

# Amincissement-sans-segmentation et rehaussement des images de niveau de gris par un filtre de chocs utilisant des champs de diffusion

## Segmentation-Free Thinning and Enhancement of Grayscale Images by Shock Filter and Diffusion Fields

**Mohamed Cheriet, Vincent Doré**

Laboratoire d'imagerie, de vision et d'intelligence artificielle, École de technologie supérieure 1100 Notre-Dame Ouest,  
Montréal, PQ-H3C-1K3, Canada  
mohamed.cheriet@livia.etsmtl.ca, vincent@livia.etsmtl.ca

Manuscrit reçu le 10 janvier 2006

Résumé et mots clés

L'aminçissement est assurément un descripteur de forme majeur pour l'analyse d'image et la reconnaissance de forme. Le rehaussement est aussi un outil essentiel pour faciliter l'interprétation visuelle et la compréhension des images de documents notamment celles qui sont bruitées et floues. Nous décrivons dans cet article une méthode d'aminçissement et de rehaussement utilisant un filtre de chocs dérivant de celui introduit par Remaki et Cheriet pour le rehaussement. Ce nouveau filtre utilise un champ de diffusion spécifique initial. L'utilisation de tels champs apporte un nouveau degré de liberté aux filtres de chocs, puisque ceux-ci sont spécifiques aux applications (aminçissement, rehaussement) et permettent ainsi au même filtre d'être utilisé pour différentes applications. Nous illustrons la performance de notre méthode par des résultats probants obtenus sur des images manuscrites.

Équation aux dérivées partielles (EDP), aminçissement, rehaussement, champ de diffusion, morphologie mathématique, images manuscrites.

Abstract and key words

In the scope of gray-level image processing and understanding, thinning is certainly a central shape descriptor for image analysis and pattern recognition. Enhancement is also an essential tool in facilitating the visual interpretation and understanding of images, especially for noisy and blurry ones. The lack of general unified frameworks necessitates the investigation of these problems in a coherent fashion, using partial differential equations. In this paper, we present a method for thinning and enhancing images by using a shock filter derived from our previously work introduced on enhancement. This new filter incorporates specific diffusion fields and since each such field is characteristic of a given application, it brings a new degree of freedom to the shock filters, in order to address problems of greater practical interests. Probative results on handwritten documents illustrate the performance and efficiency of our model. Other applications have been added in order to highlight its efficiency.

Partial Differential Equations (PDE's), thinning, enhancement, diffusion field, mathematical morphology, grayscale images.

# 1. Introduction

Le traitement de l'image utilisant les EDP a reçu un grand intérêt ces dernières années, et différents modèles ont été créés pour diverses applications. Les approches par EDP, grâce à leurs solides fondements mathématiques garantissent l'existence et l'unicité des solutions recherchées, et peuvent souvent être mises en œuvre par des schémas numériques efficaces. Dans nos travaux précédents, nous avons utilisé les EDP pour le rehaussement et la restauration d'images : deux applications où les EDP ont permis successivement d'améliorer théoriquement et pratiquement différents modèles tels que ceux proposés par Koenderink [8], Perona et Malik [14], Osher et Rudin [12], et Alvarez *et al.* [1].

La squelettisation, après son introduction par Blum [2] est une des transformations qui a fait l'objet de beaucoup d'attention. Dans un grand nombre d'applications, l'utilité de la squelettisation peut être attribuée aux besoins de réduire le nombre de données, ainsi qu'à la facilité de l'analyse de forme des objets amincis. Par exemple la conception humaine de certains caractères est souvent plus proche de leurs squelettes, ces derniers permettent ainsi une analyse structurelle plus simple et plus intuitive. De plus la réduction d'une image à ses éléments essentiels peut permettre l'élimination de contours dénaturés tout en gardant ses propriétés topologiques et géométriques. Beaucoup de méthodes de squelettisation ont été présentées dans la littérature et peuvent être classées dans différents groupes. Un de ces groupes est basé sur la transformée de la distance et la transformée de l'axe médian [11]; un autre groupe utilise le « pelage » des contours de l'objet [18], on y trouve aussi les méthodes basées sur la squelettisation 3D [9]. Depuis l'étude des différentes méthodes proposées par Lam [10], de nouvelles techniques ont vu le jour notamment avec les ondelettes [19], les EDP [7], [20] et l'approche 3D [6]; ces deux dernières approches permettent de squelettiser des images à niveaux de gris. Dans cet article, nous introduisons une nouvelle méthode de squelettisation d'images en niveaux de gris par EDP.

Nous présentons une généralisation du modèle 2D que nous avons précédemment construit pour le rehaussement et la restauration d'images, afin de l'étendre à d'autres applications : entre autre à la squelettisation. Dans la seconde section de l'article, nous présentons le filtre de chocs étendu par Remaki et Cheriet [15]. Ce modèle qui n'est qu'une approximation, diffuse les pixels suivant deux axes (les abscisses et les ordonnées); cette diffusion ne prend en compte qu'un voisinage à quatre pixels. Un modèle plus réaliste est développé dans la troisième section par l'introduction du champ de diffusion. Celle-ci permet un nouveau degré de liberté puisqu'à chaque application correspond au moins un champ de diffusion; ainsi avec le même filtre de chocs, on peut rehausser, éroder ou squelettiser des images. Dans la quatrième partie, nous nous intéressons à la partie principale de notre article: l'amincissement dont le champ de diffusion est le plus délicat. Le squelette est défini par

Niblack [11] comme (1) ayant la même connexité que les objets, (2) bien centré, (3) robuste à la rotation, (4) permettant une reconstruction exacte ou approximative en respectant une erreur spécifique, (7) pouvant être fin et enfin (9) ayant une belle apparence visuelle. Plusieurs de ces conditions peuvent être en conflit. Ainsi différents squelettes peuvent être construits suivant que l'on privilégie sa finesse ou son exacte reconstruction. N'ayant pas démontré ces conditions, nous préférons employer prudemment *amincissement* plutôt que *squelettisation*. Enfin dans la cinquième partie nous proposons une discussion et une confrontation de nos résultats avec d'autres méthodes à base d'EDP.

## 2. Rappels des travaux précédents

Remaki et Cheriet [15] ont proposé un filtre de chocs performant pour le rehaussement d'image et qui est plus efficace que les filtres de chocs développés par Osher et Rudin [12], et par Alvarez *et al.* [1]. L'équation hyperbolique à coefficients discontinus associée à ce modèle est donnée par :

$$\partial_t u^\varepsilon + a(x)F(u_{xx}^\varepsilon, u_x^\varepsilon)\bar{\partial}_x f(u^\varepsilon(x)) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = u_0^\varepsilon \quad (2)$$

où  $\bar{\partial}$  correspond à l'opérateur de dérivation régularisé.  $u_0^\varepsilon$  est une régularisation du signal initial  $u_0$ ; elle appartient à l'ensemble des distributions  $D'(\mathbb{R})$ . Les fonctions  $a \in D'(\mathbb{R})$  et  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  permettent de contrôler la vitesse des chocs :  $a$  permet de ralentir certaines régions de l'image alors que  $f(\lambda)$  est la vitesse de la ligne de niveau de valeur  $\lambda$ . La fonction  $F$  localise les chocs. L'utilisation de ce filtre de choc peut se décomposer en deux étapes :

- une étape de régularisation pour placer l'image dans l'espace des distributions, dans lequel la stabilité de l'EDP a été démontrée. On verra dans la suite qu'il est important d'obtenir un bon noyau de régularisation pour obtenir de bons résultats.
- une étape de déconvolution, où l'EDP (2) est appliquée à l'image régularisée dans la première étape.

### 2.1. Schéma numérique pour les signaux 1D

Soient les notations classiques :

$$u_i^{\varepsilon, t} = u^\varepsilon(x_i = i \Delta x, t_n = n \Delta t) \quad (3)$$

$\Delta x$  et  $\Delta t$  étant respectivement les mailles spatiale et temporelle. Pour chaque nœud  $(x_i, t_n)$ , l'approximation  $u_i^{\varepsilon, n}$  est la solution du schéma numérique :

$$u_i^{\varepsilon,n+1} = u_i^{\varepsilon,n} - r \max[0, a_i F(\partial_{xx} u_i^{\varepsilon,0}, \partial_x u_i^{\varepsilon,0}) f'(u_i^{\varepsilon,n})] \times (u_i^{\varepsilon,n} - u_{i-1}^{\varepsilon,n}) \quad (4)$$

$$-r \min[0, a_i F(\partial_{xx} u_i^{\varepsilon,0}, \partial_x u_i^{\varepsilon,0}) f'(u_i^{\varepsilon,n})] \times (u_{i+1}^{\varepsilon,n} - u_i^{\varepsilon,n}) \quad (5)$$

Où  $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  et :

$$\partial_x u_i^{\varepsilon,0} = \frac{u_{i+1}^{\varepsilon,0} - u_i^{\varepsilon,0}}{\Delta x}; \quad \partial_{xx} u_i^{\varepsilon,0} = \frac{u_{i+1}^{\varepsilon,0} - 2u_i^{\varepsilon,0} + u_{i-1}^{\varepsilon,0}}{\Delta x} \quad (6)$$

Dans nos expériences et pas soucis de simplicité, nous nous sommes servi de la fonction choc  $F$  utilisée dans [15] :

$$F(x, y) = \text{sign}(x) \cdot \text{sign}(y) \quad (7)$$

Cette fonction localise les chocs sur les frontières le long des points d'inflexion de l'image. Mais d'autres fonctions (sigmoïde, hyperbolique) peuvent être choisies dépendamment de l'application considérée. Le filtre (2) utilisant la fonction choc (7) rehausse les images en diffusant les extrema dans leur voisinage défini par les points d'inflexion de l'image originale. Cette diffusion est anisotrope car elle conserve les contours. Ces derniers séparent les parties de valeurs minimales des parties de valeurs maximales. La fonction choc n'est calculée qu'une seule fois à partir de l'image initialement régularisée. La Figure 1 présente les résultats d'un sinus rehaussé en utilisant le schéma numérique (5) avec la fonction choc (7).

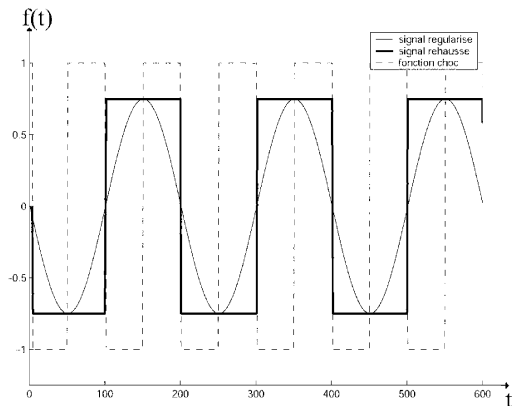


Figure 1. Rehaussement d'un sinus.

## 2.2. Schéma numérique pour les signaux 2D

Le schéma numérique pour les signaux 2D est obtenu en appliquant successivement l'équation 2 suivant la direction de l'axe des abscisses puis suivant celle de l'axe des ordonnées. On calcule donc dans un premier temps l'approximation  $u_i^{\varepsilon,n+\frac{1}{2}}$  de  $u$  au nœud  $(x_i, y_i, (n + \frac{1}{2})\Delta t)$  donnée par :

$$u_{i,j}^{\varepsilon,n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^{\varepsilon,n} - \frac{1}{2} r_1 \max[0, a_{i,j} F(\partial_{xx} u_{i,j}^{\varepsilon,0}, \partial_x u_{i,j}^{\varepsilon,0}) f'(u_{i,j}^{\varepsilon,n})] \times (u_{i,j}^{\varepsilon,n} - u_{i-1,j}^{\varepsilon,n})$$

$$- \frac{1}{2} r_1 \min[0, a_{i,j} F(\partial_{xx} u_{i,j}^{\varepsilon,0}, \partial_x u_{i,j}^{\varepsilon,0}) f'(u_{i,j}^{\varepsilon,n})] \times (u_{i+1,j}^{\varepsilon,n} - u_{i,j}^{\varepsilon,n})$$

Finalement une approximation de  $u$  au nœud  $(x_i, y_i, n\Delta t)$  est donnée par

$$u_{i,j}^{\varepsilon,n+1} = u_{i,j}^{\varepsilon,n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} r_1 \max[0, a_{i,j} F(\partial_{yy} u_{i,j}^{\varepsilon,0}, \partial_y u_{i,j}^{\varepsilon,0}) f'(u_{i,j}^{\varepsilon,n+\frac{1}{2}})] \times (u_{i,j}^{\varepsilon,n+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j}^{\varepsilon,n+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} r_1 \min[0, a_{i,j} F(\partial_{yy} u_{i,j}^{\varepsilon,0}, \partial_y u_{i,j}^{\varepsilon,0}) f'(u_{i,j}^{\varepsilon,n+\frac{1}{2}})] \times (u_{i+1,j}^{\varepsilon,n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{\varepsilon,n+\frac{1}{2}})$$

La stabilité pour la norme infinie et la variation totale de ce modèle a été démontrée dans [17], lorsque la condition CFL est respectée, c'est-à-dire lorsque  $r_1 F f' < \frac{1}{2}$  et  $r_2 F f' < \frac{1}{2}$ . La Figure 2 montre un signal rehaussé en utilisant la fonction choc (7); les extrema sont donc diffusés jusqu'aux points d'inflexion de l'image. L'extension de ce processus à une image est présentée Figure 3.

## 3. Extension du modèle

Nous avons étendu le modèle précédemment présenté à d'autres applications liées aux filtres de chocs, telles que l'érosion, la dilatation et l'amincissement. Un premier essai a déjà été réalisé dans [4], mais les modèles qui y avaient été développés possédaient beaucoup d'inconvénients : un temps de calcul prohibitif, un grand nombre de paramètres à régler pour chaque image; d'autre part, l'implémentation était très lourde du fait des masques utilisés pour empêcher la diffusion de certains pixels; finalement, une segmentation de post-traitement par l'algorithme de Otsu [13] était nécessaire pour obtenir les objets amincis. Cependant, nous avons gardé l'idée de diffusion locale des extrema dans leurs voisinages définis par la fonction choc  $F$  et de champ de diffusion.

### 3.1. Un problème de diffusion d'extrema

#### 3.1.1. Le rehaussement

Dans le cas d'un signal à une dimension, les extrema sont diffusés jusqu'aux points frontières définis par la fonction  $F$ , en l'occurrence les points d'inflexion pour (7). En chaque point du signal, on peut définir un sens de diffusion; on le note  $+$  lorsque la diffusion est de gauche à droite et  $-$  dans le sens inverse. Pour un signal 2D tel que les images, on utilise l'orthogonalité des deux axes; ainsi le sens de diffusion possède deux composantes: la première correspond au sens de diffusion le long des abscisses, la seconde celle des ordonnées.

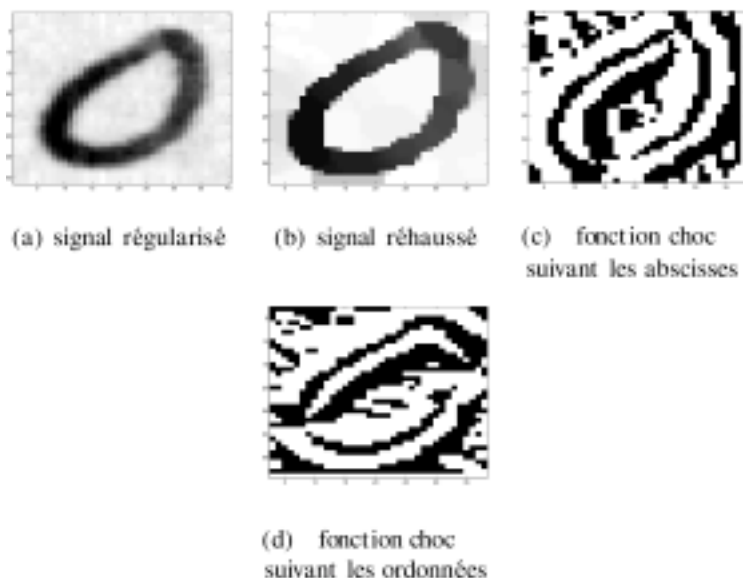


Figure 2. Rehaussement d'un signal 2D dégradé.

### 3.1.2. La dilatation et l'érosion

La dilatation et l'érosion sont deux opérateurs classiques de morphologie mathématique.



**Définition 3.1.1.** La dilatation à l'échelle  $t$  avec l'élément structurant  $B$  d'une fonction  $u_0$  est donnée par :

$$D_t u_0(x) = \sup_{y \in tB} u_0(x - y) \tag{8}$$

De façon similaire, l'érosion à l'échelle  $t$  avec l'élément structurant  $B$  d'une fonction  $u_0$  est définie par :

$$E_t u_0(x) = \inf_{y \in tB} u_0(x - y) \tag{9}$$

Dilater (resp. éroder) une image consiste donc à diffuser les maxima (resp. minima) dans un voisinage défini par l'élément structurant et la fonction  $F$ . On peut ici aussi définir un sens de diffusion à deux composantes indépendantes.

### 3.2. Le besoin d'un champ de diffusion continu

La diffusion telle que présentée dans la section précédente a le désavantage d'être décomposée en deux étapes : à chaque itération, on diffuse suivant les abscisses puis indépendamment suivant les ordonnées, on se limite ainsi au voisinage à 4 pixels. Ce type de voisinage reste assez limité et peut générer des artefacts du fait de la non cohérence des deux axes. Il semble donc intéressant de regarder le voisinage à 8 pixels (les pixels diagonaux sont aussi considérés). Un tel voisinage raffine le rehaussement, la dilatation ainsi que l'érosion, de plus il semble indispensable (comme nous le verrons plus tard) pour l'amincissement. Nous avons donc étendu le concept de sens de diffusion à celui de champ de diffusion.

**Définition 3.2.1.** On appelle angle de diffusion  $\theta_{i,j}$  d'un pixel  $(i, j)$ , l'angle compris entre le vecteur définissant l'axe des abscisses et celui définissant l'axe de diffusion en ce pixel.

**Définition 3.2.2.** On définit le champ de diffusion  $\Theta$  d'une image comme étant l'ensemble des angles de diffusion des pixels de l'image.

Des images de champs de diffusion sont présentées Figure 6 g) et Figure 6 h).

### 3.3. Le champ de diffusion utilisé par l'EDP

Le rôle de la fonction choc  $F$  est d'indiquer les sens de diffusion suivant les axes des abscisses et des ordonnées. Or dans le modèle étendu, les champs de diffusion servent à indiquer la direction de la diffusion (la fonction de chocs est donc implicitement utilisée dans le champ de diffusion). Elle devient donc inutile dans la définition du filtre de choc. On pose donc  $F = 1$ . Le schéma numérique s'écrit alors :

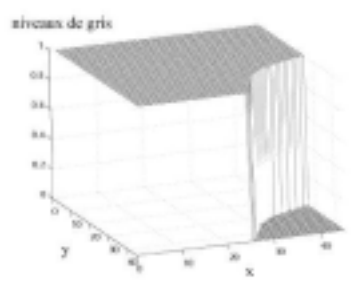
$$u_{i,j}^{\varepsilon,n+1} = u_{i,j}^{\varepsilon,n} - r.a_{i,j}.f'(u_{i,j}^{\varepsilon,n}) \cdot (u_{i+\cos(\theta_{i,j}),j+\sin(\theta_{i,j})}^{\varepsilon,n} - u_{i,j}^{\varepsilon,n}) \tag{10}$$

Cette équation (10) correspond à la discrétisation suivant un schéma de différences finies explicite de l'EDP suivante :

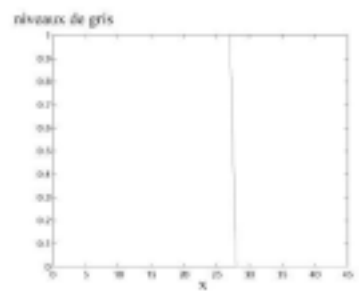
$$u_t^\varepsilon(X,t) + a(X) \cdot \frac{\partial}{\partial R(\Theta(X))} f(u^\varepsilon(X,t)) = 0 \tag{11}$$

où  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $R(\Theta(X)) = \begin{pmatrix} \cos\Theta(X) \\ \sin\Theta(X) \end{pmatrix}$ .

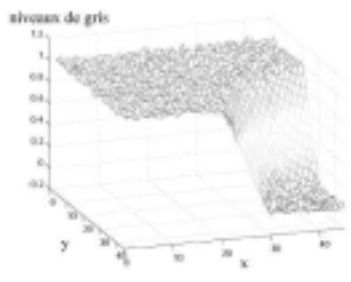
Nous n'avons pas encore montré la stabilité du schéma numérique (10); nous nous attacherons à la démontrer dans de futurs



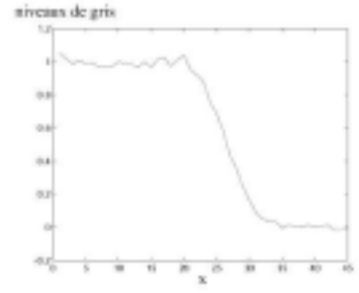
(a) représentation 3D de l'image originale



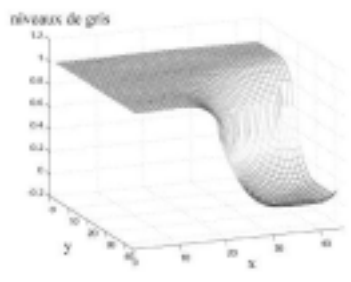
(b) niveaux de gris d'abscisse 40 de l'image originale



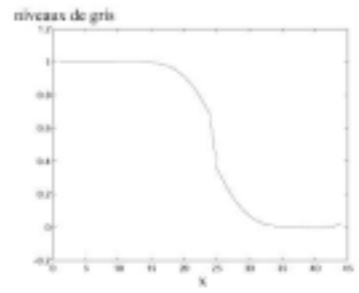
(c) représentation 3D de l'image dégradée



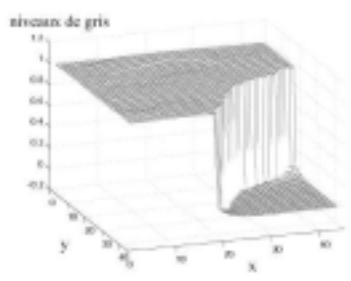
(d) niveaux de gris d'abscisse 40 de l'image dégradée



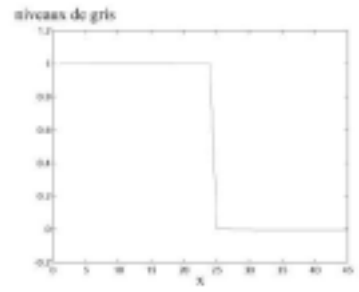
(e) représentation 3D de l'image après 5 itérations du filtre de choc



(f) niveaux de gris d'abscisse 40 de l'image après 5 itérations



(g) image après 30 itérations du filtre de choc



(h) niveaux de gris d'abscisse 40 de l'image après 30 itérations

Figure 3. Vues 3D de différentes étapes durant le rehaussement d'un signal 2D.



travaux. Toutefois ce schéma a été testé sur un grand nombre d'images et nous n'avons rencontré aucun problème de stabilité.

### 3.4. Quelques champs de diffusion

Dans la suite de l'article nous aurons besoin, pour le calcul des champs, des dérivées directionnelles premières et secondes que l'on notera :

$$D_{\theta}u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(X + h.R(\theta), t) - u(X, t)}{h}$$

$$D_{\theta}^2u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_{\theta}u(X + h.R(\theta), t) - D_{\theta}u(X, t)}{h}$$

une approximation grossière de  $D_{\theta}u$  et de  $D_{\theta}^2u$  est donnée par :

$$D_{\theta}u_{i,j} = u_{i+\cos(\theta), j+\sin(\theta)} - u_{i,j}, \tag{12}$$

$$D_{\theta}^2u_{i,j} = D_{\theta}u_{i,j} + D_{\theta+\pi}u_{i,j}$$

#### 3.4.1. Le rehaussement

Plusieurs champs de diffusion pour le rehaussement peuvent être construits (notamment en combinant celui que nous proposons plus bas avec une certaine fonction choc F). Celui que nous proposons dans la suite essaie de se rapprocher le plus possible du champ qui diffuse les extrema jusqu'aux frontières de l'image définies par les points d'inflexion.

**Proposition 3.4.1.** *Au pixel  $u_{i,j}$ , soit l'angle :*

$$\theta_{i,j}^1 = \arg \max_{\theta \in [0, 2\pi]} (|D_{\theta}u_{i,j}|) \tag{13}$$

alors  $d(\theta_{i,j}) = \text{sign}D_{\theta_{i,j}} \cdot \text{sign}D_{\theta_{i,j}}^2 > 0$ . La diffusion suivant la direction définie par cet angle est donc contraire à celle qui diffuse les extrema jusqu'aux points d'inflexion de l'image.

*Preuve.* Si  $D_{\theta_{i,j}^1} u_{i,j} > 0$  alors :

$$D_{\theta_{i,j}^1}^2 u_{i,j} = \frac{D_{\theta_{i,j}^1} u_{i,j} + D_{\theta_{i,j}^1 + \pi} u_{i,j}}{2}$$

$$\geq \frac{D_{\theta_{i,j}^1} u_{i,j} - |D_{\theta_{i,j}^1 + \pi} u_{i,j}|}{2} \geq 0$$

De façon similaire on montre que lorsque  $D_{\theta_{i,j}^1} u_{i,j} < 0$ ,

$$D_{\theta_{i,j}^1}^2 u_{i,j} = \frac{D_{\theta_{i,j}^1} u_{i,j} + D_{\theta_{i,j}^1 + \pi} u_{i,j}}{2}$$

$$\leq \frac{D_{\theta_{i,j}^1} u_{i,j} - D_{\theta_{i,j}^1 + \pi} u_{i,j}}{2} \leq 0$$

On cherche donc à diffuser dans le sens opposé tout en s'assurant que  $d(\theta_{i,j}^1 + \pi) = \text{sign}D_{\theta_{i,j}^1 + \pi} \cdot \text{sign}D_{\theta_{i,j}^1 + \pi}^2 > 0$ . Dans le cas contraire,  $u_{i,j}$  est un extremum suivant l'axe défini par  $\theta_{i,j}^1$ .

On cherche donc à diffuser ces pixels le moins possible ; l'angle de diffusion pour ces pixels est donc :

$$\theta_{i,j}^2 = \arg \min_{\theta \in [0, 2\pi]} (|D_{\theta}u_{i,j}|) \tag{14}$$

□

Le champ de diffusion pour le rehaussement résultant est donc :

$$\Theta_{\text{rehaus}} = (\theta_{i,j})_{i,j} \tag{15}$$

où

$$\theta_{i,j} = \begin{cases} \theta_{i,j}^1 + \pi & \text{si } d(\theta_{i,j}^1) > 0 \\ \theta_{i,j}^2 & \text{si } d(\theta_{i,j}^1 + \pi) > 0 \end{cases} \tag{16}$$

Un exemple d'un tel rehaussement est donné par la Table 1. Une image floutée a) est rehaussée grâce au champ de diffusion b). L'image résultante est obtenue en c).

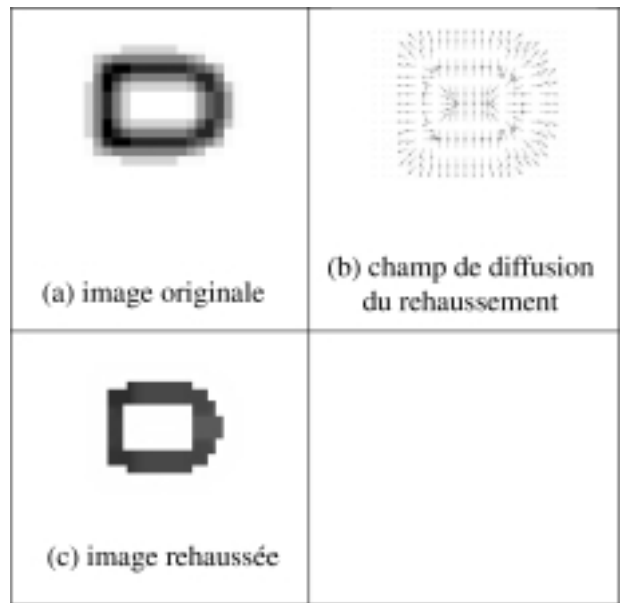


Table 1. Modèle étendu pour le rehaussement.

#### 3.4.2. L'érosion et la dilatation

Pour ces deux applications, le champ de diffusion doit être calculé à chaque itération. Le temps de calcul peut ainsi être lourd mais le but de ce modèle est de donner des résultats précis et ainsi de compléter les modèles rapides déjà existants.

**Proposition 3.4.2.** *Lorsque  $f(u) = u$  et  $a(X) = 1$  dans l'équation (11) et en prenant comme champ de diffusion :*

$$\Theta_t(X) = \arg \max_{\theta} (D_{\theta}u(X, t))$$

alors l'équation (11) est associée à une dilatation dont l'élément structurant est une boule de rayon 1.

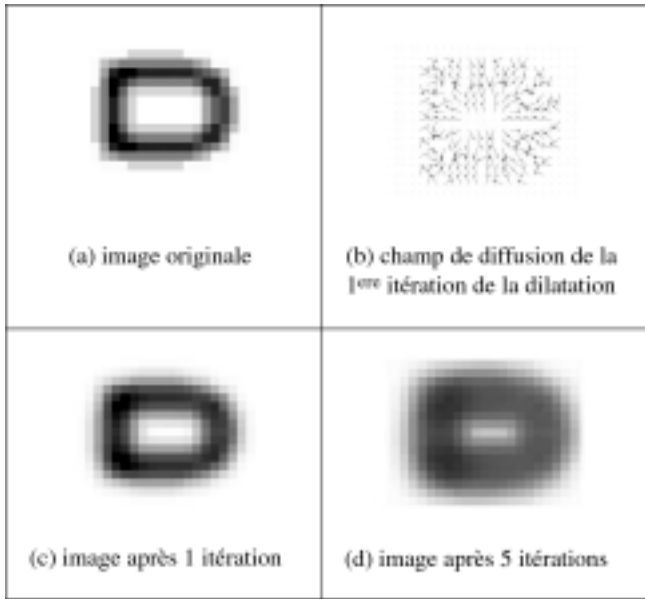


Table 2. Modèle étendu pour la dilatation.

Preuve. Pour  $t = 0$ , on a  $u(0,t) = u_0(x)$  et  $u(t,x) = D_t u_0(x)$

$$u(h,x) - u(0,x) = \sup_{y \in hB} (u_0(x - y) - u_0(x))$$

$$u(h,x) - u(0,x) = \sup_{y \in B} (u_0(x + hy) - u_0(x))$$

L'image étant lissée durant le prétraitement, on considère donc que  $u_0(x) \in C^1(\mathbb{R})$  et en supposant que  $B$  est la boule unité (donc bornée), on a :

$$u(h,x) - u(0,x) = \frac{\partial}{\partial R(\Theta_0(x))} .u(x,t).h + o(h)$$

en divisant pas  $h$  et en faisant tendre  $h$  vers zéro on obtient :

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial R(\Theta_0(x))} u_0(x) = 0$$

Pour chaque échelle arbitraire  $t$ , en utilisant la propriété :

$$D_{t+h} = D_t . D_h = D_h . D_t, \text{ on peut écrire :}$$

$$u(t + h,x) - u(t,x) = D_h(u(t))(x) - u(t)(x)$$

En appliquant le même procédé en remplaçant  $u_0$  par  $u(t)$ , on obtient le résultat général.

Un exemple de dilatation par EDP est présenté par la Table 2. Une image a) est dilatée lors de la première itération suivant le champ de diffusion b). L'image résultante après une itération est obtenue en c). Après 5 itérations du processus on obtient d).

De manière similaire on montre que si le champ de diffusion est :

$$\Theta_t(X) = \arg \min_{\theta} (D_{\theta} u(X,t))$$

alors l'EDP simplifiée est associée à une érosion. □

Une telle érosion est présentée par la Table 3.

Notre méthode possède plusieurs avantages :

- Durant le processus itératif: la vitesse d'érosion et de dilatation peut varier suivant la localisation spatiale (fonction vitesse  $a$ ) et la localisation en niveaux de gris (la fonction vitesse  $f$ ). D'un point de vue morphologique, la taille de l'élément structurant de l'opérateur en un pixel donné  $x$ , dépend des niveaux de gris du voisinage  $V(x)$  de ce pixel.
- Le caractère itératif du processus permet de s'affranchir de la taille de l'élément structurant. La taille maximale de l'élément structurant dépend du nombre d'itérations et ainsi donc, du critère d'arrêt. Les itérations précédant une itération  $n$  ne permettent de transformer l'image qu'à partir d'un élément structurant dont la taille maximale est inférieure ou égale à  $n$ . Le processus s'arrête à l'itération  $n$  lorsque ce nombre correspond à la taille maximale de l'élément structurant.

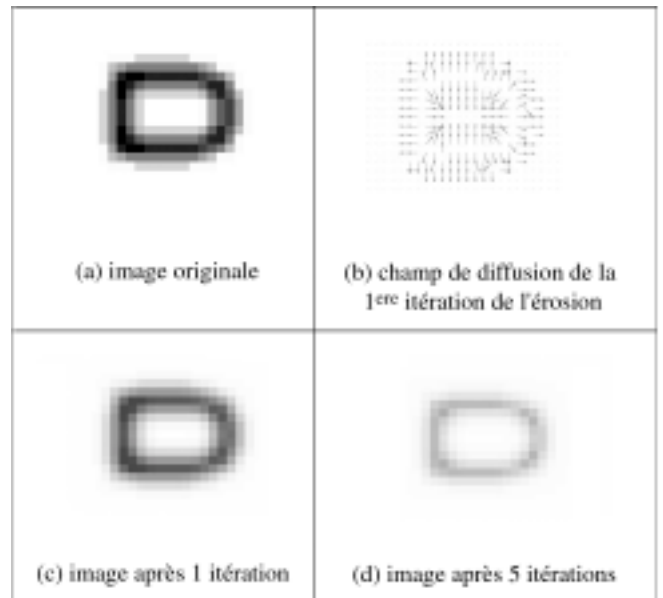


Table 3. Modèle étendu pour l'érosion.

### 3.5. Algorithme de calcul de la dérivée directionnelle

L'utilisation d'un champ de diffusion continu pose un nouveau problème: celui du calcul de  $u_{i+\cos(\theta_{i,j}), j+\sin(\theta_{i,j})}^{\varepsilon,n}$ . En effet l'image est un espace discret, on ne connaît pas la valeur du niveau de gris en un point compris entre deux pixels adjacents. Une possibilité est de passer l'image dans le domaine continu en l'approchant par une interpolation bilinéaire.

#### 3.5.1. L'interpolation bilinéaire

Pour obtenir une approximation de  $u$  en  $(x,y) \in [0,1]^2$ , on utilise l'interpolation bilinéaire suivante :

$$u(x,y) = a + (b - a)x + (d - a)y + (c - b + a - d)xy \quad (17)$$

où  $a, b, c$  et  $d$  correspondent respectivement aux intensités lumineuses des 4 sommets  $u(0,0)$ ,  $u(1,0)$ ,  $u(1,1)$  et  $u(0,1)$  du carré d'interpolation sur  $[0,1]$  (voir Figure 4). Tous les points situés à une unité de  $a$  et appartenant au carré d'interpolation vérifient donc :

$$u(\theta) = a + (b - a)\cos \theta + (d - a)\sin \theta + (c - b + a - d)\sin \theta \cos \theta \quad (18)$$

Une généralisation à l'image entière se fait facilement en remarquant que l'interpolation en chaque point se fait grâce aux huit pixels voisins les plus proches (8-connexité).

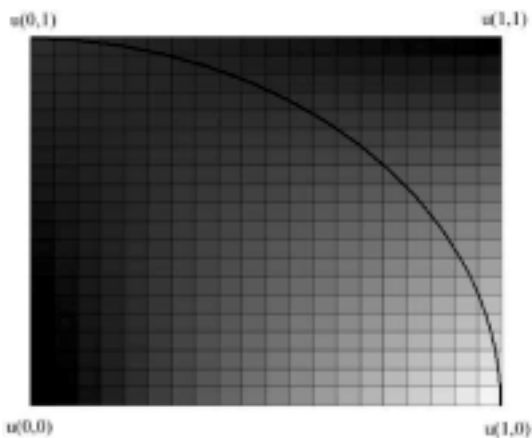


Figure 4. Interpolation bilinéaire de  $u$  sur  $[0,1]^2$ , les points appartenant à l'arc de cercle sont les points distants de une unité de  $u(0,0)$  et appartenant à  $[0,1]^2$ .

### 3.5.2. Interpolation de la dérivée directionnelle

Une des remarques importantes est que l'interpolation bilinéaire est continue et ne dépend que de 8 pixels. Elle est donc relativement régulière. On peut donc évaluer  $D_{\theta}u$  pour seulement 16 directions :  $\frac{\pi}{8}.i, i = 0, 1, \dots, 15$ . La valeur exacte recherchée de  $D_{\theta}u$  se trouve très probablement entre les deux directions les plus proches de la direction satisfaisant le mieux le critère du champ recherché. Par exemple pour trouver l'angle de diffusion d'un pixel auquel on applique une dilatation, la valeur maximale exacte de la dérivée directionnelle se trouvera donc très certainement entre la direction  $d_p$  précédant et la direction  $d_s$  suivant la direction  $d_{max}$  du maximum de la dérivée parmi les 16 directions.

Pour obtenir une approximation plus fine de la direction optimale, on réalise une interpolation d'ordre 4 entre  $d_p$  et  $d_s$  sur 16 valeurs. Soit  $d_{p1}, d_{p2}$  les deux directions précédents  $d_{max}$ ,  $d_{s1}$  et  $d_{s2}$  les deux suivantes.

L'interpolation polynomiale d'ordre 4 est donnée par :

$$p(x) = g^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d_{p1} \\ d_{p2} \\ d_{max} \\ d_{s1} \\ d_{s2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall x \in [-1,1] \quad (19)$$

où

$$g = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons testé cette interpolation pour différentes valeurs, et nous avons remarqué que 16 valeurs était un compromis optimal entre précision et vitesse de calcul. Cette interpolation permet donc de rechercher la meilleure direction parmi  $16 \times 16/2$  directions avec un temps de calcul relativement faible.

### 3.6. Critère d'arrêt automatique

Puisque la convergence de l'EDP est garantie, le schéma numérique converge ; mais généralement en un nombre d'étapes relativement élevé. Un critère d'arrêt permet de stopper le processus à l'étape  $n$  telle que  $u_n$  soit proche de l'approximation de la solution de l'EDP. On souhaite obtenir un critère d'arrêt qui soit applicable à tous les types d'images : qu'elles soient grandes, petites, avec beaucoup ou peu d'information, etc.

Vers la fin du processus, la déformation de l'image n'est plus très importante, seuls quelques pixels sont modifiés. En quantifiant la déformation à chaque échelle et en la comparant à la déformation initiale, on peut obtenir un critère d'arrêt relativement robuste.

Pour certaines valeurs de  $\epsilon$ , l'étape de convolution peut être vue comme un algorithme itératif de  $\epsilon$  itérations. La déformation d'une de ces itérations est approchée par la déformation totale sur le nombre d'itérations  $\epsilon$ . Nous avons testé ce critère sur plusieurs images et pour les valeurs de  $\epsilon$  généralement utilisées (entre 3 et 6); nous avons remarqué que la déformation d'une itération de convolution était peu sensible à ces valeurs de  $\epsilon$ . On quantifie donc la déformation de l'image après régularisation par :

$$\Delta_{init} = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} (u_{i,j} - u_{i,j}^{\epsilon})^2}}{\epsilon} \quad (20)$$

De la même manière, la déformation à l'itération  $n$  peut être mesurée par la norme euclidienne de la différence de l'image avant et après l'itération  $n$  :

$$\Delta^n = \sqrt{\sum_{i,j} (u_{i,j}^{n-1,\epsilon} - u_{i,j}^{n,\epsilon})^2} \quad (21)$$

Nous avons remarqué que lorsque la déformation n'était que peu perceptible visuellement, elle était équivalente à celle de la convolution (à quelques itérations près). Le processus s'arrête donc au temps  $n$ , lorsque :  $\Delta^n < \Delta_{init}$ . D'autre part, en comparant ces deux déformations, la taille de l'image et la quantité d'information n'agissent pas sur le critère d'arrêt puisque l'on



compare deux déformations d'images de même taille et de même quantité d'information.

## 4. L'aminçissement

Une des applications très utiles en traitement de l'image et en reconnaissance de forme est l'aminçissement. Nous présentons dans cette section une méthode d'aminçissement à partir de l'EDP développée dans les sections précédentes.

Le champ de diffusion de l'aminçissement est le même que celui de l'érosion, il est donc calculé à chaque itération. Ainsi si ce dernier est imposant dans l'image alors la régularisation de pré-traitement peut laisser des zones homogènes (constantes) et ne permet donc pas de définir le champ de diffusion sur l'objet en entier.

À chaque itération, on repère les pixels appartenant à l'aminçissement à travers deux critères :

- **minimum directionnel** : on s'intéresse aux dérivées premières suivant les directions appartenant à un intervalle de  $\Delta\theta = \frac{\pi}{8}$  centré en la direction de la diffusion. Si au moins une de celles-ci est positive ainsi que la dérivée de direction opposée, alors le pixel est un minimum suivant une direction proche de celle de la diffusion.
- **un critère de luminance** : tous les pixels supérieurs (ou inférieurs suivant l'image à aminçir) à un seuil  $T^n$  variable suivant les échelles  $n$  ne peuvent appartenir à l'aminçissement. Le seuil est déterminé à partir de l'algorithme de Otsu [13]. Pour les images bruitées, on préférera l'algorithme de Otsu récursif [3]. Les pixels satisfaisant ces deux critères sont ensuite enregistrés dans un masque :

$$\Upsilon(u^n) = \max\left(0, \sum_{\theta \in \Theta \pm \Delta\theta} \max(0, D_\theta u), \max(0, D_{\theta+\pi} u^n), \max(0, u^n - T^n)\right) \quad (22)$$

À chaque itération, on remet à jour le masque. À la fin du processus, le masque contient l'image aminçie.

Nous avons remarqué qu'en ralentissant la diffusion des pixels appartenant au masque, on améliore grandement la qualité de l'aminçissement, en empêchant notamment la formation dans l'aminçissement de blocs comme celui présent à l'intersection de la boucle du  $c$  de l'image  $c$ ) de la Table 4. De même pour gagner en temps de calcul, on ne diffuse que les pixels dont le maximum du module de la dérivée directionnelle est supérieur à 1. Ainsi, en prenant la fonction vitesse :

$$f(u^n) = \Upsilon(u^n) \cdot \max(0, \max(D_\theta u) - 1) \quad (23)$$

on ralentit les pixels appartenant au squelette grâce à  $\Upsilon$  et les pixels dont la variation dans leur voisinage est faible (inférieure à 1), puisqu'en ces pixels  $\max(D_\theta u) - 1 < 0$ .

### 4.1. L'aminçissement est très sensible à la régularisation de pré-traitement

Nous avons remarqué que pour des noyaux de régularisation différents, on obtient des aminçissements différents. L'aminçissement est donc très sensible à la phase de régularisation. Il est donc important de trouver un bon noyau de régularisation.

La plupart des algorithmes de régularisation utilise un filtre gaussien tronqué. Deux problèmes se posent à l'utilisation d'un tel filtre. Si la taille du support est trop petite, une partie non négligeable de l'information est perdue ; d'un autre côté si le support est trop grand, on risque d'augmenter considérablement le temps de calcul. Nous proposons donc d'utiliser un noyau avec un support compact [16] (KCS : voir la formule plus bas et la Figure 5) avec  $\varepsilon$  comme paramètre d'échelle (il correspond au paramètre de régularisation dans 11), et  $\gamma$  comme second paramètre : celui qui contrôle la largeur du pic du noyau.

$$\rho_{\varepsilon, \gamma}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} e^{(\frac{\gamma \varepsilon^2}{x^2 - \varepsilon^2} + \gamma)} & \text{si } x^2 < \varepsilon^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (24)$$

Un des problèmes de la régularisation est le choix de l'échelle. En effet, s'il est trop fort, on risque de perdre des détails ; s'il est trop faible, on risque de garder trop de bruit et de fausses branches peuvent apparaître dans l'image aminçie. On note que souvent le paramètre d'échelle est lié au type de l'image à traiter.

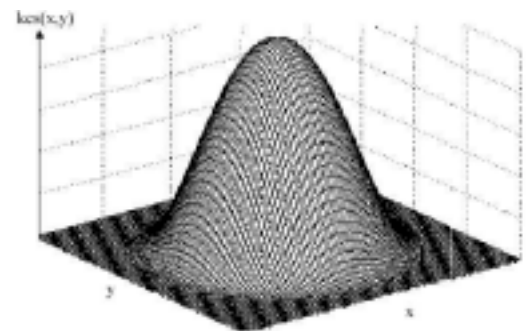


Figure 5. Profil 2D du noyau KCS.

## 5. Résultats et discussion

Toutes les expériences ont été réalisées sur des images appartenant à la base de données du centre CEDAR de Suny at Buffalo<sup>1</sup>, excepté pour deux images : l'une comportant des caractères chinois, l'autre « it could », proviennent de documents extraits du web. On présente des résultats obtenus avec le KCS (5) comme noyau régularisant en faisant varier ses deux paramètres  $\varepsilon$  et  $\gamma$ .

1. <http://www.cedar.buffalo.edu/Databases/>

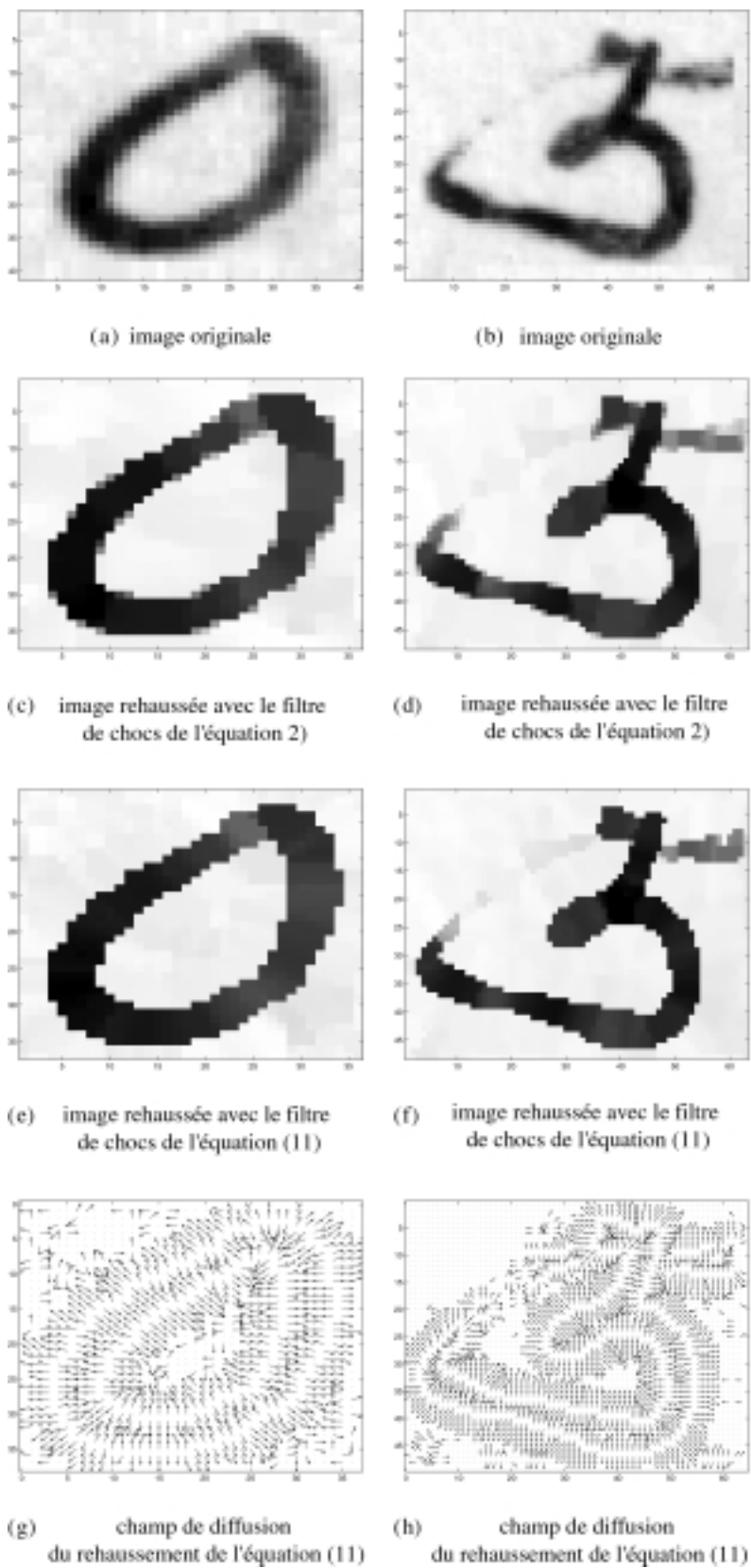


Figure 6. Images rehaussées avec les filtres de chocs (2) et (11), on utilise le même noyau régularisant  $\rho_{3,3}$  de l'équation (5) pour la régularisation de prétraitement.

### 5.1. Le rehaussement

Dans cette partie, nous allons confronter nos résultats à ceux obtenus par le filtre de chocs que nous avons développé dans [16]. En comparant les images réhaussées obtenues par les deux algorithmes, nous remarquons que notre nouveau filtre définit les frontières entre deux régions avec une meilleure précision (Figure 6). En effet, la séparation entre les deux axes de diffusion peut introduire certaines incohérences (images c) et d) de la Figure 6) : pour un pixel sur la frontière d'un objet, le processus peut diffuser un minimum suivant un des axes et un maximum suivant l'autre, alors qu'avec le nouvel algorithme cette incohérence est impossible puisque la diffusion se fait suivant un seul axe. Les contours des objets sont plus arrondis avec le filtre à champ de diffusion (les images e) et f) de la Figure 6). En effet la diffusion suivant les deux axes orthogonaux de [16] favorise ces deux axes.

### 5.2. L'amincissement

Dans un premier temps, nous allons présenter un exemple simple illustrant notre méthode. Puis, nous montrerons l'influence de la régularisation du prétraitement sur l'amincissement et l'importance du choix du noyau régularisant. Ensuite, nous comparerons notre méthode à celle proposée par Chung & Sapiro [7].

#### 5.2.1. Invariance de notre modèle

Nous présentons ici un exemple simple : un caractère *d* auquel nous appliquons des rotations de  $i * \pi/8$  pour  $i \in [1, \dots, 7]$  (les Figures 7 et 8 présentent les résultats pour  $i \in [1, \dots, 6]$ ). Sur les 7 images, on remarque une seule perte de connexité sur l'image 7 e). Cette perte de connexité est dû à un mauvais seuillage de l'algorithme de binarisation de Otsu. En effet, cet algorithme s'applique aux images bimodales (ce qui n'est pas le cas pour nos images), néanmoins il reste très bon dans la plupart des cas. Dans la Figure 8 nous présentons aussi une squelettisation d'une homothétie de rapport 2/3.

#### 5.2.2. Influence du noyau régularisant lors de la phase de pré-traitement

Pour les trois amincissements de l'image 9, on note que le rond du *g* n'est pas fermé. On remarque aussi un point d'accumulation au croisement de la boucle du *C*. L'amincissement par le KCS avec  $\epsilon = 2$  et  $\gamma = 3$  est celui qui donne de meilleurs résultats. Sur les deux autres images, une branche apparaît entre les deux côtés du *a* dû à une régularisation trop forte.

Pour les trois amincissements de l'image 9, on remarque que les apex du *h* sont diminués, la boucle du *t* n'est quasiment pas restituée et le *s* est fermé. Les deux derniers amincissements c) et d) sont nettement meilleurs notamment pour la restitution du premier *o*.

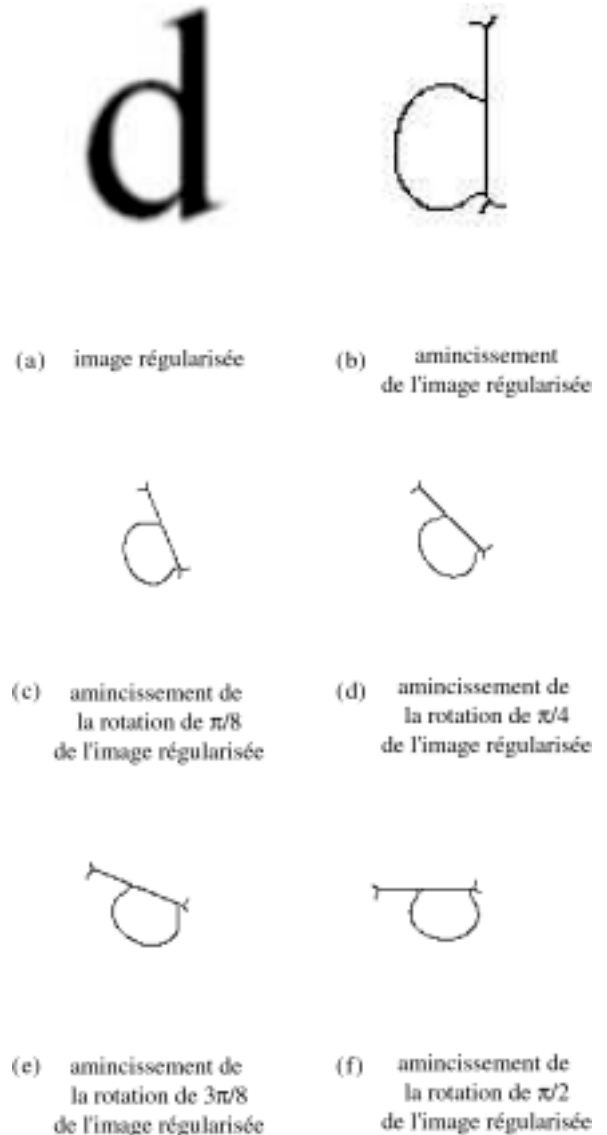


Figure 7. Invariance du modèle.

De l'image 11, on remarque que pour les 3 amincissements l'apex du *h* n'est pas restitué. Les 3 figures donnent plus ou moins le même résultat, on note quand même que l'amincissement avec une régularisation par un KCS de paramètres  $\epsilon = 2$  et  $\gamma = 6$  restitue le mieux la séparation entre le cercle du *g* et sa boucle.

L'amincissement de la Figure (12 b) est assez irrégulier : des débuts de branches apparaissent. Lorsque  $\gamma$  augmente, l'amincissement devient de plus en plus irrégulier Figure 12 c). L'image nécessite donc une régularisation plus forte : en prenant  $\epsilon = 3$ , on obtient un objet aminci sans branche formé par le bruit Figure 12 d).

L'image de la Figure 13 a) n'est pas très régulière : lorsqu'une faible régularisation est appliquée, l'amincissement est très irrégulier et même non connexe 13 b). En prenant  $\epsilon = 4$ , on obtient un amincissement régulier. Néanmoins, on constate que la branche droite du 8 est attirée par le 4. Ces différents exemples

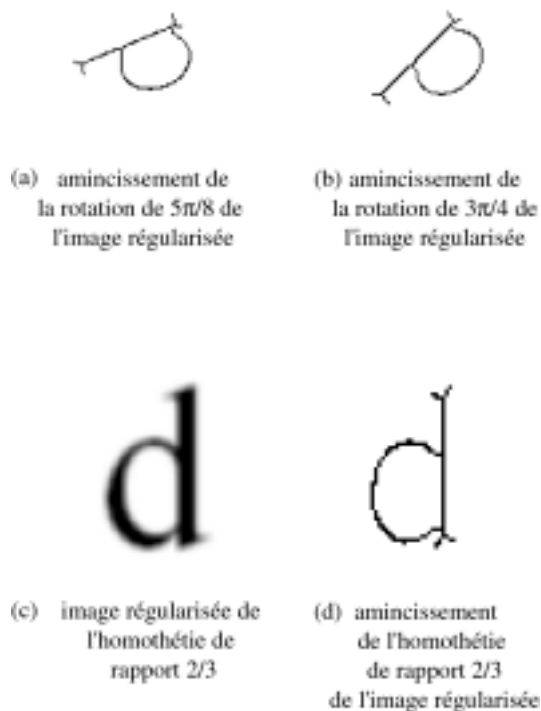


Figure 8. Invariance du modèle.

S

montrent bien l'influence du noyau de régularisation. Pour les images peu bruitées et assez régulières on préférera prendre  $\epsilon = 2$  avec  $\gamma$  assez large ; pour les images bruitées, on augmentera  $\epsilon$  suivant le degré de dégradation de l'image et on gardera  $\gamma = 3$ .



Figure 9. Amincissement d'image avec des paramètres  $\epsilon$  et  $\gamma$  du KCS  $\rho_{\epsilon,\gamma}$  différents lors du prétraitement.

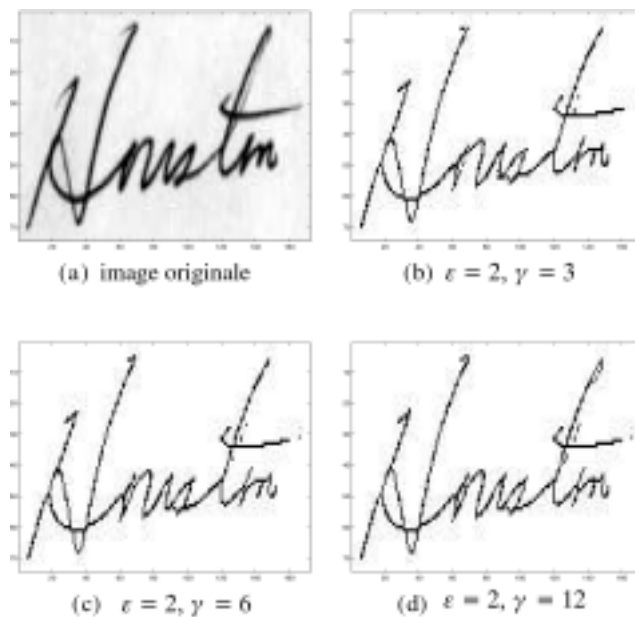


Figure 10. Amincissement d'image avec des paramètres  $\epsilon$  et  $\gamma$  du KCS  $\rho_{\epsilon,\gamma}$  différents lors du prétraitement.

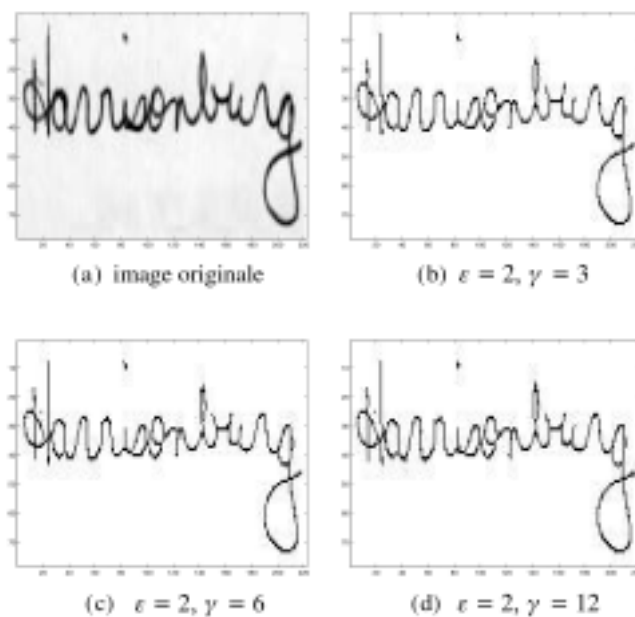


Figure 11. Amincissement d'image avec des paramètres  $\epsilon$  et  $\gamma$  du KCS  $\rho_{\epsilon,\gamma}$  différents lors du prétraitement.

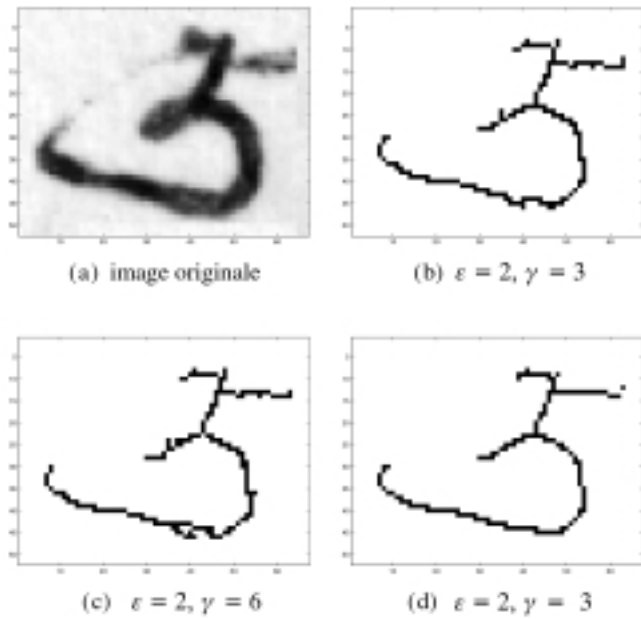


Figure 12. Amincissement d'image avec des paramètres  $\varepsilon$  et  $\gamma$  du KCS  $\rho_{\varepsilon, \gamma}$  différents lors du prétraitement.

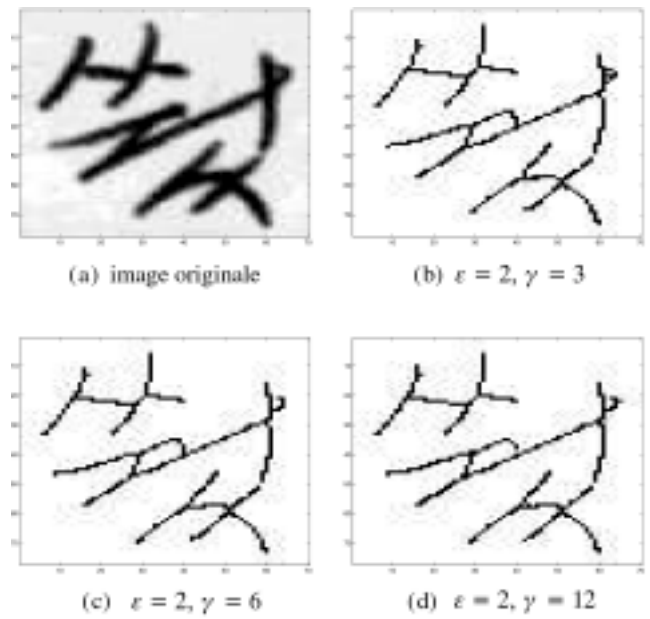


Figure 14. Amincissement d'image avec des paramètres  $\varepsilon$  et  $\gamma$  du KCS  $\rho_{\varepsilon, \gamma}$  différents lors du prétraitement.

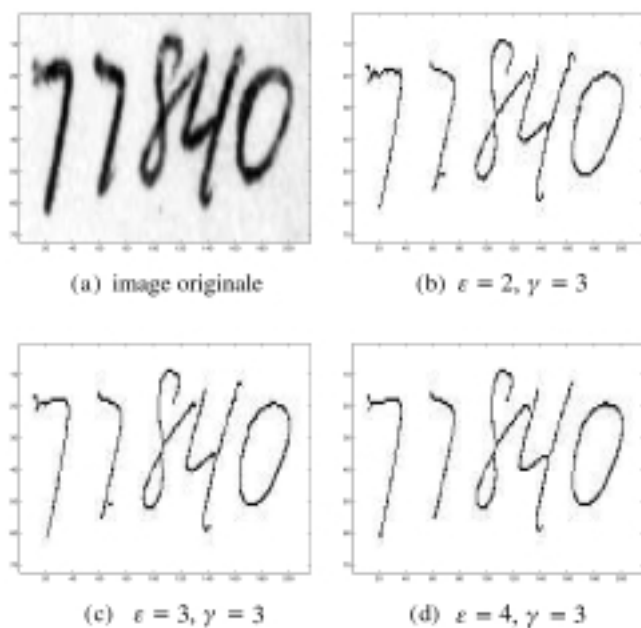


Figure 13. Amincissement d'image avec des paramètres  $\varepsilon$  et  $\gamma$  du KCS  $\rho_{\varepsilon, \gamma}$  différents lors du prétraitement.

### 5.2.3. Comparaison avec la méthode de Chung & Sapiro [7]

#### L'algorithme de Chung & Sapiro

L'amincissement présenté par Chung et Sapiro utilise aussi les équations aux dérivées partielles. Leur algorithme se décompose en trois étapes :

- Prétraitement : L'image est rehaussée par le filtre anisotrope de Perona et Malik [14].
- Le flux de squelettisation : ils utilisent l'EDP associée à l'érosion contrôlée  $u_t = f(u)\|\nabla u\|$ , où  $\nabla u$  est décomposé orthogonalement.
- Post-traitement : Les pixels appartenant au squelette sont détectés à la fin du processus grâce à trois critères :
  - Le seuillage du laplacien
  - Le passage par zéro de la dérivée première
  - Le seuillage de la luminance

#### Comparaison

L'inconvénient majeur de cette méthode est le nombre de paramètres à ajuster pour chaque image et la diffusion orthogonale de l'EDP. Pour la comparaison avec notre méthode (Tables 4 et 5), nous avons ajusté au mieux ces paramètres.

On remarque que le méthode de Sapiro a tendance à créer de fausses branches horizontalement et verticalement dues à la décomposition orthogonale de la diffusion, ceci est surtout visible sur les images 2 et 5 de la Table 4. Notre méthode ne crée pas de telles branches (images 3 et 6 de la Table 4). On note aussi que la perte de la connexité sur certaines images (le *a* et le *g* de *Chicago* ne sont ainsi plus reliés, une ouverture est

apparente dans le *b* de *Harrisonburg*, pour les signes asiatiques une partie de l'amincissement est mal reliée) a totalement disparu avec notre méthode. On constate aussi que l'image amincie que nous proposons semble plus juste. En effet, certaines lettres sont mieux restituées telles que le *g* de *chicago*, le premier *o* de *houston*, une des branches du *t* de *it could* qui avait disparu est bien restituée avec notre méthode.

5.2.4. Les temps de calcul

La plupart de nos tests a été réalisée sur des images 100\*100. Pour le rehaussement notre algorithme converge en plus ou moins dix secondes pour une trentaine d'itérations (avec un processeur qui tourne à 1.5 Ghz (Athlon) et 512 Mo de Ram). Pour l'amincissement il converge en plus ou moins 35 secondes pour

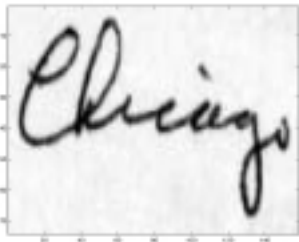
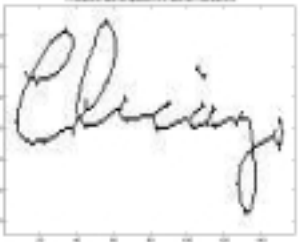
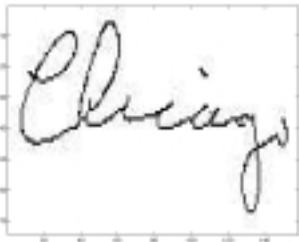



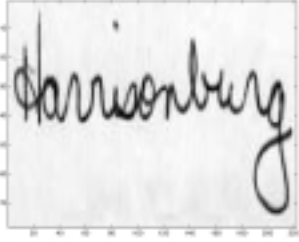
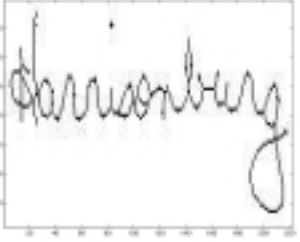
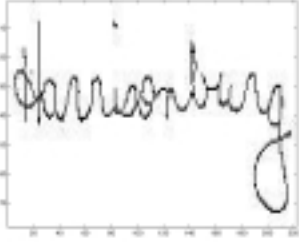



	méthode de Chung & Sapiro	notre méthode
 1) image originale	 2) $iter = 15 \quad \tau_l = 0.8 \quad \tau_i = 200$	 3) $\epsilon = 2 \quad \gamma = 12$
 4) image originale	 5) $iter = 15 \quad \tau_l = 0.4 \quad \tau_i = 175$	 6) $\epsilon = 2 \quad \gamma = 12$
 7) image originale	 8) $iter = 1 \quad \tau_l = 0.9 \quad \tau_i = 190$	 9) $\epsilon = 2 \quad \gamma = 12$
 10) image originale	 11) $iter = 5 \quad \tau_l = 0.5 \quad \tau_i = 160$	 12) $\epsilon = 3 \quad \gamma = 3$

Table 4. Comparaison de la méthode de Chung & Sapito avec la notre, on a indiqué les valeurs des paramètres. Pour la première méthode, *iter*,  $\tau_l$  et  $\tau_i$  sont respectivement le nombre d'itération de la régularisation de prétraitement, le seuil du laplacien et le seuil de luminescence. Pour la deuxième méthode,  $\epsilon$  et  $\gamma$  correspondent aux paramètres du KCS.

une vingtaine d'itérations. Ces résultats ne sont pas optimaux et ceci pour deux raisons : La première est que notre code (sous Matlab) n'a pas encore été bien optimisé. Dans chacune des applications, le code pourrait être davantage spécialisé et optimisé. La seconde est que nous souhaitons obtenir un modèle plus précis que celui de [15] et celui de Chung & Sapiro sans contrainte de temps de calcul. Dans ce sens, notre modèle a été construit comme un complément aux deux autres méthodes pour les applications nécessitant plus de précision.

## 6. Conclusion

Dans ce papier nous avons introduit, à partir d'un modèle de rehaussement, une nouvelle EDP utilisant des champs de diffusion. Le concept de champ de diffusion nous permet d'obtenir un filtre de chocs généralisé de grande qualité. Ainsi des

champs de diffusion spécifiques sont construits pour différentes tâches telles que le rehaussement et l'amincissement, comme nous les avons présentés. L'amincissement que nous présentons a aussi l'avantage d'opérer sur les images à niveaux de gris sans la nécessité d'une segmentation de post-traitement. D'autre part l'amincissement agit simultanément sur différents objets. Les deux applications que nous avons présentées dans cet article ne constitue qu'un échantillon des applications que notre EDP peut réaliser. Les résultats que nous avons obtenus illustrent la capacité de notre modèle à vaincre les principales difficultés (création de fausses branches, perte de connexité ...) que présentent les autres méthodes, incluant celles à base d'équations aux dérivées partielles.

Dans nos prochains travaux nous chercherons à établir la stabilité de notre modèle et à vérifier les différentes conditions présentées dans l'introduction qui permettront de définir notre amincissement en tant que squelette.

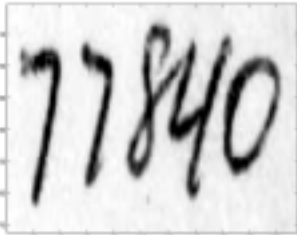
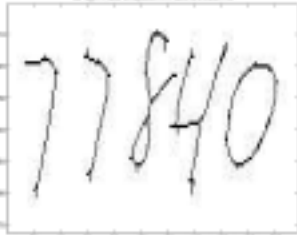
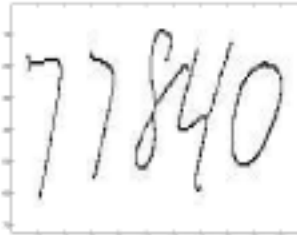



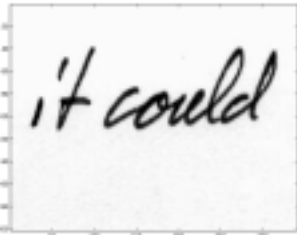
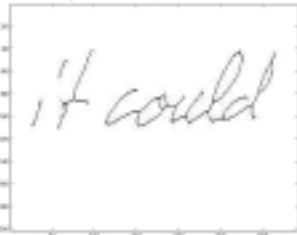
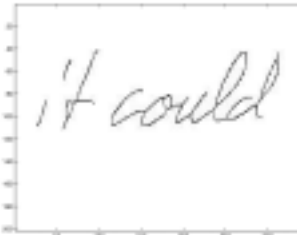
	méthode de Chung & Sapiro	notre méthode
 1) image originale	 2) $iter = 15$ $\tau_l = 0.9$ $\tau_i = 165$	 3) $\epsilon = 4$ $\gamma = 3$
 4) image originale	 5) $iter = 5$ $\tau_l = 0.5$ $\tau_i = 160$	 6) $\epsilon = 2$ $\gamma = 12$
 7) image originale	 8) $iter = 10$ $\tau_l = 0.6$ $\tau_i = 215$	 9) $\epsilon = 3$ $\gamma = 3$

Table 5. Comparaison de la méthode de Chung & Sapiro avec la notre, on a indiqué les valeurs des paramètres. Pour la première méthode,  $iter$ ,  $\tau_l$  et  $\tau_i$  sont respectivement le nombre d'itération de la régularisation de prétraitement, le seuil du laplacien et le seuil de luminosité. Pour la deuxième méthode,  $\epsilon$  et  $\gamma$  correspondent aux paramètres du KCS.

# Références

- [1] L. ALVAREZ, F. GUICHARD, P.L. LIONS, J.M. MOREL, "Axioms and fundamental equations of image processing", *Arch. Rational Mechanics*, Vol. 123, 1993, p. 199-257.
- [2] H. BLUM, "Biological shape and visual science", *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 38, 1973, p. 205-287.
- [3] M. CHERIET, J.N. SAID, C.Y. SUEN, "A Recursive Thresholding Technique for Image Segmentation", *IEEE Transaction on Image Processing*, Vol. 7, #6, 1998, p. 918-921.
- [4] M. CHERIET, J.C. DEMERS, S. DEBLOIS, "Shock filter-Based Diffusion Fields-Application to Grayscale Character Image Processing", (*In press*) *International Journal of Image and Graphics (SI)*, Vol. 5, #1, Invited Paper, 2004, p. 209-246.
- [5] M. CHERIET, L. REMAKI, "Enhanced and restored signals as a generalized solution for shock filter models. Part II - Numerical study", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 279, 2003, p. 398-418.
- [6] G. Sanniti DI BAJA, I. NYSTRÖM, "2D Grey-level Skeleton Computation: A Discret 3D Approach", *17th International Conference on Pattern Recognition(ICPR'04)*, Vol. 2, Août 2004, p. 455-458.
- [7] D.H. CHUNG, G. SAPIRO, "Segmentation-free skeletonization of gray-scale images via pde's", *ICIP00 International Conference on Image Processing*, Vol. 2, Septembre 2000, p. 927-930.
- [8] J.J. KOENDERINK, "The Structure of Images", *Biological Cybernetics*, Vol. 53, 1984, p. 363-370.
- [9] P.C.K. KWOK, V. RANJAN, "A Survey of 3-D Thinning Algorithms", *vision interface '91*.
- [10] L. LAM, S.W. LEE, C.Y. SUEN, "Thinning Methodologies-A comprehensive survey", *IEEE Trans. on Patt. Anal. and Mach. Intell.*, Vol. 14, #9, 1992, p. 869-885.
- [11] C.W. NIBLACK, P.B. GIBBONS, "Generating Skeletons and Centerlines from the Distance Transform", *CVGIP: Graphical Models and image processing*, Vol. 54, #5, Septembre 1992, p. 420-437.
- [12] S. OSHER, L. RUDIN, "Feature Oriented Image Enhancement Using Shock Filters", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 27, 1990, p. 919-940.
- [13] N. OTSU, "A Threshold Selection Method from Grey-Level Histograms", *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-8, 1978, p. 62-66.
- [14] P. PERONA, J. MALIK, "Scale space and edge detection using anisotropic diffusion", *Proc. IEEE comp. Soc. Workshop on computer vision*, Miami beach, Novembre 1987, IEEE Computer Society Press, Washington, 1987, p. 16-22.
- [15] L. REMAKI, M. CHERIET, "Numerical Schemes of Schock Filter Models for Image Enhancement and Restoration", *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 18, Vol. 2, 2003, p. 129-143.
- [16] L. REMAKI, M. CHERIET, "Kcs-New Kernel Family with Compact Support in Scale Space: Formulation and Impact", *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 9, #6, 2000, p. 970-981.
- [17] L. REMAKI, M. CHERIET, "Enhanced and restored signals as a generalized solution for shock filter models. Part I - Existence and uniqueness result of the Cauchy problem", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 279, #1, 2003, p. 189-209.
- [18] H. TALBOT, L. VINCENT, "Euclidean Skeletons and Conditional Bisectors", *Visual Communications and image processing'92, SPIE*, Vol. 1818, p. 862-876.
- [19] X.G. YOU, Y.Y. TANG, L. SUN, "Skeletonization of Ribbon-like Shapes With New Wavelet Function", *Proc. of the first Inter. Conf. on Machine learning and Cybernetics*, Vol. 25, #9, 2003, p. 1118-1133.
- [20] Z. YU, C. BAJAJ, "A Segmentation-Free Approach for Skeletonization of Gray-Scale Images via Anisotropic Vectors Diffusion", *Proc. of 2004 IEEE Inter. Conf. on Comp. Vision and Patt. Recognition (CVPR'04)*, Washington DC, Juin 2004, p. 1063-1069.



Mohamed Cheriet

Mohamed Cheriet a reçu son degré d'ingénieur d'état en informatique de l'Université USTHB d'Alger en 1984, de DEA et de Doctorat, également en informatique, de l'Université de Paris 6 (Pierre et Marie Curie) en 1985 et 1988 respectivement. De 1988 à 1990, il a travaillé en tant qu'associé de recherche au laboratoire de LAFORIA/CNRS à l'École des Ponts et Chaussées de Paris. Il a ensuite rejoint CENPARMI (Centre pour la reconnaissance des formes et de machines intelligentes) de l'Université de Concordia à Montréal, où il a travaillé en tant que stagiaire post-doctoral pendant deux années. Il a été nommé professeur adjoint en 1992, professeur agrégé en 1996 et professeur titulaire en 1998, au département de génie de la productique automatisée de l'École de Technologie Supérieure (ETS) à Montréal. Il est aussi le directeur du laboratoire LIVIA (laboratoire d'imagerie, de vision, et d'intelligence artificielle) de l'ETS depuis 2000. La recherche de Dr. Cheriet se concentre sur les modèles mathématiques de traitement d'image (EDPs, théorie variationnelle, filtres multi-échelles à support compact), la reconnaissance de caractères, l'analyse et la reconnaissance de documents manuscrits, et la perception. Dr. Cheriet est un membre sénior de IEEE et un membre actif de CENPARMI. Il a publié plus de 150 articles dans des actes de conférences internationales et dans des journaux de renom. Dr. Cheriet est très actif sur la scène internationale. Il a servi comme président et coprésident de plusieurs conférences internationales : Vision Interface'98&2000, IWFHR'2002&2008, et comme coprésident des arrangements locaux d'ICDAR'95 et IJCNN'2005. Dr. Cheriet est Éditeur Associé du journal IJPRAI « The International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence ».



Vincent Doré

Vincent Doré a reçu son DEA MVA (mathématiques, vision et apprentissage) à l'École Normale Supérieure de Cachan en 2003. Il est, depuis janvier 2005, doctorant au sein du laboratoire LIVIA à l'École de Technologie Supérieure (ÉTS) de Montréal.