

---

# Estimation modale large bande avec une petite antenne horizontale

Florent Le Courtois, Julien Bonnel

Lab-STICC (UMR CNRS 6285), ENSTA Bretagne (UEB)  
2 rue François Verny, 29806 Brest Cedex 9 France  
{florent.le\_courtois,julien.bonnel}@ensta-bretagne.fr

---

*RÉSUMÉ.* L'estimation des nombres d'onde acoustiques présente un grand intérêt pour l'inversion environnementale en milieu petit fond. Avec une antenne horizontale, les nombres d'onde sont calculés par estimation spectrale dans la dimension spatiale. La représentation fréquence-nombre d'onde ( $f-k$ ) est obtenue en concaténant les spectres des nombres d'onde sur plusieurs fréquences. Le plan  $f-k$  est particulièrement utile pour la caractérisation des milieux dispersifs. Une méthode d'Acquisition Comprimée (CS pour Compressed Sensing) est proposée pour l'amélioration des performances de l'estimation spectrale spatiale. Le CS est adapté en contexte de propagation modale car le champ acoustique est décrit par un petit nombre de modes propagatifs. Cependant, aux plus hautes fréquences le nombre de modes augmente, la séparation des nombres d'onde devient plus difficile, en particulier lorsque l'antenne est petite. Cet article présente l'utilisation d'une méthode de filtrage particulière (FP) pour séparer les nombres d'onde sur une large plage de fréquences. La méthode repose sur la physique dispersive, vraie pour tous les guides d'onde, pour suivre les courbes de dispersion avec les fréquences. L'utilisation successive du CS et du FP permet alors la représentation  $f-k$  pour des données ne respectant pas les dimensions usuelles pour l'analyse spectrale spatiale. La méthode est appliquée avec succès sur les mesures de l'antenne SHARK (32 capteurs) de la campagne SW06.

*ABSTRACT.* Estimation of the acoustic wavenumbers presents great interests in shallow environments. They provide relevant material to infer the sediment parameters. Using a horizontal array, the wavenumbers are obtained with usual spectral estimation methods in the spatial dimension. The computation of the wavenumber spectra at several frequencies leads to a frequency-wavenumber ( $f-k$ ) diagram, which is appropriate for the characterization of dispersive propagations. In this paper, a Compressed Sensing (CS) method is proposed to improve the separation of the wavenumbers. The CS approach is particularly relevant since only few modes are propagating. However, at higher frequencies the number of propagating mode increases and the wavenumber separation becomes more difficult, especially when using short arrays. This paper introduces a wideband particle filtering (PF) algorithm for the wavenumber tracking. It takes advantage of the dispersion relation which is true in every waveguides. The consecutive use of CS and PF allows computing the  $f-k$  representation for array measurements that does not respect the usual requirements of array length. An application on the 32 sensor SHARK array of the SW06 campaign illustrates the whole methodology.

*MOTS-CLÉS* : nombres d'onde, estimation spectrale, filtrage particulière, acquisition comprimée.

*KEYWORDS* : wavenumber, spectral estimation, particular filtering, compressed sensing.

---

DOI:10.3166/TS.33.35-51 © 2016 Lavoisier

### **Extended abstract**

The acoustic propagation at low frequency in shallow water zones is described by a small number of propagating modes. In the horizontal dimension, modes are characterized by their horizontal wavenumber. Those wavenumbers provide relevant information for inverting the seabed properties which are critically important for predicting sonar performances. Usually, the horizontal wavenumbers are estimated by considering a monochromatic source and performing a spatial Fourier transform (FT) on horizontal line array (HLA) measurements. If a broadband source is available, the wavenumber spectra can be estimated at each of the source frequency and concatenated to build a frequency-wavenumber (f-k) representation. However, each spatial Fourier transform requires a dense and long HLA to estimate properly the wavenumbers. Indeed, a large spatial aperture is required to obtain a decent wavenumber resolution, and sensor spacing must be small enough to prevent aliasing. These constraints impose the use of unpractical HLA (too long and with too many hydrophones), so that a major concern is to achieve the modal separation using fewer sensors. A two-step methodology is proposed in this paper to reach this goal. In a first part, a compressed sensing (CS) approach is used for estimating wavenumbers at each of the source frequency. Because the wavenumber spectrum is sparse by nature (i.e. only a few modes are propagating), CS is a relevant estimation approach. We show on simulations that the use of a CS algorithm allows decreasing the number of hydrophones required to estimate correctly the wavenumber spectrum. However, if the number of sensors becomes too small, CS may not allow the accurate separation of the wavenumbers, leading to a non-sparse solution. In these cases, a post processing method is proposed to improve the readability of the f-k representation. The idea is to recover the wavenumber trajectories from noisy and badly resolved f-k representations using a tracking algorithm. This algorithm relies on the dispersive physics of the waveguide. The frequency dependency of the wavenumbers is defined as a Markov chain. A particle filtering (PF) method is applied for tracking the wavenumbers, which are interpreted as the particle distribution at a given frequency. The whole method (CS and PF) is benchmarked on simulations. It allows f-k estimation with as few as 32 hydrophones, and the estimation error is roughly equivalent to the one obtained by applying a classical spatial FT on a 150-hydrophone HLA. The method is also successfully applied on experimental marine data recorded during the Shallow Water 2006 experiment. It allows estimating wavenumber using measurement performed with the SHARK array, a 32-hydrophone HLA.

## 1. Introduction

La propagation acoustique en environnement sous-marin est liée aux propriétés du milieu : composition des couches sédimentaires, température de l'eau, profondeur, etc. Dans un contexte de sources émettant aux basses fréquences, la propagation est modélisée par une somme de modes dispersifs. Chaque mode est caractérisé par son nombre d'onde horizontal  $k_{rm}$  (Jensen *et al.*, 2011). L'estimation des  $k_{rm}$  à partir de mesures présente un enjeu important pour l'inversion des paramètres environnementaux. Plusieurs approches ont été proposées pour l'estimation modale, que ce soit en utilisant une antenne verticale (Neilsen, Westwood, 2002), un unique capteur à l'aide d'une représentation temps-fréquence adaptée (Bonnel, Le Touzé *et al.*, 2013), en utilisant le mouvement des sources (Le Gall, Bonnel, 2013) ou encore à l'aide des mesures d'une antenne horizontale (Nicolas *et al.*, 2003 ; 2006). Ce papier focalise sur l'utilisation d'antennes horizontales.

Avec une antenne linéaire horizontale et une source monochromatique, l'estimation de ces nombres d'onde revient à un problème d'estimation spectrale. Les  $k_{rm}$  sont estimés en effectuant une transformée de Fourier (TF) dans la dimension spatiale (Yilmaz, 2001). Les limites de la TF spatiale, en termes de résolution, de repliement et de robustesse au bruit imposent l'utilisation d'un grand nombre de capteurs. Des méthodes à hautes résolutions (HR) sont souvent préférées pour surmonter ces limites (Marcos, 1998). Les modèles autorégressifs (Shang *et al.*, 1988 ; Becker, Frisk, 2006 ; Philippe *et al.*, 2008 ; Le Courtois, Bonnel, 2014a) et les méthodes en sous-espace comme MUSIC, ESPRIT (Rajan, Bhatta, 1993) et les Matrix Pencil (Lu *et al.*, 1998), ont montré leur intérêt pour l'estimation des  $k_{rm}$ . Cependant, si ces méthodes améliorent la résolution, elles restent sujettes à une plus grande sensibilité au bruit. De plus, ces approches nécessitent une connaissance a priori du nombre de modes propagatifs en fonction de la fréquence. Enfin, Les modèles AR et la TF nécessitent un échantillonnage spatial régulier. Dans un guide d'onde sous-marin, pour qu'une antenne horizontale échantillonne régulièrement l'axe des distances, il est nécessaire que la source et l'antenne soient alignées (*endfire position* dans la littérature anglophone). La TF peut s'écrire comme une régression des moindres carrés pour s'affranchir de la contrainte d'antenne uniforme (Babu, Stoica, 2010). On parle de TF non uniforme (TFNU). Néanmoins, la TFNU présente des limitations similaires à la TF.

Depuis plusieurs années, les méthodes d'acquisition comprimée (de l'anglais *Compressed Sensing*, noté CS par la suite) ont trouvé de nombreuses applications en imagerie acoustique aérienne et sous-marine (Suzuki, 2011 ; Oudompheng *et al.*, 2014 ; Xenaki *et al.*, 2014) et aussi en estimation spectrale (Bourguignon *et al.*, 2007 ; Harley, Moura, 2015 ; 2013). Ces méthodes tirent parti d'un échantillonnage irrégulier des données pour représenter le signal par un faible nombre de coefficients dans une base appropriée (Candès, Wakin, 2008). On parle de représentation parcimonieuse. Dans le contexte des guides d'onde, la propagation acoustique est naturellement décrite par un petit nombre de modes. Les méthodes de CS sont alors particulièrement adaptées car elles permettent, à partir d'un échantillonnage spatial irrégulier, d'obtenir une représentation parcimonieuse du signal dans la base des nombres d'onde.

Lorsque la source est de type large bande, les  $k_{rm}$  sont estimés pour plusieurs fréquences ; un plan fréquence-nombre d'onde ( $f - k$ ) est construit. Cette représentation est adaptée pour l'analyse et la caractérisation de guides d'onde dispersifs (Yilmaz, 2001). La construction du plan  $f - k$  se résume à une TF dans les dimensions temporelle et spatiale des mesures de l'antenne. Pour les plus hautes fréquences, le nombre de modes augmente et les motifs sont de plus en plus resserrés. Leur séparation sur le plan  $f - k$  devient plus difficile. Une approche originale a été proposée dans (Le Courtois, Bonnel, 2014b) ; elle repose sur l'utilisation de la physique des guides d'onde pour appliquer un algorithme de filtrage particulière (FP) sur les  $k_{rm}$ . À partir d'un plan  $f - k$  mal résolu (c'est-à-dire difficile à interpréter), le suivi des  $k_{rm}$  par FP (dans l'espace des nombres d'onde) permet d'améliorer leur résolution. Les méthodes de filtrages dynamiques, en particulier le FP, trouvent de nombreuses applications en acoustique sous-marine (Yardim *et al.*, 2011). Même si ces exemples sont appliqués dans le cadre d'une propagation guidée, aucun ne repose sur la physique dispersive du milieu.

L'objectif de cet article est d'obtenir une représentation large bande des  $k_{rm}$  pour des mesures d'antenne dont le nombre de capteurs est trop petit pour aboutir à une représentation  $f - k$  par TF spatiale. Notre approche repose sur une méthodologie en deux étapes. Nous proposons une première construction du plan  $f - k$  à l'aide d'un algorithme de CS. Ce plan  $f - k$  est souvent mieux résolu et plus juste que ceux obtenus par méthodes classiques. Cependant, pour des cas d'antennes trop petites, la solution n'est plus suffisamment parcimonieuse. L'application du FP est alors requise pour l'estimation modale.

Le document est organisé comme suit. En section 2, la propagation modale en petit fond est présentée. En section 3, l'estimation spectrale par TFNU et le CS sont expliquées. La réalisation classique du plan  $f - k$  et le FP sont introduits en section 4. La méthodologie est appliquée sur les données de l'antenne SHARK de 32 capteurs utilisée pendant la campagne Shallow Water 06 (SW06) en section 5.

## 2. Propagation acoustique dans un guide d'onde dispersif

Pour une source large bande émettant aux basses fréquences (quelques centaines de Hz) et en petit fond (jusqu'à 150 m de profondeur) la propagation acoustique à la distance  $r$  est décrite par une somme de  $M$  modes dispersifs :

$$y(f, r) = \frac{Q(f)}{\sqrt{r}} \sum_{m=1}^{M(f)} A_m(f) \frac{e^{-irk_{rm}(f)}}{\sqrt{k_{rm}(f)}}, \quad (1)$$

où  $Q(f)$  est proportionnel au spectre de la source et les quantités  $A_m(f)$  et  $k_{rm}(f)$  sont respectivement l'amplitude et le nombre d'onde horizontal du  $m^e$  mode. L'amplitude  $A_m(f)$  dépend des profondeurs de la source et de l'antenne, elle varie lentement par rapport à  $(e^{-irk_{rm}(f)})/(\sqrt{k_{rm}(f)})$

La physique générale des guides d'onde impose la relation de dispersion

$$\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 = k_{rm}(f)^2 + k_{zm}(f)^2, \quad (2)$$

où  $k_{zm}$  est le nombre d'onde vertical et  $c$  la célérité dans la colonne d'eau. L'équation (2) relie les nombres d'onde verticaux et horizontaux à la fréquence. En deçà d'une certaine fréquence, les  $k_{rm}$  deviennent imaginaires ; le mode ne se propage plus, il est évanescent. Le nombre de modes  $M$  est donc fonction de la fréquence.

Les valeurs de  $k_{rm}$  sont directement liées aux propriétés environnementales de la colonne d'eau et de la composition du fond (Jensen *et al.*, 2011). Ce sont des quantités privilégiées pour l'inversion géoacoustique. Dans ce papier, nous nous intéressons à l'estimation des  $k_{rm}$ . Dans la section suivante, des méthodes d'estimation spectrales par TF et CS sont présentées pour un contexte de source en bande étroite.

### 3. Estimation des nombres d'onde

En considérant une antenne horizontale de  $L$  capteurs et une source de type bande étroite, la dépendance en  $f$  de l'équation (1) est abandonnée. Le vecteur de mesure s'écrit  $\mathbf{y} = [y_1/\sqrt{r_1} \cdots y_l/\sqrt{r_l} \cdots y_L/\sqrt{r_L}]^T$ , où  $r_l$  est la distance entre la source et le  $l^e$  capteur. Notons que, par rapport à l'équation (1), le terme en  $1/\sqrt{r_l}$  est exclu de  $y_l$  ce qui permet de simplifier les équations suivantes.

#### 3.1. Transformée de Fourier spatiale

Le spectre des nombres d'onde  $\hat{\mathbf{x}}$  peut alors se calculer comme une TF dans la dimension spatiale des mesures

$$\hat{x}_\kappa = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L y_l e^{ir_l k_\kappa}. \quad (3)$$

Le spectre s'écrit alors sous la forme du vecteur  $\hat{\mathbf{x}} = [x_1 \cdots x_\kappa \cdots x_K]^T$  pour  $K$  indices de nombres d'onde  $\kappa$ , avec  $K > M$ . Cette formulation de la TF discrète nécessite un échantillonnage régulier. L'estimation spectrale pour des échantillonnages irréguliers peut se réaliser selon plusieurs approches (Babu, Stoica, 2010). Une manière intuitive consiste à considérer l'estimation spectrale comme une minimisation aux moindres carrés

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2, \quad (4)$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice de Fourier de dimension  $[L \times K]$  avec  $A_{l\kappa} = e^{ir_l k_\kappa}$ . La solution est donnée par une pseudo-inversion

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^H (\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{y}, \quad (5)$$

où l'exposant  $H$  est la transposée hermitienne. Pour un échantillonnage régulier, cette formulation est équivalente à la TF. L'équation (4) définit alors la TFNU, généralisation de la TF aux signaux échantillonnés de manière non uniforme.

La résolution théorique de la TFNU est  $\Delta_k = 2\pi/L_{eq}$  avec  $L_{eq} = r_{max} - r_{min}$  la longueur équivalente de l'antenne et  $r_{max}$  et  $r_{min}$  sont les distances à la source des capteurs le plus éloigné et le plus proche de celle-ci. Comme pour la FT, la fréquence de Shannon-Nyquist pour un échantillonnage non uniforme dépend de l'inverse de l'espacement inter-capteur (Babu, Stoica, 2010).

Dans un contexte d'une petite antenne et pour un petit nombre de modes propagatifs, les approches par CS sont particulièrement adaptées. Nous proposons d'utiliser un algorithme de CS pour obtenir une représentation parcimonieuse des  $k_{rm}$ .

### 3.2. Estimation parcimonieuse des $k_{rm}$

Les méthodes de CS ont été proposées dans un contexte d'échantillonnage aléatoire pour représenter le signal par un petit nombre de coefficients non nuls, on parle de signal parcimonieux (Candès, Wakin, 2008). Le nombre de mesures nécessaires à cette représentation est alors largement réduit en comparaison des méthodes classiques. Dans le contexte où peu de modes se propagent, le CS a le double avantage de tirer parti d'un échantillonnage non uniforme et de permettre d'utiliser moins de capteurs dans l'antenne. Pour les mesures sur une antenne horizontale (domaine spatial), les modes sont une représentation naturellement parcimonieuse du champ (domaine des nombres d'onde). De fait, le CS est une méthode appropriée pour estimer les  $k_{rm}$  tout en réduisant le nombre de capteurs.

Le problème sans bruit s'écrit formellement comme une minimisation sous contrainte

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} r(\mathbf{x}) \text{ sujet à } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (6)$$

où  $r(\mathbf{x})$  est une fonction de régularisation parcimonieuse. Le problème d'estimation parcimonieuse en contexte bruité se formule comme

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda r(\mathbf{x})) \quad (7)$$

où  $\lambda$  est un coefficient de pénalisation. Cette pénalisation peut s'interpréter comme la tolérance accordée sur l'erreur de reconstruction de l'optimisation (Boyd, Vandenberghe, 2009). Elle offre un compromis entre la solution la plus parcimonieuse et la solution des moindres carrés. Si  $\lambda$  est choisi trop grand, l'optimisation conduit à favoriser la parcimonie et tend vers un vecteur nul. Au contraire, si  $\lambda$  est choisi trop petit, la solution tend vers la solution aux moindres carrés.

En posant  $r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1$ , la solution est alors obtenue selon une méthode de poursuite de base (de l'anglais *Basis Pursuit*) (Chen *et al.*, 1998). Pour simplifier la résolution de l'équation (7), on peut choisir  $r(\mathbf{x})$  d'approximer par une norme  $\ell_2$  pondérée telle que  $r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{2(w)} = \sqrt{\sum_{\kappa=1}^K w_{\kappa}^2 |x_{\kappa}|^2}$ . La solution la plus parcimonieuse

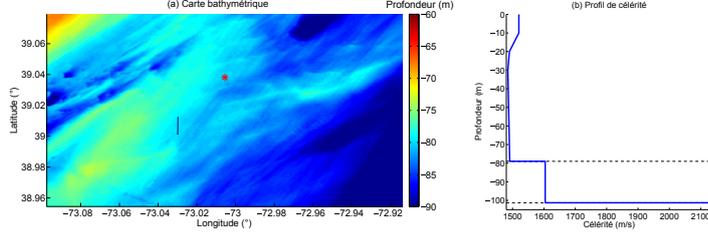


Figure 1. Configuration pour la campagne SW06 : (a) Carte bathymétrique et positions de la source \* et de l'antenne (trait). (b) Profil de célérité mesuré au niveau de l'antenne

est alors obtenue en appliquant un algorithme itératif des moindres carrés pondérés (Bourguignon *et al.*, 2007 ; Daubechies *et al.*, 2010 ; Suzuki, 2011). À l'itération  $t$ , la solution vaut

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \mathbf{W}^H \mathbf{A}^H (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{y}, \quad (8)$$

où  $\mathbf{W} = \text{diag}(1/w_\kappa^t)$  est une matrice diagonale des poids et  $\mathbf{I}$  la matrice identité. Les poids sont donnés par

$$w_\kappa^t = ((\hat{x}_\kappa^{t-1})^2 + \epsilon)^{-0.5}, \quad (9)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre petit pour empêcher les poids de devenir nuls (Chartrand, Yin, 2008).

En pratique, on pose  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{A}^H (\mathbf{A} \mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{y}$ . La valeur du paramètre de régularisation  $\lambda$  est choisie comme l'inverse du rapport signal à bruit (RSB) pour offrir un compromis entre la solution la plus parcimonieuse et la solution des moindres carrés. L'algorithme de résolution itératif est robuste au choix du paramètre  $\lambda$  (Chartrand, Yin, 2008 ; Daubechies *et al.*, 2010), les niveaux de bruit et de signal n'ont pas besoin d'être connus avec justesse. Cependant, si le nombre de mesures est trop petit, la convergence de l'algorithme vers la solution la plus parcimonieuse n'est pas garantie.

Nous proposons une application de la TFNU et du CS sur plusieurs simulations. Les spectres et les nombres d'onde obtenus sont comparés pour différentes tailles d'antenne.

### 3.3. Applications

L'environnement décrit par les paramètres du tableau 1 avec le profil de célérité tracé sur la figure 1b est simulé sous le logiciel ORCA (Westwood *et al.*, 1996). Cette simulation reprend l'environnement inversé par Bonnel *et al.* dans (Bonnel, Dosso, Chapman, 2013). Nous nous intéressons à la fréquence 55 Hz à laquelle trois modes se propagent à  $0.217 \text{ rad.m}^{-1}$  et  $0.225 \text{ rad.m}^{-1}$ . La source et l'antenne ne sont pas alignées comme pour la situation illustrée en figure 1a. La distance entre l'antenne et la source est d'environ 5,5 km. Les antennes simulées sont composées de 200, 50 et

Tableau 1. Paramètres environnementaux pendant la campagne SW06

Paramètre	Valeur
Distance	~ 5.5 km
$\Delta_r$	~ 12 m
$L\Delta_r$	~ 380 m
Profondeur	79 m
Célérité dans la couche	1604 m/s
Densité de la couche	1.80g/cm <sup>3</sup>
Épaisseur de la couche	25 m
Célérité dans le socle	2132 m/s
Densité du socle	1.48 g/cm <sup>3</sup>
RSB	~ 10 dB

32 capteurs. Les résolutions théoriques sont de  $0.0026 \text{ rad.m}^{-1}$  ( $L_{eq}=2393 \text{ m}$ ),  $0.0053 \text{ rad.m}^{-1}$  ( $L_{eq}=1192 \text{ m}$ ) et  $0.0166 \text{ rad.m}^{-1}$  ( $L_{eq}=378 \text{ m}$ ).

Les spectres calculés par TFNU sont représentés par les courbes en trait plein sur les figures 2a, 2b et 2c pour les antennes de 200, 100 et 32 capteurs. Les spectres sont normalisés par leur plus grande amplitude. Les  $k_{rm}$  théoriques sont indiquées par les flèches sur l'abscisse. Pour cette simulation, 200 capteurs suffisent pour séparer les nombres d'onde. Avec 100 capteurs, même si les nombres d'onde restent identifiables, les lobes secondaires dus aux interférences entre les modes et à la réponse de l'antenne sont plus importants. Avec 32 capteurs, les  $k_{rm}$  ne peuvent pas être résolus.

De la même manière, les spectres obtenus par CS sont présentés par les cercles sur les figures 2a, 2b et 2c pour les antennes de 200, 100 et 32 capteurs. Les spectres obtenus avec 200 et 100 capteurs sont mieux résolus et présentent moins de lobes secondaires. On remarque que les valeurs voisines des  $k_{rm}$  sont activées ; l'estimée n'est pas strictement parcimonieuse : à cause du nombre de capteurs trop petit, les colonnes de **A** ne sont pas indépendantes. Cela impacte peu les résultats. Pour 32 capteurs, le nombre de mesures reste insuffisant pour obtenir une estimation exploitable.

La racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (REQM) commise sur les estimées des  $k_{rm}$  est calculée sur plusieurs fréquences et plusieurs modes. Les résultats sont présentés dans le tableau 2. Les  $k_{rm}$  sont estimés par détection de pics (de l'anglais *peak-picking*) sur les spectres. Les REQM réalisée pour les antennes de 200 et 100 capteurs sont proches car la résolution des traitements est supérieure à la distance inter-modale. Pour 32 capteurs, la REQM augmente grandement. Quelle que soit la longueur de l'antenne, en plus d'améliorer la résolution et de supprimer les lobes secondaires, la REQM commise sur l'estimée par CS est plus petite.

D'une manière générale, le CS a prouvé son efficacité pour atteindre une meilleure résolution que les traitements par TF (Candès, Wakin, 2008). Ces résultats ne sont pas nouveaux, mais ils présentent des perspectives intéressantes pour l'estimation modale

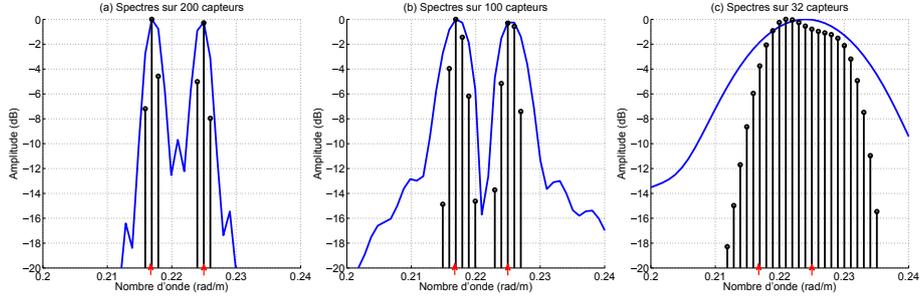


Figure 2. Spectres des nombres d'onde à 55 Hz sur (a) 200 capteurs, (b) 100 capteurs et (c) 32 capteurs. Les courbes en trait plein représentent les spectres calculés par TFNU et les cercles représentent les spectres calculés par CS. Les vraies valeurs de  $k_{rm}$  sont indiquées par les flèches

en acoustique sous-marine. Cependant, si le nombre de capteurs est trop petit, le CS présente des limitations. La section suivante présente l'utilisation d'un modèle large bande pour améliorer la séparation modale.

Tableau 2. REQM sur l'estimation des  $k_{rm}$  pour tous les modes et toutes les fréquences (exprimée en rad/m)

	TFNU	CS	FP
200 capteurs	0.042	0.037	
100 capteurs	0.042	0.038	
32 capteurs	0.086	0.078	0.044

#### 4. Estimation large bande des $k_{rm}$ en contexte dispersif

Dans un contexte de source large bande, la nature dispersive des  $k_{rm}$  est révélée en estimant les spectres des nombres d'onde à chaque fréquence. Ces spectres sont concaténés sous la forme d'un diagramme  $f - k$ .

##### 4.1. Représentation $f - k$

La méthode classique pour le calcul du diagramme  $f - k$  est de réaliser le calcul du spectre des nombres d'onde à chaque fréquence. La représentation s'écrit classiquement comme une TF 2D des mesures d'antenne selon les dimensions spatiales et temporelles (Yilmaz, 2001). L'application des méthodes TFNU ou de CS proposées dans la section précédente à la place de la TF spatiale est alors triviale : elle est réalisée à toutes les fréquences propagatives pour la construction du diagramme  $f - k$ .

Le diagramme  $f - k$  est donc simplement une analyse spectrale spatiale sur plusieurs fréquences. En tenant compte de la physique dispersive du guide d'onde, des

modèles de  $k_{rm}$  peuvent être proposés pour appliquer un algorithme de suivi des  $k_{rm}$  dans le plan  $f - k$  (Le Courtois, Bonnel, 2014b).

#### 4.2. Suivi des nombres d'onde

La représentation  $f - k$  est une observation liée à un ensemble de  $k_{rm}$  à estimer. Sur une plage de fréquences discrètes indexées par  $\nu \in [1, N_f]$  et un ensemble des indices des nombres d'onde  $\kappa \in [1, K]$ , le plan  $f - k$  est défini comme un système dynamique. Le diagramme  $f - k$  peut alors être paramétré par deux équations. Une première relation itérative entre  $k_{rm}[\nu + 1]$  et  $k_{rm}[\nu]$  permet de décrire les nombres d'onde comme une chaîne de Markov. Enfin, une relation d'observation génère le spectre  $\tilde{x}(k_{rm})$  associé aux nombres d'onde.

##### 4.2.1. Relation itérative

À partir de la relation de dispersion, Eq. (2), le nombre d'onde horizontal vaut  $k_{rm}(f) = \sqrt{(2\pi f/c)^2 - k_{zm}(f)^2}$ . Au delà de la fréquence de coupure  $f_{cm}$ ,  $k_{rm}$  est réel et le mode se propage. Il est alors possible de définir une loi itérative

$$k_{rm}[\nu + 1]^2 = k_{rm}[\nu]^2 + (2\nu + 1) \left( \frac{2\pi\Delta f}{c} \right)^2 + n[\nu], \quad (10)$$

où  $\Delta f$  est la résolution fréquentielle et  $n[\nu] = k_{zm}[\nu]^2 - k_{zm}[\nu + 1]^2$ . Dans l'environnement petit fond,  $k_{zm}$  varie peu avec la fréquence et  $n$  est petit devant les autres. Ce terme est assimilé à un bruit gaussien.

##### 4.2.2. Équation d'observation

Le comportement modal du guide d'onde présente des résonances aux valeurs  $k_{rm}$ . Ces systèmes peuvent être décrits par des fonctions de transfert. Un modèle d'observation est proposé (Ewins, 2000)

$$\tilde{x}(f, k) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{|k^2 - k_{rm}(f)^2 + i\xi|}, \quad (11)$$

où  $\xi$  s'apparente à de l'amortissement structurel des ondes dans le sol. Cependant, le nombre de capteurs est souvent trop faible, alors  $\xi$  est lié à la mauvaise résolution. Il est choisi tel que  $\xi = 2\pi/L_{eq}$ .

##### 4.2.3. Filtrage particulière

En utilisant les équations (10) et (11) avec une description bayésienne de l'observation, les algorithmes de suivi peuvent être appliqués afin d'identifier les courbes de dispersion cachées. À cause de la distribution non gaussienne des nombres d'ondes (ils ne peuvent prendre de valeurs négatives) et d'une loi de suivi non linéaire, le FP est un algorithme adapté au problème (Doucet, Johansen, 2009 ; Arulampalam *et al.*,

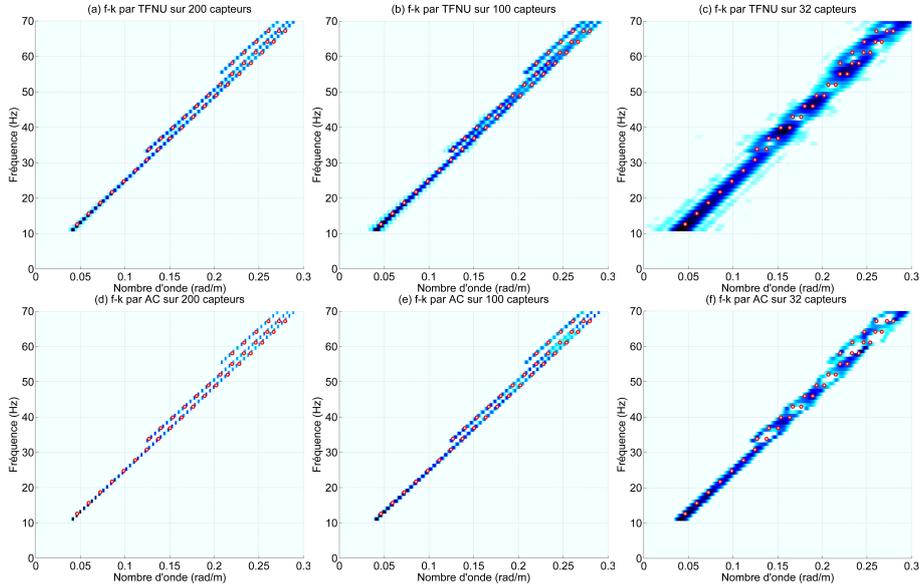


Figure 3. Diagrammes  $f - k$  calculés par TFNU sur a 200 capteurs, (b) 100 capteurs et (c) 32 capteurs et par CS sur (d) 200 capteurs, (e) 100 capteurs et (f) 32 capteurs. Les  $k_{rm}$  théoriques sont indiqués par les cercles

2002). L'algorithme se déroule ainsi. Une fréquence initiale  $\nu_0$  est choisie proche de la première fréquence de coupure. Le spectre des nombres d'onde à cette fréquence est discrétisé en un jeu de particules par une intégration de Monte-Carlo. La relation itérative, équation (10), donne une prédiction de la valeur des nombres d'onde à la fréquence  $\nu_0 + 1$ . Les spectres associés à ces particules sont exprimés grâce à l'équation (11). Les vraisemblances entre l'observation et ces simulations sont calculées (Bretthorst, 1998). Par la suite, les particules sont pondérées par la fonction de vraisemblance. Si le poids efficace des particules devient trop petit, celles dont la vraisemblance est la plus faible sont retirées dans la distribution des particules. Ainsi, cette redistribution affine l'estimation avec les itérations. Enfin, la fréquence est incrémentée et les opérations renouvelées. Si une nouvelle fréquence de coupure du guide est atteinte, un nouveau jeu de particules est tiré. Un a priori sur le nombre de modes propagatifs est donc requis.

### 4.3. Applications

Les méthodes de CS et le FP sont complémentaires et peuvent être appliquées successivement. Cependant, si l'estimation spectrale sur plan  $f - k$  est suffisamment résolue, le FP n'est pas requis.

Les simulations présentées en section 3.3 sont étendues à un contexte large bande entre 0 Hz et 70 Hz. La résolution fréquentielle  $\Delta_f$  est de 1 Hz. Trois modes se propagent à 70 Hz. Les figures 3a, 3b et 3c présentent les diagrammes  $f - k$  calculés par TFNU sur 200, 100 et 32 capteurs. Les valeurs vraies des  $k_{rm}$  sont calculées pour toutes les fréquences par ORCA. Pour garder les figures lisibles, elles ne sont représentées que tous les 3 Hz par les points superposés. La séparation des modes sur toute la bande est atteinte avec 200 capteurs. Quand l'antenne est composée de 100 capteurs, la résolution est sensiblement détériorée, en particulier aux fréquences les plus hautes (environ 60 Hz) quand trois modes se propagent. Le diagramme  $f - k$  calculé sur 32 capteurs ne peut pas être exploitée : la résolution est trop pauvre et il y a beaucoup d'interférences, les modes ne peuvent être séparés.

Dans la même configuration, les figures 3d, 3e et 3f présentent les diagrammes calculés par CS pour des antennes de 200, 100 et 32 capteurs. En comparaison avec la TFNU, les résolutions obtenues sont améliorées. L'antenne de 100 capteurs suffit pour séparer les trois modes sur la figure 3b. Avec 32 capteurs, l'application du CS n'améliore pas beaucoup l'estimation. Lorsque trois modes se propagent des interférences importantes perturbent l'interprétation des résultats. Même si le CS supprime des lobes secondaires et améliore la résolution, le diagramme  $f - k$  est trop dégradé pour être exploité directement.

Ces résultats sont cohérents avec les observations réalisées sur l'étude en bande étroite de la section 3.3 : pour un nombre de capteurs identique, le CS améliore l'estimation spectrale par rapport à la TFNU. Cependant, les diagrammes  $f - k$  obtenus sur 32 capteurs ne sont pas exploitables. De plus, à cause de la nature dispersive de la propagation, les  $k_{rm}$  bien résolus aux basses fréquences ne le sont pas forcément aux plus hautes fréquences, comme présenté sur les figures 3b, 3c et 3f. Pour ces cas, l'application supplémentaire du FP est requise pour améliorer la lecture du diagramme  $f - k$ .

Le FP est appliqué sur le diagramme  $f - k$  de la figure 3f, calculé par CS sur 32 capteurs. Chaque  $k_{rm}$  est discrétisé par 1000 particules. Les fréquences de coupures sont visuellement identifiées à 11 Hz, 33 Hz and 57 Hz. Les distributions des particules sont présentées sur la figure 4a en niveau de couleur. Les  $k_{rm}$  théoriques sont représentés par les points. Le processus de suivi permet d'identifier les courbes de dispersion et de supprimer les interférences. Aussi, les particules tirées dans les interférences deviennent rapidement peu vraisemblables car elles ne suivent pas la relation de dispersion. Elles sont alors échantillonnées à nouveau avec l'incrément de la fréquence.

L'étude des distributions informe sur la confiance en l'estimée. Par exemple, les distributions des premier et deuxième modes à 55 Hz sont présentées en figure 4b, respectivement en trait continu et tirets. En comparaison, le spectre sur 32 capteurs est indiqué par les cercles. Le premier mode est faiblement réparti, indiquant alors une faible incertitude. L'étendue est proche de la résolution obtenue avec 200 capteurs. Au contraire, le deuxième mode est plus dispersé. Certaines particules fuient sur le

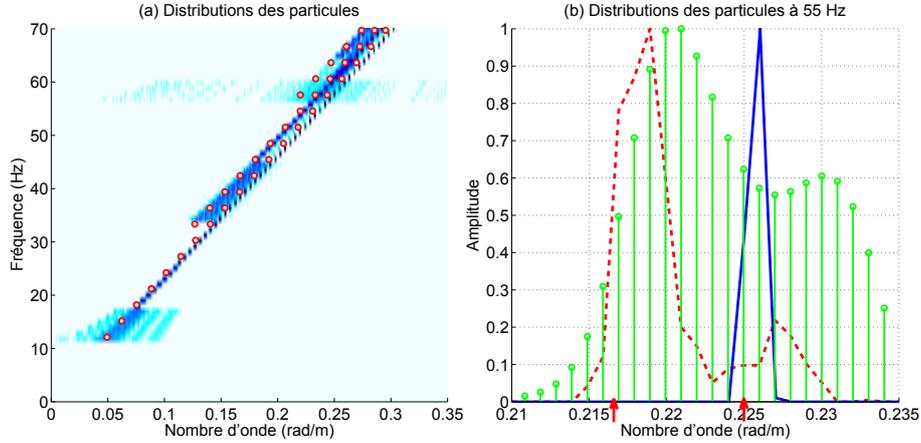


Figure 4. Résultat du FP sur le  $f - k$  obtenu par CS sur 32 capteurs : (a) distributions des particules pour l'intégralité du plan  $f - k$ ; (b) distribution des particules à 55 Hz. Sur (b), les courbes bleue et rouge représentent respectivement la distribution des particules du premier et du deuxième mode; le spectre des nombres d'onde obtenu par CS à 55 Hz est représenté par les cercles verts. Les  $k_{rm}$  théoriques sont indiqués par les cercles rouges en (a) et par les flèches sur l'abscisse en (b)

premier mode. Cela s'explique par le fait que le deuxième mode n'est pas suivi depuis aussi longtemps; cette tendance est corrigée quand la fréquence augmente.

La REQM entre les vrais  $k_{rm}$  et les particules les plus vraisemblables est indiquée dans le tableau 2. La REQM commise par les méthodes d'estimation spectrale TFNU et CS (respectivement 0,086 et 0,078 rad/m) est divisée de moitié par l'application du FP (0,044 rad/m). La REQM est proche de celles commise avec les antennes de 100 et 200 capteurs. Pour cet exemple, l'application du FP diminue alors grandement l'erreur et supprime les lobes secondaires.

## 5. Application sur les mesures de l'antenne SW06 SHARK

Une campagne de mesures s'est déroulée en 2006 au large du New Jersey. Nous nous intéressons aux données de l'antenne SHARK horizontale, composée de 32 capteurs séparés de  $\Delta_r = 12$  m (Newhall *et al.*, 2007). La source est l'implosion d'une ampoule. Les positions de l'antenne et de largage de l'ampoule sont présentées sur la figure 1a. La distance est d'environ 5.5 km. L'ampoule n'est donc pas alignée avec l'antenne. La célérité mesurée est indiquée en figure 1b.

Le diagramme  $f - k$  calculé par TFNU est proche de celui simulé sur la figure 3c et n'est pas présenté. L'utilisation de l'algorithme de CS est nécessaire pour l'estimation spectrale et le diagramme  $f - k$  est présenté en figure 5a. Les  $k_{rm}$  théoriques calculés

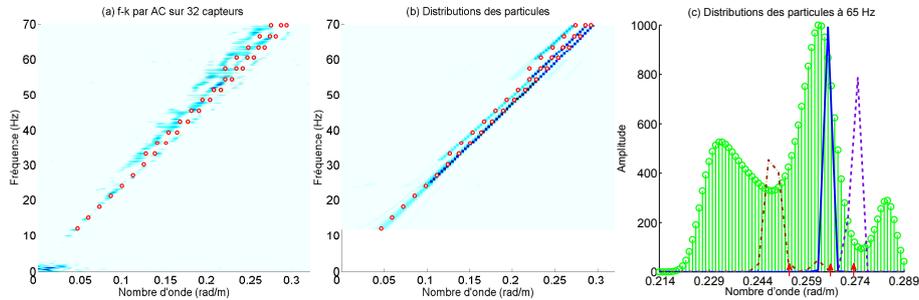


Figure 5. Résultats expérimentaux obtenus par CS et FP sur l'antenne SHARK. (a) Diagramme  $f$ - $k$  obtenu par CS seul. (b) Distribution des particules après application du FP. (c) Distribution des particules à 65 Hz. Sur (c), les courbes violette, bleue et rouge représentent respectivement la distribution des particules du premier, second et troisième mode ; le spectre des nombres d'onde obtenu par CS à 65 Hz est représenté par les cercles verts. Les  $k_{rm}$  théoriques sont indiqués par les cercles rouges en (a) et (b) et par les flèches sur l'abscisse en (c)

par ORCA pour l'environnement inversé par Bonnel et al. (Bonnel, Dosso, Chapman, 2013) sont indiqués par des points. L'environnement est décrit par les paramètres du tableau 1. Comme pour les simulations présentées sur les figures 3f, des interférences apparaissent et rendent difficile l'interprétation des courbes de dispersion. Le nombre de capteurs est probablement trop faible pour reconstruire efficacement le plan  $f - k$  par CS uniquement.

Nous proposons d'appliquer le FP en utilisant 1000 particules par mode. Les fréquences de coupure sont visuellement identifiées à 11 Hz, 23 Hz et 52 Hz. Cependant, la deuxième fréquence de coupure est difficile à estimer. Les distributions sont représentées en sur la figure 5b. Les  $k_{rm}$  théoriques sont représentés par les points. Même si quelques particules sont tracées dans les interférences, les poids associés tendent vers 0. Elles ne suivent pas la loi itérative et donc deviennent peu vraisemblables.

Sur la figure 5b, le suivi du deuxième mode semble être initié trop tôt ; la valeur théorique est de 33 Hz. En dessous de cette fréquence, le suivi de  $k_{r2}$  n'est pas efficace : les particules sont peu vraisemblables et la majorité suit le premier mode. Au delà de 33 Hz, le deuxième mode théorique se propage ; les particules peu vraisemblables sont alors échantillonnées à nouveau. L'évolution de vraisemblance des particules avec la fréquence offre une information cruciale sur la fréquence de coupure du mode.

Les distributions des particules à 65 Hz sont présentées en figure 5c, en tirets, trait plein et tirets-pointillés pour les trois modes. Le spectre calculé par CS à cette fréquence est présenté par les cercles. Les  $k_{rm}$  théoriques sont indiqués par les flèches sur l'axe des abscisses. À cette fréquence, seul le deuxième mode est correctement estimé par CS. Les valeurs de  $k_{r1}$  et  $k_{r3}$  sont respectivement surévaluée et sous-

évaluée. Les distributions des particules sont plus proches des valeurs théoriques. Aussi, ces particules sont faiblement distribuées, l'incertitude est donc acceptable. On remarque, comme pour les simulations, que des particules du troisième mode fuient sur le deuxième mode. Cette tendance est corrigée par la suite.

## 6. Conclusion

Cet article propose des méthodes de construction du diagramme  $f - k$  reposant sur la physique de la propagation acoustique en petit fond. L'objectif est d'aboutir à la représentation  $f - k$  pour des situations d'antennes ne permettant pas l'application d'une transformée de Fourier spatiale. Nous proposons d'abord l'application du CS pour l'estimation spectrale. Cette méthode est particulièrement adaptée car peu de modes se propagent. Le CS améliore l'estimation en termes de résolution et d'erreur commise.

Dans un contexte large bande, les spectres des nombres d'ondes sont concaténés pour la réalisation de diagrammes  $f - k$ . Pour des cas de trop petites antennes, un post-traitement basé sur la physique des guides d'onde est développé. Un algorithme de FP est présenté pour le suivi des nombres d'ondes. L'application du FP sur un diagrammes  $f - k$  mal résolu et bruité améliore alors l'estimation des  $k_{rm}$ . La méthodologie complète de l'utilisation du CS puis de FP est validée sur des simulations et sur les mesures de l'antenne SHARK de la campagne SW06.

Enfin, les estimées obtenues par PF présentent des perspectives intéressantes pour l'inversion des paramètres environnementaux. Sous un formalisme bayésien, ces densités fournissent l'incertitude sur les paramètres inversés.

### Remerciements

*Ce travail a été supporté par un financement DGA/MRIS.*

## Bibliographie

- Arulampalam M. S., Maskell S., Gordon N., Clapp T. (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, n° 2, p. 174–188.
- Babu P., Stoica P. (2010). Spectral analysis of nonuniformly sampled data—a review. *Digital Signal Processing*, vol. 20, n° 2, p. 359–378.
- Becker K. M., Frisk G. V. (2006). Evaluation of an autoregressive spectral estimator for modal wave number estimation in range-dependent shallow water waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 120, n° 3, p. 1423-1434.
- Bonnel J., Dosso S., Chapman R. (2013). Bayesian geoacoustic inversion of single hydrophone light bulb data using warping dispersion analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 134, p. 120-130.

- Bonnel J., Le Touzé G., Nicolas B., Mars J. (2013). Physics-based time-frequency representations for underwater acoustics: Power class utilization with waveguide-invariant approximation. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 30, n° 6, p. 120-129.
- Bourguignon S., Carfantan H., Idier J. (2007). A sparsity-based method for the estimation of spectral lines from irregularly sampled data. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 1, n° 4, p. 575–585.
- Boyd S., Vandenberghe L. (2009). *Convex optimization*. Cambridge University Press (Cambridge). (Chapitre 6)
- Brethorst G. L. (1998). *Bayesian spectrum analysis and parameter estimation* (vol. 48). Springer (New York). (Chapitre 2)
- Candès E. J., Wakin M. B. (2008). An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, n° 2, p. 21–30.
- Chartrand R., Yin W. (2008). Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing. *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, p. 3869–3872. Las Vegas, États Unis.
- Chen S. S., Donoho D. L., Saunders M. A. (1998). Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM journal on scientific computing*, vol. 20, n° 1, p. 33–61.
- Daubechies I., DeVore R., Fornasier M., Güntürk C. S. (2010). Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 1, n° 63, p. 1–38.
- Doucet A., De Freitas N., Gordon N. (2001). *Sequential monte carlo methods in practice*. Springer (New York). (Chapitre 2)
- Doucet A., Johansen A. M. (2009). A tutorial on particle filtering and smoothing: Fifteen years later. *Handbook of Nonlinear Filtering*, vol. 12, p. 656–704.
- Ewins D. J. (2000). *Modal testing: theory, practice and application* (second éd.). Research Studies Press (Baldock). (Chapitre 2)
- Harley J. B., Moura J. M. (2013). Sparse recovery of the multimodal and dispersive characteristics of lamb waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 133, p. 2732.
- Harley J. B., Moura J. M. (2015). Dispersion curve recovery with orthogonal matching pursuit. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 137, n° 1, p. EL1–EL7.
- Jensen F., Kuperman W., Porter M., Schmidt H. (2011). *Computational ocean acoustics* (second éd.). American Institute of Physics (New York). (Chapitres 5 et 10)
- Le Courtois F., Bonnel J. (2014a). Autoregressive model for high-resolution wavenumber estimation in a shallow water environment using a broadband source. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 135, n° 4, p. EL199–EL205.
- Le Courtois F., Bonnel J. (2014b). Wavenumber tracking in a low resolution frequency-wavenumber representation using particle filtering. *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, p. 6805–6809. Florence, Italie.
- Le Gall Y., Bonnel J. (2013, ). Méthode d'estimation de l'invariant océanique par couple de modes en acoustique sous-marine passive. *XXIV<sup>e</sup> colloque gretsi*. Brest, France.
- Lu I.-T., Qiu R. C., Kwak J. (1998). A high-resolution algorithm for complex spectrum search. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 104, n° 1, p. 288-299.

- Marcos S. (1998). *Les méthodes à haute résolution: traitement d'antenne et analyse spectrale*. Hermes. (Chapitre 1)
- Neilsen T., Westwood E. (2002). Extraction of acoustic normal mode depth functions using vertical line array data. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 111, p. 748–756.
- Newhall A. E., Duda T. F., von der Heydt K., Irish J. D. *et al.* (2007). *Acoustic and oceanographic observations and configuration information for the whoi moorings from the sw06 experiment*. Rapport technique n° WHOI-2007-04. Woods Hole Oceanographic Institution.
- Nicolas B., Mars J., Lacoume J. (2003). Geoacoustical parameters estimation with impulsive and boat-noise sources. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 28, n° 3, p. 494–501.
- Nicolas B., Mars J., Lacoume J. (2006). Source depth estimation using a horizontal array by matched-mode processing in the frequency-wavenumber domain. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, vol. 2006, p. 1–16.
- Oudompheng B., Pereira A., Picard C., Leclere Q., Nicolas B. (2014). A theoretical and experimental comparison of the iterative equivalent source method and the generalized inverse beamforming. *5<sup>th</sup> Berlin Beamforming Conference* Berlin, Allemagne.
- Philippe F. D., Roux P., Cassereau D. (2008). Iterative high-resolution wavenumber inversion applied to broadband acoustic data. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 55, n° 10, p. 2306-2311.
- Rajan S. D., Bhatta S. D. (1993). Evaluation of high-resolution frequency estimation methods for determining frequencies of eigenmodes in shallow water acoustic field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 93, n° 1, p. 378-389.
- Shang E. C., Wang H. P., Huang Z. Y. (1988). Waveguide characterization and source localization in shallow water waveguides using the prony method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 83, n° 1, p. 103-108.
- Suzuki T. (2011).  $l_1$  generalized inverse beam-forming algorithm resolving coherent/incoherent, distributed and multipole sources. *The Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, n° 24, p. 5835–5851.
- Westwood E., Tindle C., Chapman N. (1996). A normal mode model for acousto-elastic ocean environments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 100, p. 3631–3645.
- Xenaki A., Gerstoft P., Mosegaard K. (2014). Compressive beamforming. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 136, n° 1, p. 260–271.
- Yardim C., Michalopoulou Z.-H., Gerstoft P. (2011). An overview of sequential bayesian filtering in ocean acoustics. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 36, n° 1, p. 73–91.
- Yilmaz Ö. (2001). *Seismic data analysis: processing, inversion, and interpretation of seismic data* n° 10. Society of Exploration Geophysicists (Tulsa). (Chapitre 1.2)

