

Convergence des algorithmes du module constant en égalisation adaptative

On the convergence of Constant Modulus algorithm in adaptive Equalization

Maurice Bellanger

CNAM, 292 rue Saint-Martin, 75141 Paris cedex 03
bellang@cnam.fr

Manuscrit reçu le 17 juillet 2007

Résumé et mots clés

Par une approche directe, on établit les conditions pour que le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale et les critères du module constant conduisent au même vecteur de coefficients. La condition de kurtosis normalisé égal à $4/3$ obtenue est presque satisfaite pour les constellations MAQ utilisées en transmission numérique, ce qui fournit la justification théorique de la conjecture de Godard. Ensuite, les performances des algorithmes adaptatifs sont analysées. Il apparaît que l'algorithme AMC(2,2) est plus rapide que l'algorithme AMC(1,2) mais beaucoup plus lent que l'algorithme du gradient avec signal de référence. L'importance de l'initialisation est soulignée, pour les algorithmes du module constant.



Module constant, adaptatif, égalisation, convergence.

Abstract and key words

A direct approach is used to determine the conditions for the minimum mean-squared error and constant modulus criteria to lead to the same coefficient vector. The condition which is obtained, namely that the normalized kurtosis of the source signal be equal to $4/3$, is nearly satisfied for the QAM constellations in digital transmission, which provides a theoretical justification for the Godard conjecture. Then, the performance of the adaptive algorithms is analyzed. It turns out that the CMA(2,2) algorithm is faster than the CMA(1,2) algorithm but much slower than the LMS algorithm. Finally, the importance of initialization for the constant modulus algorithms is underlined.

Constant modulus, self adaptive, equalization, convergence.

1. Introduction

En transmission numérique, l'égalisation fait généralement appel à des séquences d'apprentissage, ou à des pilotes, connus du récepteur et qui lui permettent de mesurer et modéliser les canaux en des temps très courts. Cependant, certaines applications n'offrent pas cette possibilité, par exemple la radiodiffusion de signaux numériques. Alors, il est possible de faire appel

aux techniques sans signal de référence et notamment les algorithmes du module constant.

Proposer des algorithmes du module constant pour des signaux qui n'ont pas cette propriété est un défi et les premiers articles sur le thème ont surpris la communauté scientifique [1,2]. Ils ont déclenché un énorme effort de recherche qui a produit une abondante littérature durant les décennies qui ont suivi. Une analyse avec classification de cette littérature est donnée dans l'article [4]. Les relations entre les critères d'erreur quadratique

moyenne minimale (EQMM) et de module constant de type MC(2,2) ont été particulièrement étudiés dans les articles [3-6]. En fait, Godard a été amené à travailler avec des signaux qui donnent l'équivalence entre EQMM et MC(2,2) et ce n'est que tout récemment qu'une justification théorique de sa conjecture a été donnée [7]. Cependant, si les solutions optimales sont les mêmes ou presque, les algorithmes du module constant sont mis en œuvre par des techniques de gradient, avec des signaux d'excitation qui ne s'annulent pas avec la convergence, mais conservent une puissance comparable à celle des signaux reçus [8]. Il en résulte que les pas d'adaptation doivent être très petits et, par suite, la convergence est lente. En reprenant les résultats de la référence [7] et en les complétant, l'objet du présent article est d'étudier cette convergence, pour les deux algorithmes les plus souvent envisagés pour l'égalisation et de fournir une évaluation globale des performances de ces deux algorithmes. Le plan est le suivant. Les conditions d'équivalence entre les critères EQMM et MC(2,2) sont d'abord explicitées. Ensuite, la convergence de l'algorithme AMC(2,2) est analysée. Puis, la même approche est appliquée à l'algorithme AMC(1,2). Enfin, le problème de l'initialisation est abordé, en soulignant certains points qui restent à étudier dans ce domaine.

2. Conditions d'équivalence entre EQMM et MC(2,2)

Le contexte est celui de l'égalisation adaptative, avec des signaux complexes, par exemple résultant d'une transmission en modulation de type MAQ (modulation d'amplitude en quadrature). Le schéma générique d'un égaliseur avec signal de référence est donné à la figure 1.

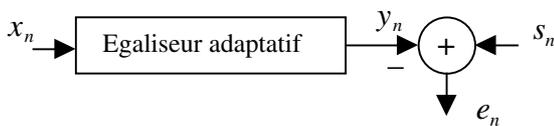


Figure 1. Égaliseur avec signal de référence

Les signaux sources, s_n , sont appliqués au canal $C(Z)$ qui fournit le signal reçu x_n . La sortie de l'égaliseur s'écrit $y_n = X_n^t H$ où H est le vecteur des coefficients et $X_n^t = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n+1-N}]$ le vecteur des données d'entrée. Le critère EQMM consiste à déterminer les coefficients de l'égaliseur $H(Z)$ par minimisation de la puissance de l'erreur de sortie $e_n = s_n - y_n$. Le vecteur obtenu est noté H_{opt} et tel que: $E[X_n^* X_n^t] H_{opt} = E[s_n X_n^*]$. Cette minimisation se caractérise par la décorrélation entre la séquence e_n et le vecteur des données d'entrée et l'expression suivante de l'EQMM:

$$E_0 = E[|e_n|^2] = E[|s_n|^2] - E[|y_n|^2] \tag{1}$$

Le critère du module constant MC(2,2) est défini par la fonction coût:

$$J_{MC22} = E[(\gamma_{22} - |y_n|^2)^2] \tag{2}$$

Le gradient par rapport au vecteur des coefficients du filtre s'écrit dans ce cas:

$$Grad[J_{MC22}] = -4E[(\gamma_{22} - |y_n|^2)y_n X_n^*] \tag{3}$$

avec X_n^* complexe conjugué de X_n , et le vecteur optimal au sens du critère, noté H_{MC22} , est celui qui annule ce gradient, donc qui conduit à:

$$E[(\gamma_{22} - |y_n|^2)y_n X_n^*] = 0 \tag{4}$$

En multipliant cette expression par le conjugué de ce vecteur, il vient:

$$\gamma_{22} E[|y_n|^2] = E[|y_n|^4] \tag{5}$$

ce qui donne une équation caractéristique du critère MC(2,2). Bien entendu, cette équation est aussi satisfaite par le signal source, c'est-à-dire:

$$\gamma_{22} = \frac{E[|s_n|^4]}{E[|s_n|^2]} \tag{6}$$

et c'est, en fait, la définition de cette variable, appelée constante de dispersion du signal.

Pour qu'il y ait équivalence entre EQMM et MC(2,2), il faut que l'équation (5) soit satisfaite par le vecteur H_{opt} . Le premier membre de cette équation est donné par la relation (1), il reste à analyser le second membre, c'est-à-dire la quantité $E[|y_n|^4]$, quand le vecteur des coefficients est l'optimum pour l'EQMM. Cette analyse commence par l'examen du signal de sortie de l'égaliseur qui s'exprime, en fonction du signal source, par:

$$y_n = g_0 s_n + \sum_{\substack{i=-P \\ i \neq 0}}^{\infty} g_i s_{n-i} \tag{7}$$

Dans cette expression, et pour alléger les développements qui suivent, le canal est supposé non bruité.

L'entier P représente le retard de la référence et les coefficients résultent de la convolution du canal $C(Z)$ et de l'égaliseur $H(Z)$. L'examen du produit $C(Z)H(Z)$ montre que le coefficient est un scalaire qui s'exprime en fonction de l'EQMM par:

$$g_0 = 1 - E_0/E[|s_n|^2] \tag{8}$$

En l'absence de bruit, l'EQMM comprend deux composantes, la distorsion d'amplitude et l'interférence entre symboles, soit

$$E_0 = E[|s_n|^2]((1 - g_0)^2 + \sum_{\substack{i=-P \\ i \neq 0}}^{\infty} |g_i|^2) \tag{9}$$

La quantité $E[|y_n|^4]$ se calcule par le produit $y_n^2(y_n^*)^2$ avec :

$$y_n^2 = g_0^2 s_n^2 + 2g_0 s_n \left(\sum_{\substack{i=-P \\ i \neq 0}}^{\infty} g_i s_{n-i} \right) + \left(\sum_{\substack{i=-P \\ i \neq 0}}^{\infty} g_i s_{n-i} \right)^2 \quad (10)$$

Dans ce produit, les termes croisés disparaissent en moyenne si le signal source est supposé de moyenne nulle et si, de plus, il possède la propriété de symétrie circulaire, c'est-à-dire $E[s_n^2] = 0$. Il vient alors :

$$E[|y_n|^4] = g_0^4 E[|s_n|^4] + 4g_0^2 [E[|s_n|^2]] \left(\sum_{\substack{i=-P \\ i \neq 0}}^{\infty} |g_i|^2 \right) + E \left[\left(\sum_{\substack{i=-P \\ i \neq 0}}^{\infty} g_i s_{n-i} \right)^2 \left(\sum_{\substack{i=-P \\ i \neq 0}}^{\infty} g_i^* s_{n-i}^* \right) \right] \quad (11)$$

Afin de poursuivre dans la voie de la simplification, on suppose que l'EQMM est faible devant la puissance du signal source, ce qui entraîne, d'après la relation (9), que les coefficients g_i ($i \neq 0$) sont faibles par rapport à l'unité et que g_0 est proche de l'unité. Alors, le produit de sommes dans la relation (11) peut être négligé et l'approximation suivante est obtenue :

$$E[|y_n|^4] \approx g_0^4 E[|s_n|^4] + 4g_0^2 E[|s_n|^2] (E_0 - (1 - g_0)^2 E[|s_n|^2]) \quad (12)$$

Finalement, un développement au premier ordre par rapport à E_0 fournit l'expression simplifiée :

$$E[|y_n|^4] \approx E[|s_n|^4] - 4E_0 (\gamma_{22} - E[|s_n|^2]) \quad (13)$$

Ensuite, en combinant les relations (1) et (13), la condition d'équivalence s'écrit :

$$\gamma_{22} (E[|s_n|^2] - E_0) = E[|s_n|^4] - 4E_0 (\gamma_{22} - E[|s_n|^2]) \quad (14)$$

soit, en utilisant le kurtosis normalisé de la séquence source :

$$K_s = \frac{E[|s_n|^4]}{(E[|s_n|^2])^2} = \frac{4}{3} \quad (15)$$

Cette condition est réalisée pour un signal uniformément distribué dans un disque. Elle l'est approximativement pour les constellations utilisées en transmission par modulation d'amplitude en quadrature, comme le montre le tableau 1.

Tableau 1. Kurtosis normalisé pour les constellations MAQ.

MAQ	16	64	256	1024
K_s	1.32	1.38	1.40	1.40

Quand la relation (15) n'est pas vérifiée, les vecteurs des coefficients H_{opt} et H_{MC22} sont différents mais proportionnels. En effet, en écrivant :

$$H_{MC22} = (1 + \varepsilon) H_{opt} \quad (16)$$

et en appliquant la relation (5), il vient :

$$\gamma_{22} (E[|s_n|^2] - E_0) = (1 + \varepsilon)^2 [E[|s_n|^4] - 4E_0 (\gamma_{22} - E[|s_n|^2])] \quad (17)$$

Un développement au premier ordre par rapport à ε donne :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{E_0}{E[|s_n|^2]} \left(3 - \frac{4}{K_s} \right) \quad (18)$$

C'est la propriété de colinéarité des vecteurs de coefficients, quand l'EQMM est faible et que les approximations faites pour obtenir l'expression simplifiée (13) restent valables. Il faut remarquer que l'erreur résiduelle supplémentaire due à l'écart des vecteurs de coefficients est proportionnelle à ε^2 , donc faible dès que le rapport $E[|s_n|^2]/E_0$ prend des valeurs importantes. Dans une mise en oeuvre adaptative, cette erreur supplémentaire peut être négligée devant celle qui provient de l'algorithme du gradient.

3. Convergence de l'algorithme AMC(2,2)

L'algorithme du module constant AMC(2,2) vise à atteindre itérativement le minimum de la fonction (2) en utilisant le gradient de cette fonction. L'évolution des coefficients est donnée par la relation de récurrence :

$$H_{n+1} = H_n + \delta (\gamma_{22} - |y_{n+1}|^2) y_{n+1} X_{n+1}^* \quad (19)$$

où δ désigne le pas d'adaptation et $y_{n+1} = X_{n+1}' H_n$. La différence par rapport à l'algorithme du gradient classique réside dans la présence du facteur :

$$f_{n+1} = \gamma_{22} - |y_{n+1}|^2 \quad (20)$$

qui ne diminue généralement pas avec la convergence. En effet, quand l'erreur résiduelle est faible, on peut assimiler $|y_{n+1}|^2$ à $|s_{n+1}|^2$ et écrire :

$$E[(f_{n+1})^2] \approx E[|s_{n+1}|^4] (K_s - 1) \quad (21)$$

Dans ces conditions, il est clair qu'en présence de signaux à module non constant, pour avoir une erreur résiduelle faible, il faut un pas d'adaptation faible, ce qui entraîne une convergence lente. Soit l'écart des coefficients :

$$\Delta H_n = H_{opt} - H_n \quad (22)$$

En posant $y_{0n+1} = X_{n+1}^t H_{opt}$, l'erreur supplémentaire en sortie du filtre s'écrit :

$$u_{n+1} = y_{0n+1} - y_{n+1} = X_{n+1}^t \Delta H_n \quad (23)$$

En utilisant la technique classique avec l'algorithme du gradient, on montre que la puissance de l'erreur supplémentaire peut être estimée par :

$$E[|u_{n+1}|^2] \approx \frac{1}{2E[|s_{n+1}|^2] - \gamma_{22}} E[(\gamma_{22} - |s_{n+1}|^2)^2 |s_{n+1}|^2] \frac{\delta}{2} N E[|x_{n+1}|^2] \quad (24)$$

où N est le nombre de coefficients du filtre. Le détail des calculs est donné en [7]. Le même résultat a été obtenu par une autre approche en [8].

L'étude de la convergence se fait en écrivant l'équation d'évolution de l'écart des coefficients :

$$\Delta H_{n+1} = \Delta H_n + \delta \gamma_{22} X_{n+1}^* X_{n+1}^t \Delta H_n - \delta \gamma_{22} y_{0n+1} X_{n+1}^* + \delta |y_{n+1}|^2 y_{n+1} X_{n+1}^* \quad (25)$$

Dans cette équation, il faut exprimer le terme $|y_{n+1}|^2 y_{n+1}$ en fonction de l'écart des coefficients. Une approximation au premier ordre en fonction de l'erreur supplémentaire u_{n+1} donne :

$$|y_{n+1}|^2 y_{n+1} = y_{n+1}^2 y_{n+1}^* \approx |y_{0n+1}|^2 y_{0n+1} - 2u_{n+1} |y_{0n+1}|^2 - u_{n+1}^* y_{0n+1}^2 \quad (26)$$

L'erreur supplémentaire est supposée indépendante de la sortie du filtre à l'optimum des coefficients y_{0n+1} , elle-même ayant la propriété de symétrie circulaire. Alors, le dernier terme du membre de droite de l'équation (26) s'annule en moyenne et, en reportant dans l'équation d'évolution (25), il vient :

$$\Delta H_{n+1} \approx [I_N - \delta(2|y_{0n+1}|^2 - \gamma_{22}) X_{n+1}^* X_{n+1}^t] \Delta H_n + (|y_{0n+1}|^2 - \gamma_{22}) y_{0n+1} X_{n+1}^* \quad (27)$$

Supposant toujours l'erreur de sortie faible à l'optimum des coefficients, en remplaçant y_{0n+1} par s_{n+1} , la constante de temps de l'algorithme est donnée approximativement par :

$$\tau_{CM22} \approx \frac{1}{\delta \lambda_{\min}(2E[|s_{n+1}|^2] - \gamma_{22})} \quad (28)$$

où λ_{\min} est la valeur propre minimale de la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée. Cette expression montre que la convergence implique la condition :

$$\frac{\gamma_{22}}{E[|s_n|^2]} = K_s < 2 \quad (29)$$

Or $K_s = 2$ correspond à un signal gaussien. Donc, pour que l'algorithme converge, il faut que le signal source soit sous-gaussien, ce qui est un résultat classique [4].

Une illustration est donnée par la figure 2 qui correspond à un canal non égalisable à 2 trajets, $C(Z) = 1 - j0.2Z^{-1}$, un égaliseur à $N = 3$ coefficients et une constellation MAQ16, c'est-à-dire : $s_n = (\pm 1 \pm 2) + j(\pm 1 \pm 2)$. Le vecteur des coefficients est initialisé par $H = [1, 0, 0]$ et le pas d'adaptation a pour valeur $\delta = 10^{-6}$. L'expression (28) donne la constante de temps : $\tau_{MC22} \approx 19400$, valeur cohérente avec la simulation.

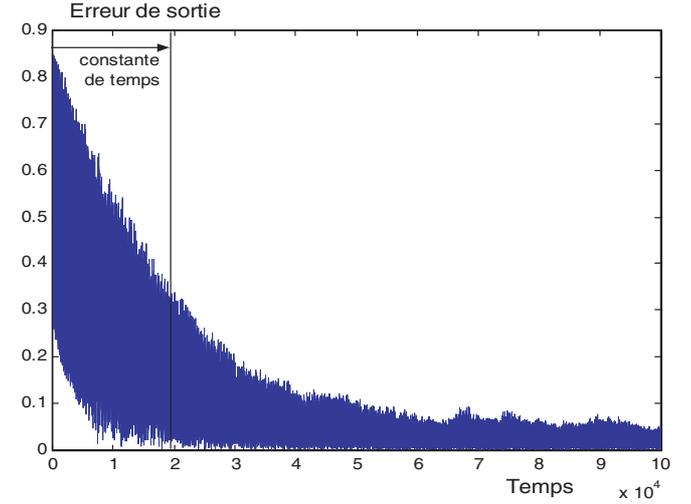


Figure 2. Convergence de l'algorithme AMC(2,2).

Ayant déterminé les paramètres de l'algorithme AMC(2,2), il est intéressant de faire la comparaison avec l'algorithme du gradient, LMS ou moindres carrés moyens (MCM). Les estimations classiques correspondent alors à $E_{MCM} \approx E_0 \delta_{MCM} N E[|x_{n+1}|^2]/2$ pour l'erreur quadratique supplémentaire et à $\tau_{MCM} \approx 1/\delta_{MCM} \lambda_{\min}$ pour la constante de temps. Alors, le rapport des constantes de temps pour obtenir la même puissance d'erreur supplémentaire est donné par :

$$\frac{\tau_{MC22}}{\tau_{MCM}} \approx \frac{1}{E_0} \frac{E[(\gamma_{22} - |s_{n+1}|^2)^2 |s_{n+1}|^2]}{(2E[|s_{n+1}|^2] - \gamma_{22})^2} \quad (30)$$

Par exemple, avec une constellation MAQ16 et $E_0 = 0.1$, ce rapport est d'environ 50 et il croît avec le kurtosis et donc la taille de la constellation.

4. Étude de l'algorithme AMC(1,2)

Le critère du module constant MC(1,2) est défini par la fonction coût :

$$J_{CM12} = E[(\gamma_{12} - |y_n|)^2] \quad (31)$$

Comme précédemment, le vecteur des coefficients optimal au sens de ce critère, H_{MC12} , est celui qui annule le gradient, soit :

$$E[(\gamma_{12} - |y_n|) \frac{y_n}{|y_n|} X_n^*] = 0 \quad (32)$$

En multipliant à gauche par H_{MC12}^{*t} , on obtient l'équation caractéristique du critère MC(1,2) :

$$\gamma_{12} E[|y_n|] = E[|y_n|^2] \quad (33)$$

Bien entendu, le signal source satisfait cette équation, ce qui fournit la définition de la constante :

$$\gamma_{12} = \frac{E[|s_n|^2]}{E[|s_n|]} \quad (34)$$

Pour étudier l'équivalence avec l'EQMM, il faut obtenir une estimation de $E[|y_n|]$ et la comparer avec la quantité $g_0 E[|s_n|]$, conformément aux équations (1) et (8). En fait, en supposant l'erreur de sortie faible et les signaux circulaires symétriques, et en utilisant l'expression (7), on trouve l'estimation suivante [7] :

$$E[|y_n|] \approx g_0 E[|s_n|] + \frac{1}{4} E_0 \frac{1}{g_0} E \left[\frac{1}{|s_n|} \right] \quad (35)$$

qui montre qu'il n'y a pas d'équivalence possible entre les critères EQMM et MC(1,2). Comme précédemment, en écrivant la relation de proportionnalité :

$$H_{MC12} = (1 + \varepsilon_1) H_{opt} \quad (36)$$

et en appliquant l'équation caractéristique (33), il vient :

$$\varepsilon_1 \approx \frac{E_0}{4} \frac{1}{E[|s_n|]} E \left[\frac{1}{|s_n|} \right] \quad (37)$$

c'est-à-dire que les vecteurs de coefficients sont très proches quand l'erreur de sortie est faible et que le supplément d'erreur de sortie dû au critère MC(1,2) peut être négligé par rapport au supplément d'erreur dû à l'algorithme du gradient dans la réalisation adaptative.

Avec l'algorithme AMC(1,2), les coefficients sont mis à jour par :

$$H_{n+1} = H_n + \delta(\gamma_{12} - |y_{n+1}|) \frac{y_{n+1}}{|y_{n+1}|} X_{n+1}^* \quad (38)$$

ce qui donne pour l'écart des coefficients par rapport à l'optimum :

$$\Delta H_{n+1} = \Delta H_n - \delta(\gamma_{12} - |y_{n+1}|) \frac{y_{n+1}}{|y_{n+1}|} X_{n+1}^* \quad (39)$$

On montre que la puissance du signal d'erreur supplémentaire u_n dû à l'algorithme du gradient s'écrit après convergence :

$$E[|u_{n+1}|^2] \approx \frac{1}{2 - \gamma_{12} E \left[\frac{1}{|s_{n+1}|} \right]} \delta N E[|x_{n+1}|^2] \quad (40)$$

$$E[(\gamma_{12} - |s_{n+1}|)^2]$$

Les détails du calcul sont donnés en [7] et le même résultat a été obtenu par une approche différente en [8].

Pour étudier la convergence, il faut introduire l'erreur supplémentaire dans l'équation de mise à jour (39). Cette équation contient la fraction $y_{n+1}/|y_{n+1}|$ et la présence de l'erreur supplémentaire u_{n+1} dans cette fraction dépend de l'angle que font les vecteurs représentatifs de y_{0n+1} et u_{n+1} dans le plan complexe. Si les vecteurs sont colinéaires u_{n+1} disparaît, alors qu'il est conservé intégralement s'ils sont perpendiculaires. Pour éviter des complications excessives, on estime qu'en moyenne la moitié de l'erreur supplémentaire est conservée et on remplace $y_{n+1}/|y_{n+1}|$ par $(y_{0n+1} - u_{n+1}/2)/|y_{0n+1}|$. Il vient alors :

$$\Delta H_{n+1} \approx \left[I_N - \delta \left(1 - \frac{1}{2} \gamma_{12} \frac{1}{|y_{0n+1}|} \right) X_{n+1}^* X_{n+1}^t \right] \Delta H_n + \delta y_{0n+1} \left(1 - \gamma_{12} \frac{1}{|y_{0n+1}|} \right) X_{n+1}^* \quad (41)$$

En remplaçant dans cette expression y_{0n+1} par s_{n+1} , une estimation de la constante de temps est obtenue :

$$\tau_{CM12} \approx \frac{1}{\delta \lambda_{\min} \left(1 - \frac{1}{2} \gamma_{12} E \left[\frac{1}{|s_n|} \right] \right)} \quad (42)$$

La condition de convergence correspond alors à :

$$E \left[\frac{1}{|s_n|} \right] < \frac{2}{\gamma_{12}} = 2 \frac{E[|s_n|]}{E[|s_n|^2]} \quad (43)$$

Pour une distribution gaussienne, la loi de probabilité du module correspond à une loi de Rayleigh. On vérifie alors que cette situation correspond à la limite de l'inégalité (43). Ainsi, comme précédemment, la convergence de l'algorithme AMC(1,2) nécessite que les signaux de source soient sous-gaussiens.

Une illustration est donnée à la figure 3, avec les mêmes conditions qu'à la partie précédente, sauf le pas d'adaptation de valeur $\delta = 20 \cdot 10^{-6}$. On trouve alors $\tau_{MC12} \approx 20\,400$, en cohérence

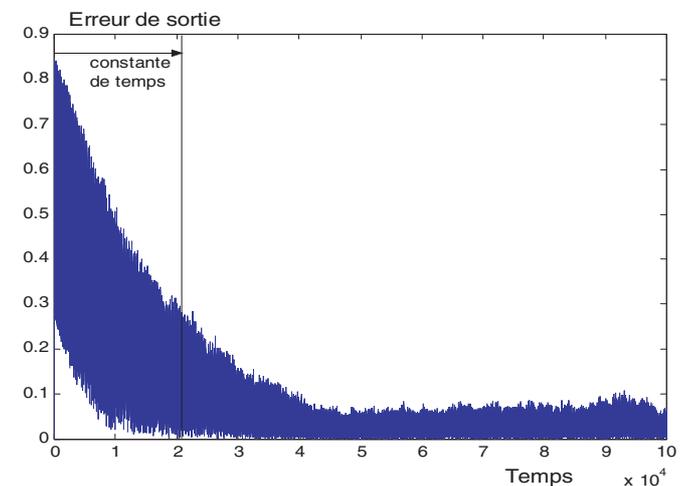


Figure 3. Convergence de l'algorithme AMC(1,2).

avec la simulation. L'erreur après convergence est plus élevée qu'à la figure 2. En fait, on montre, en utilisant les estimations ci-dessus, qu'à puissance d'erreur résiduelle supplémentaire égale, la constante de temps de l'algorithme AMC(1,2) est de l'ordre du double de celle de l'algorithme AMC(2,2).

5. Initialisation des algorithmes du module constant

Les algorithmes du module constant nécessitent une initialisation. En effet, l'équation (19) s'écrit aussi :

$$H_{n+1} = [I_N + \delta(\gamma_{22} - |y_{n+1}|^2)X_{n+1}^* X_{n+1}^T]H_n \quad (44)$$

ou encore :

$$H_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} [I_N + \delta(\gamma_{22} - |y_i|^2)X_i^* X_i^T]H_0 \quad (45)$$

Il faut donc un vecteur de coefficients initial non nul et une rotation de phase de ce vecteur n'affecte pas l'algorithme.

Les résultats précédents ont montré les relations qui existent entre les minima des critères EQMM et module constant. Il apparaît qu'à chaque minimum significatif du critère EQMM est associé un minimum du module constant. Les minima du critère EQMM correspondent aux différentes valeurs du retard P données au signal de référence dans l'équation (7). Le choix de ce retard est lié à la longueur L de la réponse impulsionnelle du canal et au nombre N de coefficients de l'égaliseur. Il faut prendre $0 \leq P \leq L + N - 2$. En pratique, le nombre de coefficients est choisi de manière que les minima les plus significatifs de l'EQMM soient obtenus pour $0 \leq P \leq N - 1$, c'est-à-dire des retards compatibles avec la mémoire du filtre.

Les minima du critère MC(2,2) sont en nombre inférieur à 3^N [9]. Les plus significatifs sont liés à ceux de l'EQMM. Dans ces conditions, une approche intuitive consiste à rechercher des initialisations qui permettent d'atteindre les N minima les plus significatifs de l'EQMM. Le vecteur des coefficients se situant dans un espace à N dimensions, le choix le plus simple consiste à initialiser par des vecteurs comportant un seul coefficient non nul, ce qui fournit N directions orthogonales. Il reste enfin à déterminer la position du coefficient non nul dans le vecteur. On peut adopter les mêmes règles que pour l'EQMM, c'est-à-dire que si le canal est à phase minimale, c'est le premier élément du vecteur qui est non nul, si le canal est à phase maximale, c'est le dernier. En cas de phase mixte, ou en l'absence d'information, c'est le coefficient central qui est choisi non nul [10].

Cette stratégie d'initialisation classique se trouve confortée par les résultats présentés ci-dessus sur les relations entre les cri-

tères EQMM et module constant. Toutefois, on devrait pouvoir maintenant mieux justifier cette approche simple et l'affiner. En particulier, il faudrait délimiter les domaines de convergence autour des minima significatifs et étudier la place du maximum à l'origine par rapport à ces domaines.

On pourrait également examiner des initialisations avec plusieurs coefficients non nuls et déterminer d'autres ensembles de directions orthogonales.

En tout cas, il est clair qu'avec la convergence lente des algorithmes du module constant, la qualité de l'initialisation est déterminante pour les performances de ces algorithmes.

6. Conclusion

L'approche directe qui a été présentée pour étudier les conditions d'équivalence entre le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale et les critères du module constant conduit à une justification théorique de la conjecture de Godard. Elle permet une évaluation précise des performances et des comparaisons claires entre les critères. L'analyse de la convergence des algorithmes adaptatifs met en évidence la supériorité de l'algorithme AMC(2,2) qui s'avère deux fois plus rapide que l'algorithme AMC(1,2). Toutefois, les algorithmes du module constant apparaissent considérablement plus lents que l'algorithme du gradient avec signal de référence. L'initialisation est une question critique et les résultats présentés devraient permettre des avancées sur ce sujet.

En dépit de leurs limitations, les algorithmes du module constant peuvent trouver des applications et les résultats qui ont été présentés, en faisant mieux comprendre leur fonctionnement, devraient contribuer à donner confiance aux utilisateurs potentiels.

Références

- [1] D.N. GODARD, «Self-recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-dimensional Data Communication Systems», IEEE Transactions on Com., Vol.COM-28, pp.1867-75, Nov.1980.
- [2] J.R. TREICHLER and B.G. AGEE, « A New Approach to Multipath Correction of Constant Modulus Signals », IEEE Trans. ASSP, vol.31, pp.459-72, April 1983.
- [3] I. FIJALKOW, A. TOUZNI and J.R. TREICHLER, «Fractionally Spaced Equalization Using CMA: Robustness to Channel Noise and Lack of Disparity », IEEE Trans. on Signal Processing , vol.45, pp.56-66, Jan. 1997.
- [4] C.R. JOHNSON *et al.*, «Blind Equalization Using the Constant Modulus Criterion: a Review», Proceedings of the IEEE, Vol.86, N°10, pp.1927-1950, 1998.
- [5] H.H. ZENG, L. TONG and C.R. JOHNSON, «An Analysis of Constant Modulus Receivers », IEEE Transactions on Signal Processing, Vol.47, N°11, Nov.1999, pp.2990-2999.
- [6] P. SCHNITER and C.R. JOHNSON, «Bounds for the MMSE performance of Constant Modulus Estimators », IEEE Trans. on Information Theory., vol.46, N°7, pp.2544-60, Nov.2000.

- [7] M. BELLANGER, «On the Performance of Two Constant Modulus Algorithms in Equalization with non-CM Signals», Proceedings of IEEE-ISCAS conference, New Orleans, May 2007.
- [8] J. MAI and A.H. SAYED, «A Feedback Approach to the Steady-State Performance of Fractionally Spaced Blind Adaptive Equalizers», IEEE trans. on Signal Processing, Vol.SP-48, N°1, January 2000, pp.80-91.
- [9] H. JAMALI and T. OGUNFUNMI, «Stationary points of Finite Length Constant Modulus Optimization», Signal Processing, vol. 82, 2002, pp.625-641.
- [10] Y. LI and Z. DING, «Convergence Analysis Of Finite Length Blind Adaptive Equalizers», IEEE Trans. on Signal Processing, vol.43, N°9, pp.2120-29, Sept.1995.



