

# Conception d'une nouvelle famille de noyaux séparables à support compact appliqués à l'extraction des données visuelles manuscrites

Design of a new family of separable kernels with compact support applied to handwritten visual data extraction

**Ezzedine Ben Braiek<sup>1</sup>, Mohamed Cheriet<sup>2</sup> et Vincent Doré<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Laboratoire CEREP - E.S.S.T.T - Tunis - Tunisie.  
ezzedine.benbraiek@esstt.rnu.tn

<sup>2</sup>Laboratoire d'Imagerie, de Vision et d'Intelligence Artificielle - E.T.S - Montréal - Canada  
cheriet@livia.etsmtl.ca, vincent@livia.etsmtl.ca

Manuscrit reçu le 27 décembre 2005

Résumé et mots clés

L'extraction des données pertinentes contenues dans des images de documents bruitées, en niveaux de gris, avec des fonds variables et compliqués comme les documents postaux, les chèques bancaires, les documents d'affaires, etc. demeure un problème majeur dans le domaine de la reconnaissance des caractères et de l'écriture. À travers ces dernières décennies, des outils mathématiques ont été développés à ce propos. La plupart des auteurs ont montré que le noyau Gaussien est unique et offre des propriétés très bénéfiques. Dans leurs récents travaux Remaki et Cheriet [1] proposent un nouveau noyau à support compact (KCS) et multi échelle. Ce noyau possède de très grandes performances, il permet l'extraction de l'information avec une très grande précision, tout en réduisant énormément le temps de calcul par rapport au noyau Gaussien. Dans cet article, nous comptons améliorer davantage l'efficacité de ce noyau en proposant une nouvelle version séparable de famille de noyaux à support compact, appelée (SKCS). Des essais sur des images réelles, correspondantes à des écritures manuscrites ont montré les performances et la rapidité des calculs du noyau considéré. Une étude comparative des résultats obtenus par le KCS et le SKCS a été établie. Cette étude est basée sur la perte de l'information et le gain en temps de calcul.

**Noyau à support compact, Noyau séparable, Représentation multiéchelle, Segmentation d'image, Extraction de données manuscrites.**

Abstract and key words

Extraction of pertinent data from noisy gray level document images with various and complex backgrounds such as mail envelopes, bank checks, business forms, etc... remains a challenging problem in character recognition applications. It depends on the quality of the character segmentation process. Over the last few decades, mathematical tools have been developed for this purpose. Several authors show that the Gaussian kernel is unique and offers many beneficial properties. In their recent work Remaki and Cheriet proposed a new kernel family with compact supports (KCS) in scale space that achieved good performance in extracting data information with regard to the Gaussian kernel. In this paper, we focus in further improving the KCS efficiency by proposing a new separable version of kernel family namely (SKCS). This new kernel has also a compact support and preserves the most important properties of the Gaussian kernel in order

to perform image segmentation efficiently. A practical comparison is established between results obtained by using the KCS and the SKCS operators. Our comparison is based on the information loss and the gain in time processing.

Kernel with compact support, Separable kernel, Multiscale representation, Image segmentation, Extraction of handwritten data.

## 1. Introduction

La plupart des systèmes de reconnaissance de l'écriture manuscrite peuvent identifier des caractères écrits noir sur fond blanc ou vice versa. Cependant, les données manuscrites se présentent généralement sous différentes tailles, avec des distances variables et des changements d'intensité se produisant sur une large échelle. Ces données sont généralement représentées sur un fond avec des symboles uniformément distribués. On peut citer à titre d'exemples, les chèques postaux ou bancaires, les lettres postales, les documents d'affaires, etc. Lors de son traitement, il n'est pas facile pour un ordinateur de différencier les informations pertinentes et les symboles du fond de l'image. Il en résulte alors une perte importante d'informations, avec des caractères discontinus, en présence de bruit et d'autres données inutiles. Ainsi, les formes visuelles des caractères manuscrits sont très importantes pour la phase de reconnaissance. Cette phase dépend largement de la façon dont ces caractères ont été extraits. Il est nécessaire donc d'effectuer des procédures de prétraitement afin d'extraire convenablement l'information utile avant d'appliquer l'algorithme de reconnaissance [14].

À travers ces dernières décennies, la segmentation de l'écriture manuscrite est devenue un sujet de très grande envergure ; plusieurs travaux ont exprimé le besoin d'améliorer la qualité de l'image et de réduire le temps de calcul [22-11]. Dans ce but, plusieurs outils mathématiques ont été développés, la représentation multi-échelle a reçu un intérêt considérable grâce à son efficacité dans la description des structures du monde réel [20]. Il a été montré que le concept d'échelle est crucial pour décrire la structure des images connues ; comme il en sera le cas dans notre application.

## 1. La représentation de l'espace des échelles

Plusieurs représentations multi-échelles ont été proposées comme le quad-trees par Klinger [21], la représentation pyra-

midale par Burt [18] et Crowley [19] ainsi que la représentation de l'espace d'échelles par Witkin [3] et Koenderink [2]. Toutes ces approches sont considérées comme des cas particuliers de la décomposition en ondelettes. L'idée principale de la représentation de l'espace d'échelles est d'intégrer le signal d'origine dans une famille de signaux filtrés, à un seul paramètre, dans lequel les détails fins sont successivement supprimés.

Dans la représentation de l'espace d'échelles, il s'agit de filtrer l'image par un certain noyau de convolution qui consiste à projeter le signal dans une base de fonctions obtenues par translation et dilatation d'une seule fonction appelée ondelette. La représentation de Witkin et Koenderink est largement utilisée dans plusieurs applications parce qu'elle permet d'obtenir une interprétation très précise et un traitement très pratique du concept de l'espace d'échelles. Il a été montré que sous une hypothèse donnée, le choix de la Gaussienne est unique et offre des propriétés très bénéfiques (pour plus de détails voir [1]). Malheureusement le noyau Gaussien présente deux limitations pratiques : la perte d'informations due à la troncature de la Gaussienne et le temps de calcul prohibitif dû à la taille du masque. Dans une récente publication, Remaki et Cheriet [1] ont proposé une nouvelle famille de noyaux à support compact (KCS), qui dérivent de la Gaussienne et qui sont capables de couvrir la perte d'information tout en réduisant d'une façon impressionnante le temps de calcul.

## 2. Revue du noyau Gaussien

### 2.1. Introduction

Dans la représentation multi-échelle, l'espace d'échelles est généralement généré par le noyau Gaussien où un produit de convolution est appliqué à chaque échelle. Il a été montré par Badaut *et al.* [7] que le noyau gaussien est le seul, parmi une large classe de fonctions, qui satisfait les conditions de l'espace d'échelles.

## 2.2. Rappel du noyau Gaussien

Marr et Helderith ont été les premiers à introduire les masques de convolution «Laplacien de la Gaussienne» (LOG)[4]. Puisque la dérivée seconde d'un tel noyau est considérée comme le critère de décision, dans l'espace d'échelles; on commence par rappeler la fonction LOG [5-9-23].

On pose:  $g_s(x,y)$  la distribution 2D de la Gaussienne d'écart type  $\sigma$ .

$$g_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (1)$$

Cet opérateur est défini par la convolution de l'image avec le LOG.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ainsi :

$$LoG_\sigma = \nabla^2 g_\sigma(x,y) = -\frac{1}{\pi\sigma^4} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (2)$$

La largeur du pic de la Gaussienne dépend de son écart type  $\sigma$ . Plus  $\sigma$  est grand, plus la taille du noyau doit être grande pour que celui-ci couvre le maximum du pic de la Gaussienne. Il s'avère qu'un filtre de taille  $[5,2\sigma] + 1$ , où  $[]$  désigne la partie entière, tend à couvrir juste 99% de l'aire de la Gaussienne au moins pour  $\sigma < 25$ . Si  $\omega = 2\sqrt{2}\sigma$  est la largeur de la région centrale ou région excitatrice de l'opérateur, alors la taille du masque doit être dans la gamme  $[3\omega, 4\omega]$  pour avoir un compromis entre la taille du masque et les performances de l'opérateur [4-9]. La précision des opérateurs LOG est expliquée largement dans [13] et [14] et étudiée en détail dans [9]. Les différents paramètres de l'opérateur sont illustrés dans la figure 2. Les profils 1D et 2D du filtre LOG sont montrés dans la figure 1.

## 2.3. Propriétés de la Gaussienne

Le choix du noyau Gaussien est unique et offre des propriétés bénéfiques comme : la propriété de semi groupe qui permet sa représentation à une échelle donnée, à partir de n'importe quelle échelle. Un changement linéaire du paramètre d'échelle garantit la propriété d'invariance, à un changement de variable près

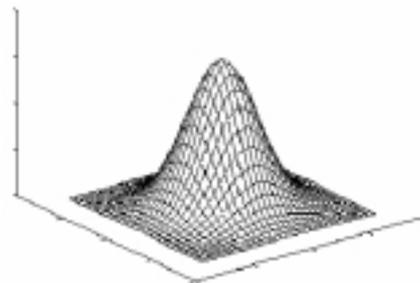
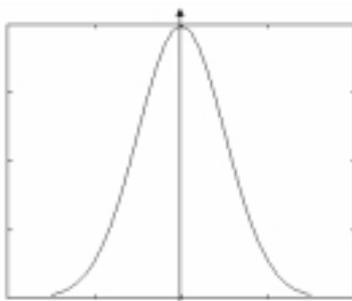


Figure 1. La fonction Gaussienne 1-D.

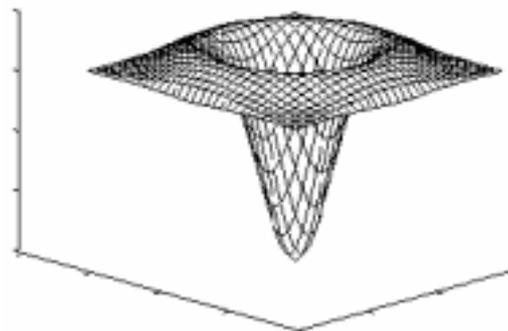
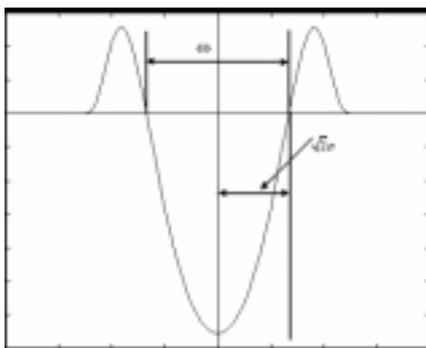


Figure 2. La fonction Laplacien de la Gaussienne 2D (LOG).

dans le domaine spatial. La convolution de la Gaussienne avec n'importe quelle condition initiale bornée, donne la solution unique de l'équation de diffusion [20]. L'une des propriétés essentielles du noyau Gaussien est sa séparabilité; cette propriété, spécifique à certains masques, rend le noyau simple d'utilisation et permet un gain énorme en temps de calcul.

#### 2.4. Limitations pratiques du noyau Gaussien

La précision du calcul dépend de la taille du masque. Des grands masques donnent des résultats précis mais ils augmentent le temps de calcul; les masques de petites tailles réduisent le temps de calcul mais la précision est parfois sévèrement atténuée ce qui a pour effet d'introduire des pertes d'informations. Ainsi deux limitations pratiques fondamentales du noyau gaussien peuvent être soulevées: la perte d'informations due à la troncature du noyau et le temps de calcul prohibitif dû à la taille du masque qui doit être le plus large possible pour augmenter la précision. Quelques solutions ont été proposées dans la littérature pour surmonter ces problèmes comme l'approximation de la gaussienne par des filtres récursifs ou l'utilisation des fonctions exponentielles tronquées à la place du noyau gaussien [8]. Toutes ces solutions approximent le noyau gaussien et permettent une réduction du temps de calcul mais la perte d'informations persiste toujours et elle se trouve parfois augmentée.

Dans le but de réduire la taille du masque et de surmonter la perte d'informations, Remaki et Cheriet ont proposé dans [1] une nouvelle famille de noyaux, à support compact, qui dérivent de la Gaussienne et qu'ils ont appelés KCS (Kernel with Compact Support) pour générer l'espace d'échelles dans la représentation multi-échelle.

### 3. Rappel sur la construction et la formulation du KCS

Sans contredire l'unicité de la gaussienne et tout en préservant ses plus importantes et utiles propriétés, requises pour effectuer convenablement la segmentation de l'image, Remaki et Cheriet ont proposé une nouvelle famille à support compact (KCS). Ce noyau a été introduit dans le but de couvrir la perte d'informations et pour réduire le temps de calcul prohibitif quand le noyau gaussien est utilisé dans la représentation de l'espace d'échelles [2-3]. Ils montrent qu'avec le KCS il n'est plus nécessaire de tronquer le noyau quand le temps de calcul est contrôlé car le masque est lui-même le support du noyau. Ainsi la taille du masque est réduite de  $11,32 \sigma$  pour le noyau gaussien à  $2\sigma$  pour le KCS. La construction, la formulation et l'analyse du KCS sont représentées en détail dans [1].

#### 3.1. Formulation du KCS

La famille de noyau à support compact est obtenue par transformation topologique de l'espace  $\mathcal{R}^2$  en une boule ouverte de rayon unitaire, par un changement de variables. Cette transformation a pour effet de grouper toute l'information dans la boule unitaire. Ainsi, avec les nouvelles variables, la Gaussienne sera étendue à tout l'espace  $\mathcal{R}^2$  en prenant des valeurs nulles en dehors de la boule.

L'expression générale du noyau KCS est donnée ci-dessous.

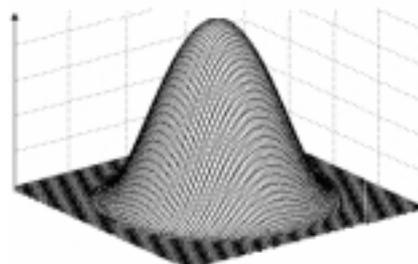
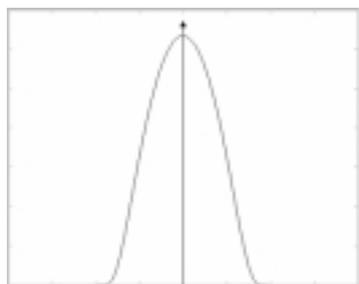


Figure 3. Profils 1D et 2D du noyau KCS.

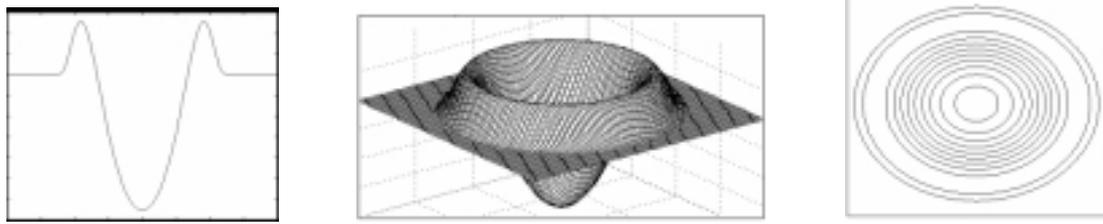


Figure 4. Profils 1D et 2D et le contour du Laplacien du KCS (LoKCS).

$$\rho_{\sigma,\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{C_{\gamma}\sigma^2} e^{\gamma\left(\frac{\sigma^2}{x^2+y^2-\sigma^2}+1\right)} & \text{si } x^2 + y^2 < \sigma^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

où,  $\sigma$  et  $\gamma$  sont respectivement l'écart type et le paramètre qui contrôle la largeur du pic du noyau.

Il est très important de mentionner que le paramètre  $\gamma$  contrôle la distance entre les zéros du KCS et l'origine des axes. Il n'affecte pas la nature des fonctions  $\rho_{\sigma,\gamma}$ , elles demeurent des noyaux à support compact. De plus, si  $\gamma = 2$ , les caractéristiques désirées sont garanties, ce qui signifie que la première et la seconde dérivée ont le même comportement que la Gaussienne. Les profils 1D et 2D du KCS sont représentés sur la figure 3.

Le critère de décision pour la segmentation des données [6] est la détection des parties convexes du signal filtré à chaque échelle, qui conduit à l'extraction des formes visuelles. Il est déterminé par le zéro de la dérivée seconde de l'opérateur. Il est défini par le produit de convolution de l'image avec le Laplacien du KCS qui est donné par la formule suivante :

$$\text{LoKCS} = \nabla^2 \rho_{\sigma,\gamma}(x, y) =$$

$$\begin{cases} \frac{2\gamma}{\pi} \left[ \frac{(x^2 + y^2)^2 + \gamma\sigma^2(x^2 + y^2) - \sigma^4}{(x^2 + y^2 - \sigma^2)^4} \right] e^{\left(\frac{\gamma\sigma^2}{x^2+y^2-\sigma^2}+\gamma\right)} & \text{si } x^2 + y^2 < \sigma^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

La coupe de la fonction LoKCS est donnée sur la figure suivante (figure 4).

### 3.2. Caractéristiques du KCS

Le principal but dans la construction de la famille de noyaux KCS est de donner une réponse effective aux deux problèmes posés par l'utilisation du noyau Gaussien : les pertes d'information dues à la troncature du noyau Gaussien et le temps de calcul prohibitif dû à la taille du masque. Les auteurs ont montré dans [25] que le noyau KCS garde les plus importantes propriétés du noyau Gaussien (relatives à la segmentation de l'image)

mais pas celles qui rendent manifestement le noyau Gaussien unique. Les propriétés d'un signal convolé avec le KCS sont les suivantes :

- i) le recouvrement du signal initial lorsque le paramètre d'échelle tend vers zéro; condition nécessaire pour construire l'espace d'échelles.
- ii) Continuité par rapport au paramètre échelle.
- iii) La forte régularisation.
- iv) La diminution du nombre de zéros suivant les échelles : cette propriété n'a pas encore été prouvée mais des tests effectués sur un grand nombre de fonctions bruitées montrent que cette propriété est en général conservée. Toutefois la diminution de la variation totale suivant les échelles a été montrée.

### 3.3. Remarques

Nous avons rappelé précédemment comment en dériver une nouvelle famille de noyau (KCS) pour générer l'espace d'échelles. Nous avons apprécié les caractéristiques du KCS et son efficacité de recouvrement de la perte d'informations et la réduction du temps de calcul par rapport au noyau Gaussien. La question qui se pose maintenant est comment peut-on améliorer davantage les caractéristiques du KCS afin d'augmenter ses performances? Pour cela, nous proposons une nouvelle version séparable du KCS appelé SKCS (Separable Kernel with Compact Support).

## 4. Version séparable du KCS

### 4.1. Introduction

Comme on le voit, la formule précédente (3) du KCS n'est pas séparable. Cependant le produit de deux KCS-1D en x et en y, nous permet d'obtenir, une nouvelle forme d'opérateur 2D.

Pour concevoir ce nouveau noyau, on définit une implémentation basée sur la forme de la décomposition du Laplacien du KCS, sous forme d'une somme de 2 filtres 1D.

#### 4.2. Construction du SKCS

La version séparable du KCS est définie comme le produit de noyaux KCS monodimensionnels [17]. Pour exprimer cette nouvelle version de noyaux, nous commençons par rappeler la formule du noyau générateur de la famille KCS-1D :

$$\rho_\gamma(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{C_\gamma} e^{\gamma(\frac{1}{x^2-1}+1)} & \text{si } x^2 < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

Avec :  $C_\gamma$  : la constante de normalisation  
 $\gamma$  : le paramètre qui contrôle la largeur du noyau.

Ainsi, nous construisons le noyau générateur de la famille du SKCS par la formule suivante :

$$SKCS(x,y) = \Phi(x,y) = \rho(x) \cdot \rho(y)$$

Soit,



$$\Phi_\gamma(x,y) = \frac{e^{2\gamma}}{C_\gamma^2} e^{\frac{\gamma}{x^2-1}} e^{\frac{\gamma}{y^2-1}} \quad (6)$$

On définit maintenant la famille des noyaux SKCS par :

$$\Phi_{\sigma,\gamma}(x,y) = \frac{1}{\sigma^2} \Phi_\gamma\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{y}{\sigma}\right) \quad (7)$$

qui donne :

$$\Phi_\gamma(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{\gamma(\frac{\sigma^2}{x^2-\sigma^2})} e^{\gamma(\frac{\sigma^2}{y^2-\sigma^2})} & \text{si } x^2 < \sigma^2 \text{ et } y^2 < \sigma^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8)$$

Avec  $\lambda = \frac{e^\gamma}{C_\gamma \sigma}$ , où,  $C_\gamma = \int_{-1}^1 e^{\frac{\gamma}{x^2-1}} dx$  qui est la constante de normalisation. D'un point de vu pratique et parce que le domaine d'intégration est borné, l'intégration numérique per-

met de donner une bonne approximation de  $C_\gamma$ . En effet, si  $N$  est le nombre de points du processus de discrétisation alors :

$$C_\gamma = \Delta x \sum_{i=0}^N e^{\frac{\gamma}{x_i^2-1}} \text{ où } x_i = (-1 + i \Delta x) \text{ et } \Delta x = (2/N).$$

Pour les expérimentations de la partie 5, nous avons gardé le paramètre  $\gamma$  constant et fait seulement varier  $\sigma$ .  $C_\gamma$  prend alors une seule valeur au cours du processus. Toutefois, certaines applications peuvent nécessiter de faire varier le paramètre  $\gamma$  au cours du traitement, nous proposons donc comme dans [1] un algorithme rapide pour calculer  $C_\gamma$  à partir de  $C_{\gamma_0}$  et de  $C_{\gamma_1}$  pour des valeurs données de  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ .

**Proposition :** Si  $h(\gamma)$  est la solution de l'équation de second ordre suivante :

$$h''(\gamma) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\gamma}\right) h(\gamma) = 0, \quad \gamma \in [\gamma_0, +\infty[$$

Alors  $C_\gamma = h(\gamma)e^{\gamma/2}$  (preuve: voir [1])

En utilisant l'expansion de Taylor au second ordre, on discrétise l'équation précédente

$$\begin{cases} h_{i+1} = \left(\Delta\gamma^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\gamma_i}\right) + 2\right) h_i + h_{i-1} \\ h_0 = C_{\gamma_0}, \quad h_1 = C_{\gamma_1} \end{cases} \quad (9)$$

où  $\Delta\gamma$  est le pas de  $\gamma$  et  $\gamma_i = \gamma_0 + i\Delta\gamma$ . On obtient ainsi  $C_{\gamma_i} = h_i e^{\frac{\gamma_i}{2}}$  pour toutes les valeurs de  $\gamma$  en un nombre minimum d'opérations.

La figure 5 montre les profils 1D et 2D du SKCS.

Comme le KCS, le SKCS présente le même comportement que le noyau Gaussien. Toutefois, le Laplacien du SKCS montre, pour  $\gamma = 1$ , un nouveau maximum à l'origine (voir figure 6). Mais, on peut facilement montrer (en adoptant les mêmes arguments qu'en [1]) que si  $\gamma > 2$ , les dérivées première et seconde du SKCS présentent le même comportement que le noyau Gaussien, e.g. la convolution avec le SKCS n'introduit aucun nouvel extremum.

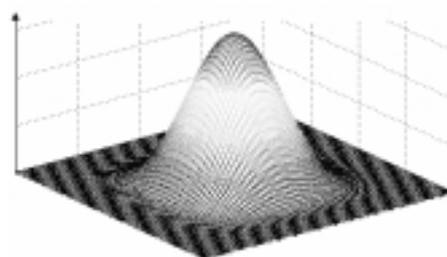
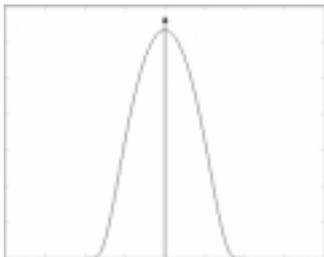


Figure 5. Profils 1D et 2D du noyau SKCS.

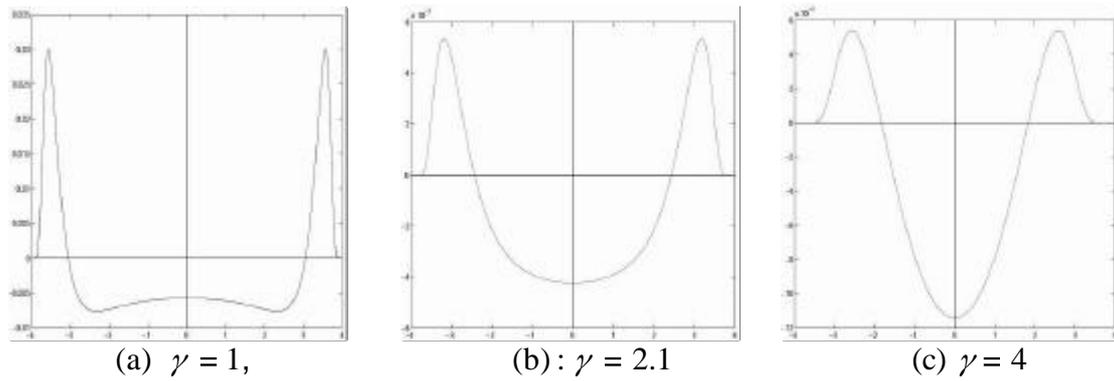


Figure 6. Influence du paramètre  $\gamma$  sur la distance entre les extrema du LoSKCS, pour  $\sigma = 4$ .

Le paramètre  $\gamma$  du KCS contrôle la distance entre le passage par zéro du Laplacien du KCS et l'origine des axes. Pour le SKCS,  $\gamma$  contrôle la distance  $\alpha$  à partir de l'origine des axes à la ligne représentant le passage par zéro du Laplacien du SKCS tout le long de l'un des deux axes. Par conséquent, pour certaines applications, deux paramètres  $\gamma_x, \gamma_y$  peuvent être utilisés. Ces paramètres, contrôlent respectivement les distances  $\alpha_x$  et  $\alpha_y$  (voir figure 7). Comme dans le cas du KCS monodimensionnel, si  $\gamma = \left(\frac{n^2}{2} - \frac{3}{2n^2} + 1\right)$  alors pour tous les  $\sigma$ ,  $\delta \approx \frac{\sigma}{n}$ ,  $n$  étant un réel (preuve: voir [1]). Ceci implique que pour  $n$  fixé,  $\gamma$  est fixé aussi et ne dépend pas de la valeur de  $\sigma$ .

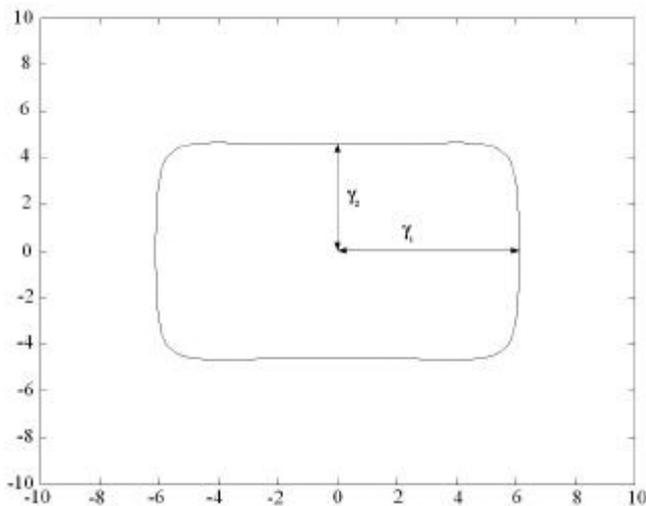


Figure 7. Support du SKCS pour  $\sigma = 10$  et les deux paramètres  $\gamma_1 = 2.1, \gamma_2 = 4$ .

### 4.3. Les propriétés importantes du SKCS

Du moment que notre intérêt principal, dans la construction du noyau SKCS, est de préserver les plus importantes propriétés du noyau Gaussien dans le but d'améliorer efficacement la seg-

mentation d'images. Il est donc important de vérifier que le SKCS satisfait les propriétés suivantes.

1. Le recouvrement du signal original quand le paramètre échelle s'approche de zéro.

Il a été montré dans [1] que le noyau KCS monodimensionnel  $\rho_\gamma$  appartient à  $D(\mathfrak{R})$ . De la même façon, le noyau SKCS  $\varphi_\gamma$ , est le produit de deux noyaux KCS-1D, il appartient donc à  $D(\mathfrak{R}^2)$ . L'équation (7) implique que  $(\varphi_{\sigma,\gamma})_\sigma$  est une suite de fonctions régularisantes. Une telle suite vérifie  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{R}^2} |(\varphi_{\sigma,\gamma} * f - f)|^p d\mu = 0$  pour  $f \in L^p(\mathfrak{R}^2)$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . L'extension d'une image  $f$  par 0 sur tout le plan  $\mathfrak{R}^2$  est  $L^p(\mathfrak{R}^2)$  pour  $1 \leq p \leq +\infty$ . Ceci assure le recouvrement de l'image originale quand  $\sigma$  tend vers zéro [15].

2. La continuité et la régularisation

Par sa construction, à partir du KCS-1D, le SKCS admet les mêmes propriétés de continuité et de régularisation: e.g :

- La représentation de l'espace d'échelles est continue à l'égard du paramètre d'échelle  $\sigma$ . Ce qui implique que  $\Phi_{\gamma,\sigma} * f$  est continue en  $\sigma$ .

- Comme le SKCS est situé dans l'espace des noyaux régularisants, alors sa convolution avec l'image est située dans l'espace  $C^\infty(\mathfrak{R}^2)$ .

3. Principe d'incertitude d'Heisenberg (H.u.p)

Le SKCS-1D étant par construction le KCS-1D, alors la même propriété s'applique pour ces deux noyaux: quand  $\gamma$  croît, le H.u.p. décroît rapidement et tend vers  $1/4\pi$ , qui correspond à la valeur optimale atteinte par le noyau Gaussien [16].

### 4.4. Remarques importantes

Rappelons encore qu'en une dimension les noyaux KCS et SKCS sont les mêmes, ils ont donc le même comportement

(voir figures 3 et 5). Mais en deux dimensions, du fait que le SKCS soit séparable, son support est le produit des supports des deux KCS-1D qui le constituent. Lorsque le paramètre d'échelle est le même pour ces deux noyaux 1D, le support du SKCS est carré. Cette forme implique obligatoirement que tous les pixels situés à la frontière du noyau ne sont pas équidistants de son centre. Dans ce cas, l'information située au niveau des diagonales peut être privilégiée par rapport au reste. Seulement, nous avons remarqué que le nombre de pixels situés en dehors du cercle de rayon  $\sigma$  ne présentent que 3% du poids total des coefficients. Ainsi, dans le processus de convolution avec l'image, l'information prise en compte par la partie extérieure au cercle de rayon  $\sigma$  n'a qu'une très faible influence sur le résultat final. De plus, les niveaux de plus forts poids sont les plus proches du centre du noyau et sont aussi de forme circulaire comme ceux du KCS (voir figure 8). Sur cette figure, nous avons présenté l'image différence KCS-SKCS, avec les mêmes valeurs de  $\gamma$  et  $\sigma$ . Nous pouvons remarquer que les poids du SKCS sont plus importants au niveau des sommets du carré alors que les poids

les plus importants, pour le KCS-SKCS, sont localisés au centre du noyau, les lignes de niveau forment à cet endroit des losanges.

#### 4.5. Détermination de Laplacien du SKCS

Dans notre application on s'intéresse au Laplacien du SKCS (LoSKCS), on procède comme précédemment :

$$LoSKCS = \nabla^2 \Phi_{\sigma,\gamma}(x,y)$$

En réécrivant la formule du SKCS-2D sous la forme suivante :

$$\Phi_{\sigma,\gamma}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{h(x)} e^{h(y)} & \text{si } x^2 < \sigma^2 \text{ et } y^2 < \sigma^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$

Avec

$$h(s) = \frac{\gamma \sigma^2}{(s^2 - \sigma^2)} \quad (11)$$

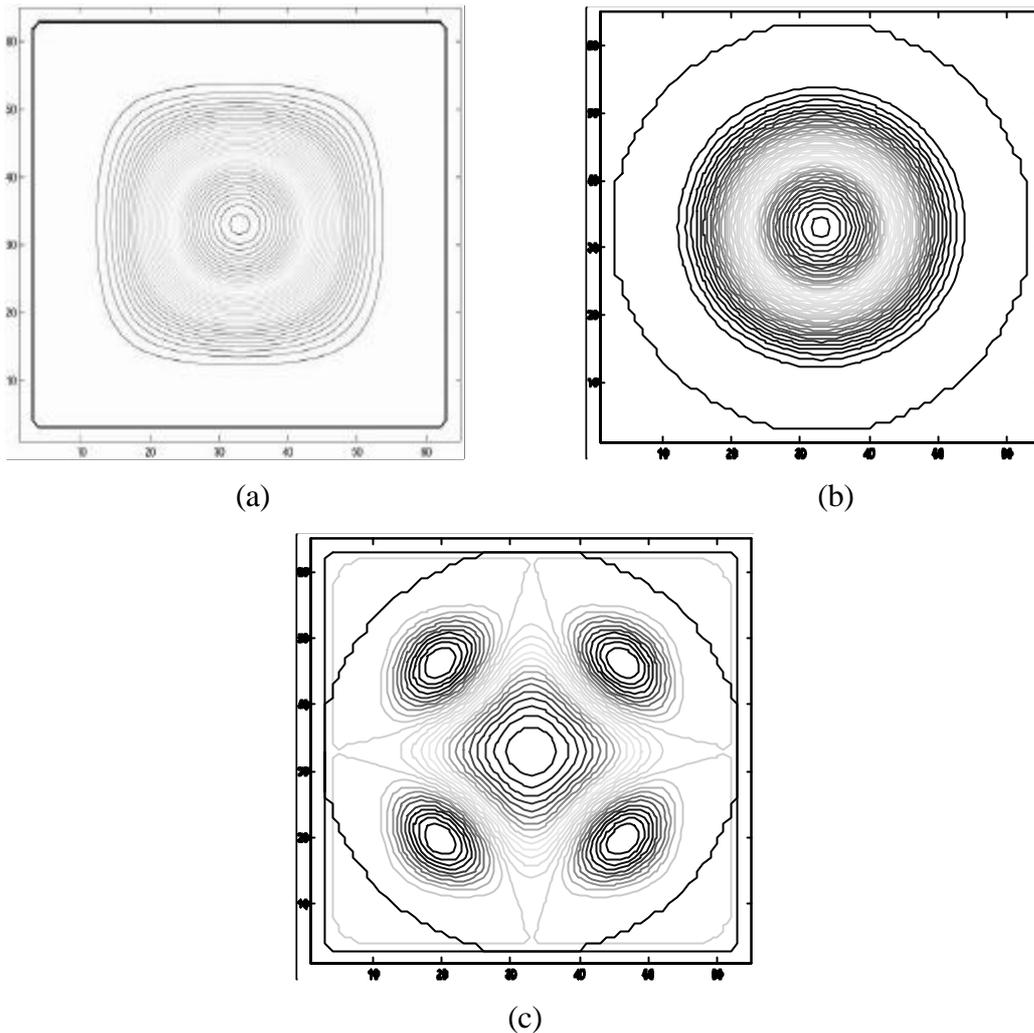


Figure 8. Vue du support du SKCS (a), du KCS (b) et de la différence KCS-SKCS (c).

On obtient alors :

$$LoSKCS = \nabla^2 \Phi_{\sigma, \gamma}(x, y) = \begin{cases} K[A(x) + A(y)]e^{[h(x)]}e^{[h(y)]} & \text{si } x^2 < \sigma^2 \text{ et } x^2 < \sigma^2 \text{ et } y^2 < \sigma^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

Avec

$$K = \frac{2\gamma \cdot e^\gamma}{C_\gamma} \quad (13)$$

$$A(s) = h'(s)^2 - h''(s) \quad (14)$$

$$h'(s) = \frac{2 \cdot \gamma \cdot \sigma^2 \cdot s}{(s^2 - \sigma^2)^2} \quad (15)$$

$$h''(s) = \frac{-2\gamma\sigma^2[(s^2 - \sigma^2)(3s^2 + \sigma^2)]}{(s^2 - \sigma^2)^4} \quad (16)$$

Ainsi, l'opérateur LoSKCS s'écrit sous forme d'une somme de deux filtres monodimensionnels (un vecteur ligne et un vecteur colonne). Son équation s'écrit alors comme suit :

$$\nabla^2 SKCS(x, y) = H(x, y) + H(y, x) \quad (17)$$

$$\text{où } H(x, y) = \mu \cdot A(x) \cdot e^{[h(x)]} \cdot e^{[h(x)]} \quad (18)$$

$$\text{Avec } \mu = \frac{e^\gamma}{\sigma^2} \quad (19)$$

On remarque aussi que le support du LoSKCS est de forme carré. Pour  $\gamma$  petit, il présente quatre bosses sur les côtés (deux

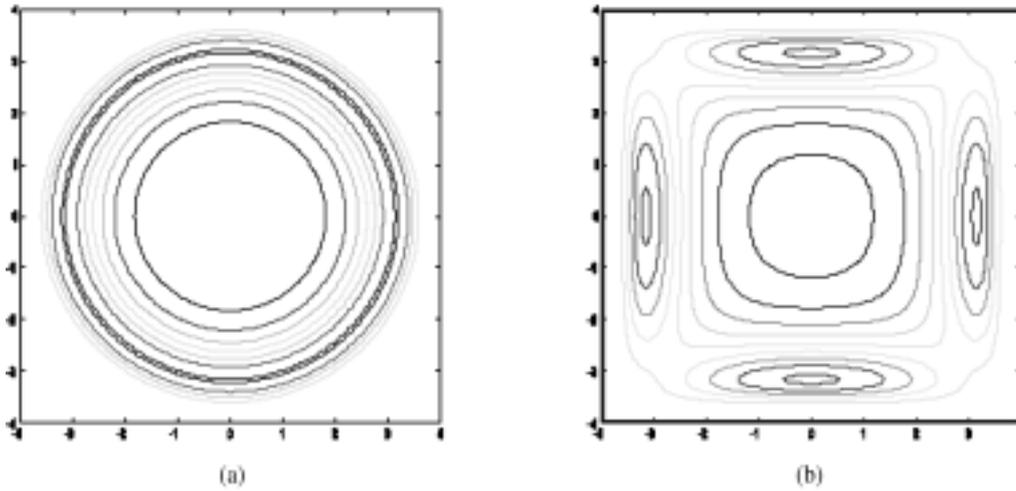


Figure 9. Formes du LoKCS (a) et du LoSKCS (b) pour  $\gamma = 2.1$ .

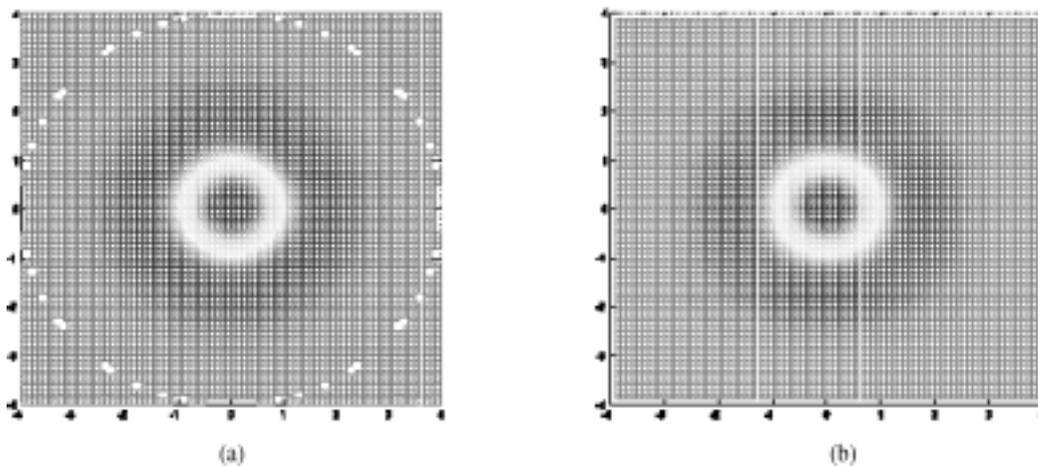


Figure 10. LoKCS (a) et LoSKCS (b) pour  $\gamma = 10$ .

horizontales et deux verticales) alors que le LoKCS est de forme circulaire centré autour du centre du noyau (figure 9). Ainsi, le comportement du LoSKCS tout au long des diagonales peut être différent du LoKCS.

Quand  $\gamma$  croît, les formes du LoSKCS et LoKCS se rapprochent fortement (voir figure 10). Pour avoir des comportements pratiquement identiques, nous proposons aux lecteurs de prendre  $\gamma > 4$ .

## 5. Résultats expérimentaux

Pour des raisons pratiques, en vue d'étudier la capacité du SKCS dans l'extraction des données manuscrites à partir d'images bruitées et dégradées, des essais ont été menés sur des images réelles, obtenues à partir de la base de données fournie par CEDAR à SUNY BUFFALO. L'implémentation des différents filtres a été réalisée sur micro-ordinateur PIV-700MHz, sous le logiciel Matlab. Nous avons utilisé l'algorithme proposé dans [6] où nous avons remplacé l'opérateur LoG respectivement par LoKCS puis par LoSKCS. Les performances de la méthode sont basées sur l'aspect visuel, utilisant comme critère, la forme de l'image segmentée (épaisseur, intensité, connexion des différentes parties du caractère, etc.).

### 5.1 Algorithme de l'espace des échelles

La taille du masque dépend de la valeur de  $\sigma$ . Pour l'implémentation de l'opérateur (le LoNoyau représente le LoG, LoKCS, LoSKCS), l'algorithme peut être présenté ainsi [6] :

- a- Pour chaque pixel de l'image d'entrée, appliquer l'opérateur LoNoyau avec un pas d'échelle  $\sigma$ . Commencer par une valeur de  $\sigma = \sigma_{\max}$  suffisamment grand pour extraire un minimum d'informations démunie de bruit.
- b- Appliquer un seuil à l'image de sortie de façon à éteindre les pixels de valeurs positives ou nulles et allumer les pixels de valeurs négatives.
- c- Allumer les pixels voisins de l'image de sortie de l'image de sortie de l'étape (b).
- d- Décroître le pas d'échelle.
- e- Appliquer l'opérateur LoNoyau à l'image originale, avec le pas d'échelle  $\sigma$ , seulement pour les pixels qui ont été allumés dans l'étape (c).
- f- Appliquer un seuil à l'image comme dans l'étape (b). L'image de sortie constitue alors le résultat désiré à l'échelle  $\sigma$ .
- g- Répéter le même procédé à l'image obtenue en (b); de l'étape (c) à l'étape (g) jusqu'à  $\sigma = \sigma_{\min}$ . Obtenir alors l'image désirée

### 5.2. Paramètres de l'algorithme

Pour les deux noyaux KCS et SKCS, nous avons choisi le même paramètre  $\gamma$  et la même taille de masque, continue dans l'intervalle  $]-\sigma, +\sigma[$ . Pour la représentation multi-échelle, nous avons fait décroître la valeur de  $\sigma$ , de  $\sigma_{\max} = 4$  (pour avoir une bonne immunité au bruit) à  $\sigma_{\min} = 2$  (pour avoir une détection précise de la forme du signal) avec un pas égale à 0.5; en terme de dimensions du masque, de  $(8 \times 8)$  à  $(4 \times 4)$ .

### 5.3. Comportement de l'algorithme

Nous allons concentrer la discussion sur deux séries d'images.

**a-** Dans la première série (voir figure 11), on présente l'image originale ainsi que les résultats obtenus par les deux opérateurs KCS et SKCS.

En observant le comportement des algorithmes vis-à-vis de la qualité des différentes données, on peut confirmer dans ce cas, que les deux opérateurs donnent de bons résultats avec une segmentation assez précise et une qualité visuelle assez élevée même en présence du bruit. Cette efficacité montre la robustesse des deux opérateurs dans l'extraction des formes visuelles correspondantes à l'écriture manuscrite contenue dans des images bruitées.

**b-** Dans la seconde série d'images (voir figure 12), on utilise les mêmes paramètres qu'en (4.1.a) et on présente des images dégradées aux deux opérateurs.

En regardant les images segmentées de la figure 12, nous pouvons remarquer que les deux opérateurs donnent des résultats satisfaisants mais on peut observer quelques dégradations qui apparaissent sur les images traitées par le LoSKCS. Cette faible dégradation est du essentiellement à la largeur de sa région excitatrice (voir commentaires à la section 4.4). Le LoSKCS a tendance à filtrer plus de pixels que le LoKCS dans certaines régions de l'image et plus précisément sur les diagonales.

### 5.4. Evaluation du rapport signal sur bruit

Dans le but de tester les qualités de filtrage de chacun des noyaux KCS et SKCS nous avons évalué le rapport signal sur bruit (SNR) qui est défini par la relation suivante :

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{E\{\|I\|^2\}}{E\{\|I - \hat{I}\|^2\}} \quad (20)$$

Avec :  $I$  et  $\hat{I}$  respectivement l'image originale et l'image filtrée. Les essais ont été effectués sur la série d'images testées dans le paragraphe 5.3.a.

Les résultats sont donnés sur la figure 13 où on a présenté respectivement l'image originale et les images filtrées par le KCS et le SKCS, pour  $\sigma$  et  $\gamma$  constants; ainsi que les courbes correspondantes aux variations du SNR. Ces courbes représentent la

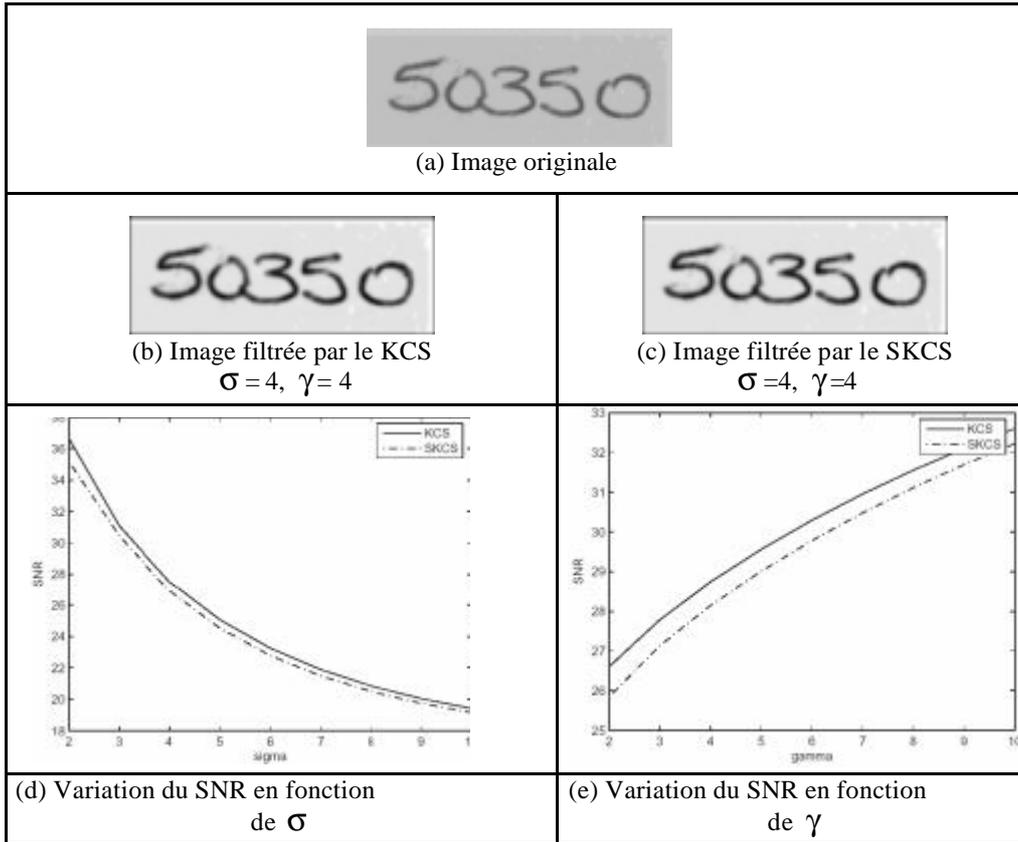
(a) : Image Originale	(b) : Image segmentée par le KCS	(c) : Image segmentée par le SKCS

Figure 11. Segmentation des images à niveaux de gris.

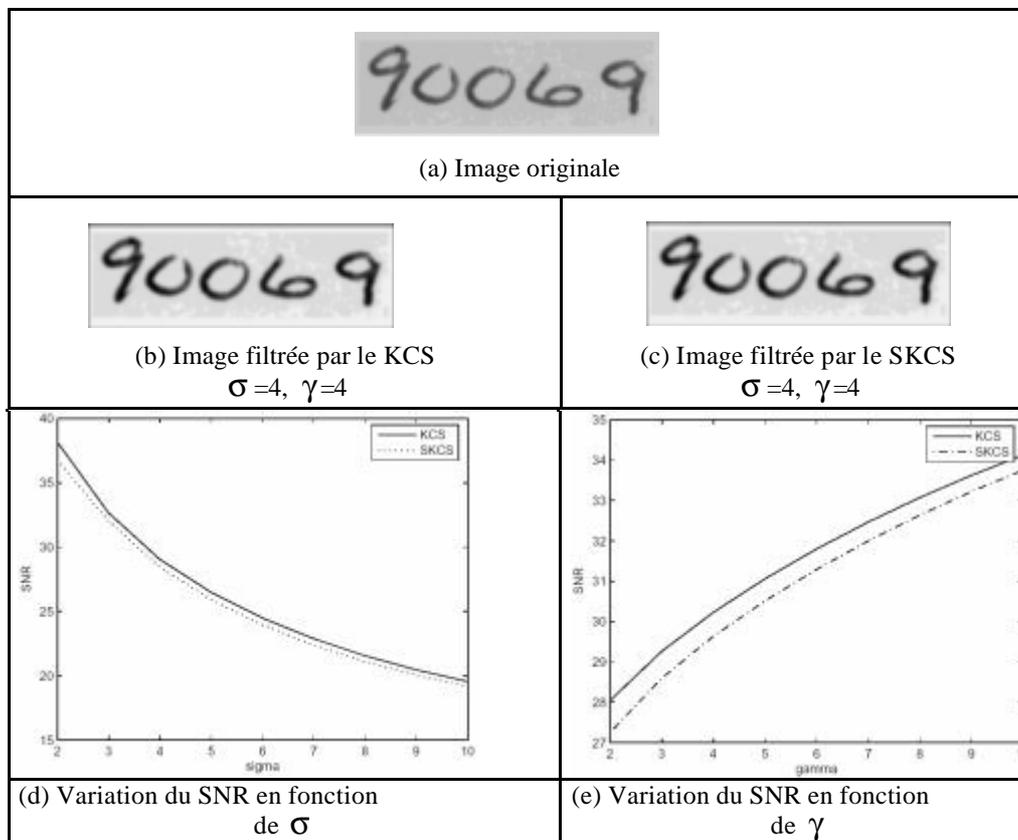

Figure 12. Segmentation d'images dégradées.

variation des SNR du KCS et du SKCS. Sur la première courbe, on a représenté le SNR en fonction du paramètre échelle  $\sigma$ , en gardant  $\gamma$  constant. La deuxième courbe représente la variation

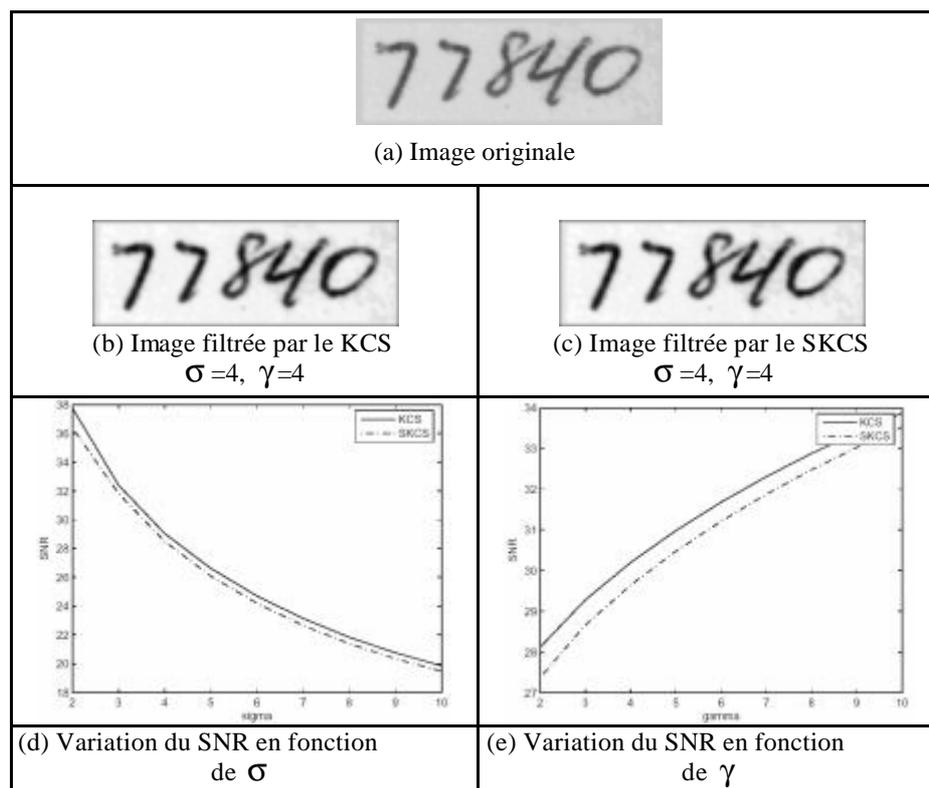
du SNR en fonction du paramètre  $\gamma$  qui contrôle la largeur du noyau, pour une valeur donnée de  $\sigma$ .



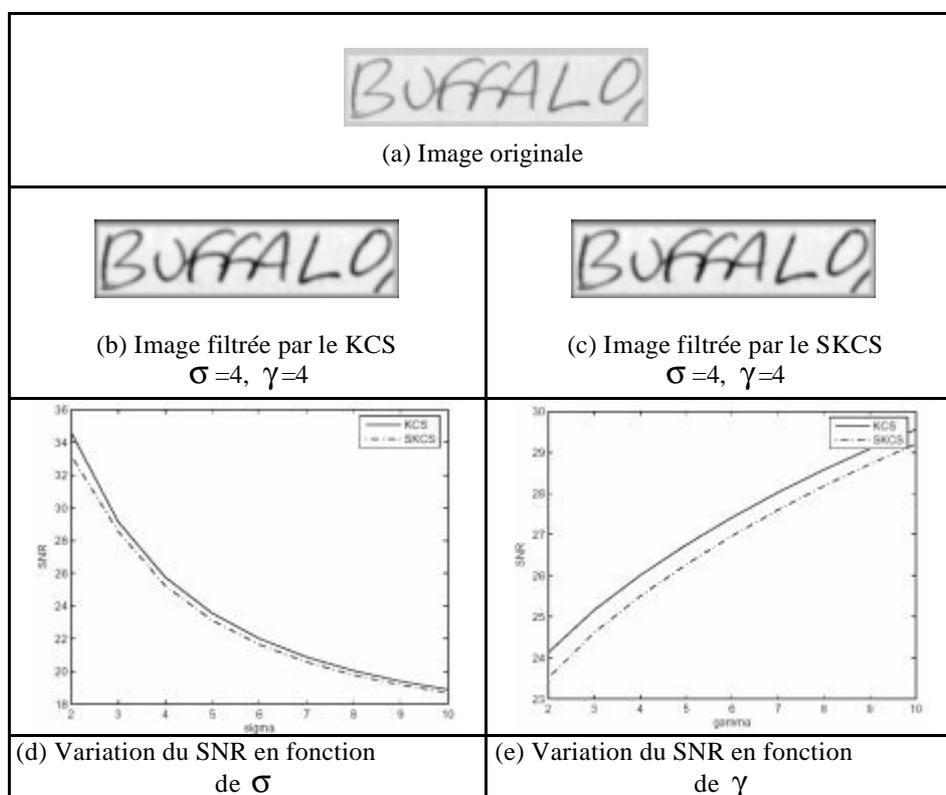
(a) image 1



(b) image 2



(c) image 3



(d) image 4

Figure 13. Images filtrées par le KCS et le SKCS et courbes de variation du SNR en fonction de  $\sigma$  et  $\gamma$ .

(a): Image Originale	(b): Image segmentée par le KCS	(c): Image segmentée par le SKCS

Figure 14. Exemples d'images segmentées respectivement par le KCS (a) et le SKCS (b).

	55.04	17.69
	54.88	17.56
	62.64	20.20
	50.65	16.32
	61.08	19.89
	64.02	21.82
Image Originale	Temps de calcul pour le KCS	Temps de calcul pour le SKCS

Figure 15. Evaluation du temps de calcul (en secondes) pour le KCS et le SKCS.

Comme on peut le constater à partir des différentes courbes représentées sur la figure 13, les deux opérateurs présentent un gain suffisamment important ( $> 30\text{dB}$ ). Le KCS présente un gain légèrement supérieur à celui du SKCS, d'environ  $0.5\text{ dB}$ . Des remarques supplémentaires peuvent être dégagées :

- Pour les deux noyaux, le SNR décroît en fonction du paramètre  $\sigma$ . En effet, ceux-ci sont des filtres passe-bas dont la régularité augmente avec  $\sigma$ .
- Pour les deux noyaux, le SNR croît avec  $\gamma$ , ceci est tout à fait normal puisque ce paramètre a été défini comme étant l'inverse du paramètre échelle  $\sigma$  (voir [1]).
- Comme il a été mentionné plus haut, lorsque  $\gamma$  augmente le SNR du KCS et du SKCS se rapprochent énormément bien que le KCS semble filtrer un peu plus que le SKCS.
- Toutes ces remarques sont conformes à celles indiquées auparavant et viennent consolider ceux qui ont été mentionnés dans le paragraphe 5 notamment le choix de  $\sigma > 2$ . Nous avons remarqué que pour  $\sigma = 1$ , le gain est très grand voir infini.

### 5.5. Evaluation du temps de calcul

Dans cette série d'images (voir figure 14), on utilise les mêmes paramètres qu'en (5.2.a) et on présente différentes images pour les deux opérateurs afin de pouvoir évaluer le temps de calcul des deux opérateurs KCS et SKCS.

Sur la figure 15, on donne la valeur du temps de calcul, en secondes, correspondant au traitement des images suivants par les deux opérateurs KCS et SKCS.

On remarque que le temps de calcul nécessaire pour l'opérateur LoSKCS est nettement plus faible que celui demandé par le LoKCS. En effet, pour la version séparable du KCS, chacune des convolutions est réalisée suivant deux convolutions mono-dimensionnelles successives; une, suivant les lignes, l'autre, suivant les colonnes. Le résultat est équivalent à une convolution 2D, mais le temps de calcul est plus faible car elle nécessite moins d'opérations.

## 6. Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle version séparable de noyaux à support compact. Ces nouveaux noyaux (SKCS) sont utilisés pour segmenter des données visuelles d'images contrastées en présence de bruit. Nous avons montré que les noyaux obtenus préservent les plus importantes propriétés du noyau Gaussien dans le but de segmenter efficacement ces images. Une étude minutieuse de quelques propriétés a été fournie et une analyse comparative basée sur la forme des masques du KCS et du SKCS a été discutée. Une application concernant l'extraction des données manuscrites à partir d'images bruitées a été présentée. Cette étude a été suivie d'une comparaison qualitative des résultats obtenus par les deux

noyaux KCS et SKCS. Le but principal est d'atteindre une amélioration significative en temps de calcul sans perte d'informations. Le SKCS a donné des résultats satisfaisants à l'extraction de formes visuelles tout en fournissant des informations précises en un temps très court par rapport au processus utilisant le KCS. Les essais ont été menés sur une série d'environ 200 images, tirées à partir de la base de données CEDAR. Une étude similaire est menée dans le but de montrer la robustesse du modèle adopté sur un ensemble plus important d'images tests.

## Références

- [1] L. REMAKI and M. CHERIET, «KCS-New Kernel Family with Compact Support in Scale Space: Formulation and Impact», *IEEE Trans. on image processing*, Vol.9, N°6, June 2000. pp. 970-981.
- [2] J. J. KOENDERINK, «The structure of images», *Biol.Cybern.* vol.53, pp. 363-370, 1984.
- [3] A. P. WITKIN, «Scale-space filtering», *In Proc. 8th Int. Joint Conf. Artificial Intelligence*, Karlsruhe, Germany, Aug. 1983, pp. 17-45.
- [4] D. MARR and E. HILDRETH, «Theory of edge detection», *In Proc. Of the Royal Society of London, Series B*, vol. 207, pp.187-217, 1980.
- [5] M. CHERIET, R. THIBAUT and R. SABOURIN, «A multi-resolution based approach for handwriting Segmentation in gray level images», *In IEEE Int. Conf. On IP*, Austin, pp. 159- 168, 1994.
- [6] M. CHERIET, «Extraction of handwritten data from noisy gray-level images using multi-scale approach», *Int. Journal Pattern Recognition Artif. Intell.*, vol.13, no.5. pp.665- 685, 1999.
- [7] J. BABAUD, A. P. WITKIN, M. BAUDIN, R. O. DUDA «Uniqueness of the Gaussian Kernel for Scale-Space Filtering», *IEEE Trans. On PAMI*, vol.8, no.1, pp. 26-33, January 1986.
- [8] T. LINDBERGER, «Scale-Space Theory in Computer Vision», Norwell, MA: Kluwer, 1994, p.423.
- [9] A. HUERTAS, G. MEDIONI, «Detection of Intensity Changes with Sub-pixel Accuracy Using Laplacian-Gaussian Masks», *IEEE Trans. PAMI*, vol.8, no.5, pp. 651-664, 1986.
- [10] E. BEN BRAIEK, L. REMAKI and M. CHERIET, «Extraction of Handwritten Data from Noisy Gray Level images using a separable version of the KCS Kernel Family», *ICISP'01*, Agadir 2001, pp. 125-131.
- [11] S. IMPEDOVO, «Frontiers in handwriting recognition», NATO-ASI Series, vol. F124, Springer Verlag, pp. 7-43, 1994.
- [12] E. LECOLINET and O. BARET, «Cursive word recognition NATO-ASI Series», vol. F124, Springer Verlag, pp. 235-264, 1994.
- [13] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle et applications*. Paris, France: Masson, 1986.
- [14] M. CHERIET, J.N. SAID, C.Y. SUEN, A Recursive Thresholding Technique for Image Segmentation, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, No. 6, pp. 918-922.
- [15] E. GODLEWSKI and P. A. RAVIART, «Hyperbolic systems of conservation laws», in mathematics and applications. Paris, France: Ellipses-Edition marketing,1991.
- [16] H. REINHARD, *Éléments de mathématiques de signal*, Paris, France: Dunod 1995.
- [17] E. BEN BRAIEK and M. CHERIET, «SKCS-New Kernel Family with compact support», *IEEE conf. On "ICIP'04"*, Singapore October 2004.
- [18] P.J. BURT, «Fast filter transform for image processing», *Comput. Vis. Graph. Image Processing*, vol.16, pp.20-51, 1981.

- [19] J. L. CROWLEY, « A Representation for Visual Information », Ph.D. dissertation, Carnegie Mellon Univ. Pittsburgh, PA, 1981.
- [20] T. LINDBERG, « Scale-Space for Discrete Signals », *IEEE Trans. PAMI*, vol.12, no.3, pp. 234-254, 1990.
- [21] A. KLINGER, « Pattern and search statistics, in optimizing Methods in Statistics », J.S. Rustagi, Ed. New York : Academic, 1971.
- [22] E. LECOLINET and O. BARET, « Cursive Word Recognition », NATO-ASI series, vol. F124, Springer Verlag, pp. 235-264, 1994.
- [23] F. BERGHOLM, Edge focusing, *IEEE Trans. on PAMI*, 9(6), pp. 726-741, Nov. 1987.
- [24] L. REMAKI and M. CHERIET, « Building New Kernel Family with Compact Support in Scale Space », *Vision Interface '99*, Trois Rivières, Canada, 19-21 May 1999, pp. 445-451.



Ezzedine **Ben Braiek**

Ezzedine Ben Braiek a soutenu sa thèse en 1984 à l'ENSET de Tunis. Il est actuellement maître assistant en Automatique au département génie électrique et à l'École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis (ESSTT), directeur de l'Institut Supérieur des Études Technologiques de Bizerte (ISET) et responsable de l'équipe image au sein du laboratoire CEREP. Ses activités de recherches portent essentiellement sur l'analyse multi échelle, la segmentation et la reconnaissance de l'écriture manuscrite.



Mohamed **Cheriet**

Mohamed Cheriet a reçu son degré d'ingénieur d'état en informatique de l'Université USTHB d'Alger en 1984, de DEA et de Doctorat, également en informatique, de l'Université de Paris 6 (Pierre et Marie Curie) en 1985 et 1988 respectivement. De 1988 à 1990, il a travaillé en tant qu'associé de recherche au laboratoire de LAFORIA/CNRS à l'École des Ponts et Chaussées de Paris. Il a ensuite rejoint CENPARMI (Centre pour la reconnaissance des formes et de machines intelligentes) de l'Université de Concordia à Montréal, où il a travaillé en tant que stagiaire post-doctoral pendant deux années. Il a été nommé professeur adjoint en 1992, professeur agrégé en 1996 et professeur titulaire en 1998, au département de génie de la productique automatisée de l'École de Technologie Supérieure (ETS) à Montréal. Il est aussi le directeur du laboratoire LIVIA (laboratoire d'imagerie, de vision, et d'intelligence artificielle) de l'ETS depuis 2000. La recherche de Dr. Cheriet se concentre sur les modèles mathématiques de traitement d'image (EDPs, théorie variationnelle, filtres multi-échelles à support compact), la reconnaissance de caractères, l'analyse et la reconnaissance de documents manuscrits, et la perception. Dr. Cheriet est un membre sénior de IEEE et un membre actif de CENPARMI. Il a publié plus de 150 articles dans des actes de conférences internationales et dans des journaux de renom. Dr. Cheriet est très actif sur la scène internationale. Il a servi comme président et coprésident de plusieurs conférences internationales : Vision Interface'98&2000, IWFHR'2002&2008, et comme coprésident des arrangements locaux d'ICDAR'95 et IJCNN'2005. Dr. Cheriet est Éditeur Associé du journal IJPRAI « The International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence ».



Vincent **Doré**

Vincent Doré a reçu son DEA MVA (mathématiques, vision et apprentissage) à l'École Normale Supérieure de Cachan en 2003. Il est, depuis janvier 2005, doctorant au sein du laboratoire LIVIA à l'École de Technologie Supérieure (ÉTS) de Montréal.