - \tau}{\theta} - k.$$

c) En regroupant (Fig. A-5 et A-6).

- $\tau \leq \frac{\theta}{2}$ $\alpha \in (k\theta + \tau, (k+1)\theta - \tau)$

$$M = P_a + P_b = 1 - \frac{2\tau}{\theta}, \quad (\text{zone } \text{|||||}, \text{ fig. A-5}),$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau \leq \frac{\theta}{2} \quad \alpha \in (k\theta, k\theta + \tau) \\ \tau \in \left(\frac{\theta}{2}, \theta\right) \quad \alpha \in (k\theta, (k+1)\theta - \tau) \end{array} \right\}$$

$$M = P_a = k + 1 - \frac{\alpha + \tau}{\theta}, \quad (\text{zone } \text{////}, \text{ fig. A-5})$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau \in \left(0, \frac{\theta}{2}\right) \quad \alpha \in ((k+1)\theta - \tau, (k+1)\theta) \\ \tau \in \left(\frac{\theta}{2}, \theta\right) \quad \alpha \in (k\theta + \tau, (k+1)\theta) \end{array} \right\}$$

$$M = P_b = \frac{\alpha - \tau}{\theta} - k \quad (\text{zone } \text{////}, \text{ fig. A-5}).$$

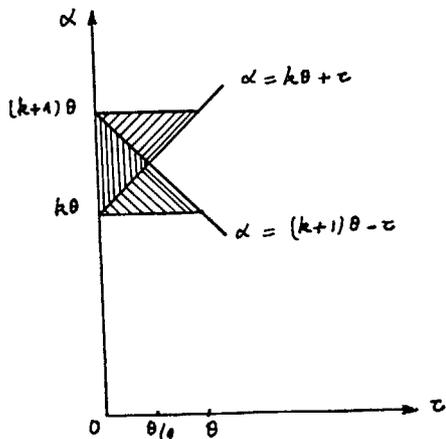


FIG. A-5. — Second cas : $\alpha \in (k\theta, (k+1)\theta)$.

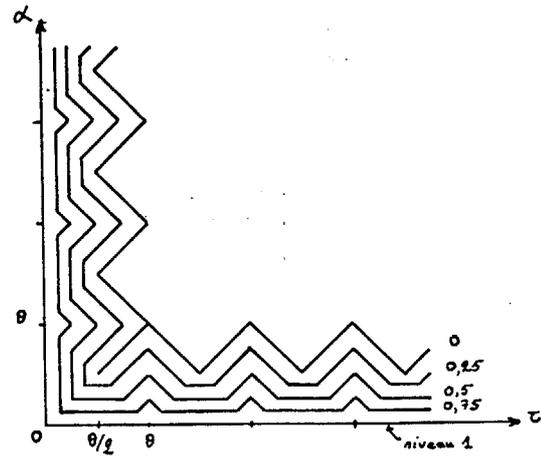


FIG. A-6. — $M(\tau, \alpha)$, représentation du premier quadrant par lignes de niveau.

3. Formulation générale.

Les résultats précédents (A3) et (A4) se représentent plus simplement en utilisant la fonction triangulaire Λ définie par (15). On a :

a) pour $|\tau| \in [0, \theta/2]$ (Fig. A-7).

$$(A-5) \quad M(\tau, \alpha) = \left(1 - 2 \frac{|\tau|}{\theta}\right) + \frac{|\tau|}{\theta} \Lambda_{\tau}(\alpha) + \frac{|\tau|}{\theta} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Lambda_{\tau}(\alpha - m\theta);$$

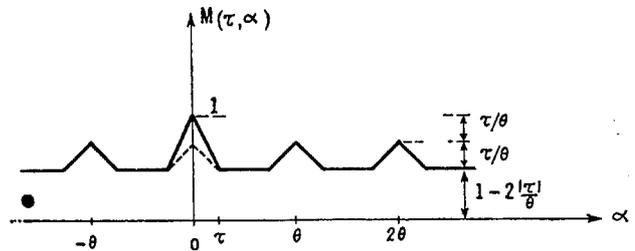


FIG. A-7. — $M(\tau, \alpha)$ pour $0 \leq \tau \leq \theta/2$.

b) pour $|\tau| \in [\theta/2, \theta]$ (Fig. A-8).

$$(A-6) \quad M(\tau, \alpha) = \frac{|\tau|}{\theta} \Lambda_{\tau}(\alpha) + \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta}\right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Lambda_{\theta-|\tau|}(\alpha - m\theta);$$

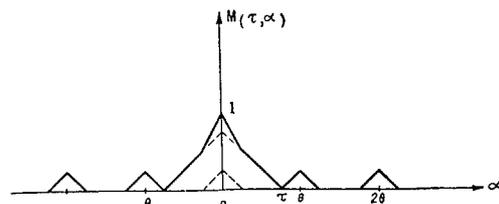


FIG. A-8. — $M(\tau, \alpha)$ pour $\theta/2 \leq \tau \leq \theta$.



c) pour $|\tau| \geq \theta$. On pose $\tau' = |\tau| - k\theta$ avec $k = \text{Ent} \frac{|\tau|}{\theta}$ (Fig. A-9).

$$(A-7) \quad M(\tau, \alpha) = \frac{\tau'}{\theta} \Lambda_{\tau'}(\alpha) + \left(1 - \frac{\tau'}{\theta}\right) \Lambda_{\theta-\tau'}(\alpha).$$

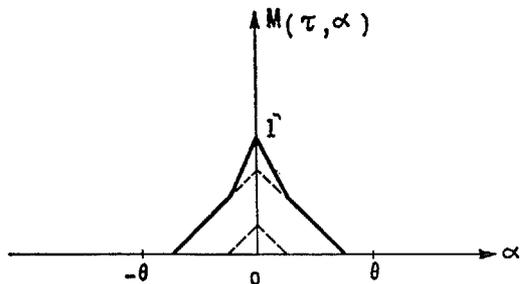


FIG. A-9. — $|\tau| \geq \theta$.

Transformée de Fourier en α .

$$\mu(\tau, \nu) = \int_{R^1} e^{-2\pi i \nu \alpha} M(\tau, \alpha) d\alpha.$$

On utilisera la formule de Poisson

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \nu m} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n),$$

et la transformée de Fourier de $\Lambda_T(t)$

$$\lambda_T(\nu) = \mathcal{F}\Lambda_T(t) = |T| \cdot \left(\frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T}\right)^2.$$

a) $|\tau| \in \left[0, \frac{\theta}{2}\right],$

$$\mu(\tau, \nu) = \left(1 - 2 \frac{|\tau|}{\theta}\right) \delta(\nu) + \frac{|\tau|}{\theta} \lambda_{\tau}(\nu) + \frac{|\tau|}{\theta^2} \lambda_{\tau}(\nu) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{\theta}\right),$$

soit en tenant compte séparément du cas $n = 0$,

$$(A-8) \quad \mu(\tau, \nu) = \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta}\right)^2 \delta(\nu) + \frac{|\tau|}{\theta} \lambda_{\tau}(\nu) + \frac{|\tau|}{\theta^2} \sum_{n \neq 0} \lambda_{\tau} \left(\frac{n}{\theta}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{\theta}\right).$$

b) $|\tau| \in \left[\frac{\theta}{2}, \theta\right]$

$$\mu(\tau, \nu) = \frac{|\tau|}{\theta} \lambda_{\tau}(\nu) + \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta}\right) \lambda_{\theta-|\tau|}(\nu) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{\theta}\right),$$

$$(A-9) \quad \mu(\tau, \nu) = \frac{|\tau|}{\theta} \lambda_{\tau}(\nu) + \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta}\right)^2 \delta(\nu) + \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{|\tau|}{\theta}\right) \sum_{n \neq 0} \lambda_{\theta-|\tau|} \left(\frac{n}{\theta}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{\theta}\right),$$

c) pour $|\tau| \geq \theta$.

$$(A-10) \quad \mu(\tau, \nu) = \frac{\tau'}{\theta} \lambda_{\tau'}(\nu) + \left(1 - \frac{\tau'}{\theta}\right) \lambda_{\theta-\tau'}(\nu).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GABOR (D.). Theory of communication. (Théorie des télécommunications.) *J. Instr. Engrs Part III*, G.B. (nov. 1946), **93**, n° 26, pp. 429-457, 39 fig., bibl. (27 réf.).
- [2] VILLE (J.). Théorie et applications de la notion de signal analytique. *Câbles et Transm. Fr.* (janv. 1948), **2**, n° 1, pp. 61-74, 4 fig.
- [3] FAURE (B.). Rapport DSM 8 019 (1960), *Marine nationale*.
- [4] WOODWARD (P. M.). Probability and information Theory. (Théorie des probabilités et de l'information.) *Pergamon*, Londres (1953), 128 p., 2 tabl., bibl. (9 réf.).
- [5] DEBART (H.). Fonction d'ambiguïté. *Rev. CETHEDEC*, Fr. (1964), n° 1, pp. 133-139, bibl. (3 réf.).
- [6] SKENDEROFF (C.). Rôle de la fonction d'ambiguïté dans les radars. *Onde elec.*, Fr. (mai 1965), **45**, n° 458, pp. 540-544, 7 fig.
- [7] MATTHEWS (P. A.). Diagramme d'ambiguïté des antennes. *Union radio scientifique internationale*. XV^e Ass., Munich (1966).
- [8] GILL (W. J.). Effect of synchronization error on pseudo-carrier communications (effet de l'erreur de synchronisation dans les communications à pseudo courants porteurs), I.E.E.E. 1st annual communication. *Conv. Record.* (1965).
- [9] PERSONS (C. E.). Ambiguity function of pseudo-random sequences. (Fonctions d'ambiguïté des suites pseudo-aléatoires.) *Proc. I.E.E.E.*, U.S.A. (déc. 1966), **54**, n° 12, 3 fig., bibl. (64 réf.).
- [10] BONNET [G.]. Sur le spectre de certaines fonctions aléatoires associées à des processus de renouvellement. *C. R. Acad. Sci. Fr.* (20 déc. 1965), **261**, n° 25, pp. 5307-5310, bibl. (3 réf.).
- [11] PICINBONO (B.). Remarques sur certaines fonctions aléatoires dérivées d'un processus de Poisson. *C. R. Acad. Sci.*, Fr. (20 avril 1959), **248**, n° 16, pp. 2280-2282, 1 fig., bibl. (1 réf.).
- [12] MERMOZ (H.). Quelques aspects des techniques du filtre adapté. *Ann. Télécommunic.*, Fr., (janv.-fév. 1968), **23**, nos 1-2, pp. 2-10.