
Modèles déformables contraints en reconstruction tomographique par temps de première arrivée

Gil Gaullier¹, Pierre Charbonnier¹, Fabrice Heitz²,
Philippe Côte³

1. CEREMA/DTer Est/Laboratoire Régional de Strasbourg
11 Rue Jean Mentelin
B.P. 9, 67035 Strasbourg
gil.gaullier@gmail.com,pierre.charbonnier@cerema.fr
2. ICube, UMR 7357, Université de Strasbourg, CNRS
300 Bd Sébastien Brant
CS 10413, 67412 Illkirch Cedex
fabrice.heitz@unistra.fr
3. Dept. GERS, IFSTTAR, Centre de Nantes
Route de Bouaye
CS 4, 44344 Bouguenais
philippe.cote@ifsttar.fr

RÉSUMÉ. La reconstruction en tomographie par temps de première arrivée est rendue difficile par son caractère mal posé, par la non-linéarité du problème direct et par le faible nombre de données généralement disponibles. Dans ce contexte, les méthodes de reconstruction et de régularisation orientées « pixel » ne fournissent généralement pas des reconstructions satisfaisantes. Afin de contraindre la solution du problème de reconstruction, nous proposons ici une nouvelle approche de reconstruction orientée « objet » permettant d'introduire un a priori géométrique de haut niveau sur la forme des objets à reconstruire, par le biais d'un modèle déformable. La méthode développée approche le problème direct non linéaire par une suite de problèmes linéaires, conduisant à un schéma de minimisation alternée d'une fonction d'énergie intégrant l'a priori de forme et gérant les changements de topologie par l'algorithme des ensembles de niveaux. L'efficacité de la méthode est illustrée sur un jeu de données réelles, acquises sur un banc dédié à la réalisation d'expérimentations géophysiques à échelle réduite, en particulier pour un faible nombre de données.

ABSTRACT. Reconstruction in travelttime tomography is a difficult, ill-posed, non-linear inverse problem, in which only few data are generally available. As a consequence pixel-based regularization and reconstruction methods often lead to poor solutions. In this paper we develop a new object-based / deformable model-based reconstruction approach which enables to

set strong constraints on the shape of the object to reconstruct. The non-linearity is handled by a decoupling method which yields a sequence of linear shape optimization problems. The approach supports objects with complex topology, thanks to a level sets implementation. The reconstruction method is assessed on real data, obtained on a reduced-scale bench used in travelttime geoaoustic inversion.

MOTS-CLÉS : problèmes inverses, tomographie par temps de première arrivée, modèles déformables, reconstruction orientée objet, contraintes de forme, inversion géo-acoustique.

KEYWORDS: inverse problems, travelttime tomography, deformable models, shape-constrained reconstruction. geoaoustic inversion.

DOI:10.3166/TS.32.215-243 © 2015 Lavoisier

1. Introduction

La plupart des problèmes de reconstruction tomographique sont mal posés au sens d’Hadamard et nécessitent une régularisation. Les techniques de régularisation les plus classiques, comme celle de Tikhonov, sont *pixelliques*, au sens où elles agissent localement au niveau du pixel. Les limitations de la régularisation de Tikhonov, qui impose un lissage global de la solution, sont bien connues. Afin de les dépasser, des approches préservant les contours (voir, par exemple, (Geman, Reynolds, 1992 ; Geman, Yang, 1995 ; Charbonnier *et al.*, 1997)) ont été proposées. Elles introduisent une variable auxiliaire, appelée processus de ligne, pour désactiver la contrainte de lissage au niveau des discontinuités. Ceci permet d’améliorer la qualité de reconstruction aux frontières des objets, mais le modèle de discontinuité demeure local et peut être mis en défaut, notamment pour de forts niveaux de bruit ou pour un nombre trop limité de mesures tomographiques.

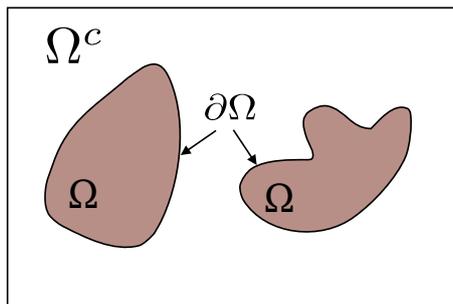


Figure 1. Approche orientée objet : partition du champ à reconstruire en une région Ω , correspondant à l’objet d’intérêt et son complémentaire, le fond, Ω^c . La forme Ω est ici formée de 2 composantes connexes

Nous adoptons ici une approche alternative, dite *orientée objet*, dans laquelle les frontières des structures d’intérêt sont modélisées explicitement (figure 1). Historiquement, cette idée a d’abord été appliquée en utilisant des représentations par des formes

géométriques telles que des cercles ou des ellipsoïdes (Rossi, Willsky, 1984), des polygones (Chiao *et al.*, 1994 ; Battle *et al.*, 1998) ou encore des cylindres (Bresler, Macovski, 1987). L'essor des modèles déformables paramétriques en segmentation s'est accompagné de leur application en reconstruction tomographique (se référer, par exemple, à (Mohammad-Djafari, 1996 ; Soussen, Mohammad-Djafari, 2004)). Avec l'apparition de l'algorithme des ensembles de niveaux (ou *Level Sets*) (Osher, Sethian, 1988), permettant de gérer facilement les changements de topologie, les approches par évolutions de courbes continues se sont fortement développées. Ainsi, en segmentation, des modèles de plus en plus performants sont apparus, comme les contours actifs géodésiques (Caselles *et al.*, 1997) et les contours actifs région (Zhu, Yuille, 1996 ; Chan, Vese, 2001). Ces techniques ont également été adaptées à la reconstruction d'images, à la suite de (Santosa, 1996) ou encore de (Bruandet *et al.*, 2002 ; Alvino, Yezzi, 2004). On trouvera dans (Dorn, Lesselier, 2006) une synthèse des méthodes par évolution de courbe employées en tomographie électromagnétique, et dans la thèse de Feng (Feng, 2002) un état de l'art concernant leur application à la tomographie médicale. Nous avons choisi ici cette approche par évolution de courbes (ou de surfaces), pour sa capacité à représenter dans un même formalisme une grande variété de géométries et de topologies. La reconstruction s'effectue par optimisation d'un critère énergétique, qui débouche sur une équation d'évolution portant sur le bord des objets à reconstruire.

Le cadre orienté objet se prête facilement à l'introduction d'informations *a priori* portant sur la distribution spatiale ou statistique d'intensité des objets et du fond, voir par exemple (Santosa, 1996 ; Zhu, Yuille, 1996 ; Paragios, Deriche, 2002 ; Lecellier *et al.*, 2014). Ainsi, dans l'approche que nous utilisons (Feng, 2002), le champ inconnu s est modélisé par une fonction continue par morceaux, définie à partir d'une région, Ω connexe ou non, représentant l'objet d'intérêt (figure 1) :

$$s(x, \Omega) = s_{\Omega}(x)\mathbb{1}_{\Omega}(x) + s_{\Omega^c}(x)\mathbb{1}_{\Omega^c}(x), \quad (1)$$

où $\mathbb{1}_{\Omega}$ désigne la fonction indicatrice de Ω . Les fonctions $s_{\Omega}(x)$ et $s_{\Omega^c}(x)$ représentent les distributions spatiales associées, respectivement, à la forme à reconstruire et au fond. La localisation des frontières de l'objet ainsi que les paramètres de s_{Ω} et s_{Ω^c} sont alors obtenues par minimisation d'une fonctionnelle d'énergie.

Dans l'esprit, ce modèle est très proche de celui proposé en restauration par Mumford et Shah (1989), dans lequel une contrainte est ajoutée sur la longueur de la frontière des régions. Les performances de tels modèles peuvent être notablement améliorées en incorporant des contraintes de haut niveau sur la forme des objets (Leventon *et al.*, 2000 ; A. Tsai *et al.*, 2003 ; Foulonneau *et al.*, 2006). Ceci procure un avantage décisif dans les applications où les formes à reconstruire sont connues a priori, dans la limite de certaines variations, qui peuvent être de nature géométrique ou statistique. Dans ce cas, un dictionnaire de *formes de références* peut être constitué. Il a été ainsi montré (Gauillier *et al.*, 2009) que l'introduction en tomographie linéaire de telles contraintes de forme, initialement proposées en segmentation d'image par les auteurs (Foulonneau *et al.*, 2006 ; 2009), permettait d'améliorer significativement la qualité des reconstructions dans des configurations expérimentales difficiles.

Dans cet article, nous abordons un problème, plus difficile, de reconstruction tomographique *non linéaire* : la tomographie par temps de première arrivée. Il s'agit de reconstruire la distribution des vitesses de propagation d'ondes acoustiques dans le milieu imagé, à partir de la mesure de leur temps de première arrivée (pour une vue d'ensemble de la littérature sur ce sujet, on pourra se référer à (Rawlinson, Sambridge, 2003)). Ce problème est non linéaire car les rais de propagation qui définissent le problème direct dépendent de la distribution inconnue des vitesses. Dans une approche pixelique, il est classique de linéariser le problème au premier ordre et d'appliquer des techniques telles que ART ou SIRT pour effectuer l'optimisation (Abraham *et al.*, 1988). Malheureusement, le caractère intrinsèquement discontinu du modèle orienté objet (figure 1) empêche d'utiliser directement cette forme d'approximation. Toutefois, nous montrons ici qu'une méthode par évolution de forme peut être définie dans ce contexte. Pour cela, nous proposons une reformulation du critère de reconstruction, dont l'optimisation conduit à la minimisation d'une suite de fonctionnelles linéaires par rapport au champ à reconstruire. Par ailleurs, dans la procédure de reconstruction, nous introduisons, comme dans (Gaullier *et al.*, 2009), des contraintes géométriques de haut niveau sur la forme à reconstruire, à partir d'un dictionnaire de formes de références. Les contraintes géométriques s'appuient sur une représentation hiérarchique des formes, indépendante de la topologie des objets et invariante à certaines transformations géométriques (translation, rotation et mise à l'échelle par exemple). Nous montrons l'efficacité de la méthode de reconstruction contrainte à partir de données réelles, acquises sur un banc de mesures ultrasonores dédié à la réalisation d'expérimentations géophysiques à échelle réduite.

Des approches orientées objet pour la tomographie par temps de première arrivée ont été proposées indépendamment, dans deux articles récents. Dans (Li, Leung, 2013) une méthode de reconstruction par ensembles de niveaux est proposée. Elle suppose la connaissance de la distribution d'intensité à l'extérieur de l'objet et n'incorpore pas de contrainte de forme. Dans (Lin, Ortega, 2013), une méthode stochastique optimisant une population d'ellipses est développée. Elle est fondée sur une hypothèse de fort contraste, relativement limitative. L'approche que nous proposons ici intègre des contraintes sur la forme à reconstruire et ne fait pas d'hypothèses aussi restrictives sur la forme ou la distribution de l'objet ou du fond.

La suite de l'article est organisée de la façon suivante. Dans la section 2, nous formulons le problème de reconstruction tomographique par temps de première arrivée. La méthode de reconstruction orientée objet sous contrainte de forme que nous proposons est détaillée en section 3. Les reconstructions obtenues sur données réelles acquises en situation contrôlée sont présentées en section 4 et comparées avec une méthode de type SIRT, pour différentes configurations de sources / capteurs.

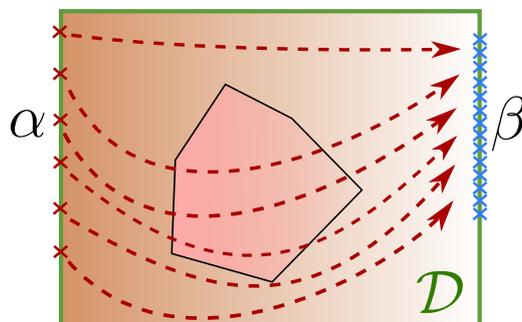


Figure 2. Tomographie par temps de première arrivée : sources (α) et capteurs (β) localisés sur la frontière du domaine imagé, \mathcal{D}

2. Tomographie par temps de première arrivée

2.1. Principe et dispositif expérimental

La tomographie par temps de première arrivée considère comme données d'entrées les temps de parcours d'ondes acoustiques propagées depuis un certain nombre de sources jusqu'à un ensemble de capteurs (figure 2). Elle a pour but de reconstruire en chaque localisation spatiale x , la vitesse de propagation des ondes (ou son inverse, appelée lenteur et notée s). Cette cartographie peut ensuite être reliée aux propriétés physiques du domaine imagé afin, par exemple, de détecter des objets d'intérêt, tels que des cavités ou des fondations.

Nous noterons α une position de source et β une position de capteur. Le temps de parcours de l'onde entre α et β , associé au champ de lenteur scalaire s sera noté $T(\alpha, \beta, s)$. L'ensemble des temps de parcours mesurés est rassemblé dans un vecteur d'observations bruitées, qui sera noté T_{obs} .

Afin de disposer de données réelles en laboratoire pour comparer différentes méthodes de reconstruction, nous avons utilisé un banc dédié à la réalisation de mesures géophysiques à échelle réduite, développé par l'IFSTTAR (Bretaudéau *et al.*, 2011). L'objet physique 3D imagé est composé d'un demi-cylindre en aluminium contenu dans un bloc de résine. La vitesse de propagation de l'onde est d'environ 6000 m.s^{-1} dans l'aluminium et d'environ 3000 m.s^{-1} dans la résine. Les mesures de temps de parcours sont effectuées sur le banc de la façon suivante. Une source piézo-électrique ultrasonore est placée successivement en 35 positions sur une coupe de la structure 3D. Pour chacune de ces positions, un capteur interférométrique laser est placé en 26 positions successives. Le capteur est placé sur une des faces de la coupe, et la source parcourt les trois autres faces. Le capteur enregistre les déplacements de la surface induits par l'onde, dont la première arrivée est pointée manuellement par un opérateur. La figure 3 présente le dispositif expérimental pour une position donnée du couple source-capteur. La figure 4 montre un exemple de signal en émission et en réception, avec pointage manuel du temps d'arrivée.

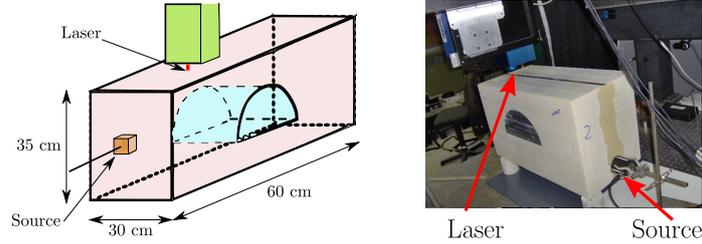


Figure 3. Dispositif expérimental : l'objet réel 3D au banc de test

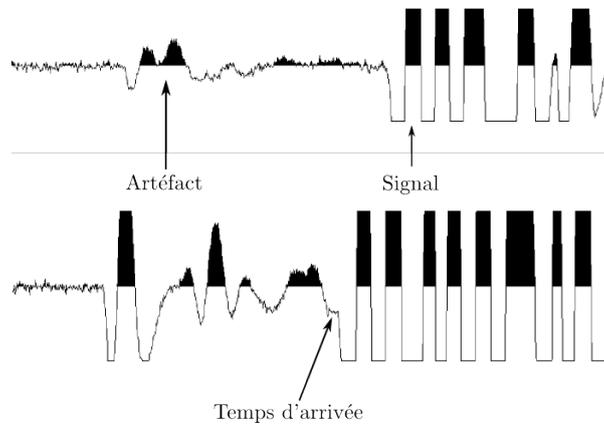


Figure 4. Exemple de signal émis par la source (en haut) et de l'enregistrement par le capteur (en bas)

2.2. Problème direct et principe de Fermat

Le problème direct consiste à calculer les temps de parcours $T(\alpha, \beta, s)$ entre sources α et capteurs β , étant donné un champ de lenteur s . Dans le cadre classique de l'approximation haute-fréquence, où nous nous plaçons, on peut utiliser la théorie des rais pour décrire la propagation des fronts d'onde (Cerveny, 2001). D'après le principe de Fermat, le rai de parcours de l'onde propagée minimise le temps de trajet entre la source et le capteur. Dans l'approche orientée objet que nous considérons ici, le champ de lenteur $s(\cdot, \Omega)$ est continu par morceaux et défini par (1). Ainsi, l'opérateur direct T , qui dépend de α, β et de $s(\cdot, \Omega)$, s'écrit¹ :

$$T(\alpha, \beta, s(\cdot, \Omega)) = \inf_{\psi \in \Gamma_{\alpha\beta}} \int_{\psi} s(x, \Omega) dl \quad (2)$$

1. Afin d'alléger les notations, nous employons ici une expression simplifiée de l'intégrale curviligne le long du chemin ψ qui, en toute rigueur, devrait s'écrire : $\int_{\psi} s(x(l), \Omega) dl$, où s est le champ de lenteur et dl désigne l'élément de longueur le long du chemin ψ .

où $\Gamma_{\alpha\beta}$ désigne l'ensemble des chemins reliant α et β . De manière équivalente, on peut écrire (2) comme :

$$T(\alpha, \beta, s(\cdot, \Omega)) = \int_{\gamma_{\alpha\beta}} s(x, \Omega) dl \quad (3)$$

où le chemin d'intégration $\gamma_{\alpha\beta}$ satisfait :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \arg \inf_{\psi \in \Gamma_{\alpha\beta}} \int_{\psi} s(x, \Omega) dl. \quad (4)$$

En conséquence, contrairement au cas de la tomographie classique, où les chemins d'intégration sont fixes (et droits), la forme des rais dépend ici du champ de lenteur, ce qui rend le problème direct non linéaire par rapport à s .

2.3. Problème inverse

La tomographie par temps de première arrivée a pour but de reconstruire un champ scalaire caractérisant la vitesse de propagation de l'onde (ou plutôt, son inverse, la lenteur s) en chaque position spatiale x , à partir d'un vecteur collectant les mesures, bruitées, des temps de trajet : T_{obs} . Dans l'approche orientée objet, qui consiste à déterminer le champ de lenteur discontinu défini dans (1), les inconnues du problème sont les fonctions $s_{\Omega}(x)$, $s_{\Omega^c}(x)$ et les frontières de la forme Ω .

Le problème de reconstruction est donc posé comme celui de la minimisation d'une fonction qui, dans le cas de la tomographie par temps de première arrivée peut s'écrire :

$$\mathcal{J}(s_{\Omega}, s_{\Omega^c}, \Omega) = \frac{1}{2} \|T(\cdot, \cdot, s(\cdot, \Omega)) - T_{obs}\|^2. \quad (5)$$

où $T(\cdot, \cdot, s(\cdot, \Omega))$ désigne le vecteur collectant l'ensemble des temps de trajet entre les sources α et capteurs β .

La particularité de notre application est que le problème direct est gouverné par l'intégrale curviligne (3), dans laquelle le champ de lenteur inconnu s intervient de manière non linéaire, à travers les chemins d'intégration optimaux donnés par (4). Ainsi, contrairement au cas de la tomographie linéaire classique, on ne peut établir l'expression analytique de la dérivée du critère par rapport à la forme, ce qui rend le problème d'optimisation beaucoup plus ardu. Nous proposons, dans la section suivante, une méthode qui permet de contourner cette difficulté.

3. Une méthode de reconstruction sous contrainte de forme

Dans cette section, nous présentons tout d'abord la méthode que nous proposons pour résoudre le problème d'optimisation non linéaire sans contrainte (5), d'abord par rapport à la forme Ω , puis par rapport aux paramètres du modèle de lenteur (1). Ensuite, nous montrons comment introduire dans le critère optimisé des contraintes de haut niveau sur la géométrie et la topologie de l'objet recherché. Enfin, nous décrivons l'algorithme d'optimisation proposé.

3.1. Optimisation par rapport à la forme

Les méthodes basées pixel procèdent généralement par linéarisation du problème direct, ce qui impose une contrainte de régularité \mathcal{C}^1 (Cartan, 1967) à la fonction intégrée. Évidemment, une telle hypothèse ne tient pas dans le cadre de la reconstruction de forme, en raison de la discontinuité de lenteur aux frontières $\partial\Omega$ de Ω (figure 1). Afin de contourner le problème, nous avons recours à une technique de découplage, qui conduit à une série de problèmes d'optimisation linéaires, qui peuvent être traités dans le cadre de l'optimisation de forme.

La non linéarité de l'opérateur direct tient au fait que le champ s , lié à la forme inconnue Ω par (1), apparaît à la fois dans l'intégrande de (2) et dans les chemins (minimaux) d'intégration. Nous proposons de découpler le problème en deux sous-étapes : estimation des chemins et calcul des temps de trajet. A cette fin, nous définissons une séquence d'estimées de forme, $(\Omega_k)_{k \geq 0}$, destinées à approcher la forme optimale Ω^* lorsque k devient grand. Nous définissons T^{γ^k} comme une fonction de α , β , de l'estimée courante Ω_k et de la forme inconnue Ω , qui sera estimée à l'itération suivante :

$$T^{\gamma^k}(\alpha, \beta, s(\cdot, \Omega)) = \int_{\gamma_{\alpha\beta}^k} s(x, \Omega) dl \quad (6)$$

où le chemin d'intégration $\gamma_{\alpha\beta}^k$ satisfait le principe de Fermat pour le champ de lenteur (1) défini par la forme courante Ω_k , i.e.

$$\gamma_{\alpha\beta}^k = \arg \inf_{\psi \in \Gamma_{\alpha\beta}} \int_{\psi} s(x, \Omega_k) dl. \quad (7)$$

La forme Ω_{k+1} , i.e. la forme à l'itération suivante de la procédure, est définie comme la solution du problème d'optimisation de forme ci-dessous, basé sur T^{γ^k} :

$$\Omega_{k+1} = \arg \inf_{\Omega} \frac{1}{2} \|T^{\gamma^k}(\cdot, \cdot, s(\cdot, \Omega)) - T_{obs}\|^2 \quad (8)$$

où, comme précédemment, $T^{\gamma^k}(\cdot, \cdot, s(\cdot, \Omega))$ et T_{obs} sont les vecteurs collectant les temps de trajet pour tous les couples de positions source-capteur. On notera n_s le nombre de positions des sources et n_c le nombre de positions des capteurs, conduisant à des vecteurs de dimension $n_s \times n_c$.

L'intérêt principal de (8) est qu'il implique un opérateur direct linéaire. En effet, une fois les chemins d'intégration $\gamma_{\alpha\beta}^k$ déterminés à partir de l'estimée courante Ω_k dans (7), l'intégrale curviligne dans (6) est calculée le long d'un chemin fixé. Comme ce dernier est indépendant des variations du champ de lenteur défini par la forme en évolution Ω , l'opérateur défini par (6) est un opérateur tomographique intégral, linéaire par rapport à $s(\cdot, \Omega)$. Ainsi, le vecteur des temps de trajet, $T^{\gamma^k}(\cdot, \cdot, s(\cdot, \Omega))$ peut s'écrire classiquement sous forme d'un produit matrice-vecteur :

$$T^{\gamma^k}(\cdot, \cdot, s(\cdot, \Omega)) = \mathcal{R}^k \cdot s(\cdot, \Omega). \quad (9)$$

Dans cette expression, $s(\cdot, \Omega)$ est le vecteur rassemblant les valeurs de lenteurs en chaque pixel. La matrice \mathcal{R}^k est appelée matrice des longueurs de rais (Rawlinson, Sambridge, 2003, p. 113)², ses éléments correspondant à la distance couverte par chaque rai dans chaque pixel du domaine \mathcal{D} . Finalement, l'équation (8) peut s'écrire sous sa forme la plus simple :

$$\Omega_{k+1} = \arg \inf_{\Omega} \frac{1}{2} \|\mathcal{R}^k . s(\cdot, \Omega) - T_{obs}\|^2. \quad (10)$$

L'intérêt de cette formulation, similaire à celle de la tomographie classique, est que l'on peut établir l'expression littérale de la dérivée de forme du critère (voir Annexe B) et donc, calculer Ω_{k+1} par évolution de forme.

3.2. Optimisation des paramètres du champ de lenteur

Simultanément à la forme, le critère quadratique $\|\mathcal{R}^k . s(\cdot, \Omega) - T_{obs}\|^2$ doit également être optimisé par rapport aux paramètres du modèle de lenteur, à l'intérieur et à l'extérieur de la forme. Nous considérons le cas où s_{Ω} et s_{Ω^c} dans l'eq. (1) sont des combinaisons linéaires de fonctions de bases spatiales, comme proposé dans (Feng *et al.*, 2003) dans le cadre de la tomographie classique. Autrement dit, nous écrivons (1) comme :

$$s(x, \Omega) = \sum_{i=1}^K a_i . s_i^{\Omega}(x) . \mathbb{1}_{\Omega}(x) + \sum_{i=1}^L b_i . s_i^{\Omega^c}(x) . \mathbb{1}_{\Omega^c}(x) \quad (11)$$

où les fonctions de base, $s_i^{\Omega}(x)$ et $s_i^{\Omega^c}(x)$, peuvent être des polynômes ou des fonctions trigonométriques, par exemple. Notons \mathcal{A}_i^k (resp. \mathcal{B}_i^k) le résultat de l'opérateur direct avec des rais fixes (6) appliqués à la fonction $s_i^{\Omega} . \mathbb{1}_{\Omega}$ (resp. à la fonction $s_i^{\Omega^c} . \mathbb{1}_{\Omega^c}$) :

$$\mathcal{A}_i(\alpha, \beta, \Omega) = \int_{\gamma_{\alpha\beta}^k} s_i^{\Omega} . \mathbb{1}_{\Omega}, \quad \mathcal{B}_i(\alpha, \beta, \Omega) = \int_{\gamma_{\alpha\beta}^k} s_i^{\Omega^c} . \mathbb{1}_{\Omega^c}. \quad (12)$$

On rassemble les \mathcal{A}_i^k (resp. les \mathcal{B}_i^k) en un vecteur A_i^k (resp. B_i^k) de longueur $(n_s \times n_c)$. De même, les a_i et les b_i sont rassemblés en un vecteur de paramètres θ de taille $(K + L)$:

$$\theta = (a_1, \dots, a_K, b_1, \dots, b_L)^T. \quad (13)$$

Avec ces notations, et en exploitant la linéarité des modèles (1) et (9), nous pouvons exprimer le vecteur des temps d'arrivée prédits par le modèle direct, T^{γ^k} comme une fonction de θ :

$$T^{\gamma^k} = \mathcal{R}^k . s = \mathcal{M}^k . \theta \quad (14)$$

2. On trouvera des détails sur la définition de \mathcal{R}^k et de l'opérateur de rétro-projection associé dans (Gauillier, 2013, Sec. 5.5).

où \mathcal{M}^k est une matrice dont les K premières colonnes sont les A_i^k et les L dernières colonnes sont les B_i^k . Ainsi, les valeurs optimales des paramètres du champ de lenteur sont données par :

$$\hat{\theta} = \arg \inf_{\theta} \frac{1}{2} \|\mathcal{M}^k \cdot \theta - T_{obs}\|^2. \quad (15)$$

Comme $\mathcal{M}^{kT} \mathcal{M}^k$ est définie semi-positive et rarement singulière (Feng *et al.*, 2003), $\hat{\theta}$, qui est solution du système linéaire :

$$\mathcal{M}^{kT} \mathcal{M}^k \hat{\theta} = \mathcal{M}^{kT} T_{obs} \quad (16)$$

peut être obtenu par inversion (ou pseudo-inversion). Un cas particulier important est celui où l'objet et le fond sont caractérisés par des lenteurs constantes s_{Ω} et s_{Ω^c} . Dans ce cas, le vecteur de paramètre est réduit à $(s_{\Omega}, s_{\Omega^c})$ et $\hat{\theta}$ est solution d'un système 2×2 .

3.3. Introduction de la contrainte de forme

L'*a priori* de forme que nous utilisons pour contraindre l'évolution de Ω a initialement été introduit dans (Foulonneau *et al.*, 2009), dans le contexte de la segmentation d'images et utilisé dans (Gaullier *et al.*, 2009) en reconstruction tomographique linéaire. Il introduit, comme *descripteur* d'une forme, les moments de Legendre de sa fonction indicatrice, jusqu'à un certain ordre N : $\lambda = \{\lambda_{p,q}, 0 \leq p+q \leq N\}$.

Rappelons que les moments géométriques (ou moments réguliers) de la fonction indicatrice de la forme Ω sont définis pour $u \geq 0, v \geq 0$ par :

$$M_{u,v}(\Omega) = \int_{\mathcal{D}} \mathbb{1}_{\Omega}(x) x_1^u x_2^v dx = \int_{\Omega} x_1^u x_2^v dx \quad (17)$$

où x_1^u et x_2^v sont les puissances des coordonnées d'un point $x = (x_1, x_2)$, $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. A partir de (17), les moments de Legendre sont introduits en substituant aux monômes canoniques les polynômes de Legendre qui sont orthogonaux sur $[-1, 1]$. De plus les moments de Legendre peuvent être rendus intrinsèquement invariants à certaines transformations géométriques en exploitant la relation linéaire entre moments de Legendre et moments réguliers. Nous considérons ici des moments invariants en translation et facteur d'échelle³ :

$$\lambda_{p,q}(\Omega) = C_{pq} \sum_{0 \leq u \leq p} \sum_{0 \leq v \leq q} a_{pu} a_{qv} \eta_{u,v}(\Omega) \quad (18)$$

où a_{pu}, a_{qv} sont les coefficients de x_1 et x_2 dans le développement en série des polynômes de Legendre (formule de Rodrigues), $C_{pq} = (2p+1)(2q+1)/4$, et les $\eta_{u,v}$ sont les moments centraux normalisés définis par :

$$\eta_{u,v}(\Omega) = \int_{\Omega} H_{u,v}(x, \Omega) dx \quad (19)$$

3. Une invariance aux rotations peut également être introduite (Foulonneau *et al.*, 2006), au détriment de la complexité du problème d'optimisation (Foulonneau *et al.*, 2009).

avec

$$H_{u,v}(x, \Omega) = \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^u (x_2 - \bar{x}_2)^v}{(\beta_N |\Omega|)^{\frac{u+v+2}{2}}}. \quad (20)$$

Dans (20), (\bar{x}_1, \bar{x}_2) est le centre de gravité de Ω , $|\Omega|$ désigne son aire et β_N est une constante de normalisation fixant l'échelle de la forme de référence dans l'intervalle $[-1, 1]^2$ (Foulonneau *et al.*, 2009). Ces quantités s'obtiennent directement à partir des trois premiers moments réguliers : $|\Omega| = M_{0,0}$, $\bar{x}_1 = M_{1,0}/M_{0,0}$ et $\bar{x}_2 = M_{0,1}/M_{0,0}$.

Une forme peut être reconstruite graduellement à partir de ses moments invariants de Legendre, comme illustré sur la figure 5. Dans cet exemple, un demi-disque (qui est également l'objet matériel utilisé sur notre banc de mesure) est reconstruit à partir de ses moments à différents ordres N , et pour différentes valeurs de β_N . Comme attendu la reconstruction est d'autant plus précise que l'ordre est élevé. Par ailleurs toutes les reconstructions sont centrées et leur échelle est $1/\beta_N$. Des courbes d'erreur de reconstruction sont présentées figure 6. Ces courbes permettent de déterminer l'ordre maximal N de la représentation et le paramètre d'échelle β_N permettant une approximation satisfaisante tout en évitant les instabilités numériques visibles sur la figure, pour les ordres élevés (Foulonneau *et al.*, 2006).

	$\beta_N = 0,8$	$\beta_N = 1$	$\beta_N = 1,2$
$N = 3$			
$N = 13$			
$N = 27$			

Figure 5. Différentes reconstructions d'une forme de référence (demi-disque) sur $[-1, 1]^2$, à partir de ses moments de Legendre. N désigne l'ordre maximum utilisé pour les moments de Legendre, $\frac{1}{\beta_N}$ fixe l'échelle de représentation de la forme de référence

La représentation d'une forme par les moments de Legendre est compacte, hiérarchique et indépendante de la topologie des formes puisqu'elle s'appuie sur la fonction caractéristique. Comme elle est, de plus, invariante aux translations et facteurs d'échelle, elle peut être utilisée pour comparer la forme en évolution à un ensemble de formes de références prédéfinies.

On suppose ainsi que l'on dispose d'un ensemble de N_{ref} formes de référence Ω_j^{ref} , connues *a priori* (voir par exemple figure 7). On note λ_j^{ref} le descripteur inva-

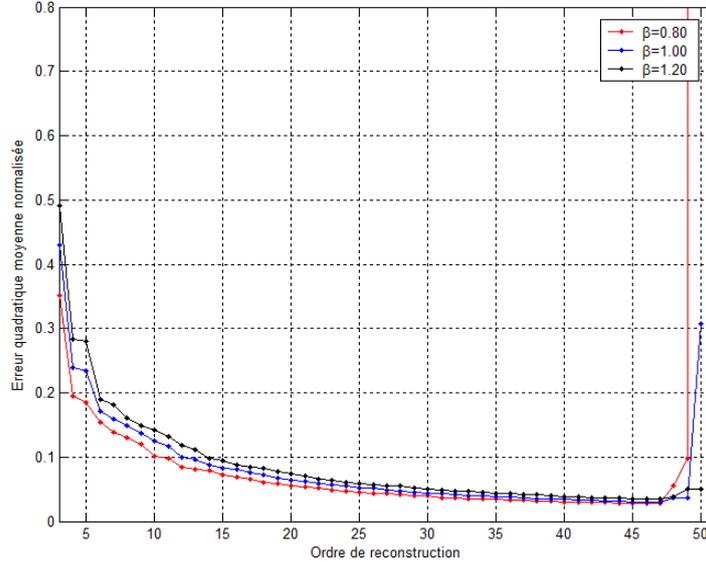


Figure 6. Erreur de représentation d'une forme à partir de ses moments invariants de Legendre, pour différentes valeurs de β_N . On remarquera que des instabilités numériques apparaissent pour des ordres trop élevés



Figure 7. Exemple d'un ensemble (dictionnaire) de formes de référence utilisées dans la reconstruction

riant de Legendre de la forme de référence Ω_j^{ref} . Notre *a priori* de forme est défini à partir d'un mélange de lois gaussiennes isotropes, de même variance σ^2 , centrées sur chaque forme de référence. En termes de fonctionnelle d'énergie, ceci conduit à l'*a priori* suivant :

$$J^{prior}(\Omega) = -\log \left(\sum_{j=1}^{N_{ref}} e^{\left(-\frac{\|\lambda(\Omega) - \lambda_j^{ref}\|^2}{2\sigma^2} \right)} \right). \quad (21)$$

Dans notre implantation, σ^2 est choisi de sorte que la probabilité d'erreur de classification entre les deux formes de référence les plus proches (en termes de descripteurs) soit inférieure à 3 % (Foulonneau *et al.*, 2009). Notons que, dans l'esprit de (Cremers *et al.*, 2006), ce modèle peut être vu comme un estimateur de Parzen à noyau gaus-

sien de largeur de bande σ , qui approche la densité de probabilité des descripteurs des formes de référence lorsque N_{ref} devient grand⁴.

Dans la procédure d'optimisation proposée, le terme d'attache aux données minimisé à chaque étape est défini, voir (8) et (10), par :

$$J_k^{data}(\Omega) = \frac{1}{2} \|T^{\gamma^k}(\cdot, \cdot, s(\cdot, \Omega)) - T_{obs}\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathcal{R}_k \cdot s(\cdot, \Omega) - T_{obs}\|^2. \quad (22)$$

Nous incorporons la contrainte de forme à chaque étape k de la reconstruction en considérant la fonctionnelle d'énergie complète suivante :

$$J_k(\Omega) = (1 - \alpha_p) J_k^{data}(\Omega) + \alpha_p J^{prior}(\Omega) \quad (23)$$

où α_p est un facteur de pondération entre le terme d'attache aux données et l'*a priori*.

3.4. Algorithme de reconstruction sous contrainte de forme

En partant d'une forme initiale donnée, Ω_0 , l'algorithme proposé répète les deux étapes ci-dessous jusqu'à convergence :

▷ *Étape 1* : Calculer l'ensemble de rais de parcours optimaux, i.e. satisfaisant le principe de Fermat eq. (7) pour le champ de lenteur courant, $s(\cdot, \Omega_k)$. Ceci définit la matrice \mathcal{R}_k .

▷ *Étape 2* : Minimiser (23) par descente de gradient pour obtenir Ω_{k+1} , en remettant à jour périodiquement les paramètres θ des champs de lenteur sur l'objet, s_Ω , et sur le fond, s_Ω^c , à l'aide de (16).

Dans la suite de cette section, nous détaillons chacune de ces étapes dans le cas particulier de champs de lenteurs constants : s_Ω sur l'objet et s_Ω^c sur le fond. Ce cas correspond au modèle expérimental que nous avons utilisé dans la suite.

3.4.1. Initialisation

Nous initialisons Ω_0 à l'aide d'un simple disque et calculons les valeurs initiales de s_Ω et s_Ω^c en utilisant une rétro-projection des données. Plus spécifiquement, nous superposons le disque sur l'image de rétro-projection obtenue à partir des temps T_{obs} et calculons les valeurs moyennes de lenteur à l'intérieur et à l'extérieur de cette région. Le disque est, en général, une approximation très grossière de l'objet recherché et le champ de lenteur ainsi obtenu, $s(\cdot, \Omega^0)$ est peu contrasté. Toutefois, comme nous le verrons à la section 4, cette initialisation fournit des reconstructions satisfaisantes à convergence. D'autres stratégies d'initialisation, comme les *seed snakes*, peuvent aussi être considérées, voir par exemple (Foulonneau *et al.*, 2009).

4. Il serait envisageable, à supposer que l'on dispose d'un nombre suffisamment important d'échantillons de références, d'utiliser un algorithme de coalescence (de type EM ou k-moyennes) pour les résumer à travers quelques formes moyennes, avec une matrice de covariance (non isotrope) pour chacune, mais nous n'avons pas exploré cette possibilité expérimentalement, pour l'instant.

3.4.2. Étape 1 : calcul des chemins minimaux

A l'étape 1, plusieurs méthodes sont envisageables pour calculer les chemins optimaux selon le principe de Fermat, Eq. (7). Une revue de la littérature sur ce sujet peut être trouvée dans (Rawlinson, Sambridge, 2003) et des détails techniques sont donnés dans (Gauillier, 2013).

De façon générale, les trajets optimaux associés à chaque source peuvent être calculés par des algorithmes de propagation utilisant l'équation *eikonale*, tels que le *Fast Marching* (Sethian, 1996) ou le *Fast Sweeping* (Y.-H. Tsai *et al.*, 2003), les rais étant extraits dans un second temps, par rétro-propagation (descente de gradient). Des approximations pour les trajets optimaux peuvent toutefois être utilisées pour réduire le temps de calcul. Le choix le plus simple consiste à considérer des droites, mais cette approximation est trop grossière pour obtenir des reconstructions pertinentes. Nous employons ici une variante rapide et éprouvée de technique de *bending*, qui approche les rais par des arcs de cercle (Abraham *et al.*, 1988). Dans la pratique, on fait varier le paramètre de flexion (dans notre cas, il s'agit de la flèche de l'arc de cercle) jusqu'à ce que le principe de Fermat soit vérifié. Le temps de parcours associé est obtenu par intégration numérique de la longueur le long de l'arc. L'opération est répétée pour chaque paire source-capteur.

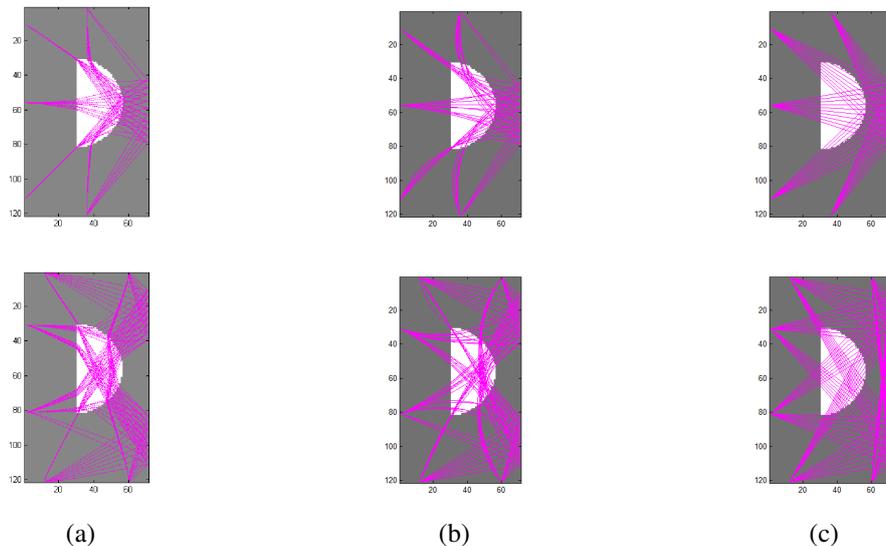


Figure 8. Calcul des trajets pour deux séries de positions source/capteur sur un objet synthétique 2D, (a) Fast Marching et rétro-propagation (trajets optimaux), (b) arcs de cercle (bonne approximation), (c) droites (mauvaise approximation)

La figure 8 présente les trajets obtenus dans le cas d'un objet synthétique 2D homogène (demi-disque), pour deux séries de positions de sources / capteurs et pour trois géométries de rais différents. Remarquons que, puisque nous considérons un champ

de lenteur constant par morceaux dans nos expériences, les trajets optimaux sont théoriquement constitués de chemins polygonaux. En pratique les temps de parcours que nous avons obtenus par l'approximation par arc de cercles sont très proches des temps de parcours obtenus avec la méthode optimale de *Fast Marching* et c'est donc cette solution que nous avons adoptée dans notre implantation.

3.4.3. Étape 2 : évolution de la forme

L'étape 2 de l'algorithme de reconstruction consiste à optimiser (23) par rapport à la forme, par un algorithme de descente de gradient (Sokolowski, Zolesio, 1992)

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}(x, \tau) &= -\nabla_{\Omega} J_k \triangleq V \cdot \mathcal{N} \\ \Gamma(x, 0) &= \Gamma_k(x) \end{cases} \quad (24)$$

où $\Gamma_k = \partial\Omega_k$ est la frontière de la forme à l'itération courante, V est la *fonction vitesse* et \mathcal{N} est la normale à $\partial\Omega$ orientée vers l'intérieur. L'application répétée de (24) définit, à convergence, une nouvelle forme Ω_{k+1} qui minimise localement la fonctionnelle de forme J_k . Dans (24), $\nabla_{\Omega} J_k$ est le gradient de forme de la fonctionnelle d'énergie J_k , dont le calcul peut se mener de manière rigoureuse dans le cadre de la dérivation de forme ou dérivation eulérienne (Sokolowski, Zolesio, 1992 ; Aubert *et al.*, 2003).

La dérivée de forme du terme d'attache aux données J_k^{data} , qui est linéaire, est calculée comme dans (Gaulhier *et al.*, 2009) et s'écrit (voir Annexe B) :

$$\nabla_{\Omega} J_k^{data} = (s_{\Omega} - s_{\Omega^c}) \mathcal{R}_k^* [T_{obs} - \mathcal{R}_k \cdot s(\cdot, \Omega)] \mathcal{N} \quad (25)$$

où \mathcal{R}_k est l'opérateur direct défini par (9) et \mathcal{R}_k^* est l'opérateur adjoint associé.

La minimisation du terme d'a priori J^{prior} conduit (voir Annexe C) à :

$$\nabla_{\Omega} J^{prior} = - \sum_{0 \leq u+v \leq N} A_{uv} (H_{uv} + G_{uv}) \mathcal{N} \quad (26)$$

où \mathcal{N} est la normale à $\partial\Omega$ orientée vers l'extérieur, H_{uv} est définie comme dans (20) et :

$$G_{uv} = -\frac{u+v+2}{2|\Omega|} \eta_{u,v} - \frac{u(x-\bar{x})}{\beta_N^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{3}{2}}} \eta_{u-1,v} - \frac{v(y-\bar{y})}{\beta_N^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{3}{2}}} \eta_{u,v-1} \quad (27)$$

Le facteur A_{uv} est défini comme une moyenne pondérée de facteurs individuels $A_{(j)uv}$:

$$A_{uv} = \left(\sum_{j=1}^{N_{ref}} A_{(j)uv} w_{(j)} \right) / 2\sigma^2 \sum_{j=1}^{N_{ref}} w_{(j)} \quad (28)$$

Ces facteurs (dont l'expression détaillée est donnée en Annexe C) sont calculés à partir des différences, en termes de moments de Legendre, entre la forme en évolution Ω et la forme de référence Ω_j^{ref} . Les poids, $w_{(j)}$ décroissent de manière exponentielle par rapport à cette même distance :

$$w_{(j)} = e^{-\frac{||\lambda(\Omega) - \lambda_{(j)}^{ref}||^2}{2\sigma^2}}. \quad (29)$$

Ainsi, la force induite par la minimisation de J^{prior} est la moyenne pondérée des forces de rappel qui attireraient la forme en évolution vers chacune des formes de référence prise individuellement. L'examen des valeurs des pondérations permet donc la reconnaissance de la forme en même temps que sa reconstruction.

En pratique, l'évolution de la forme est implantée grâce à l'algorithme des ensembles de niveaux (Osher, Sethian, 1988). Les valeurs des constantes s_{Ω} et s_{Ω^c} sont optimisées à chaque réinitialisation de la bande étroite employée, en résolvant le système linéaire (16).

4. Résultats de reconstruction de forme

Nous évaluons ici la méthode proposée sur données réelles, acquises en conditions contrôlées à l'aide du banc de mesure décrit en section 2.1. On trouvera figure 9 une coupe de l'objet utilisé (demi-cylindre d'aluminium noyé dans de la résine), avec un rappel de la position des sources et capteurs autour du corps d'étude, ainsi qu'une représentation matricielle, en fausses couleurs, des temps de parcours mesurés.

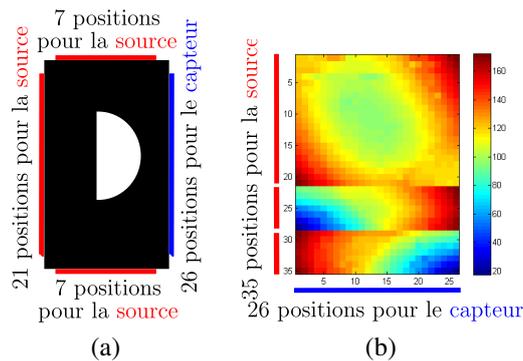


Figure 9. (a) positions des sources et des capteurs ; (b) temps de parcours mesurés (en μs) pour chaque position de capteur (en abscisses) et de source (en ordonnées)

Nous comparons tout d'abord notre méthode de reconstruction orientée objet avec l'algorithme classique de type SIRT pixellique (Abraham *et al.*, 1988) utilisé habituellement sur ce banc. Cet algorithme emploie le même modèle de rais et les mêmes routines de calcul des opérateurs direct \mathcal{R}_k (et adjoint \mathcal{R}_k^*) que l'algorithme proposé. La figure 10 montre les reconstructions du champ de vitesse obtenues par cet algorithme. Nous considérons deux configurations sources / capteurs : 35 sources-26 capteurs (a) et une configuration réduite avec deux fois moins de sources et de capteurs : 18 sources-13 capteurs (b). On constate que les frontières de l'objet sont mal reconstruites dans les deux cas par cette méthode pixellique. On observe, de plus, d'importants artefacts sur les bords du domaine. Le rapport signal-sur-bruit (RSB) de ces reconstructions vis-à-vis d'une maquette numérique du corps d'essai, respectant la géométrie et les valeurs de vitesses spécifiées à la fabrication, est de 12,6 dB

pour la configuration 35-26 et de 12,8 dB pour la configuration réduite 18-13 (valeurs calculées sur la partie centrale de l'image, en dehors des artefacts de bords).

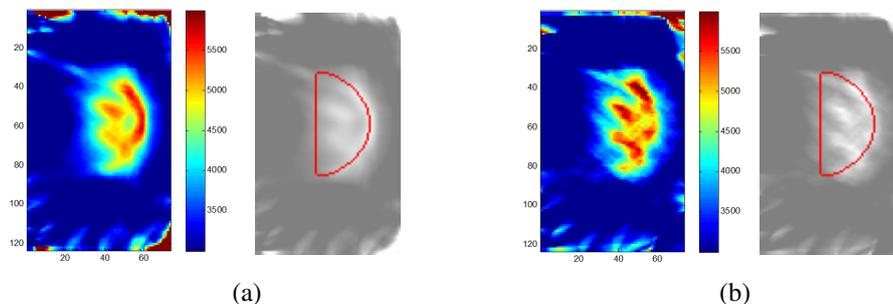


Figure 10. Reconstruction du champ de vitesse (en $m.s^{-1}$) à l'aide d'un algorithme SIRT pixellique (à gauche) et superposition des frontières de l'objet idéal, en rouge, sur la reconstruction en niveau de gris (à droite), pour deux configurations :
 (a) 35 positions de la source et 26 positions du capteur
 (b) 18 positions de la source et 13 positions du capteur

Sur la figure 11, nous présentons les résultats de notre méthode par évolution de forme contrainte. Nous réalisons tout d'abord une optimisation sans contrainte de forme. Le résultat est la configuration obtenue pour $\alpha_p = 0$ sur la figure 11. Ensuite, partant de cette solution, nous exploitons le caractère hiérarchique de la représentation pour introduire de façon progressive la contrainte de forme. L'ensemble des formes de référence utilisé ici est présenté en haut de la figure 11. Il comprend des variations géométriques de la forme idéale et deux intrus. Dans ce cas, l'étude de l'erreur de représentation conduit au choix : $\beta_N = 1$. Nous considérons tout d'abord les moments de Legendre jusqu'à l'ordre $N = 13$ (qui correspond à une erreur de représentation inférieure à 10 %, voir figure 6). Le paramètre α_p est ajusté manuellement. Le résultat pour $N = 13$ est présenté sur la quatrième colonne de la figure. Le résultat final, obtenu à l'ordre $N = 27$ (erreur de représentation inférieure à 5 %) apparaît en dernière colonne. Comme on peut le constater, la méthode donne de très bons résultats, que ce soit en termes de forme reconstruite ou en termes de valeurs de vitesses. Le RSB obtenu est de 20,4 dB.

La figure 12 montre les courbes d'énergie correspondant aux différentes itérations de l'algorithme de reconstruction contrainte. Les courbes en bleu correspondent à l'évolution de la forme par descente de gradient (étape 2 de l'algorithme). Nous plaçons des cercles rouges pour identifier les valeurs $J_k(\Omega_k)$ obtenues après remise à jour de l'opérateur \mathcal{R}_k (étape 1). Même si cette opération provoque des remontées d'énergie, celles-ci deviennent de plus en plus faibles au fur et à mesure des itérations et on constate que la suite des énergies $(J_k(\Omega_k))_{k \geq 0}$ est bien décroissante. Sans que l'on puisse en tirer de conclusion définitive, nous notons que nous avons obtenu des courbes du même type dans toutes nos expériences. L'étude théorique de la convergence de l'algorithme est un sujet ardu, qui demeure une perspective de ce travail.

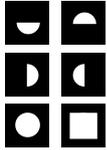
Formes de référence 	Initialisation	$N = 0$ $\alpha_p = 0$	$N = 13$ $\alpha_p = 0,7$	$N = 27$ $\alpha_p = 0,8$
Nombre d'étapes	0	3	2	2
Champ de vitesse reconstruit				
Contour en évolution (rouge) sur objet idéal				
Vitesse ($m.s^{-1}$)				
Aluminium	3 522	5 081	5 390	5 500
Résine	3 330	3 039	3 025	3 024

Figure 11. Reconstructions orientées objet avec contrainte de forme sur les données réelles, pour la configuration : 35 positions de la source et 26 positions du capteur

Dans un second temps, nous nous replaçons dans la situation dégradée, où deux fois moins de sources et de capteurs sont utilisés. Les résultats obtenus, à l'aide du même jeu de paramètres que dans le cas précédent, sont présentés sur la figure 13. Bien que les résultats se dégradent par rapport au cas des données complètes, ils demeurent bons (RSB : 17,1 dB). Ceci démontre l'efficacité de la contrainte de forme, dont l'application conduit à des résultats très supérieurs à ceux obtenus par la méthode pixellique dans la même configuration (figure 10b, RSB : 12,8 dB).

Notons que, comme nous l'avons expliqué plus haut, l'examen des valeurs des pondérations $w_{(j)}$ (29) permet de déterminer quelle est la forme « sélectionnée » par l'algorithme parmi les formes de référence et donc de la reconnaître. Dans tous les cas, c'est bien la bonne forme qui est reconnue.

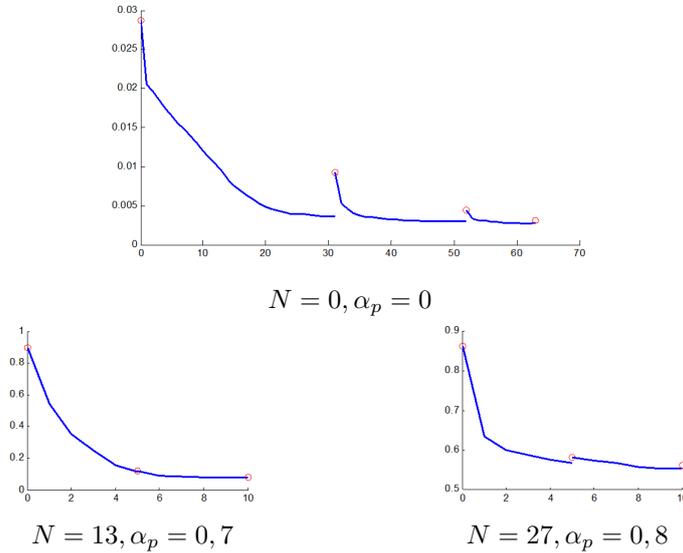


Figure 12. Courbes d'énergie associées à la reconstruction orientée objet contrainte sur données réelles pour 35 sources et 26 capteurs (figure 11). Les courbes bleues correspondent à la descente de gradient (étape 2 de l'algorithme) à l'itération k . Les cercles rouges marquent les valeurs de $J_k(\Omega_k)$ obtenues après ré-estimation de \mathcal{R}_k (étape 1)

Dans l'expérience suivante, nous considérons les données complètes (35 sources et 26 capteurs), mais un ensemble de formes de références différent. Celui-ci est constitué de 46 rotations de la forme idéale, tous les 2° , entre -45° et 45° , pour des valeurs impaires de l'angle (de sorte que l'objet idéal ne fait pas partie de l'ensemble de référence, voir figure 14).

Cette expérience montre qu'il est possible de prendre en compte les rotations à travers l'alphabet de formes de références. En effet, bien que les moments de Legendre puissent être rendus intrinsèquement invariants à la rotation, nous avons constaté dans (Foulonneau *et al.*, 2009) que cela rendait l'optimisation plus difficile et coûteuse en temps de calcul et complexifiait le paysage énergétique (mimima locaux, ...). Prendre en compte la rotation à travers l'alphabet de référence est une alternative intéressante car elle se fait à complexité constante et permet d'éliminer d'éventuelles ambiguïtés entre formes de référence. De plus, cette expérience permet d'illustrer le comportement de l'algorithme lorsque la forme idéale ne fait pas partie de l'alphabet de formes de référence. On constate, figure 15, que pour les fortes valeurs de α_p , la solution est biaisée vers la forme la plus proche, qui correspond à un angle de 1° par rapport à la solution idéale. En diminuant la valeur du paramètre de régularisation, on laisse plus d'importance au terme d'attache aux données : la solution obtenue est plus proche de l'objet observé, mais la qualité de la reconstruction est un peu moins bonne.

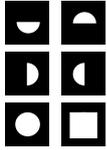
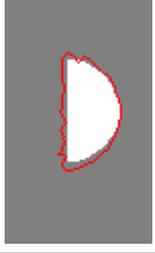
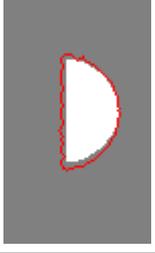
Formes de référence 	Initialisation	$N = 0$ $\alpha_p = 0$	$N = 13$ $\alpha_p = 0,7$	$N = 27$ $\alpha_p = 0,8$
Nombre d'étapes	0	3	3	2
Champ de vitesse reconstruit				
Contour en évolution (rouge) sur objet idéal				
Vitesse ($m.s^{-1}$)				
Aluminium	3 526	4 818	5 237	5 238
Résine	3 311	3 028	2 992	2 993

Figure 13. Reconstitutions orientées objet avec contrainte de forme sur les données réelles, pour la configuration : 18 positions de la source et 13 positions du capteur

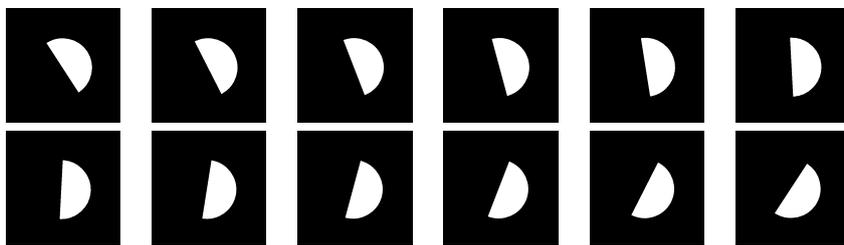


Figure 14. Douze des 46 formes de références correspondant à des rotations de l'objet idéal, entre -45° et 45° , par pas de 2°

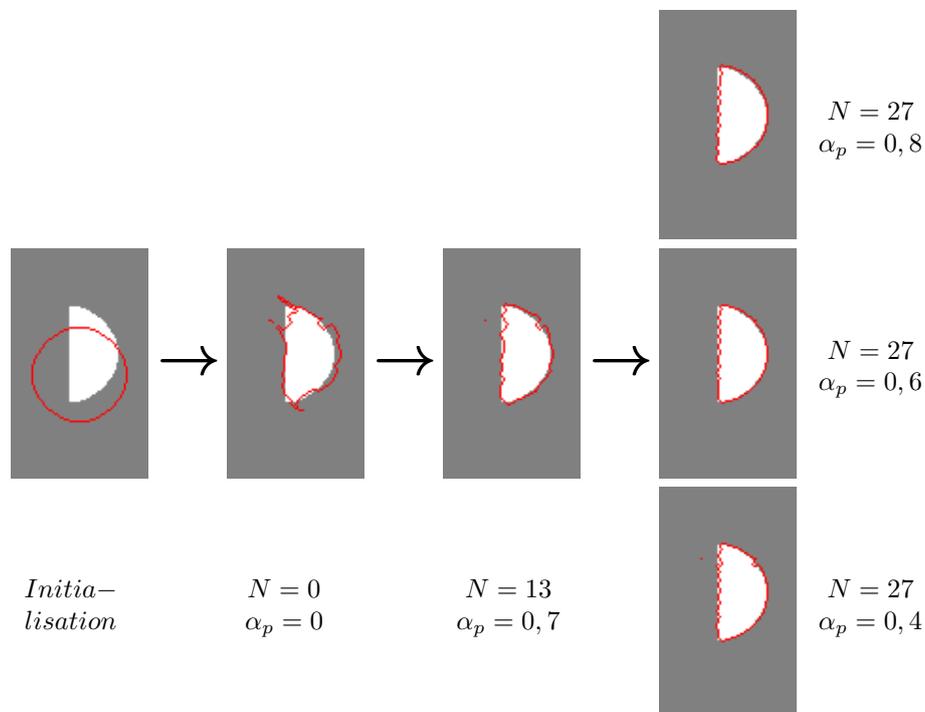


Figure 15. Frontière de l'objet reconstruit (en rouge) superposée sur l'objet idéal, obtenue à l'aide de l'ensemble de formes de référence présenté figure 14 (rotations successive de la forme idéale entre -45° et 45° , par pas de 2°)

Afin d'illustrer encore l'influence du choix de l'alphabet de référence, nous présentons figure 16 une série d'expériences réalisée à partir des données réelles complètes (35 sources et 26 capteurs), dans laquelle différents alphabets de référence sont utilisés. Plus précisément, on ajoute ou on substitue aux références de la figure 7 des formes constituant des leurres, à savoir un croissant et une approximation polygonale, proches du demi-disque recherché. En examinant les trois premières lignes du tableau de résultats, on constate que lorsque la forme idéale est présente (à une translation et un facteur d'échelle près) dans l'ensemble de formes de référence, l'*a priori* contraint bien la forme en évolution à lui ressembler, malgré la présence des leurres. Si, par contre, on substitue à la forme idéale le croissant ou le polygone, la solution évolue vers la forme en question, qui correspond à la forme la plus proche de l'objet idéal. Notons que le même jeu de paramètres est utilisé pour toute cette série d'expériences.

5. Conclusion

Dans cet article, nous avons abordé le problème de la reconstruction tomographique non linéaire, par temps de première arrivée, à l'aide d'une approche orientée

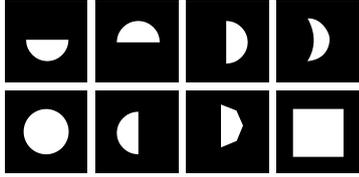
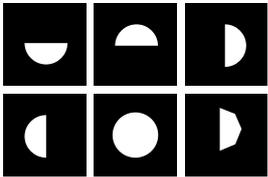
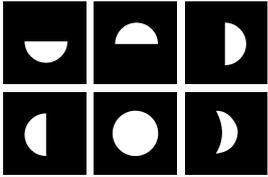
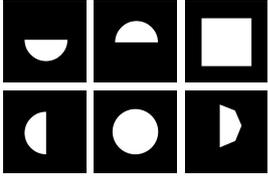
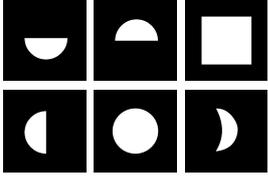
Formes de référence	$N = 0$ $\alpha_p = 0$	$N = 13$ $\alpha_p = 0,7$	$N = 27$ $\alpha_p = 0,8$
			
			
			
			
			

Figure 16. Résultats de reconstruction à l'aide des données réelles (35 sources et 26 capteurs), pour différents ensembles de formes de référence comportant des leurres. Lorsque la forme idéale est dans l'alphabet de référence, l'algorithme converge vers cette forme. Sinon, il converge vers la forme la plus proche (polygone ou croissant)

objet avec contrainte de forme. Nous avons proposé un algorithme original par évolution de forme incorporant une contrainte de haut niveau sur la géométrie et la topologie de l'objet recherché, supposé appartenir à un dictionnaire de formes de référence. La méthode proposée réalise de manière simultanée la reconstruction de l'objet et sa reconnaissance. La méthode conduit à des résultats prometteurs sur données réelles, acquises en conditions contrôlées à l'aide d'un banc de mesures ultrasonores, y compris lorsque le nombre de données disponibles est réduit.

Notons que le modèle actuel est limité à la reconstruction d'un objet unique appartenant à un ensemble de formes de référence connues. L'extension à des objets multiples indépendants ainsi qu'à un fond non uniforme, constitue une première perspective importante de ce travail. Même si nous avons observé une décroissance en énergie sur tous les exemples synthétiques et réels que nous avons traités, l'étude théorique de la convergence de l'algorithme et la caractérisation des solutions reste un problème mathématique ouvert et non trivial. Le choix de la forme initiale, des paramètres de régularisation et de l'ordre des moments de Legendre dans la procédure de reconstruction mérite également une étude plus approfondie. Ce n'est que dans ces conditions qu'il sera envisageable d'appliquer ce type de méthodes sur les données complexes acquises sur le terrain.

Remerciements

Ce travail a été en partie financé par l'IFSTTAR (anciennement LCPC) et la Région Alsace, sous forme de contrat doctoral.

Bibliographie

- Abraham O., Slimane K. B., Côte P. (1988). Factoring anisotropy into iterative geometric reconstruction algorithms for seismic tomography. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 35, n° 1, p. 31-41.
- Alvino C., Yezzi A. (2004). Tomographic reconstruction of piecewise smooth images. In *Ieee computer society conference on computer vision and pattern recognition*, p. 576-581. Washington D.C., USA, IEEE.
- Aubert G., Barlaud M., Faugeras O., Jehan-Besson S. (2003). Image segmentation using active contours: calculus of variations or shape gradients? *SIAM, Journal on Applied Mathematics*, vol. 63, n° 6, p. 2128-2154.
- Battle X., Cunningham G., Hanson K. (1998). Tomographic reconstruction using 3D deformable models. *Physics in Medicine and Biology*, vol. 43, n° 4, p. 983-990.
- Bresler Y., Macovski A. (1987). Three-dimensional reconstruction from projections with incomplete and noisy data by object estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 35, n° 8, p. 1139-1152.
- Bretonneau F., Leparoux D., Durand O., Abraham O. (2011). Small-scale modeling of onshore seismic experiment: A tool to validate numerical modeling and seismic imaging methods. *Geophysics*, vol. 76, n° 5, p. T101-T112.

- Bruandet J.-P., Peyrin F., Dinten J.-M., Barlaud M. (2002). 3D tomographic reconstruction of binary images from cone beam projections: a fast level set approach. In *IEEE international symposium on biomedical imaging*, p. 677-680. Washington D.C., USA, IEEE.
- Burger M. (2003). A framework for the construction of level set methods for shape optimization and reconstruction. *Interfaces and Free Boundaries*, vol. 5, p. 301-329.
- Cartan H. (1967). *Formes différentielles, éléments de calcul des variations*. Paris, Hermann.
- Caselles V., Kimmel R., Sapiro G. (1997, février). Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, vol. 22, n° 1, p. 61-79.
- Cerveny V. (2001). *Seismic ray theory*. Cambridge, R.U., Cambridge University Press.
- Chan T., Vese L. (2001, février). Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image processing*, vol. 10, n° 2, p. 266-277.
- Charbonnier P., Blanc-Féraud L., Aubert G., Barlaud M. (1997). Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 6, n° 2, p. 298-311.
- Chiao P., Rogers W., Clinthorne N., Fessler J., Hero A. (1994). Model-based estimation for dynamic cardiac studies using ECT. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 13, n° 2, p. 217-226.
- Cremers D., Osher S., Soatto S. (2006). Kernel density estimation and intrinsic alignment for shape priors in level set segmentation. *International Journal of Computer Vision*, vol. 69, n° 3, p. 335-351.
- Dorn O., Lesselier D. (2006). Level set methods for inverse scattering. *Inverse Problems*, vol. 22, n° 4, p. R67-R131.
- Feng H. (2002). *Curve evolution object-based techniques for image reconstruction and segmentation*. Thèse de doctorat, Université de Boston, USA.
- Feng H., Karl W., Castañón D. (2003, janvier). A curve evolution approach to object-based tomographic reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 12, n° 1, p. 44-57.
- Foulonneau A., Charbonnier P., Heitz F. (2006). Affine-invariant geometric shape priors for region-based active contours. *IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 28, n° 8, p. 1352-1357.
- Foulonneau A., Charbonnier P., Heitz F. (2008, mai). *Multi-reference affine-invariant geometric shape priors for region-based active contours*. Rapport technique n° RR-AF01-08. Strasbourg, LRS ERA 27 LCPC / LSIIT UMR 7005 CNRS. Consulté sur <http://icube-publis.unistra.fr/paprr/docs/files/2233/RR-AF01-08.pdf> (Une version abrégée (sans les annexes) de ce rapport préliminaire a été publiée dans (Foulonneau *et al.*, 2009).)
- Foulonneau A., Charbonnier P., Heitz F. (2009). Multi-reference shape priors for active contours. *International Journal on Computer Vision*, vol. 81, n° 1, p. 68-81.
- Gaullier G. (2013). *Modèles déformables contraints en reconstruction d'images de tomographie non linéaire par temps d'arrivée*. Thèse de doctorat, Université de Strasbourg. (<http://www.theses.fr/2013STRAD026>)

- Gaullier G., Charbonnier P., Heitz F. (2009). Introducing shape priors in object-based tomographic reconstruction. In *ICIP 2009, 16th international conference on image processing*, p. 1077-1080. Le Caire, Egypte, IEEE.
- Geman D., Reynolds G. (1992). Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 14, n° 3, p. 367-383.
- Geman D., Yang C. (1995). Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization and FFT's. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 4, n° 7, p. 932-946.
- Lecellier F., Jehan-Besson S., Fadili J. (2014). Statistical region-based active contours for segmentation: An overview. *IRBM*, vol. 35, n° 1, p. 3 – 10.
- Leventon M., Grimson W., Faugeras O. (2000, juin). Statistical shape influence in geodesic active contours. In *Proc. of ieee conference on computer vision and pattern recognition (cvpr)*, p. 1316–1323. Hilton Head Island, USA, IEEE.
- Li W., Leung S. (2013). A fast local level set adjoint state method for first arrival transmission traveltime tomography with discontinuous slowness. *Geophysical Journal International*, vol. 195, n° 1, p. 582–596.
- Lin Y., Ortega A. (2013). Object-based high contrast travel time tomography. *Submitted to SEG Geophysics, arXiv:1303.3052 [physics.data-an]*.
- Mohammad-Djafari A. (1996). Image reconstruction of a compact object from a few number of projections. In *International conference on signal and image processing (SIP'96)*, p. 325-329. Orlando, USA, IASTED.
- Osher S., Sethian J. (1988). Fronts propagating with curvature-dependant speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, vol. 79, n° 1, p. 12-49.
- Paragios N., Deriche R. (2002). Geodesic active regions and level set methods for supervised texture segmentation. *International Journal of Computer Vision*, vol. 46, n° 3, p. 223–247.
- Ramlau R., Ring W. (2007). A Mumford-Shah level-set approach for the inversion and segmentation of X-ray tomography data. *Journal of Computational Physics*, vol. 221, n° 2, p. 539-557.
- Rawlinson N., Sambridge M. (2003). Seismic traveltime tomography of the crust and lithosphere. *Advances in Geophysics*, vol. 46, p. 81-198.
- Rossi D., Willsky A. (1984). Reconstruction from projections based on detection and estimation of objects-parts I and II: Performance analysis and robustness analysis. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing*, vol. 32, n° 4, p. 886–906.
- Santosa F. (1996). A level-set approach for inverse problems involving obstacles. *The European Series in Applied and Industrial Mathematics: Control, Optimization and Calculus of Variations*, vol. 1, p. 17-33.
- Sethian J. (1996). A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 93, n° 4, p. 1591–1595.
- Sokolowski J., Zolesio J. (1992). *Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis* (vol. 16). Berlin, Heidelberg, Springer.

- Soussen C., Mohammad-Djafari A. (2004). Polygonal and polyhedral contour reconstruction in computed tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 13, n° 11, p. 1507–1523.
- Tsai A., Yezzi A., Wells W., Tempany C., Tucker D., Fan A. *et al.* (2003, février). A shape-based approach to the segmentation of medical imagery using level sets. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 22, n° 2, p. 137–154.
- Tsai Y.-H., Cheng L., Osher S., Zhao H.-K. (2003). Fast sweeping algorithms for a class of Hamilton-Jacobi equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 2, n° 41, p. 673–694.
- Zhu S., Yuille A. (1996, septembre). Region competition: unifying snakes, region growing, and Bayes/MDL for multiband image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 18, n° 9, p. 884-900.

Annexe A. Gradient de forme d'intégrales de domaines

Le cadre théorique de la dérivation de forme (Sokolowski, Zolesio, 1992 ; Aubert *et al.*, 2003) est fondé sur les variations Ω_τ d'une forme Ω . Nous modélisons les variations de forme par la méthode des vitesses introduite dans (Sokolowski, Zolesio, 1992) : Ω_τ est l'ensemble des $x(\tau) \in \mathcal{D}$ tels que

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \mathcal{V}(x(\tau)) & \text{for } \tau > 0 \\ x(0) \in \Omega \end{cases} \quad (30)$$

Concernant les conditions sur la fonction \mathcal{V} qui assurent que la forme Ω_τ demeure contenue dans le domaine \mathcal{D} , nous renvoyons le lecteur à (Sokolowski, Zolesio, 1992). La *dérivée de forme* d'une fonctionnelle de forme est définie comme suit :

DÉFINITION 1. — Soit J une fonctionnelle dépendant d'une forme Ω . Alors, si elle existe, la *dérivée de forme* de J dans la direction \mathcal{V} est donnée par :

$$J'(\Omega) \cdot \mathcal{V} = \lim_{\tau \searrow 0} \frac{J(\Omega_\tau) - J(\Omega)}{\tau} \quad (31)$$

Pour une intégrale de domaine, i.e. une fonctionnelle de forme J du type

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x, \Omega) dx, \quad (32)$$

on a le théorème suivant (Sokolowski, Zolesio, 1992) :

THÉORÈME 2. — La *dérivée de forme* d'une intégrale de domaine $J = \int_{\Omega} f(x, \Omega) dx$ est donnée par :

$$J'(\Omega) \cdot \mathcal{V} = \int_{\Omega} f'(x, \Omega) \cdot \mathcal{V} dx - \int_{\Gamma} f(x, \Omega) (\mathcal{V}(x), \mathcal{N}(x)) d\Gamma(x) \quad (33)$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^2 , $\Gamma = \partial\Omega$ est la frontière de Ω et \mathcal{N} est la normale à Γ dirigée vers l'intérieur.

Quand l'intégrale porte sur le complémentaire, Ω^c , une expression similaire est obtenue, à la différence que l'intégrale sur Γ est de signe opposé.

De plus, en lien avec la dérivée de forme, on peut définir le gradient de forme comme dans (Sokolowski, Zolesio, 1992). Le gradient de forme a pour support $\Gamma = \partial\Omega$ et dépend du produit scalaire considéré. Nous rappelons l'expression du gradient de forme associé à une classe relativement générale de dérivées de forme dans la définition suivante.

DÉFINITION 3. — *Supposons que la dérivée de forme de J s'écrive :*

$$J'(\Omega) \cdot \mathcal{V} = \int_{\Gamma} g(x) (\mathcal{V}(x), \mathcal{N}(x)). \quad (34)$$

Alors, en considérant le produit scalaire L^2 , le gradient de forme $\nabla_{\Omega} J$ of J est défini comme :

$$\nabla_{\Omega} J = -g\mathcal{N} \quad (35)$$

Dans (Burger, 2003), d'autres produits scalaires sont considérés, ce qui conduit à d'autres expressions de gradient de forme.

Annexe B. Dérivée de forme du terme d'attache aux données

Dans cette annexe, nous calculons la dérivée de forme de :

$$\begin{aligned} J_k^{data}(\Omega) &= \frac{1}{2} \|T^{\gamma^k}(\cdot, \cdot, s(\cdot, \Omega)) - T_{obs}\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\mathcal{R}^k \cdot s(\cdot, \Omega) - T_{obs}\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathcal{M}^k \cdot \theta - T_{obs}\|^2. \end{aligned}$$

On peut noter que, dans cette expression, θ est, lui-même, fonction de Ω . Un terme du type $(\partial J_k^{data}(\hat{\theta})/\partial\theta) \cdot (\theta'(\Omega) \cdot \mathcal{V})$ devrait donc apparaître dans la dérivée de forme de J_k^{data} . Toutefois, comme remarqué dans (Ramlau, Ring, 2007), ce terme s'annule, grâce aux conditions nécessaires satisfaites par $\hat{\theta}$. Donc, ce qu'il reste à calculer est la dérivée de forme de J_k^{data} pour θ fixé. En omettant les paramètres pour une meilleure lisibilité des calculs, nous écrivons J_k^{data} comme :

$$J_k^{data} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n_s \times n_c} (T_{obs} - \mathcal{R}^k \cdot s)_j^2, \quad (36)$$

Comme $\mathcal{R}^k \cdot s = s_{\Omega} \mathcal{R}^k \cdot \mathbf{1}_{\Omega} + s_{\Omega^c} \mathcal{R}^k \cdot \mathbf{1}_{\Omega^c}$, la dérivée de forme de J_k^{data} est donnée par :

$$\nabla_{\Omega} J_k^{data} = - \sum_{j=1}^{j=n_s \times n_c} (T_{obs} - \mathcal{R}^k \cdot s)_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=K} a_i \cdot \nabla_{\Omega} \mathcal{A}_{i,j}^k + \sum_{i=1}^{i=L} b_i \cdot \nabla_{\Omega} \mathcal{B}_{i,j}^k \right) \quad (37)$$

où l'on rappelle (voir Sec. 3.2) que \mathcal{A}_{ij} est la j -ème composante de $\mathcal{R}^k.s_i^\Omega$:

$$\mathcal{A}_{ij} = \int_{\gamma_j^k} s_i^\Omega \cdot \mathbb{1}_\Omega \quad (38)$$

et \mathcal{B}_{ij} est la j -ème composante de $\mathcal{R}^k.s_i^{\Omega^c}$.

Si on note $l_j^k(x)$ le *noyau de projection* (Feng *et al.*, 2003) qui définit le trajet du rai γ_j^k , alors on peut écrire \mathcal{A}_{ij} comme une intégrale de domaine :

$$\mathcal{A}_{ij} = \int_{\Omega^k} s_i^\Omega(x) \cdot l_j^k(x) dx, \quad (39)$$

Comme $l_j^k(x)$ ne dépend pas de Ω , en appliquant le Théorème 2 et la Définition 3, il vient :

$$\nabla_\Omega \mathcal{A}_{ij} = -s_i^\Omega \cdot l_j^k \mathcal{N}. \quad (40)$$

De même, on a :

$$\nabla_\Omega \mathcal{B}_{ij} = s_i^{\Omega^c} \cdot l_j^k \mathcal{N}, \quad (41)$$

où le signe moins provient du fait que la normale à Ω^c est opposée à \mathcal{N} . En rassemblant ces résultats, on obtient :

$$\nabla_\Omega J_k^{data} = \left(\sum_{i=1}^{i=K} a_i s_i^\Omega - \sum_{i=1}^{i=L} b_i \cdot s_i^{\Omega^c} \right) \cdot \sum_{j=1}^{j=n_s \times n_c} (T_{obs} - \mathcal{R}^k \cdot s)_j \cdot l_j^k \cdot \mathcal{N} \quad (42)$$

où la dernière somme peut s'interpréter comme la rétro-projection de $(T_{obs} - \mathcal{R}^k \cdot s)$ sur le domaine image, i.e. :

$$\nabla_\Omega J_k^{data} = \left(\sum_{i=1}^{i=K} a_i s_i^\Omega - \sum_{i=1}^{i=L} b_i \cdot s_i^{\Omega^c} \right) \mathcal{R}^{k*} \cdot (T_{obs} - \mathcal{R}^k \cdot s) \cdot \mathcal{N}. \quad (43)$$

Annexe C. Dérivée de forme de l'a priori

Dans cette annexe, nous décrivons brièvement le calcul de la dérivée de forme du terme a priori, J^{prior} , défini par (21), plus de détails étant donnés dans (Foulonneau *et al.*, 2008). En appliquant d'abord les règles de composition des dérivées, il suffit de déterminer la dérivée de forme des moments de Legendre invariants $\lambda_{p,q}(\Omega)$. De plus, comme la relation (18) est linéaire, la dérivée de forme de $\lambda_{p,q}(\Omega)$ découle directement de la dérivée de forme des moments réguliers invariants $\eta_{u,v}$, pour tout u et tout v tels que $0 \leq u \leq p, 0 \leq v \leq q$. On rappelle que

$$\eta_{u,v}(\Omega) = \int_\Omega H_{u,v}(x, \Omega) dx \quad (44)$$

où $H_{u,v}(x, \Omega)$ est donné (20). Alors, en appliquant le Théorème 2, on a :

$$\eta'_{u,v}(\Omega) \cdot \mathcal{V} = \int_\Omega H'_{u,v}(x, \Omega) \cdot \mathcal{V} dx - \int_\Gamma H_{u,v}(x, \Omega) (\mathcal{V}(x), \mathcal{N}(x)) d\Gamma(x) \quad (45)$$

où $H'_{u,v}(x, \Omega)$ est la dérivée de $H_{u,v}(x, \Omega)$ par rapport à la forme Ω . Pour la calculer, il suffit de noter que $H_{u,v}(x, \Omega)$ dépend de Ω à travers les composantes \bar{x}_1 et \bar{x}_2 du centre de gravité et à travers $|\Omega|$, l'aire de la région intérieure de la forme Ω . En utilisant le Théorème 2 et les règles de composition classiques, on obtient :

$$\nabla_{\Omega} J^{prior} = - \sum_{0 \leq u+v \leq N} A_{u,v}(H_{u,v}(x, \Omega) + G_{u,v}(x)) \mathcal{N}(x) \quad (46)$$

avec \mathcal{N} la normale interne à $\Gamma = \partial\Omega$ et où $G_{u,v}$ peut être calculé comme la dérivée de forme de \bar{x}_1, \bar{x}_2 et $|\Omega|$ par rapport à Ω . On obtient :

$$G_{u,v}(x) = \frac{u(x_1 - \bar{x}_1)}{\beta_N^{1/2} |\Omega|^{3/2}} \eta_{u-1,v} + \frac{v(x_2 - \bar{x}_2)}{\beta_N^{1/2} |\Omega|^{3/2}} \eta_{u,v-1} + \frac{u+v+2}{2|\Omega|} \eta_{u,v} \quad (47)$$

Le facteur $A_{u,v}$ est la moyenne pondérée

$$A_{u,v} = \left(\sum_{j=1}^{N_{ref}} A_{(j)uv} w_{(j)} \right) / \left(2\sigma^2 \sum_{j=1}^{N_{ref}} w_{(j)} \right), \quad (48)$$

du développement

$$A_{(j)uv} = 2 \sum_{0 \leq p+q \leq N} \left(\lambda_{p,q} - \lambda_{(j)p,q}^{ref} \right) C_{pq} a_{pu} a_{qv} \quad (49)$$

avec les poids

$$w_{(j)} = \exp \left(- \frac{\|\boldsymbol{\lambda}(\Omega) - \boldsymbol{\lambda}_{(j)}^{ref}\|^2}{2\sigma^2} \right) \quad (50)$$

Les poids sont des fonctions exponentiellement décroissantes de la distance (en termes de moments de Legendre invariants) entre la forme en évolution Ω et la j -ème forme de référence.

