

# Connexions et segmentation d'image

---

## Connection and Image Segmentation

par **JEAN SERRA**

Centre de Morphologie Mathématique,  
École des Mines de Paris,  
35, rue Saint-Honoré, 77305 Fontainebleau (FRANCE)  
serra@cmm.ensmp.fr

### *résumé et mots clés*

Après quelques rappels sur la notion de connexion ensembliste, une définition formelle de la segmentation des images est proposée, qui l'interprète en termes de partition maximale selon un critère donné. Le théorème central du texte identifie alors segmentation, critère connectif et connexions induites, pour toute famille de fonctions d'un espace arbitraire  $E$  dans un espace arbitraire  $T$ . La pertinence de la théorie est illustrée par une série d'exemples. Les connexions sont ensuite utilisées à des fins de filtrage. Ici, les deux opérations de base sont l'ouverture par reconstruction et le nivellement. Le texte se conclut par la comparaison de la démarche proposée avec les méthodes variationnelles et avec les stratégies à base de graphes.

Segmentation, critères connectifs, connexion, Lipschitz, zones quasi-plates, connexion par sauts, connexion lisse, nivellement.

### *abstract and key words*

After some reminders on the notion of a set connection, a formal definition of image segmentation is proposed, that interprets it in terms of set connections. Then the central theorem of the paper identifies segmentation, connective criteria, and induced connections for any family of functions from an arbitrary space  $E$  into an arbitrary space  $T$ . The soundness of the segmentation approach is explicated by a series of examples. The connections are then used for filtering purposes. Here the main operations are the opening by reconstruction and the leveling. In conclusion, the proposed approach is compared with variational methods and with graph based strategies.

Segmentation, connective criteria, connection, Lipschitz, quasi-flat zones, jump connection, smooth connection, leveling.

# 1. introduction

En mathématiques, la connexité est une notion ensembliste de nature topologique, qui s'exprime de deux façons. D'une manière générale, on dit qu'un ensemble est connexe quand on ne peut pas le partitionner en deux régions fermées (ou ouvertes) non vides. Cette définition précise l'idée intuitive que  $[0, 1] \cup [2, 3]$  est formé de deux morceaux, mais  $[0, 1]$  d'un seul. Toutefois, par sa généralité même, elle ne peut pas tirer avantage de la régularité de certains contextes, comme l'espace euclidien. C'est ici qu'apparaît la connexité par arcs, selon laquelle un ensemble  $A$  est connexe, lorsque pour toute paire de points  $a, b \in A$ , on peut trouver une application continue  $\psi$  de  $[0, 1]$  dans  $A$  telle que  $\psi(0) = a$  et  $\psi(1) = b$ . Cette connexité est plus restrictive que la première ; cependant dans  $\mathbf{R}^n$ , les deux notions coïncident pour les ensembles ouverts. En géométrie discrète, les connexités digitales transposent la démarche euclidienne par arcs, en introduisant des arcs élémentaires entre points voisins (ce qui revient aussi à définir des boules unité, donc une métrique avec sa topologie, puis sa connexité). Dans le plan digital, on trouve alors les classiques 4 et 8 connexités de la trame carrée, et la 6-connexité de l'hexagonale ; dans  $\mathbf{Z}^3$ , il y a de même la connexité du cube octaèdre par exemple.

L'une ou l'autre définition conduit à la propriété suivante, qui est très riche de sens. Si l'on prend une famille d'ensembles connexes qui possèdent au moins un point en commun, alors leur réunion est elle aussi connexe

$$\{A_i \text{ connexes}\} \text{ et } \{\cap A_i \neq \emptyset\} \Rightarrow \{\cup A_i \text{ connexe}\} \quad (1)$$

La connexité topologique est-elle adaptée aux objectifs que l'on poursuit en analyse d'image ? D'une certaine manière, oui, puisque certaines opérations, comme les squeletisations par exemple, y font appel. Mais on sait aussi que les versions digitales de ces opérations, qui mettent en jeu les 4- 6- ou 8-connexités pour effectuer des « amincissements » s'écartent très sensiblement des versions euclidiennes, sans convergence assurée. Mais il y a bien plus grave. Pour l'essentiel, nos objets d'étude ne sont pas des ensembles, mais des fonctions numériques ou vectorielles (imagerie en couleur), fixes ou en mouvement. Il faut donc transcender le cadre ensembliste, purement binaire, même si l'on part de lui. Comment y parviendrait-on en parlant de la définition topologique ci-dessus ?

De plus, une bonne définition de la connexité devrait très vite s'associer à un théorème de nature opératoire, qui indique quelles opérations la caractérisent, et il faudrait que ces opérations puissent se généraliser commodément du contexte binaire aux images plus « colorées » (c'est-à-dire, pratiquement, être des opérations croissantes).

Enfin, même dans le cadre ensembliste, les situations de connexité ne se ramènent pas toutes à décrire des objets d'un seul tenant. Un objet en mouvement rapide, apparaît dans une

séquence d'images non pas comme un continuum mais plutôt en pointillés. C'est ce qui se produit quand on filme un oiseau qui vole ou une balle de ping pong. Comment rendre compte qu'il s'agit bien d'un objet connexe de l'espace-temps ?

# 2. le concept de connexion

Ces critiques ont conduit J. Serra à proposer une nouvelle façon de voir, qui à la fois généralise ce qui précède, et devienne plus opératoire. Pour marquer la différence avec les connexités habituelles du traitement d'image, il a donné le nom de *connexion* à ce concept [à cette époque, 1985/1986, G. Matheron venait de formaliser la théorie du filtrage morphologique ([15], ch.6), et les deux auteurs cherchaient à construire des filtres morphologiques et connexes ([15], ch.7)].

La notion de connexion repose sur l'idée de ne pas considérer la relation (1), de stabilité conditionnelle pour la réunion, comme une conséquence, mais au contraire comme un axiome essentiel, ce qui conduit à la définition suivante ([15], ch.2) :

**Définition 1 (connexion).** Soit  $E$  un espace arbitraire. On appelle classe connexe, ou connexion  $\mathcal{C}$  toute famille dans  $\mathcal{P}(E)$  telle que

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{C}$  et quel que soit  $x \in E$ ,  $\{x\} \in \mathcal{C}$
- (ii) pour toute famille  $\{C_i\}$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $\cap C_i \neq \emptyset$  entraîne  $\cup C_i \in \mathcal{C}$ .

où  $\{x\}$  désigne un singleton, i.e. un élément ponctuel de  $\mathcal{P}(E)$ . Présenter les choses de cette façon modifie sensiblement la donne. Tout d'abord l'arrière plan topologique a complètement (et délibérément) été éliminé, puisqu'aussi bien la relation (1), où n'interviennent que des unions et des intersections relève de l'algèbre des treillis et non pas de la topologie. Deuxièmement, un espace topologique donné induisait une connexité unique, alors qu'on trouvera en général une infinité de connexions dans  $\mathcal{P}(E)$ .

Étant donné un ensemble  $A \in \mathcal{P}(E)$  et un point  $x \in A$ , l'axiome (ii) suggère de prêter une attention particulière à la réunion, elle-même connexe, de toutes les composantes connexes contenant  $x$  et incluses dans  $A$  :

$$\gamma_x(A) = \cup \{C; C \in \mathcal{C}, x \in C \subseteq A\} \quad (2)$$

Le théorème 2, ([15], ch.2) que nous citons maintenant, relie cette expression à des modes opératoires reposant sur des ouvertures, c'est-à-dire à des opérations  $\gamma$  sur  $\mathcal{P}(E)$  qui sont croissantes ( $A \subseteq B \Rightarrow \gamma(A) \subseteq \gamma(B)$ ), idempotentes ( $\gamma\gamma(A) = \gamma(A)$ ) et anti-extensives ( $\gamma(A) \subseteq A$ ) :

**Théorème 2** (ouverture connexe ponctuelle). La donnée d'une connexion  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{P}(E)$  est équivalente à une famille  $\{\gamma_x, x \in E\}$  d'ouvertures de  $\mathcal{P}(E)$  dans lui-même telles que

- (iii) pour tout  $x \in E$ , on ait  $\gamma(\{x\}) = \{x\}$
- (iv) pour tout  $A \subseteq E, x, y \in E, \gamma_x(A)$  et  $\gamma_y(A)$  sont égaux ou disjoints
- (v) pour tout  $A \subseteq E$ , et tout  $x \in E$ , si  $x \notin A \Rightarrow \gamma_x(A) = \emptyset$ .

La proposition dit que si l'on pointe un point  $x$  dans un ensemble  $A$ , il existe une opération capable d'extraire la composante connexe de  $A$  en  $x$  (ou si  $x \notin A$ , l'ensemble vide), et que inversement si une opération de pointage vérifie les conditions du théorème, alors l'image de  $\mathcal{P}(E)$  par les  $\gamma_x$  est une connexion. Voici deux propriétés de base des connexions, qui éclairent sur leur intérêt dans une théorie de la segmentation [la démonstration de la première propriétés se trouve dans [17], l'autre est dans ([15], ch.2)].

• **Treillis des connexions** : l'ensemble de toutes les connexions sur  $\mathcal{P}(E)$  est stable pour l'intersection ; c'est même un treillis complet dans lequel le *supremum* de la famille  $\{C_i, i \in I\}$  est la plus petite connexion contenant  $UC_i$ .

• **Croissance** : si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont deux connexions sur  $\mathcal{P}(E)$ , avec  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ , alors toute  $\mathcal{C}'$ -composante de  $A$  est le *supremum* des  $\mathcal{C}$ -composantes de  $A$  qu'elle majore.

Historiquement parlant, le nombre des applications ou des avancées théoriques suscitées, et permises, par ce théorème est considérable. Publié en 1988, on peut dire qu'il a ouvert la porte à tous les développements sur les opérateurs connexes de la décade 90. Une liste exhaustive serait fort longue, disons simplement que s'y sont illustrés entre autres H. Heijmans [5], Ch. Ronse [12], F. Meyer [8], B. Marcotegui [6], E. Decencière [3], J. Crespo et R.W. Schafer [2], C. Vachier [23], R.M. Haralick [4], P. Salembier [13], F. Zanoguera [24], etc ... Par ailleurs, le concept de connexion que nous présentons ici dans le cadre ensembliste, le plus simple, a été étendu aux treillis complets, ce qui inclut les fonctions et les partitions [17].

Cette dernière notion entretient d'ailleurs avec la connexion des rapports assez étroits, qui apparaissent clairement lorsqu'on la définit de la manière suivante

**Définition 3** (partition).  $E$  désignant un espace quelconque, on dit qu'on le partitionne quand on définit une application  $D$  de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , qui est

- extensive :  $x \in D(x)$
- disjonctive :  $D(x) \cap D(y) = \emptyset$ .

La première condition exprime que les classes  $D(x)$  occupent tout l'espace  $E$ , la seconde que deux classes distinctes n'ont jamais de point en commun. Les partitions d'un ensemble  $E$  forment un *treillis complet*, où l'*infimum* d'une famille  $\{D_i\}$  est la

partition  $D$  dont la classe  $D(x), x \in E$  vaut  $D(x) = \cap D_i(x)$ . Le *supremum* moins simple est donné par la plus petite partition dont chaque classe est la réunion de classes de chacune des  $D_i$ . La proposition 2 montre que toute connexion *partitionne* tous les ensembles  $A$  qu'on lui soumet, et entre autres que si  $A$  est l'espace entier  $E$ , elle constitue une partition de  $E$ . En fait, on a même le résultat plus fort suivant [21] :

**Proposition 4** (partition maximale). Les ouvertures  $\{\gamma_x\}$  de la connexion  $\mathcal{C}$  partitionnent tout ensemble  $A \subseteq E$  en le plus petit nombre possible de composantes appartenant à la classe  $\mathcal{C}$ , et cette décomposition est croissante en ce que si  $A \subseteq B$ , alors toute composante connexe de  $A$  est incluse dans une composante connexe de  $B$ .

### 3. quelques connexions sur $\mathcal{P}(E)$

Comme nous l'avons vu, les habituelles connexités par arcs, digitales ou euclidiennes sont des connexions au sens de la définition 1. En voici deux autres, simples, et qui illustrent bien notre propos. La seconde nous conduira de plus aux segmentation qui vont suivre.

**Connexion par dilatation** : partons d'un espace  $\mathcal{P}(E)$  muni déjà d'une connexion  $\mathcal{C}$  et considérons une dilatation extensive  $\delta : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  qui préserve  $\mathcal{C}$ , i.e.  $\delta(C) \subseteq C$  [Est dilatation toute opération qui commute avec la réunion, i.e.  $\delta(\cup A_i) = \cup \delta(A_i)$  ; l'opération est de plus extensive quand pour tout  $A$  l'on a  $\delta(A) \supseteq A$ ].

L'image inverse  $\mathcal{C}' = \delta^{-1}(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  par  $\delta$  constitue alors une seconde connexion, plus riche que  $\mathcal{C}$ , i.e.  $\mathcal{C}' \supseteq \mathcal{C}$ . Les  $\mathcal{C}$ -composantes de  $\delta(A)$  pour tout ensemble  $A \in \mathcal{P}(E)$ , sont exactement les images selon  $\delta$  des  $\mathcal{C}'$ -composantes de  $A$  ([15], ch.2). Ainsi, si nous dénotons par  $\gamma_x$  l'ouverture connexe associée, et par  $\nu_x$  celle associée à  $\mathcal{C}'$ , il vient

$$\begin{aligned} \nu_x(A) &= \gamma_x \delta(A) \cap A && \text{si } x \in A \\ \nu_x(A) &= \emptyset && \text{sinon} \end{aligned}$$

Si, dans le plan euclidien ou digital, l'on prend par exemple pour  $\mathcal{C}$  la connexion par arcs et pour  $\delta$  la dilatation par un disque de rayon  $r$ , les ouvertures  $\nu_x$  caractérisent les groupes d'objets dont l'inf des distances des points est  $\leq r$ . La figure 1 illustre ce point en « reconnectant » la trajectoire en pointillés d'une balle de ping pong. *A contrario*, la même démarche permet aussi d'extraire les composantes connexes isolées dans un ensemble  $A$ , puisque pour elles, on a  $\nu_x(A) = \gamma_x(A)$ .

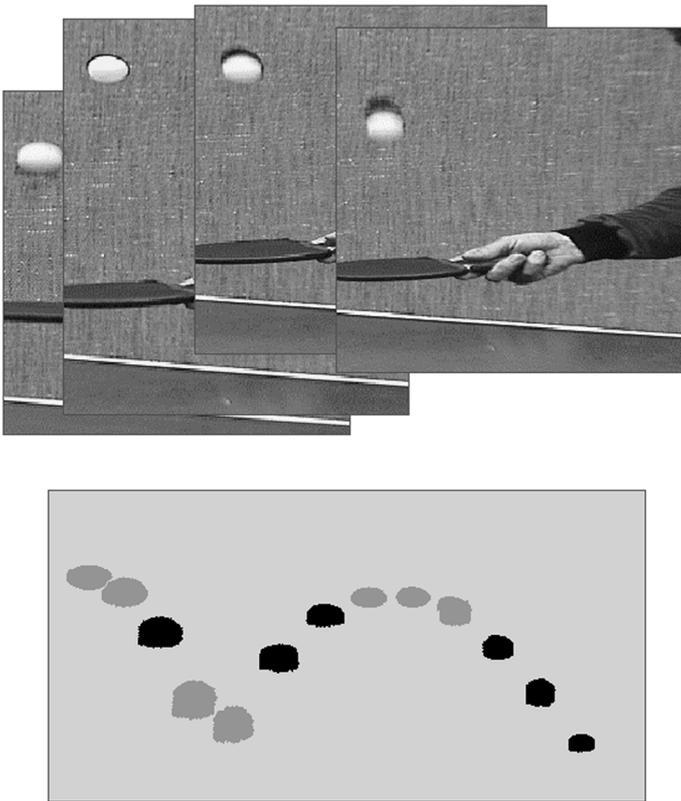


Figure 1. – Mouvements d'une balle de ping-pong : les trois groupes en gris, plus les particules noires sont les composantes relatives à la connexion par dilatation  $C'$ .

**Connexion induite par une partition.** Considérons une partition  $D$  fixée, et un point  $x \in E$ . L'opération qui, à tout  $A \subseteq E$ , fait correspondre

$$\begin{aligned} \gamma_x(A) &= D(x) \cap A && \text{si } x \in A \\ \gamma_x(A) &= \emptyset && \text{sinon} \end{aligned}$$

est manifestement une ouverture, et quand  $x$  varie les  $\gamma_x(A)$  et  $\gamma_y(A)$  sont identiques ou disjoints puisqu'ils correspondent à des classes de partitions. La proposition 2 montre alors que la classe

$$C = \{\gamma_x(A), x \in E, A \in \mathcal{P}(E)\}$$

est une connexion. On notera que  $C$  brise les composantes connexes habituelles et regroupe les morceaux, quand ils sont dans une même classe  $D(x)$ . Si  $E$  est doté d'une connexion préalable  $C'$ , comme la connexion par arcs usuelle, alors les éléments de  $C \wedge C'$  sont les composantes connexes au sens de  $C'$  des intersections  $A \cap D(x)$ . Cette connexion est constamment impliquée dans les opérations de segmentation.

## 4. critères et segmentation

En traitement d'image, on dit qu'on a *segmenté* une image, ou une séquence, lorsqu'on a partitionné l'espace où elle est définie en zones homogènes au regard d'un critère que l'on s'est donné. Par exemple, si l'on représente cette image par une fonction numérique  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  où  $E$  est un ensemble équipé d'une connexion, on *segmente*  $f$  en zones plates et connexes lorsqu'on crée la partition  $D$  de  $E$  telle que pour tout  $x \in E$  la classe  $D(x)$  est la plus grande composante connexe de  $E$  contenant le point  $x$  et sur laquelle la fonction  $f$  est constante et égale à  $f(x)$ . Les critères portant sur  $f$  ne se prêtent pas tous à un tel découpage. Supposons par exemple qu'on veuille partitionner  $E$  en zones, connexes ou pas, où la fonction  $f$  est Lipschitz de paramètre unité. On risque fort bien de trouver trois zones disjointes  $A, B$ , et  $C$  telles que le critère soit vérifié sur  $A \cup B$  et sur  $A \cup C$ , mais pas sur  $B \cup C$ . Dans ce cas, il n'existe pas de *plus grande composante* contenant les points de  $A$  et où le critère soit réalisé. Donc pas de segmentation.

En d'autres termes les partitions auxquelles l'idée de segmentation fait référence sont *maximales* en ce sens que parmi tous les découpages de l'espace en zones plates (par exemple), il en est un qui conduit aux classes les plus grandes. On a d'ailleurs aussi un plus petit découpage, à savoir celui qui pulvérise l'espace  $E$  en tous ses points.

Ces remarques nous conduisent à donner une expression plus formelle, donc plus précise, aux deux notions de critère et de segmentation [21] :

**Définition 5** (critère). Soient  $E$  et  $T$ , deux espaces arbitraires, et  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions de  $E$  dans  $T$ . On appelle critère  $\sigma$  sur la classe  $\mathcal{F}$  toute fonction binaire de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{P}(E)$  dans  $\{0, 1\}$  telle que pour chaque fonction  $f \in \mathcal{F}$  et pour chaque ensemble  $A \in \mathcal{P}(E)$  l'on ait

$$\begin{aligned} \text{soit } \sigma(f, A) &= 1 \text{ (on dit que le critère est vérifié)} \\ \text{soit } \sigma(f, A) &= 0 \text{ (on dit qu'il ne l'est pas)} \end{aligned}$$

On pose de plus conventionnellement que pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}$ , tous les critères sont vérifiés sur l'ensemble vide

$$\sigma(f, \emptyset) = 1 \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

Lorsqu'on dit par exemple que pour l'ensemble  $A$  et la fonction  $f$  la fonctionnelle  $\sigma$  est vérifiée si  $A$  est réduit à un point ou si

$$\inf\{f(x), x \in A\} \geq t_0 \text{ et } \sup\{f(x), x \in A\} \leq t_1$$

avec  $t_0$  et  $t_1$  fixés, on construit un critère, celui du seuillage.

**Définition 6** (segmentation). Étant donné une fonction  $f \in \mathcal{F}$  et un critère  $\sigma$ , soit  $\{D_i, i \in I\}$  la famille, non vide, des partitions de  $E$  en zones homogènes de  $f$  selon  $\sigma$ . On dit que le

critère  $\sigma$  segmente les fonctions lorsque pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}$

$$1- \sigma[f, \{x\}] = 1 \text{ pour tout } \{x\} \in \mathcal{P}(E) ;$$

2- la famille  $\{D_i\}$  est stable pour la réunion.

La partition  $\bigvee D_i$  définit alors la segmentation de  $f$  selon  $\sigma$ .

C'est cette partition maximale qui fait défaut dans le critère ci-dessus du découpage de l'espace en fonctions k-Lipschitz. La première condition nous garantit que quel que soit le critère, il y a toujours au moins une manière de segmenter  $E$  en zones (les points) qui le vérifient.

## 5. critères connectifs

Nous nous proposons de caractériser les conditions que doit vérifier le critère  $\sigma$  pour devenir un outil de segmentation. L'apparition de partitions maximales, comme aussi bien l'exemple des zones plates nous orientent vers l'axiomatique des connexions par l'intermédiaire du concept de *critère connectif*.

**Définition 7.** Un critère  $\sigma : \mathcal{F} \otimes \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, 1]$  est connectif

1- quand il est vérifié sur la classe  $\mathcal{S}$  des singletons

$$\forall f \in \mathcal{F}, \{x\} \in \mathcal{S} \implies \sigma[f, \{x\}] = 1$$

2- et quand pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}$  et pour toute famille  $\{A_i\}$  dans  $\mathcal{P}(E)$  l'on a

$$\bigcap A_i \neq \emptyset \wedge \sigma[f(A_i)] = 1 \implies \sigma[f(\bigcup A_i)] = 1$$

Autrement dit, si le critère  $\sigma$  est vérifié par la fonction  $f$  sur un ensemble de régions  $A_i$  de l'espace, et que ces régions ont un point en commun, alors est aussi vérifié sur la réunion  $\bigcup A_i$ . Les critères connectifs caractérisent le processus de segmentation, comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 8.** Considérons deux ensembles arbitraires  $E$  et  $T$ , et une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions  $f : E \rightarrow T$ . Soit d'autre part  $\sigma$  un critère sur la classe  $\mathcal{F}$ . Les deux premiers énoncés suivants entraînent alors le troisième :

1- le critère  $\sigma$  est connectif

2- pour chaque  $f \in \mathcal{F}$ , les ensembles sur lesquels le critère  $\sigma$  est vérifié engendrent une connexion  $\mathcal{C}$  :

$$\mathcal{C} = \{A \mid A \in \mathcal{P}(E) \text{ et } \sigma[f, A] = 1\}$$

3- le critère  $\sigma$  segmente toutes les fonctions de la classe  $\mathcal{F}$ .

**Preuve.** (1  $\rightarrow$  2) Soit  $\sigma$  un critère connectif sur  $\mathcal{F}$  et soit  $f \in \mathcal{F}$ . Appelons  $\mathcal{C}$  l'image inverse du nombre 1 selon  $\sigma$  selon l'équation (4). Si  $A_i$  est une famille d'intersection non vide dans  $\mathcal{C}$ , alors, selon la relation (3), on a  $\bigcup A_i \in \mathcal{C}$ . De plus, comme tous les singletons et l'ensemble vide appartiennent à  $\mathcal{C}$ , cette classe est donc une connexion.

(2  $\rightarrow$  3) Si la classe  $\mathcal{C}$  définie par la relation (4) est une connexion, alors le théorème de partitionnement maximal entraîne que  $\mathcal{C}$  partitionne tout ensemble, et en particulier  $E$  entier en ses composantes connexes maximales vérifiant le critère  $\sigma$ . Comme cela reste vrai pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}$ , le critère  $\sigma$  induit une segmentation.

Le théorème (8) n'aurait pas pu être énoncé dans le cadre de la seule connectivité par arcs : beaucoup de critères de segmentation ne mettent pas en jeu de chemins, comme par exemple la connexion par sauts présentée plus loin. En fait, la notion de connexion possède *exactement* le niveau de généralité pour que son identification à la segmentation soit possible.

Quant au théorème (8), il appartient à cette catégorie de résultats qui reformulent une définition impossible à mettre en œuvre (comment savoir si une partition du plan est la plus grande possible ?) en critères plus manipulables. Mais par lui-même le théorème ne fournit aucune recette pour découvrir tel ou tel « bon » critère connectif.

Voici maintenant deux propositions qui aident à combiner les segmentations entre elles. On en trouvera les démonstrations dans [21].

**Proposition 9.** Lorsque la fonction  $f \in \mathcal{F}$  est fixée, la famille  $\sum$  de tous les critères connectifs forme un inf demi-treillis où l'infimum correspond à l'intersection logique des critères, et où le plus petit élément est la partition de l'espace en ses singletons.

On remarquera que bien que  $E$  n'ait pas été doté d'une connexion au départ, le critère connectif lui en fournit une. Inversement, si  $E$  est déjà équipé de la connexion  $\mathcal{C}'$ , l'intersection  $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ , qui est une connexion, engendre à son tour une partition maximale pour l'intersection des deux contraintes, d'après la proposition (9). Par exemple, le critère « la fonction  $f$  est constante sur  $A$  » conduit à partitionner  $E$  selon toutes les valeurs de seuil de  $f$ . Si l'on impose en plus que  $A$  doive être connexe (au sens de  $\mathcal{C}'$ ), on obtient alors la segmentation de  $f$  en zones plates et connexes présentée plus haut. La bonne propriété de « et » logique des critères connectifs n'a malheureusement pas de contrepartie pour le « ou », car le *supremum* de partitions ne met pas en jeu des classes sur lesquelles un seul critère au moins serait vérifié. La proposition ci-dessous montre cependant qu'en posant le problème différemment, on peut préciser sous quelles conditions le « ou » logique de critères connectifs signifie quelque chose.

**Proposition 10.** Soit  $f \in \mathcal{F}$ , une fonction donnée, et  $\{D_i, i \in I\}$  une famille de segmentations de  $f$  de critères  $\{\sigma_i, i \in I\}$ . Le supremum  $D' = \vee D_i$  est aussi la plus grande partition de  $E$  en classes où un critère  $D_i$  au moins est vérifié si et seulement si chaque classe  $D'(x)$  de  $D_i$  est simultanément une classe d'une partition  $D_i$  au moins.

En pratique, cette proposition sert surtout lorsque la classe non ponctuelle  $D_{i_0}(x)$  recouvre des classes ponctuelles pour tous les autres critères  $\sigma_i, i \neq i_0$ .

## 6. niveaux de généralité

Il est remarquable que, dans tout ce qui précède, nous soyons arrivés à identifier les segmentations des fonctions  $f : E \rightarrow T$  à certaines familles de connexions sans avoir doté ni l'espace de départ  $E$ , ni celui d'arrivée  $T$  de la moindre propriété. On peut aller plus loin encore, car dans aucune des définitions (6), (7), pas plus que dans le théorème (8), ni dans les deux propositions (9) et (10) qui en découlent, une structure de type  $\mathcal{P}(E)$  n'est impérative. Si l'on remplace  $\mathcal{P}(E)$  par un treillis complet  $\mathcal{L}$ , il suffit que  $\mathcal{L}$  possède une classe  $\mathcal{S}$  de sup-générateurs pour que les résultats précédents restent valables (les sup-générateurs sont là pour garantir l'existence d'une partition maximale, tout comme les singletons dans le cas de  $\mathcal{P}(E)$ ). Or, cette généralisation n'est pas inutile quand on sait par exemple l'usage espaces de graphes que font Ph. Salembier et F. Marques [14], ou F. Meyer [9], ou encore C.S. Tzafestas et P. Maragos [22], pour ne citer que ces auteurs. On peut citer encore les treillis visqueux [20] comme cas typique impossible à réduire à un espace de type  $\mathcal{P}(E)$ . Un treillis visqueux courant est celui qu'on obtient en remplaçant tous les ensembles du plan euclidien par leur dilaté de Minkowski selon un disque compact : les formes sont simplifiées et les contours, plus convexes, permettent d'obtenir des segmentations aux frontières plus régulières.

Nous poursuivons maintenant cette présentation en illustrant la théorie de quelques exemples. Il serait fort long, et assez vain de passer au crible le bon millier d'algorithmes de segmentation de la littérature ; le lecteur intéressé trouvera déjà dans [21] un survol plus complet et plus critique aussi. Ici nous cherchons surtout à illustrer les propositions théoriques principales à l'aide d'exemples pertinents sur le plan pratique.

## 7. segmentations selon des critères de cheminements

**Segmentation lisse.**  $E$  est maintenant un espace métrique, de distance  $d$ , et le treillis  $T$  la droite achevée. Une fonction  $f$  est localement lipschitzienne sur un ensemble  $A$ , et de portée une boule de rayon  $a$ , lorsque pour tous  $x, y \in A$  on a

$$d(x, y) \leq a \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k \cdot d(x, y).$$

Ce critère est manifestement connectif, puisqu'aussi bien la réunion de plusieurs régions de ce type, même d'intersection vide, est encore localement lipschitzienne. Toutefois, l'expression du critère sur  $A$  nécessite la connaissance de  $f$  sur le dilaté de  $A$  par la boule de rayon  $a$  (et pas seulement sur  $A$  lui-même). Lorsque  $E$  est l'espace euclidien, avec sa connexité par arcs, le critère se prête à une interprétation très géométrique. Considérons une composante connexe  $A$  où  $f$  est localement lipschitzienne, et deux points quelconques  $x$  et  $y$  dans  $A$ . Si nous relient  $x$  à  $y$  par une ligne incluse dans  $A$ , alors la fonction  $f$  est lipschitzienne tout au long de cette ligne ; qui plus est, la fonction reste lipschitzienne dans les dilaté de cette ligne par la boule de rayon  $a$ . En pratique, c'est pour  $a = 1$  que l'on obtient les meilleurs résultats : la connexion correspondante est alors appelée *connexion lisse*.

**Segmentation par ouverture/fermeture.** Le critère précédent détecte, certes, des zones localement lipschitziennes, mais tout en les réduisant par érosion selon la boule de rayon  $a$ . Les bandes limitrophes entre deux plages homogènes ont pour épaisseur  $2a$  (cf. figure 2-b), et deviennent dans la partition maximale des ensembles de classes réduites chacune à un point. D'où l'idée d'améliorer ce premier critère en prenant pour classes  $A_i$  les régions où la fonction  $f$  coïncide avec son ouvert et avec son fermé selon le crayon  $H$  :

$$\begin{aligned} x \in A_i &\Leftrightarrow f(x) = [(f \ominus H) \oplus H](x) \\ &= [(f \oplus H) \ominus H](x). \end{aligned}$$

Comme le précédent, ce nouveau critère est connectif, mais segmente selon une partition plus grande (cf. figure 2-c).

**Segmentation par zones quasi-plates.** Au lieu d'imposer que  $f$  soit lipschitzienne le long de *tous* les chemins inclus dans  $A$ , on peut aussi exiger seulement qu'il y en ait au moins un. Ce nouveau critère, plus généreux, est encore connectif. Il conduit à la connexion selon les zones « quasi-plates » de F. Meyer [8]. La mise en œuvre digitale passe cette fois-ci par des reconstructions géodésiques.

**Lignes de partage des eaux.** Citons enfin l'une des plus anciennes connexions par cheminement, à savoir la ligne de partage des eaux. Le critère « tous les points de  $A$  sont inondés à partir d'un même minimum » étant connectif, la LPE segmente l'espace de définition  $E$  en bassins versants connexes par arc, plus en un ensemble de composantes connexes ponctuelles qui constituent les lignes de partage.

## 8. segmentations à base de connexions par sauts

**Segmentation par variation d'amplitude.** Considérons le critère manifestement connectif suivant

$$d(x, y) \leq a \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \kappa$$

Son implémentation s'opère avec un élément structurant  $H$  porté par deux plans et contenant d'une part l'origine et de l'autre le disque centré verticalement, de rayon  $a$  et de cote  $-\kappa$ . Pour l'interpréter géométriquement, introduisons le *module d'accroissement*  $\alpha$  comme

$$\alpha_b(f) = (\delta_b f - f) \vee (f - \varepsilon_b f) \quad (5)$$

où  $\delta_b$  et  $\varepsilon_b$  sont respectivement la dilatation et l'érosion par la boule fermée de rayon  $b$ . Le seuillage de  $\alpha_b(f)$  pour les valeurs  $\leq \kappa$  fournit alors les classes de la partition. Comme on peut s'y attendre cette  $\rho$ -continuité est plus sensible aux lentes dérivées que les précédentes. Si par exemple on rajoute à l'image initiale précédente une dérivée croissant de gauche à droite (cf. la figure 3), la segmentation des deux images des figures 3 a et c, obtenue pour les mêmes valeurs de paramètres ( $\kappa = 6, a = 7$ ), montre une différence notable. À l'opposé, la segmentation des deux mêmes images par continuité lipschitzienne locale (érosions) est pratiquement insensible à la présence d'une dérivée.

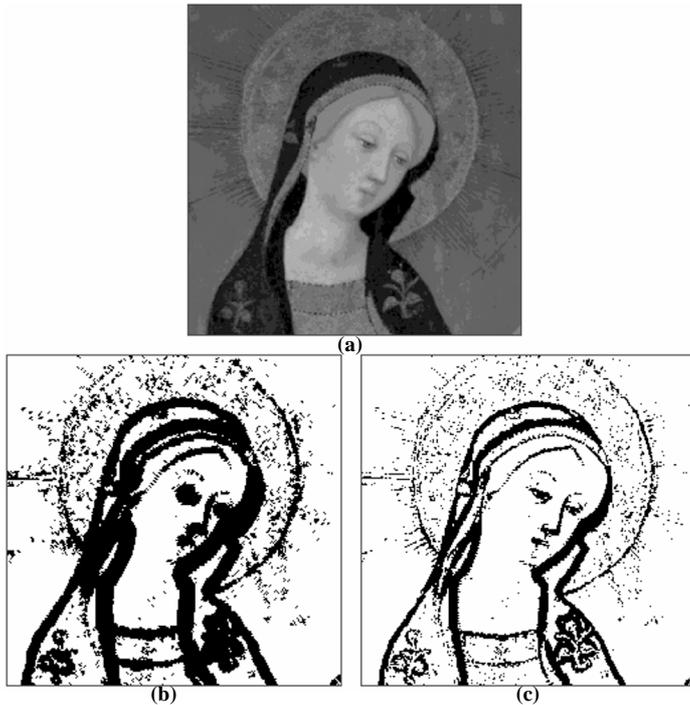


Figure 2. – a) Image initiale (256 × 256 pixels sur 8 bits) ; b) zones localement lipschitziennes par érosion pour H(6,7) (en blanc) ; c) zones localement lipschitziennes par ouverture pour H(6,7) (en blanc). En noir, zones dont tous les points sont des composantes connexes.

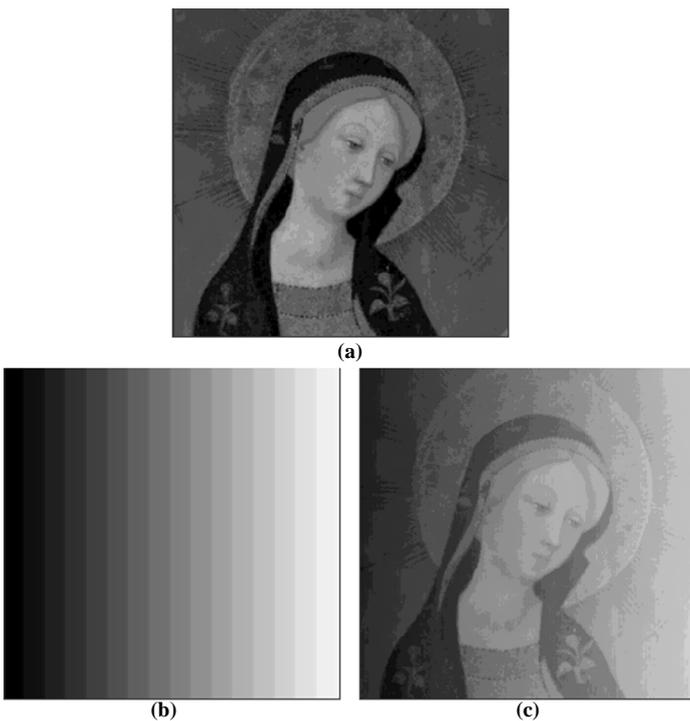


Figure 3. – a) Image initiale ; b) dérivée ; c) somme pondérée de a) plus b).

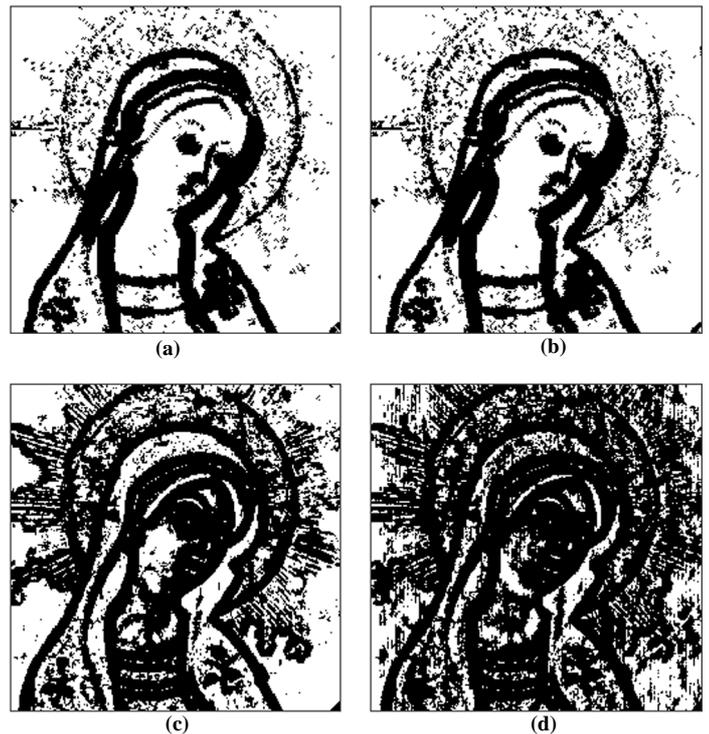


Figure 1. – Segmentations du portrait de la Vierge, sans dérivée puis avec selon la continuité lipschitzienne [ a) et b)], et selon la continuité à variation bornée [ c) et d)].

**Connexion par sauts.** On améliore sensiblement la connexion précédente en fixant les origines des variations aux minima ou aux maxima de la fonction  $f$ . Pour une variation d'amplitude  $k$  donnée, considérons l'ensemble des composantes connexes dont les points  $z$  accusent un dénivelé  $f(z) - m$  au dessus d'un minimum  $m$  tel que  $0 < f(z) - m \leq k$ , puis celles de dénivelés  $k < f(z) - m \leq 2k$ , puis  $2k < f(z) - m \leq 3k$ , etc... La segmentation selon ce critère, manifestement connectif, engendre la *connexion par sauts*. La procédure alternative à partir des maxima se construit par dualité, et l'on peut combiner les deux dans une démarche symétrique, où la remontée s'arrête quand elle rencontre une descente, et où les zones à cheval entre montée et descente sont subdivisées [18].

En pratique la segmentation par sauts s'avère l'une des meilleures par la qualité des partitions qu'elle engendre (peu de zones ponctuelles, classes visuellement significatives), ainsi que par son économie en temps de calcul. Non seulement pyramidale au sens qu'elle dépend d'un paramètre, elle engendre des semi-groupes granulométriques lorsqu'on restreint les valeurs du paramètre aux progressions géométriques. Lorsqu'on trace le graphe du nombre de zones plates en fonction de l'amplitude du saut, les changements de pente de la courbe repèrent les valeurs de sauts dont les segmentations sont les plus significatives. La figure 5 illustre ce point. Une connexion peut servir à en renforcer une autre. Ainsi les connexions lisses de la figure 6 sont elles améliorées quand on en prend l'infimum avec une connexion par sauts de paramètre convenable.

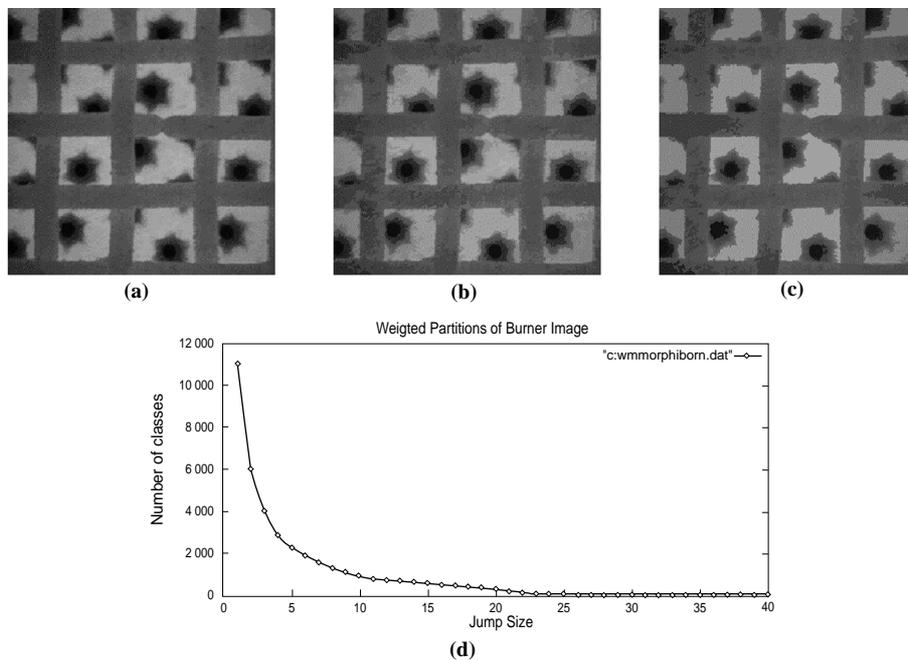


Figure 5. – *a*) Image initiale : brûleur de gaz ; *b*) saut d'amplitude 12 : 783 zones ; *c*) saut d'amplitude 24 : 63 zones ; *d*) nombre de zones en fonction des amplitudes des sauts .

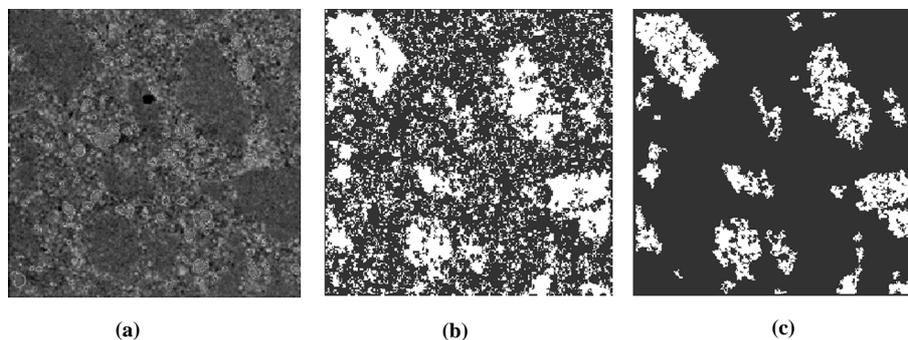


Figure 6. – *a*) Micrographie électronique de roche ; *b*) connexion par sauts d'amplitude 12 ; *c*) intersection des connexions par sauts (intensité 12) et lisse (intensité 6).

## 9. filtres connexes ensemblistes

Après l'application des connexions à la segmentation, que nous venons de voir, en voici un autre usage. Il s'agit maintenant de filtrer les images, c'est-à-dire les simplifier plus ou moins, en ôter des bruits éventuels, mais tout en préservant les structures majeures et leur qualité visuelle. Nous y parviendrons en construisant des *filtres connexes*, et en particulier les ouvertures et fermetures par reconstruction, puis les nivellements. Nous supposons ici  $\mathcal{P}(E)$  muni de la connexion  $\mathcal{C}$  fixée. Les deux familles de composantes connexes de l'ensemble  $A$  (les « grains ») et de  $A^c$  (les « pores ») partitionnent l'espace  $E$ . On dit d'une opération  $\psi$  sur  $\mathcal{P}(E)$  qu'elle est *connexe* lorsque la partition associée à  $\psi(A)$  est plus grossière que celle associée à  $A$ , i.e. quand toute classe de  $\psi(A)$  est réunion de classes de  $A$  [16]. Ainsi, prendre le complément d'un ensemble, supprimer certains de ses grains, ou encore combler certains pores, constituent autant d'opérateurs connexes.

Par ailleurs, des opérations sont appelées *filtres morphologiques* quand elles sont

- *croissantes* :  $A \subseteq B \subseteq E \Rightarrow \psi(A) \subseteq \psi(B) \subseteq E$
- *idempotentes* :  $\psi(\psi(A)) = \psi(A)$  pour tout  $A \subseteq E$

Nous avons déjà rencontré l'ouverture  $\gamma$ , ou filtre anti-extensif ( $\gamma(A) \subseteq A$ ). L'opérateur qui lui est dual pour la complémentarité se nomme la fermeture, et se note  $\varphi$  ( $\varphi(A) = [\gamma(A^c)]^c$ ). La fermeture est croissante et idempotente, mais extensive ( $\varphi(A) \supseteq A$ ).

### 9.1. ouverture par reconstruction

Les filtres connexes dérivent des *ouvertures par reconstruction*. Une définition formelle de ces dernières apparaît dans [15], chapitres 7 et 8, mais leur usage remonte aux années 70. On obtient une ouverture par reconstruction en partant d'un critère croissant  $\tau$  (par exemple « l'aire de  $A$  est  $\geq 10$  »), auquel on associe l'ouverture triviale

$$\begin{aligned} \gamma^\tau(A) &= A && \text{quand } A \text{ vérifie le critère} \\ \gamma^\tau(A) &= \emptyset && \text{sinon} \end{aligned}$$

L'ouverture par reconstruction selon le critère  $\tau$  est alors construite en appliquant le critère à tous les grains de  $A$ , indépendamment les uns des autres et en prenant la réunion des résultats

$$\gamma(A) = \cup \{ \gamma^\tau \gamma_x(A), \quad x \in E \}$$

La fermeture duale, dite elle aussi par reconstruction, porte sur les pores. Par exemple, pour le critère  $\tau$  qui consiste à avoir une aire  $\geq 10$ ,  $\varphi(A)$  est formé de  $A$  plus de tous ses pores qui ont une aire  $\leq 10$ .

### 9.2. nivellements ensemblistes

Les nivellements ont été introduits par F. Meyer, [8], comme opérateurs connexes agissant sur les fonctions numériques digitales et définies sur  $\mathbf{R}^2$  muni d'une connexité par arcs. La théorie a été développée aussi par G. Matheron [7] et J. Serra [19]. Ici, nous partirons d'une définition binaire, mais dans le cadre d'un espace  $E$  quelconque, qu'on munit de la connexion  $\mathcal{C}$ .

Deux ensembles  $A$  et  $M$  de  $\mathcal{P}(E)$  sont adjacents lorsqu'ils sont disjoints, et qu'on peut trouver une composante connexe dans  $A$  et une autre dans  $M$  dont la réunion est connexe. Quand deux ensembles sont soit sécants, soit adjacents, nous dirons qu'ils se touchent, se qui se note  $A \parallel M$  («  $A$  touche  $M$  »).

Considérons alors l'ouverture par reconstruction formée de tous les grains de  $A$  qui touchent un marqueur donné  $M$

$$\gamma_M(A) = \cup \{ \gamma_x(A), \quad x \in E, \quad \gamma_x(A) \parallel M \}$$

La fermeture duale  $\varphi_M(A)$  est le complément de la réunion des pores de  $A$  qui touchent  $M$ . Dans la suite, c'est la fermeture  $\varphi_{M^c}(A)$  qui intervient, c'est-à-dire la réunion de  $A$  et de ses pores ne touchant pas  $M^c$ . Il vient alors le théorème suivant [19] :

**Proposition 11.** *Étant donné un marqueur  $M \subseteq E$ , les deux opérations  $\gamma_M$  et  $\varphi_{M^c}$  commutent. Si l'on appelle nivellement leur produit  $\lambda_M$ , on a*

$$\lambda_M = \gamma_M \varphi_{M^c} = \varphi_{M^c} \gamma_M$$

Plusieurs propriétés dérivent de ce résultat clé. Tout d'abord, le nivellement  $\lambda_M$  est un filtre morphologique (croissant et idempotent) sur  $\mathcal{P}(E)$ . De plus, sa robustesse assez exceptionnelle s'exprime par relation

$$\begin{aligned} A, B \subseteq E, \lambda_M(A) \cap A &\subseteq \lambda_M(B) \\ &\subseteq \lambda_M(A) \cup A \\ \Rightarrow \lambda_M(A) &= \lambda_M(B) \end{aligned}$$

Les petites variations ne perturbent pas le nivellement  $\lambda_M$  : on dit qu'il est un filtre fort.

Si maintenant on rend variable le paramètre  $M$ , et que l'on considère la double application  $(A, M) \rightarrow \lambda(A, M)$  de  $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , alors le nivellement  $\lambda$  est une opération croissante et *auto-duale*, i.e.

$$\lambda(A^c, M^c) = [\lambda(A, M)]^c$$

Enfin, on peut fixer l'ensemble  $A$  étudié et laisser variable le marqueur  $M$ , notant cette fois  $\lambda_A$  l'application de  $\mathcal{P}(E)$  dans lui-même qui en résulte. Il convient ici d'introduire l'ordre de l'activité pour les ensembles [7], noté  $\preceq$  et associé à tout paramètre ensembliste  $A$  par les relations

$$\begin{aligned}
 M_1 \cap A \subseteq M_2 \cap A \\
 M_1, M_2 \subseteq E & \Leftrightarrow M_1 \preceq_A M_2 \\
 M_1 \cap A^C \subseteq M_2 \cap A^C
 \end{aligned}$$

Vis-à-vis de l'activité des marqueurs  $M$ , les nivellements  $\lambda_A$  forment un *semi-groupe granulométrique* [19]

$$M_1 \preceq_A M_2 \Rightarrow \lambda_{\lambda_A(M_1)}(M_2) = \lambda_{\lambda(M_2)}(M_1) = \lambda_A(M_2)$$

Ce dernier résultat est fort utile en pratique, car il permet de doser l'action des marqueurs : il signifie qu'on peut implémenter directement un marqueur très actif, ou, indifféremment, l'atteindre par une série d'étapes intermédiaires. On dispose d'une *pyramide* de transformations.

## 10. passage aux fonctions numériques

L'extension des ouvertures par reconstruction et des nivellements aux fonctions numériques va de soi. Désignons par  $T$  un treillis totalement ordonné tel que  $[0, 1]$  ou  $[0, \infty]$  ou  $\overline{\mathbf{R}}$  ou  $\overline{\mathbf{Z}}$  ou une suite finie de réels, et par  $T^E$  la famille des fonctions *numériques*, c'est-à-dire des fonctions  $f : E \rightarrow T$ .

Pour tout opérateur ensembliste croissant  $\Psi$ , il existe un et un seul opérateur  $\psi$  appliquant  $T^E$  dans lui-même et tel que

$$X[\Psi(f), t] = \psi[X(f, t)] \tag{6}$$

où  $X(f, t)$  représente le seuil de la fonction  $f$  à la cote  $t$ , c'est-à-dire :

$$X(f, t) = \{x : x \in E, f(x) \geq t\}$$

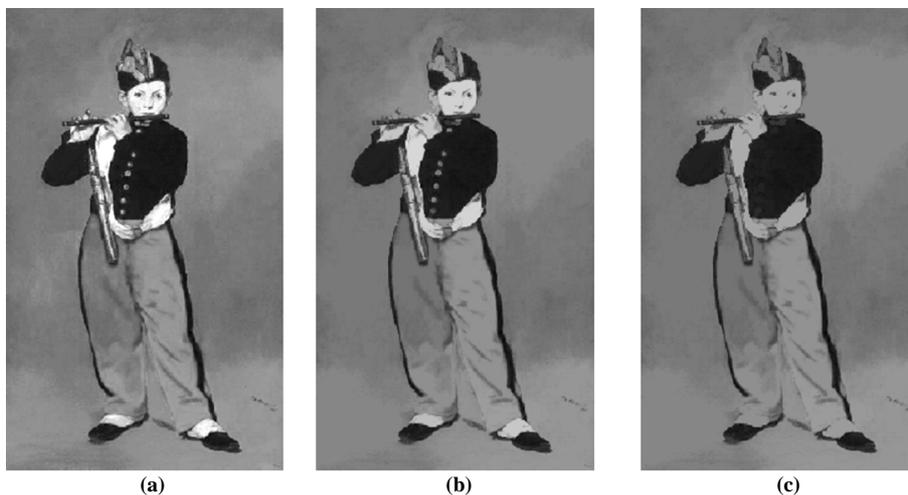


Figure 7. – a) Joueur de flûte, de E. Manet ; b) (resp. c)) nivellement en prenant pour marqueur les extrema de dynamique >50 (resp. >80).

En imagerie digitale, la relation (6) suffit à caractériser  $\Psi$ . Autrement dit, lorsqu'on connaît une opération croissante ensembliste  $\psi$ , cette relation nous donne les sections horizontales des transformées par l'opérateur  $\Psi$  numérique associé (algorithmiquement, on procède plus directement, en remplaçant les unions et intersections des formules binaires par des sup et des inf). La règle s'applique aux nivellements binaires, puisqu'ils sont croissants. Les nivellements numériques ainsi créés continuent de vérifier les trois propriétés fondamentales énoncées plus haut, à savoir la proposition 3, l'auto-dualité et la structure de semi-groupe granulométrique.

Les deux exemples que l'on peut voir en figures 7 et 8 illustrent ces divers aspects, et montrent en particulier le rôle crucial du choix du marqueur. En figure 7, il est obtenu en remplaçant la fonction initiale  $f$  (le portrait du fifre de Manet) par zéro en dehors des extrema de  $f$  de dynamique  $\geq k$ , et laissant la fonction inchangée sur ces extrema. Les maxima de dynamique  $\geq k$  de  $f$  sont ceux dont le dénivelé avec le point selle le plus proche est  $\geq k$ . Les minima de dynamique  $\geq k$  s'obtiennent par dualité. Les nivellements associés sont présentés en figure 7a et 7b pour les marqueurs  $g_{50}$  et  $g_{80}$ , de dynamique 50 et 80, sur 256 niveaux de gris. L'action progressive des marqueurs, qui sont ordonnés pour l'ordre  $\leq f$ , apparaît quand on confronte les photographies 5a et 5b. On notera la préservation relativement bonne des détails fins tels que les boutons, les yeux, les sourcils, les doigts, etc... dès qu'ils ont une dynamique suffisante. Enfin, si l'on part de la figure 7b et qu'on lui applique le second marqueur on trouve encore la figure 7c : il n'est pas nécessaire de revenir à l'image initiale pour progresser.

Le second exemple figure 8 est obtenu en remplaçant la fonction initiale  $f$  (le portrait du fifre de Manet, artificiellement bruité) par un lissage gaussien de taille 5, qui estompe le bruit, mais arrondit les contours. Le nivellement associé est présenté en figure 8c. Dans ces deux exemples, le marqueur étant autodual par construction, l'ensemble de la procédure est autoduale (*i.e.* le nivellement de  $-f$  est l'opposé du nivellement de  $f$ ).

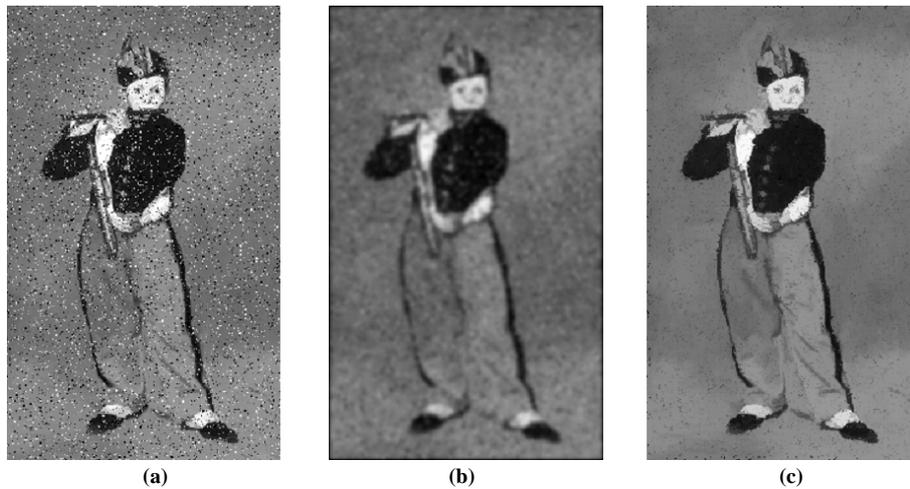


Figure 8. – a) Joueur de fifre de Manet, avec un fort bruit ; b) correction par lissage gaussien (taille 5) ; c) nivellement de l'image bruitée par le marqueur gaussien.

## 11. discussion et conclusion

Si, contrairement à l'usage, nous n'avons guère évoqué de bibliographie en début de cet article, c'est que derrière l'énorme foisonnement des algorithmes de segmentation se profilent très peu de méthodes générales. Inventorier les premiers eût été inutilement fastidieux ; quant aux secondes, il est préférable de les soumettre à l'esprit critique du lecteur lorsque celui-ci connaît déjà la démarche proposée ici. Il peut alors mieux comparer les avantages et les inconvénients des unes et des autres. Pour cette discussion nous ne retiendrons que deux approches générales de la segmentation, toutes deux remarquables, et qui en recouvrent d'autres plus partielles. La première est due à Ph. Salembier et F. Marquès [14] et date de 1999. Ces deux auteurs cherchent moins un concept géométrique, comme nous l'avons fait ici, qu'à décrire une stratégie générale. Ils remarquent que « la segmentation universelle » n'existant pas, on ne peut guère espérer mieux qu'un compromis entre un premier niveau de segmentation selon des critères génériques communs à toutes les images usuelles, suivi d'une seconde étape, plus spécifique de chaque problème. Par rapport à notre approche, la leur est pour ainsi dire transversale. Nous n'avons pas recherché la pertinence de tel ou tel critère, alors que c'est de ce point de vue que se placent Ph. Salembier et F. Marquès. Inversement, que l'on prenne le premier ou le second niveau de leur stratégie, les segmentations qu'ils envisagent devront porter sur des critères connectifs pour garantir l'unicité du résultat. Les auteurs signalent d'ailleurs à plusieurs reprises dans leur texte les dangers des algorithmes qui ne conduisent pas à des partitions optimales (ceux du type « *split and merge* » en particulier).

La deuxième étude qui propose un point de vue différent est le livre de J.M. Morel et S. Solimini, intitulé *Variational Methods in Image Segmentation* [10], en date de 1995. Pour eux, le

concept d'optimum ne saurait s'exprimer autrement que par la minimisation d'une fonction numérique. La plus célèbre des fonctionnelles proposées en analyse d'image est due à D. Mumford et J. Shah [11] et s'écrit comme la somme de trois intégrales prises sur le domaine de définition de l'image. Le premier terme introduit une distance entre l'image et sa segmentation, le second les fluctuations dans chaque classe de la partition et le troisième la longueur des frontières.

Bien que beaucoup d'algorithmes de segmentation se ramènent à la minimisation d'une somme pondérée de ces trois termes, et aussi par ailleurs à une partition maximale, les deux théories restent profondément différentes. Le fait de prendre en considération directement les partitions assure l'unicité de la segmentation, et permet de construire des combinaisons de critères connectifs (sup, inf,...). Mais cette démarche ne conduit pas *ipso facto* à une formule générique pour obtenir les bonnes partitions. À l'inverse, la théorie variationnelle ne garantit pas l'unicité : plusieurs partitions différentes peuvent correspondre au même minimum de la fonctionnelle. D'autre part, celle-ci forme un tout, et se prête mal à un discours progressif en plusieurs étapes successives ou parallèles.

La théorie proposée ici repose très peu sur les propriétés des espaces mis en jeu (l'espace de départ est un treillis sup généré, et celui d'arrivée est arbitraire), et c'est en fait la segmentation qui enrichit l'espace de départ, en la dotant d'une connexion. La méthode par variation de fonctionnelle, à l'inverse, a besoin de points pour exprimer les fonctionnelles (*i.e.* un espace  $E$  et non  $\mathcal{P}(E)$  ou treillis), et n'obtient de résultats puissants sur les longueurs de frontières que lorsque  $E = \mathbb{R}^2$ .

Enfin, et nous concluons sur ce point, au-delà de la diversité de leurs propriétés, ce sont davantage des différences de sensibilité, ou de style, qu'opposent ces méthodes. La démarche de Ph. Salembier et F. Marquès adhère de près à l'action, celle de J.M. Morel et S. Solimini, totalisante, n'est pas sans rappeler la quête

d'une grande formule numérique, unique, qui dominerait toutes les lois de la physique. La nôtre, enfin, essaye de rester autant que possible dans le champ géométrique, et de combiner de façon optimale les informations multiples dont il est l'objet.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Choquet, *Topologie*, Academic Press, N.Y., 1966.
- [2] J. Crespo, R.W. Schafer, Locality and adjacencystability constraints for morphological connected operators. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 7, 1, 85-102, 1997.
- [3] E Decencière Ferrandière, S. Marshall, J. Serra, Application of the morphologic geodesic reconstruction to image sequence analysis. *IEEE Proceedings : Vision, Image and Signal Processing*, 144(6) : p. 339-344, 1997.
- [4] R.M. Haralick, L.G. Shapiro, *Computer and robot vision*. vol. I. Addison Wesley, p. 191-198, 1992.
- [5] M.J.A.M. Heijmans, Connected morphological operators. Tech. Rep. CWI No PNA-R9708, April 1997.
- [6] B. Marcotegui, F. Meyer, Morphological segmentation of image sequences. In *Mathematical Morphology and its applications to image processing*, Serra J. and Soille P. eds., Kluwer, p. 101-108, 1994.
- [7] G. Matheron, Les nivellements. Tech. Rep. École des Mines de Paris, n° N-07/97/MM, Feb. 1997.
- [8] F. Meyer, The levelings. In *Mathematical Morphology and its applications to image and signal processing*, H. Heijmans and J. Roerdink eds., Kluwer, 1998.
- [9] F. Meyer, An overview of morphological segmentation. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*. 15(7) : 1089-1118, 2001.
- [10] J-M. Morel and S. Solimi, *Variational Methods in Image Segmentation*, Birkhäuser Boston, 1995.
- [11] D. Mumford and J. Shah, Boundary Detection by Minimizing Functionals, in *Image Understanding*, S. Ulmann and W. Richards Eds, 1988.
- [12] C. Ronse, Set theoretical algebraic approaches to connectivity in continuous or digital spaces. *JMIV*, vol. 8, p. 41-58, 1998.
- [13] P. Salembier, J. Serra, Flat zones filtering, connected operators, and filters by reconstruction *IEEE Transactions on Image Processing*. , vol. 4, n° 8, p. 1153-1160, August 1995.
- [14] P. Salembier, F. Marqués, Region-based representations of image and video : Segmentation tools for multimedia services, *IEEE Transactions on circuits and systems for video technology*, vol. 9, n° 8, p.1147-1167, December 1999.
- [15] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*. vol. 2, Serra J. ed. London : Acad. Press, 1988.
- [16] J. Serra, P. Salembier, Connected operators and pyramids. In *SPIE*, vol. 2030, *Non linear algebra and morphological image processing*, San Diego, p. 65-76, July 1993.
- [17] J. Serra, Connectivity on complete lattices, *JMIV*, vol. 9, p. 231-251, 1998.
- [18] J. Serra, Connectivity for sets and functions, *fundamenta Informaticae*, 41, 147-186, 2000.
- [19] J. Serra, Set Connections and Discrete filtering, in *Lecture notes in Computer Science*, Nb1658 G. Bertrand, M. Couperie, L. Perroton, (Eds.) p.191-206, Springer 1999.
- [20] J. Serra, Viscous lattices (Proc. ISMM 2002), *Mathematical Morphology*, H. Talbot, R. Beare, Edts. CSIRO Sydney, p 79-90, 2002.
- [21] J. Serra, Segmentation, rap. tech. EMP N-06/03/MM, 25 p., mars 2003.
- [22] C. Tzafestas, P. Maragos, Shape Connectivity, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol.17, n° 2, p 109-129, sept 2002.
- [23] C. Vachier, *Extraction de caractéristiques, segmentation d'images et morphologie mathématique*, thèse École des Mines de Paris, 1995.
- [24] M-F. Zanoguera, *Segmentation interactive d'images fixes et de séquences video basée sur des hiérarchies de partitions*, thèse École des Mines de Paris, 200 p., décembre 2001.

Manuscrit reçu le 9 septembre 2002

### LES AUTEURS

Jean SERRA



Jean SERRA est né en 1940, de nationalité française. En coopération avec G. Matheron, il a créé la morphologie mathématique dans les années 60, dans le but de décrire les formes et les textures de phénomènes naturels, à diverses échelles. Il est directeur de recherches à l'École des Mines de Paris et Docteur honoris causa de l'Université Autonome de Barcelone. Son ouvrage majeur est un traité en deux volumes intitulé « Image Analysis and Mathematical Morphology » (1982, 1988). Ces cinq dernières années, ses principales contributions portent sur les connexions, la segmentation et la couleur. Il a créé en 1993 la société internationale de morphologie mathématique.