

# Mise en correspondance d'objets déformables

---

## Matching deformable objects

par Alain TROUVÉ<sup>1</sup>, Laurent YOUNES<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LAGA (UMR CNRS 7593), Institut Galilée, Université Paris XIII, Av. J-B. Clément, F-93430 Villetaneuse. [trouve@math.univ-paris13.fr](mailto:trouve@math.univ-paris13.fr)

<sup>2</sup> CMLA (CNRS, URA 1611), Ecole Normale Supérieure de Cachan, 61, avenue du Président Wilson, F-94 235 Cachan CEDEX. [younes@cmla.ens-cachan.fr](mailto:younes@cmla.ens-cachan.fr)

### *résumé et mots clés*

Nous présentons dans ce papier une illustration d'une tendance forte du traitement d'image actuel, qui, compte-tenu des puissances de calculs disponibles, tend d'une part à privilégier les approches non-paramétriques sur les approches paramétriques, pour proposer des modèles moins contraints, plus souples, plus expressifs et, d'autre part, s'éloignant des descriptions linéarisées, essaie de replacer les objets d'études dans leurs structures géométriques naturelles. Dans le contexte des modèles déformables, cette tendance a amené à s'affranchir progressivement de l'estimation de déformations rigides paramétriques pour aller vers celle d'appariements dense quelconques sous la forme de champs de déplacements et plus encore vers celle de l'objet naturel qui est un difféomorphisme. Nous montrons comment la géométrisation du problème de l'appariement comme recherche d'un chemin optimal de déformation d'un objet source vers un objet but, permet de lier le problème de l'estimation d'un appariement à celui d'une géodésique dans un espace de formes.

Mise en correspondance, déformations, difféomorphismes, géométrie riemannienne

### *abstract and key words*

Moving away from constrained parametric to unconstrained flexible non parametric models is a deep trend in image processing that constant increase of computing resources makes each day more possible. Besides linear structure, more complex and often more natural geometrical structure graphs, trees, groups or manifolds come onto the stage. Deformable models offer a good illustration: from rigid parametric transformation to non parametric diffeomorphic matching, we show how the matching problem can be seen as search of optimal deformation paths between two objects, or equivalently determination of a minimal geodesic in a shape manifold.

Matching, deformations, diffeomorphisms, Riemannian geometry

## 1. introduction

La théorie des modèles déformables (deformable templates, en anglais), a démontré son utilité dans de nombreux contextes de traitement d'images. Sa caractéristique essentielle est que les images d'une classe donnée sont représentées non plus de manière absolue, mais de façon relative, par rapport à une image de référence, le modèle (ou template). L'effort de modélisation porte alors sur la détermination du meilleur état de référence, et sur la représentation des différents processus de déformation qui permettront d'en créer des variations. Une approche statistique permettra alors de discerner les déformations probables, de reconstruire des déformations imparfaitement observées. Ces principes ont trouvée des développements dans des directions diverses ; ils ont par exemple servi d'inspiration aux travaux de D. et S. Geman sur les champs de Markov, l'approche bayésienne dans ce cadre étant un cas particulier de la théorie générale des « patterns » ([13]). Ils ont également été à l'origine de nombreux travaux en reconnaissance de formes ou d'objets.

Cette approche s'inscrit dans la démarche générale où l'on cherche à analyser les variations d'une classe d'objets relativement à un prototype. Un exemple célèbre est celui de l'utilisation de l'analyse en composantes principales pour représenter les variations dans un corpus de visages, aboutissant à la définition des *eigenfaces*. Les mêmes techniques, appliquées à des configurations de points, sont à la base de la construction des *active shapes* ([5]). De même, pour traiter des champs de déplacements, Bookstein ([5]) a développé la notion d'axes principaux de déformations (*principal warps*). Toutes ces démarches s'inscrivent dans la problématique qui cherche à représenter de manière efficace les variations des formes ou des images. La qualité de la représentation sera d'une part mesurée par sa simplicité (faible dimension paramétrique), sa robustesse (faible variation de la représentation en cas de faible variation perceptive des objets), et bien entendu sa précision. Ainsi, les méthodes linéaires évoquées ci-dessus se trouvent largement limitées en présence de variations trop complexes, en particulier dans le cas de grandes déformations élastiques, qui correspondent au principal centre d'intérêt du présent exposé.

Les techniques développées ici correspondent ainsi aux contextes dans lesquels les variations observées sont (en partie) dues à des déformations de type élastiques, ou peuvent être modélisées comme telles. Probablement, les problèmes d'imagerie médicale sont ceux pour lesquels ce type de situation apparaît de la manière la plus nette. Un même organe sur des patients différents, ou sur un seul patient à des instants différents ou dans une position différentes, est soumis à des variations de formes qu'il convient de modéliser et de caractériser, parfois parce qu'elles interviendraient dans un diagnostic (lorsque certaines variations sont susceptibles de correspondre à une pathologie) ou bien simplement parce qu'elles doivent être corrigées pour pouvoir analyser d'autres aspects des images dans une représen-

tation normalisée. Mais le contexte de l'imagerie médicale n'est pas le seul domaine d'applications : on peut y rajouter les problèmes de traitement de données météorologiques, ou géologiques, l'analyse des variations d'expression pour un visage, ou d'autres problèmes de reconnaissance de formes pour lesquels l'utilisation de modèles de déformations élastiques est largement répandue.

La mise en œuvre effective de ces techniques requiert une formalisation mathématique de la notion de déformation. Prenons le cas d'une image  $I$ , que nous supposons définie sur un domaine continu  $\Omega$ , qui est typiquement un rectangle du plan : une déformation correspond à certains déplacements des points de  $\Omega$ , et de l'intensité lumineuse qu'ils portent. Elle est représentée par une transformation  $\varphi : \Omega \mapsto \Omega$ , qui à chaque point  $x$  associe sa position originelle (avant déformation), si bien qu'une image  $I$  est transformée en l'image  $\tilde{I} = I \circ \varphi$ . Pour s'affranchir des pertes d'information ou des ambiguïtés, il est essentiel de contraindre  $\varphi$  à être bijective. On recherchera également un minimum de régularité, en imposant que  $\varphi$  soit continue ainsi que son inverse (un *homéomorphisme*), ou que ces deux fonctions soient continûment dérivables, faisant ainsi de  $\varphi$  un *difféomorphisme*.

L'application de traitements linéaires (comme l'analyse en composantes principales) dans des problèmes impliquant ce type de déformations est sujette à caution, les combinaisons linéaires de difféomorphismes n'ayant aucune raison de rester des difféomorphismes. La manière naturelle de les combiner est par composition, relation par laquelle ils forment un groupe. Toutefois, en l'absence de technique efficace permettant de travailler sur un tel espace, et en raison de la popularité des techniques linéaires, les algorithmes proposés pour traiter ces problèmes ont longtemps reposé sur une approximation de « petites déformations » dans laquelle on représente  $\varphi$  sous la forme  $\varphi = \text{id} + u$ ,  $u$  étant un champ de déplacement dont les variations sont supposées suffisamment faibles pour permettre à  $\varphi$  d'être un difféomorphisme. Cette approximation est couramment utilisée pour l'estimation de flot optique ([14]), et dans la grande majorité des techniques de mise en correspondance élastiques ([1, 2, 18, 12, 9]). Elle est à la base des algorithmes d'interpolations par splines développés par Bookstein. Ces techniques sont toutefois rapidement poussées dans leurs retranchements, dès que l'hypothèse de petites déformations n'est plus admissible, et créent des irrégularités, des solutions ambiguës.

En mécanique des fluides, l'outil préférentiel pour représenter le déplacement au cours du temps des particules est la vitesse Eulérienne,  $v(t, y)$  qui donne la vitesse instantanée de la particule se trouvant à l'instant  $t$  dans la position  $y$  (elle se différencie de la vitesse Lagrangienne,  $V(t, x)$  qui donne la vitesse instantanée au temps  $t$  de la particule qui se trouvait en  $x$  à l'instant 0). Si l'on note  $\varphi(t, x)$  la position, à l'instant  $T$ , de la particule qui se trouvait en  $x$  à l'instant 0, on a l'identité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = v(t, \varphi(t, x))$$

de sorte que la vélocité eulérienne permet de retrouver la déformation  $\varphi$  par intégration de l'équation différentielle ordinaire  $dy/dt = v(t, y)$ . Il s'agit de l'exploitation naturelle de la propriété de stabilité par composition de l'ensemble des difféomorphismes. Un « petit » difféomorphisme s'écrit en effet sous la forme  $h(x) = x + \delta.v(x)$ ,  $\delta$  étant un nombre suffisamment petit. Considérons  $n$  déformations de ce type,  $h_i = \text{id} + \delta.v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et posons  $\phi_n = h_n \circ \dots \circ h_1$ . L'intérêt de composer les  $h_i$  par la gauche et non par la droite vient de la formule

$$\varphi_{n+1} = (\text{id} + \delta v_n) \circ \varphi_n = \varphi_n + \delta v_n \circ \varphi_n$$

soit

$$\frac{1}{\delta}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \varphi_n \circ v_n$$

Lorsque  $\delta$  tend vers 0, cette équation peut se voir comme une discrétisation de l'équation différentielle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = v(t, \varphi(t, x)) \tag{1}$$

A chaque instant  $t$ , la vélocité  $v(t, \cdot)$  est un champ de vecteurs sur  $\Omega$ . Ces champs de vecteurs forment de manière naturelle un espace vectoriel, que l'on peut spécifier par des conditions au bord de  $\Omega$  et des contraintes de différentiabilité. Nous supposons qu'il en est ainsi, et plus précisément, nous allons supposer donner un espace fonctionnel  $\mathcal{B}$  de champs de vecteurs continus sur  $\Omega$ , nuls sur  $\partial\Omega$ , muni d'une norme  $v \mapsto \|v\|_{\mathcal{B}}$  qui lui donne une structure d'espace de Hilbert. Sous certaines conditions sur cette norme (qui sont des conditions qui imposent que  $v \in \mathcal{B}$  ait au moins une dérivée bornée sur  $\Omega$ ), on peut démontrer ([20, 10]) que l'équation (1) admettait une solution unique sur  $[0, 1]$  dès que  $t \mapsto v(t)$  est tel que

$$\int_0^1 \|v\|_{\mathcal{B}} < \infty$$

condition que nous résumons en écrivant  $v \in L^1([0, 1], \mathcal{B})$ . On définit alors un groupe de difféomorphismes  $G$  en considérant toutes les fonctions  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$  qui sont peuvent être construites de cette manière (en se donnant  $v$  dans  $L^1([0, 1], \mathcal{B})$  et en intégrant (1) jusqu'au temps 1). Nous introduisons ainsi une notation : pour un difféomorphisme  $\varphi$  donné, nous noterons  $\mathcal{A}_\varphi$  l'ensemble des  $v \in L^1([0, 1], \mathcal{B})$  tels que pour tout  $x \in \Omega$ , la solution de l'équation différentielle  $dy/dt = v(t, y)$  avec donnée initiale  $y(0) = x$  est telle que  $y(1) = \varphi(x)$  (notons que cet ensemble  $\mathcal{A}_\varphi$  peut être vide).

Cette représentation transforme un problème dont l'inconnue est un difféomorphisme en un problème dont l'inconnue est un élément de  $L^1([0, 1], \mathcal{B})$ . Nous discutons maintenant de son application dans deux cadres classiques de la mise en correspondance

de images : celui du matching dense (avec conservation de l'intensité lumineuse), et celui de l'extrapolation de matchings ponctuels.

## 2. mise en correspondance avec conservation de l'intensité

### 2.1. matching régularisé

Le problème posé est le suivant. Deux images  $I_0$  et  $I_1$  sont données (en tant que fonctions définies sur  $\Omega$ ), et le problème est de trouver un difféomorphisme  $\varphi : \Omega \mapsto \Omega$  tel que  $I_1 \circ \varphi \simeq I_0$ . Une option naturelle est de minimiser

$$\int_{\Omega} |I_0 \circ \varphi^{-1} - I_1|^2 dx$$

parmi tous les difféomorphismes  $\varphi$  possibles. Tel quel, le problème est mal posé (le minimum n'est pas nécessairement atteint), bien que (comme nous allons le voir), des algorithmes de descente de gradient sur cette fonctionnelle peuvent fournir des solutions intéressantes, à condition qu'ils soient convenablement menés et stoppés avant que la solution ne dégénère. Toutefois, la plupart du temps, et dès les premiers articles parus sur le sujet (comme [1]), on complète cette fonctionnelle par un terme de régularisation, minimisant ainsi

$$E(\varphi) = \int_{\Omega} |I_0 \circ \varphi^{-1} - I_1|^2 dx + \lambda R(\varphi)$$

où  $R$  mesure la régularité, en tant que fonction, de  $\varphi$ . Un choix typique est de poser  $R(\varphi) = \|\varphi - \text{id}\|_{\mathcal{B}}^2$ , pour une certaine norme fonctionnelle, dans un certain espace  $\mathcal{B}$  ; un exemple possible, utilisé dans [4], est

$$\|\varphi - \text{id}\|_{\mathcal{B}}^2 = \int_{\Omega} |\Delta\varphi + \alpha(\varphi - \text{id})|^2 dx$$

De tels choix de régularisation vont suffire pour assurer l'existence d'un minimum  $\phi$  en tant que fonction, mais ne permettent pas d'affirmer que ce minimum est bien atteint en un difféomorphisme : c'est d'ailleurs faux en général (voir figure 2). Par contre, si l'on introduit la vélocité eulérienne, en posant

$$R(\varphi) = \inf \left\{ \int_0^1 \|v(t)\|_{\mathcal{B}}^2 dt : v \in \mathcal{A}_\varphi \right\}$$

( $R(\varphi)$  étant infini si  $\mathcal{A}_\varphi$  est vide), alors, le problème devient entièrement bien posé : l'étude théorique de ses propriétés a été entreprise simultanément dans [19, 20, 21] et [10], des algorithmes de minimisation effective en deux et trois dimensions faisant l'objet de la thèse de F. Beg à l'université Johns Hopkins (cf. [3, 4]). En passant de l'inconnue  $\varphi$  à l'inconnue  $v$ , on peut réécrire le problème comme celui de la minimisation de

$$\int_{\Omega} |I_0 \circ \varphi_v^{-1} - I_1|^2 dx + \lambda \int_0^1 \|v(t)\|_{\mathcal{B}}^2 dt$$

$\varphi_v(x)$  étant définie comme la solution, à l'instant 1, de l'équation différentielle  $dy/dt = v(t, y)$  avec donnée initiale  $y(0) = x$ . La minimisation s'opère par descente de gradient. Elle se ramène à l'algorithme

$$v_{n+1} = v_n - \gamma \nabla_{v_n} E$$

$\gamma$  étant le pas de discrétisation et

$$\nabla_v E(s) = v(s) + K [|\varphi_{s,1}|(I_s - I'_s) \nabla I_s]$$

avec les notations suivantes :

- $\varphi_{s,t}(y)$  est la position, à l'instant  $t$ , de la particule qui se trouve en  $y$  à l'instant  $s$ , lorsque celle-ci suit le flot associé à l'équation différentielle  $dy/dt = v(t, y)$ .
- $I_s(y) = I_0 \circ \varphi_{s,0}(y)$  et  $I'_s(y) = I_1 \circ \varphi_{s,1}(y)$ .
- $K$  est un noyau régularisant. Il est relié au produit scalaire sur  $\mathcal{B}$  par la formule

$$\langle u, Kf \rangle_{\mathcal{B}} = \int_{\Omega} u(x) \cdot f(x) dx$$

pour  $f$  intégrable sur  $\Omega$  et  $u \in \mathcal{B}$ .

Nous renvoyons au travail en cours de M.F. Beg ([4]) pour plus de détails sur l'implémentation effective de cet algorithme.

## 2.2. métamorphoses géodésiques

Lorsque les images comparées sont proches, il est plausible de supposer que le difféomorphisme optimal est proche de l'identité : en écrivant  $\varphi(x) = x + v(x)$  et en supposant l'image  $I_0$  différentiable, on peut alors écrire

$$I_0 \circ \varphi^{-1}(x) - I_1(x) = I_0(x) - I_1(x) - \nabla_x I_0 \cdot v(x)$$

et chercher à minimiser la fonctionnelle régularisée

$$\int_{\Omega} |I_1(x) - I_0(x) + \nabla_x I_0 \cdot v(x)|^2 dx + \lambda \|v\|_{\mathcal{B}}^2$$

Cette fonctionnelle (ou une de ses variantes) est couramment utilisée pour l'estimation de flot optique, puisque dans ce cas, la comparaison est faite entre deux images consécutives d'un film, et l'hypothèse de petite déformation est raisonnable.

Mais les contextes qui nous intéressent ici sont ceux pour lesquels les images sont susceptibles de subir des grandes déformations, est dans lesquels l'hypothèse précédente est loin d'être vérifiée. On peut toutefois s'y ramener en rajoutant des inconnues auxiliaires qui sont des étapes intermédiaires d'un processus d'évolution allant de  $I_0$  à  $I_1$ . Posons ainsi  $\delta_k = k/n$  et introduisons une suite d'images

$$I_0 = I(0), I(\delta_1), \dots, I(\delta_{n-1}), I(1) = I_1,$$

et supposons que  $I(\delta_{k-1})$  et  $I(\delta_k)$  sont suffisamment proches. On va alors chercher, pour tout  $k > 0$  à mettre en correspondance  $I(\delta_k)$  et  $I(\delta_{k-1})$  sous l'hypothèse de petites déformations, et donc minimiser, en introduisant le déplacement  $v$ , la fonctionnelle

$$\int_{\Omega} |I(\delta_k, x) - I(\delta_{k-1}, x) + \nabla_x I(\delta_{k-1}) \cdot v(x)|^2 dx + \lambda \|v\|_{\mathcal{B}}^2$$

Le coût total du processus est alors donné par

$$\sum_{k=1}^n \inf_v \left( \int_{\Omega} |I(\delta_k, x) - I(\delta_{k-1}, x) + \nabla_x I(\delta_{k-1}) \cdot v(x)|^2 dx + \lambda \|v\|_{\mathcal{B}}^2 \right)$$

En divisant par  $\delta$  et en remplaçant  $v$ , variable muette par  $v/n$ , on obtient un coût normalisé donné par

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \inf_v \int_{\Omega} \left| \frac{I(\delta_k, x) - I(\delta_{k-1}, x)}{\delta_k - \delta_{k-1}} + \nabla_x I(\delta_{k-1}) \cdot v(x) \right|^2 dx + \lambda \|v\|_{\mathcal{B}}^2$$

On peut alors chercher à optimiser ce coût par rapport aux choix des images intermédiaires, qui sont inconnues. Si l'on passe formellement à la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini, on obtient une énergie donnée par

$$\int_{\Omega} \inf_{v \in \mathcal{B}} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial I}{\partial t}(t, x) + \nabla_x I(t) \cdot v(x) \right|^2 dx + \lambda \|v\|_{\mathcal{B}}^2 \right)$$

L'inconnue est alors une famille d'images indexée par le temps  $t$  (une métamorphose), avec les contraintes  $I(0) = I_0$  et  $I(1) = I_1$ . D'autre part, on peut introduire

$$\left\| \frac{\partial I}{\partial t} \right\|_{\text{morph}}^2 = \inf_{v \in \mathcal{B}} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial I}{\partial t}(t, x) + \nabla_x I(t) \cdot v(x) \right|^2 dx + \lambda \|v\|_{\mathcal{B}}^2 \right)$$

(on vérifie qu'il s'agit bien là d'une norme), si bien que la fonctionnelle à minimiser s'écrit sous la forme

$$\int_0^1 \left\| \frac{\partial I}{\partial t} \right\|_{morph}^2 dt$$

et s'interprète ainsi à l'énergie géodésique d'un chemin sur une variété riemannienne, d'où le terme choisi de métamorphoses géodésiques (cet algorithme a été introduit dans [17]). Une étude rigoureuse de cette variété d'images (qui est ici de dimension infinie) a été menée dans [22], où il a été en particulier mis en évidence la possibilité de caractériser l'image cible  $I_1$  à partir de  $I_0$  et de la dérivée  $\frac{\partial I}{\partial t}(0, \cdot)$ .

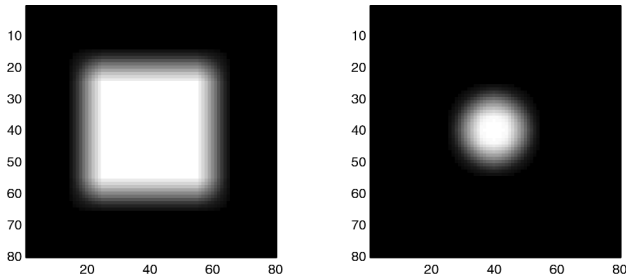


Figure 1. – Images comparées : carré et cercle lissés.

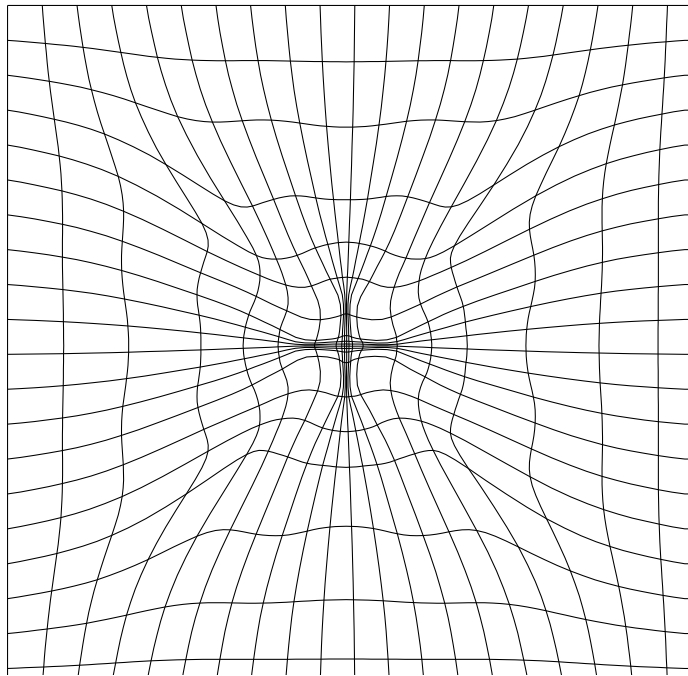


Figure 2. – Déformation obtenue entre les images de la figure 1, sans estimation de flot.

Qu'en est-il du difféomorphisme initialement recherché ? On peut en fait le retrouver en remarquant que le problème est équivalent à la minimisation de

$$\int_0^1 \left( \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial I}{\partial t}(t, x) + \nabla_x I(t) \cdot v(t, x) \right]^2 dx + \lambda \|v(t)\|_B^2 \right)$$

où les inconnues sont à présent la métamorphose  $I(t)$  et les vitesses  $v(t)$  : le difféomorphisme estimé est alors donné par  $\varphi_v$ , lorsque  $v$  est un point sur lequel le minimum est atteint (un exemple est fourni par la figure 3).

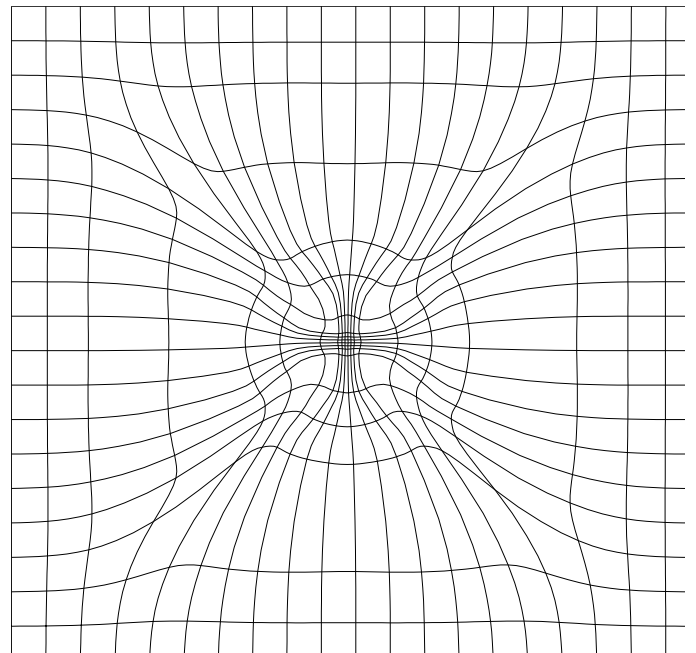


Figure 3. – Déformation entre les images de la figure 1, obtenue par métamorphose géodésique.

### 2.3. descente de gradient sur les difféomorphismes

Pour conclure cette section, nous revenons comme annoncé sur la fonctionnelle non-régularisée

$$U(\varphi) = \int_{\Omega} (I_0 \circ \varphi^{-1} - I_1)^2 dx$$

pour décrire comment une descente de gradient convenablement menée est susceptible de fournir une mise en correspondance par difféomorphisme (à condition de l'interrompre en temps fini). Si l'on calcule  $U(\varphi + th)$  pour  $t$  petit, on obtient

$$\begin{aligned}
 U(\varphi + h) &= U(\varphi) - \\
 & t \int_{\Omega} (I_0 \circ \varphi^{-1} - I_1) dI_0 \circ \varphi^{-1} d\varphi^{-1} h \circ \varphi^{-1} dx + o(t) \\
 &= U(\varphi) - t \int_{\Omega} (I_0 - I_1 \circ \varphi) dI_0 (d\varphi)^{-1} h |d\varphi| dy + o(t)
 \end{aligned}$$

Un algorithme de gradient classique procéderait en posant

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + \gamma |d\varphi(n)| (I_0 - I_1 \circ \varphi(n)) {}^t(d\varphi(n))^{-1} \nabla I_0$$

Cet algorithme n'est pas utilisable en pratique : la mise à jour, qui fait intervenir les dérivées de  $\varphi$  et de  $I_0$  est tout d'abord numériquement instable, mais surtout, même si les gradients sont convenablement approximés, la mise en correspondance n'a aucune raison de rester un difféomorphisme (ce qui interdit le changement de variable effectué dans le calcul précédent, qui validait l'expression du gradient...).

Il est nécessaire, pour construire un algorithme qui reste dans le groupe des difféomorphismes, d'utiliser une définition du gradient qui soit compatible avec la structure du groupe considéré. On définit ainsi le gradient de  $U$  par l'équation

$$U(\varphi + th) = U(\varphi) + t \langle \nabla U \circ \varphi^{-1}, h \circ \varphi^{-1} \rangle_{\mathcal{B}} + o(t)$$

ce qui correspond au choix d'une métrique invariante sur le groupe des difféomorphismes. En reprenant le noyau régularisant,  $K$ , qui est tel que

$$\langle u, Kf \rangle_{\mathcal{B}} = \int_{\Omega} u(x) \cdot f(x) dx$$

pour  $f$  intégrable sur  $\Omega$  et  $u \in \mathcal{B}$ , on voit qu'il faut poser  $\nabla U = v \circ \varphi$  avec

$$v = K [(I_0 \circ \varphi^{-1} - I_1) {}^t d\varphi^{-1} dI_0 \circ \varphi^{-1}]$$

Le nouvel algorithme s'écrit donc

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + \gamma v(n) \circ \varphi(n)$$

$v(n)$  étant donné par la formule précédente avec  $\varphi = \varphi(n)$ . Outre le fait que  $v(n)$  est obtenu après l'action d'un noyau régularisant, ce qui stabilise l'algorithme, la caractéristique la plus importante est qu'on obtient une version discrète d'une équation du type

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v(t, \varphi)$$

pour laquelle on est assuré d'obtenir en tout temps un difféomorphisme (cf. [21]).

### 3. interpolation de mise en correspondance ponctuelle

Cette partie est, dans un autre contexte, organisée de manière exactement symétrique à la précédente, ce qui nous permettra de passer plus vite sur les détails.

Le problème abordé est le suivant : on dispose d'une information initiale, sur un difféomorphisme inconnu  $\varphi$ , sous la forme d'un certain nombre de correspondances exactes ( $\varphi(x_i) = y_i$ ) ou approximatives ( $\varphi(x_i) \simeq y_i$ ) pour  $N$  paires de points  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) dans  $\Omega$  ; l'objectif est d'interpoler cette information, pour obtenir un difféomorphisme  $\varphi$  défini partout sur  $\Omega$ . La solution étant évidemment non-unique, il est nécessaire de rajouter des contraintes : on minimise ainsi une fonctionnelle du type

$$E(\varphi) = \sum_{i=1}^N |y_i - \varphi(x_i)|^2 + \lambda R(\varphi)$$

Le choix « statique »  $R(\varphi) = \|\varphi - \text{id}\|_{\mathcal{B}}^2$  mène à une solution de dimension finie. Introduite dans ce cadre par F. Bookstein (voir, par exemple, [b]), elle se base sur la construction suivante. Notons, pour  $x \in \Omega$  et pour  $i = 1, 2$ ,  $\delta_x^i$  la fonction qui à  $v \in \mathcal{B}$  associe l'évaluation de sa  $i$ -ème coordonnée en  $x$  :  $\delta_x^i(v) = v_i(x)$ . On définit, pour  $x \in \Omega$  et  $i = 1, 2$ , l'élément  $K_i(x) = K(\delta_x^i) \in \mathcal{B}$  par la formule, valable pour tout  $v \in \mathcal{B}$

$$\langle K(\delta_x^i), v \rangle_{\mathcal{B}} = \delta_x^i(v) = v_i(x)$$

$K_i(x)$ , en tant qu'élément de  $\mathcal{B}$  étant une fonction, on la notera également  $y \mapsto K_i(x, y)$ . On a l'identité (par définition de  $K_i$  :

$$\langle K_i(x), K_j(y) \rangle_{\mathcal{B}} = K_{ij}(x, y) = K_{ji}(y, x)$$

où  $K_{ij}$  est la  $j$ -ième coordonnée de  $K_i$  ( $j = 1, 2$ ). On notera également  $K(x, y)$  la matrice des  $K_{ij}(x, y)$ .

On démontre alors que la solution cherchée,  $\varphi$ , doit nécessairement être du type

$$\varphi(y) = y + \sum_{k=1}^N {}^t a_k K(x_k, y)$$

où les  $a_k$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  qu'il faut déterminer. Leur calcul se ramène à la résolution du système linéaire de dimension finie :

$$\sum_{k=1}^N {}^t a_k K(x_k, x_l) + a_l = y_l - x_l$$

Nous renvoyons à [6, 11, 16, 15, 7] pour plus de détails.

Cette possibilité de résoudre explicitement et efficacement le problème posé a rendu cette technique extrêmement populaire, pour l'analyse des images, mais aussi pour la synthèse et le graphisme. Mais, dès que les déformations impliquées par la mise en correspondance  $x_i \rightarrow y_i$  sont trop importantes, la solution fournie par cette méthode cesse d'être un difféomorphisme (cf. figure 4). La régularisation par

$$R(\varphi) = \inf \left\{ \int_0^1 \|v(t)\|_B^2 dt : v \in \mathcal{A}_\varphi \right\}$$

a été le sujet de travaux de S. Joshi et M. Miller. Là encore, on se ramène à une formulation en dimension finie : en tout temps  $t$ , on peut écrire  $v(t)$  sous la forme

$$v(t, y) = \sum_{i=1}^N t_i(t) K(\varphi_v(t, x_i), y)$$

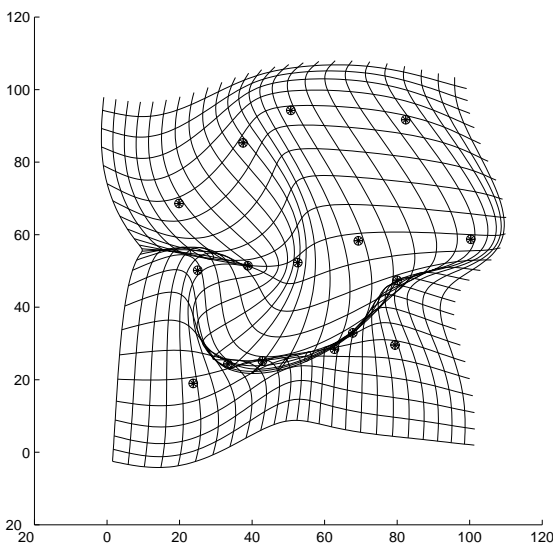
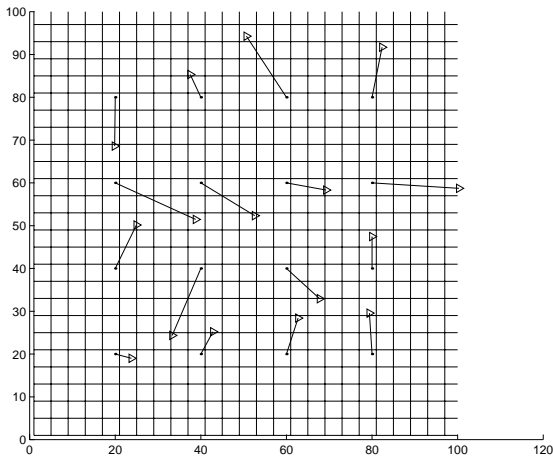


Figure 4. – La seconde figure donne une interpolation des points de la première par une méthode à base de splines : la solution n'est clairement pas un difféomorphisme.

où  $\varphi_v(t, x_i)$  est la solution de  $dy/dt = v(t, y)$  avec  $y(0) = x_i$ . Toutefois, la solution n'est plus explicite, mais peut s'obtenir par descente de gradient.

Enfin, de la même manière que l'on a obtenu des métamorphoses pour des images, on peut décomposer les déplacements  $x_i \rightarrow y_i$  en une suite (inconnue) de déplacements élémentaires, pour lesquels l'hypothèse des petites déformations est valide. On aboutit à une formulation dans laquelle on minimise une énergie du type

$$\int_0^1 \left( \sum_{i=1}^N \left| \frac{dz_i}{dt} - v(t, z_i) \right|^2 + \lambda \|v(t)\|_B^2 \right)$$

relativement aux inconnues  $v(t)$  et  $z_i(t), i = 1, \dots, N$ , qui correspondent aux déplacements optimaux des points, et qui sont soumis aux contraintes  $z_i(0) = x_i$  et  $z_i(1) = y_i$ . La solution, par cette technique, du même problème qu'à la figure 4 est donnée à la figure 5.

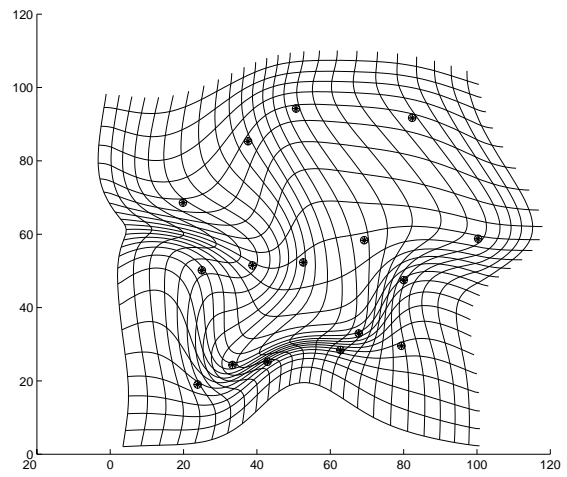
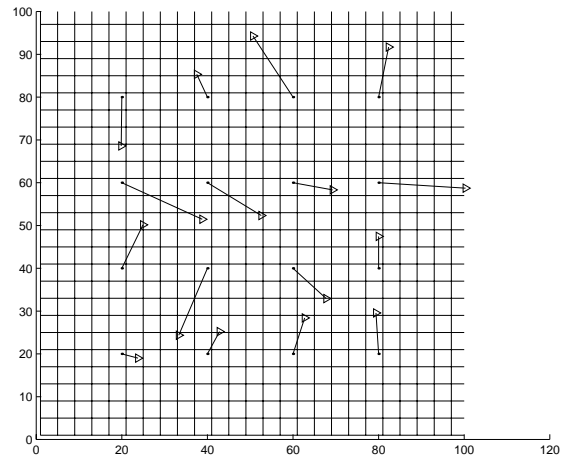


Figure 5. – La seconde figure donne une interpolation des points de la première par une méthode à base de splines : on obtient bien un difféomorphisme.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Bajcsy and C. Broit, *Matching of deformed images*, in The 6th international conference in pattern recognition, 1982, pp. 351-353.
- [2] R. Bajcsy and S. Kovacic, *Multiresolution elastic matching*, *Comp. Vision, Graphics, and image proc.*, 46 (1989), p. 1-21.
- [3] F. Beg, M, G. Bhanot, I. miller, M, T. Ratnanather, J, R. Walkup and L. Younes, *Computing geodesic distances on anatomies*, in NPACI All Hands Meeting, UCSD Supercomputer Center, January, 2000.
- [4] F. Beg, M, I. Miller, M, J. Ratnanather, T, A. Trouvé and L. Younes, *Computing metrics on diffeomorphisms for computational anatomy*, tech. rep., Universitu Johns Hopkins, 2002.
- [5] L. Bookstein, F., *Principal warps: Thin plate splines and the decomposition of deformations*, *IEEE trans. PAMI*, 11 (1989), pp. 567-585.
- [6] L. Bookstein, F, *Morphometric tools for landmark data: geometry and biology*, Cambridge University press, 1991.
- [7] V. Camion and L. Younes, *Geodesic interpolating splines*, in EMMCVPR 2001, M. Figueiredo, J. Zeubia, and K. Jain, A, eds., vol. 2134 of Lecture notes in computer sciences, Springer, 2001.
- [8] T. Cootes, C. Taylor, D. Cooper and J. Graham, *Active shape models: their training and application*, *Comp. Vis. ans Image understanding*, 61 (1995), pp. 38-59.
- [9] S. Cotin, H. Delingette and N. Ayache, *Efficient linear elastic models of soft tissues for real-time sugery simulation*, Tech. Rep. RR-3510, INRIA Sophia-Antipolis, 1998.
- [10] P. Dupuis, U. Grenander and M. Miller, *Variational problems on flows of diffeomorphisms for image matching*, *Quaterly of Applied Math.*, (1998).
- [11] N. Dyn, *Interpolation and approximation by radial ans related functions*, in *Approximation theory VI: vol. 1*, K. Chui, C, L. Shumaker, L, and D. Ward, J, eds, Academic Press, 1989, pp. 211-234.
- [12] C. Gee, J, R. Haynor, D, L. Le Briquer and Z. Bajcsy, R, *Advances in elastic matching theory and its implementation*, in CVRMed-MRCAS'97, P. Cinquin, R. Kikinis, and D. Lavalée, eds., Springer Verlag, 1997.
- [13] U. Grenander, *General Pattern Theory*, Oxford Science Publications, 1993.
- [14] K. P. Horn, B and G. Schunk, B, *Determining optical flow*, *Artificial intelligence*, 17 (1981), pp. 185-203.
- [15] S. Joshi and M. Miller, *Landmark matching via large deformation diffeomorphisms*, *IEEE transactions in image processing*, 9 (200), pp. 1357-1370.
- [16] J. Meinguet, *Multivariate interpolation at arbitrary points made simple*, *J. Appliet Math. and Physics*, 30 (1979), pp. 292-304.
- [17] I. Miller, M and L. Younges, *Group action, diffeomorphism and matching: a general framework*, *Int. J. Comp. Vis.*, 41 (2001), pp. 61-84. (Originally published in electronic form in: *Proceeding of SCTV 99*, <http://www.cis.ohio-state.edu/szhu/SCTV99.html>).
- [18] D. Rabbitt, R, A. Weiss, J, E. Christensen, G, and I. Miller, M, *Mapping of hyperelastic deformable templates using the finite element method*, in *Proceeding of San Diego's SPIE conference*, 1995.
- [19] A. Trouvé, *Infinite dimensional group action and pattern recognition*, tech. rep., DMI, Ecole Normale Supérieure, 1995.
- [20] A. Trouvé, *An infinite dimensional group approach for physics based model*. Technical report, 1995.
- [21] A. Trouvé, *Diffeomorphism groups and pattern matching in image analysis*, *int. J. of Comp. Vis.*, 28 (1998), pp. 213-221.
- [22] A. Trouvé and L. Younes, *Local analysis on a shape manifold*, tech. rep., Université Paris 13, 2002.

Manuscrit reçu le 13 janvier 2003

## LES AUTEURS

### Alain TROUVÉ



Alain Trouvé est titulaire d'une habilitation à diriger les recherches de l'université de Paris 11. Ses recherches se sont portées principalement sur l'étude des formes parallèles des algorithmes de recuit simulé et plus récemment sur les algorithmes de recherches par le contenu dans les bases d'images ainsi que sur les modèles déformables.

### Laurent YOUNES



Titulaire d'une habilitation à diriger des recherches à l'université Paris Sud, et actuellement Directeur de recherche au CMLA, Laurent Younes a axé ses centres d'intérêt d'une part vers les problèmes d'apprentissage par algorithmes stochastiques, et d'autre part vers les problèmes d'analyse de formes et d'images susceptibles d'être déformées.