

Estimation de mouvements et reconstruction d'images à partir de séquences à faible flux

Displacement estimation and image reconstruction from low-level sequences

par Mireille GUILLAUME, Salah BOURENNANE et Fabrice HERRMANN

Institut Fresnel, Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille,
Domaine Universitaire de Saint-Jérôme, 13397 Marseille cedex 20 France

résumé et mots clés

Nous présentons une méthode de reconstruction d'images spatiales à partir de séquences à très faible flux, acquises par un capteur en mouvement avec une vitesse moyenne constante et perturbé par des translations aléatoires. La vitesse moyenne et les déplacements aléatoires sont estimés pour corriger le flou de bougé, et nous montrons que la modélisation du mouvement permet la reconstruction du champ imagé avec une très bonne précision. Nous présentons également un filtrage de Kalman original, adapté à cette situation d'observation, et qui permet une caractérisation et un suivi des paramètres du mouvement.

Traitement d'image, reconstruction d'images, bruit de Poisson, séquence d'images, faible flux, théorie bayésienne de l'estimation, maximum de vraisemblance, maximum *a posteriori*, images astronomiques, filtre de Kalman.

abstract and key words

We present a method for image reconstruction from a sequence at very low photon-level. In this method, developed in the general context of the estimation theory, we consider a sensor with constant celerity, perturbed by random displacements. We study the case where the deterministic celerity is unknown and is estimated with different estimators, and we show that the observed field is reconstructed with very good precision. We present a Kalman filter, adapted to this observed data, and which allows to re-estimate and to track the parameters of the movement.

Image processing, image reconstruction, Poisson noise, image sequence, low photon, Bayesian estimation theory, maximum likelihood, maximum *a posteriori*, astronomical images, Kalman filter.

1. introduction

Nous considérons ici le problème du flou de bougé pour des images spatiales à faible flux. Dans ce cadre, la théorie bayésienne de l'estimation permet, à partir d'un modèle en adéquation avec les données observées, de reconstruire des images en réduisant le flou, que l'on dispose d'une seule image [1] ou d'une séquence d'images [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13].

Nous avons récemment présenté [14], [15] des études pour la reconstruction d'images acquises par un détecteur à comptage de photons, pour la mission FOCA, expérience d'observation du ciel dans l'ultraviolet à partir d'un ballon stratosphérique. Ces études ont été menées pour une direction d'observation fixe, perturbée par des déplacements aléatoires du capteur. Nous les prolongeons ici au cas où le capteur est en mouvement de translation uniforme, perturbé par des translations aléatoires, situation qui peut être celle d'une observation satellitaire. L'estimation des translations aléatoires permet la reconstruction d'une image sans flou de bougé.

En section 2, nous présentons les modèles utilisés pour l'estimation du mouvement. Nous considérons deux modèles :

Dans le premier modèle, le déplacement est décrit comme la somme d'une composante déterministe (la vitesse \times le temps écoulé depuis la position initiale), et d'une composante aléatoire. Ce modèle est utilisé pour l'estimation du mouvement dans le cadre de la théorie bayésienne, et nous recherchons des estimateurs du maximum de vraisemblance et des estimateurs du maximum *a posteriori* pour le déplacement, que la vitesse soit connue ou inconnue.

Le deuxième modèle utilisé est associé à un filtre de Kalman adapté à la situation d'observation, qui permet le suivi de la trajectoire du capteur de façon évolutive.

Enfin, en section 3, nous présentons et nous comparons les résultats obtenus avec les deux modèles de mouvement considérés.

2. modèles et développements théoriques

2.1. données observées

Les adresses des photons détectés par le capteur sont délivrées par intervalles de temps T (trames) et permettent de former des séquences d'images à très faible flux (typiquement quelques centaines à quelques milliers de photons par image), chaque image étant décalée par rapport aux autres en raison du mouve-

ment du capteur. L'image finale est reconstruite par sommation des images de la séquence après correction du mouvement. La détermination des vecteurs de déplacement des images est ainsi prépondérante pour la qualité de l'image reconstruite.

Dans la suite de notre étude, et en accord avec le type d'images observées, nous supposons que :

- 1) La scène ne varie pas pendant le temps d'observation (la position et l'intensité des étoiles reste constante).
- 2) Le bruit présent dans les images est uniquement du bruit de photons dû à la nature discrète du flux observé.
- 3) La turbulence atmosphérique est inexistante.
- 4) Le capteur est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, perturbé par des translations aléatoires (les rotations sont négligeables).

De plus, nous ne cherchons pas à corriger la fonction d'étalement des appareils d'optique, celle-ci étant par ailleurs bien connue. Le flou considéré est donc uniquement du flou de bougé.

Dans l'étude qui suit, nous adopterons une notation unidimensionnelle pour les images. En outre, nous noterons les matrices en gras et majuscule et les vecteurs en gras et minuscule.

Notons \mathbf{r} l'image à reconstruire et $r(i)$ la valeur de \mathbf{r} au pixel i . L'image \mathbf{r} est non bruitée et sans mouvement du capteur, nous l'appellerons image de référence. Soit $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_p)$ la séquence d'images bruitées obtenues à partir du capteur en mouvement. j_p désigne le décalage de l'image \mathbf{s}_p par rapport à l'image de référence et $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_p)$ est le vecteur déplacement.

L'image de référence \mathbf{r} est supposée inconnue et de taille infinie. Chaque image observée \mathbf{s}_p est de taille finie. Nous appellerons \mathbf{w} le support de cette image. La valeur $s_p(i)$ de l'image \mathbf{s}_p au pixel i est égale au nombre de photons arrivant en ce pixel pendant une trame. C'est donc la réalisation d'une variable aléatoire de Poisson. L'image 1-a présente un exemple des champs que nous devons reconstruire. Cette image est obtenue par simulation à partir d'un modèle réaliste (ici, modèle d'image dans une région de la voie lactée). Une image de la séquence à faible flux est générée par simulation en effectuant un tirage aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu(i) = \lambda \times r(i)$ pour chaque pixel i . La constante λ détermine le nombre moyen de photons par image, et est choisie égale à $5 \cdot 10^{-3}$ pour nos simulations, ce qui correspond à 500 photons environ pour une image de la séquence de taille 256×256 pixels. L'image 1-b est la somme de 24600 images à faible flux, exemple d'une image mesurée par le capteur pendant sa trajectoire.

La fonction de vraisemblance pour la séquence d'images en mouvement est :

$$L(\mathbf{S}|\mathbf{r}, \mathbf{j}) = \prod_{p=1}^P \prod_{i=-\infty}^{+\infty} e^{[-\lambda \cdot r(i) \cdot w(i-j_p)]} \frac{[\lambda \cdot r(i) \cdot w(i-j_p)]^{s_p(i-j_p)}}{s_p(i-j_p)!}, \tag{1}$$

fonction qui sera utilisée dans la suite pour l'estimation des grandeurs inconnues.

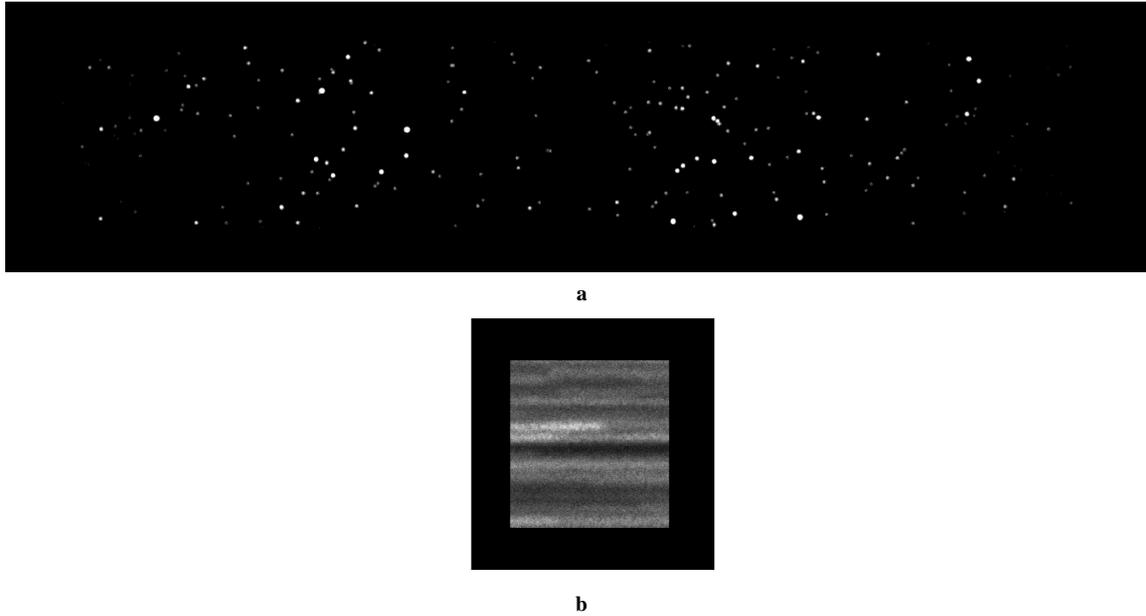


Figure 1. – a : exemple d'image de référence \mathbf{r} dans une fenêtre de taille 1624×384 pixel s; b : image somme de 24600 images (256×256 pixels) d'une séquence observée par le capteur avant d'effectuer le recalage. Le mouvement est de un pixel toutes les 20 images suivant l'axe horizontal et l'écart type de la composante aléatoire est de 7 pixels environ.

2.2. estimation bayésienne et premier modèle du mouvement

Rappelons que j_p désigne le déplacement de l'image numéro p de la séquence par rapport à un point fixe de l'image de référence \mathbf{r} . Nous notons ici d_p la partie aléatoire du déplacement de l'image numéro p . Ainsi, nous pouvons modéliser le déplacement total de chaque image de la séquence de la manière suivante :

$$j_p = pvT + d_p \quad (2)$$

$$d_p = ad_{p-1} + \sigma e_p \quad (3)$$

Chaque image de la séquence est décalée aléatoirement d'une quantité d_p par rapport à une trajectoire rectiligne uniforme de vitesse v , e_p est un bruit blanc gaussien de variance égale à 1 et de moyenne nulle. De plus, la variable aléatoire d_p suit un modèle autorégressif d'ordre un, c'est à dire que le mouvement aléatoire est corrélé si $a \neq 0$, et a est le coefficient de corrélation. Il a été montré [16] que ce modèle simple permet de décrire le mouvement aléatoire du capteur de façon réaliste, en déterminant le coefficient a à l'aide des équations de Yule Walker. Pour simplifier les notations nous poserons $T = 1$, et la vitesse v sera exprimée en pixels par image.

2.2.1. estimation du vecteur \mathbf{j} lorsque la vitesse est connue

Méthodologie

Nous avons envisagé deux points de vue pour l'estimation du vecteur des déplacements \mathbf{j} : l'estimation au sens du maximum de vraisemblance (*MV*), et l'estimation au sens du maximum *a posteriori* (*MAP*), chacune de ces stratégies conduisant à optimiser un critère suivant les valeurs de \mathbf{j} . L'image de référence et les déplacements étant inconnus, le couple (\mathbf{r}, \mathbf{j}) est estimé en résolvant les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{S}|\mathbf{r}, \mathbf{j})}{\partial r(i)} = 0 \\ \frac{\partial L(\mathbf{j}|\mathbf{r}, \mathbf{S})}{\partial j} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

pour le *MV*, et :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{S}|\mathbf{r}, \mathbf{j})}{\partial r(i)} = 0 \\ \frac{\partial P(\mathbf{j}|\mathbf{r}, \mathbf{S})}{\partial j} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

pour le *MAP*.

La première équation du système 4 (resp. du système 5) permet d'exprimer l'estimation $\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{j}}^{\text{MV}}$ de \mathbf{r} en fonction de \mathbf{j} :

$$\hat{r}_j^{MV}(i) = \frac{1}{\lambda \sum_{p=1}^P w(i - j_p)} \sum_{p=1}^P s_p(i - j_p), \quad (6)$$

et dans la deuxième équation du système 4 (resp. du système 5) on remplace \mathbf{r} par l'expression 6. Il est à noter que, ne pouvant pas trouver analytiquement la solution de cette deuxième équation, nous la chercherons numériquement en posant $\hat{\mathbf{j}}_{MV} = \arg \max_{\mathbf{j}} \left\{ \ln L(\mathbf{S} | \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{j}}^{MV}, \mathbf{j}) \right\}$ pour le *MV*, et

$\hat{\mathbf{j}}_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{j}} \left\{ \ln P(\mathbf{j} | \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{j}}^{MV}, \mathbf{S}) \right\}$ pour le *MAP*. Ainsi, les déplacements et l'image de référence sont estimés de manière conjointe et itérative.

Remarquons que l'image la plus vraisemblable $\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{j}}^{MV}$ est l'image moyenne observée en chaque pixel, divisée par λ . Le poids $\sum_{p=1}^P w(i - j_p)$ représente le nombre d'images observées contribuant à l'estimation de \mathbf{r} au pixel i . Il permet de conserver la même dynamique pour l'ensemble de l'image estimée.

La vitesse v étant connue, il suffit d'estimer le vecteur des déplacements, noté $\mathbf{d} = [d_1, \dots, d_p, \dots, d_P]^T$.

Solution du Maximum de Vraisemblance

Cette solution est donnée par le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{S} | \mathbf{r}, \mathbf{j})}{\partial r(i)} = 0 \\ \hat{\mathbf{j}}_{MV} = \arg \max_{\mathbf{j}} \{ \ln [L(\mathbf{S} | \mathbf{r}_{\mathbf{j}}, \mathbf{j})] \}. \end{cases} \quad (7)$$

D'après l'équation 1, on peut montrer que :

$$\hat{\mathbf{j}}_{MV} = \arg \max_{\mathbf{j}} \left\{ \sum_p \sum_i s_p(i - j_p) \ln [\hat{r}_{MV}(i)] \right\}, \quad (8)$$

que l'on écrira :

$$\hat{\mathbf{j}}_{MV} = \arg \max_{\mathbf{j}} \{ C_{MV}^{(1)}(\mathbf{j}) \}. \quad (9)$$

Remarquons que $j_p = pv + d_p$, et que ici, v étant connue, l'optimisation porte sur \mathbf{d} uniquement. Ainsi cette méthode fournit un critère simple, $C_{MV}^{(1)}(\mathbf{j})$, dont l'optimisation permet d'obtenir l'estimateur de \mathbf{j} au sens du *MV*.

Solution du Maximum a posteriori

Nous faisons l'hypothèse que les variables aléatoires \mathbf{r} (représentant les scènes observées) et \mathbf{j} (représentant les mouvements du capteur) sont indépendantes, et que en conséquence $\ln [P(\mathbf{j} | \mathbf{S}, \mathbf{r})] = \ln [P(\mathbf{S} | \mathbf{j}, \mathbf{r})] + \ln [P(\mathbf{j})] + \ln [P(\mathbf{r})]$. Ainsi la solution du *MAP* est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{S} | \mathbf{r}, \mathbf{j})}{\partial r(i)} = 0 \\ \hat{\mathbf{j}}_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{j}} \{ \ln P(\mathbf{S} | \mathbf{j}, \mathbf{r}) + \ln P(\mathbf{j}) \}. \end{cases} \quad (10)$$

A partir du modèle du mouvement, nous pouvons calculer la densité de probabilité de \mathbf{j} lorsque la vitesse du déplacement est v . En effet, la loi de probabilité du vecteur aléatoire $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_P]^T$ est :

$$P(\mathbf{e}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^P} \prod_{p=1}^P \exp \left[-\frac{(e_p)^2}{2} \right]. \quad (11)$$

L'équation 2 permet d'obtenir la probabilité de réalisation du vecteur \mathbf{j} à l'aide du changement de variables $e_p = \frac{d_p - a.d_{p-1}}{\sigma}$:

$$P(\mathbf{j}) = \frac{1}{(\sigma \sqrt{2\pi})^P} \prod_{p=1}^P \exp \left\{ -\frac{[j_p - a.j_{p-1} - v(p - a(p - 1))]^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (12)$$

La solution du système d'équations 10 est obtenue de manière itérative. Chaque itération fournit un couple de valeurs $(\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{j}}^{MV}, \hat{\mathbf{j}})$ qui, à convergence, tend vers $(\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{j}}^{MV}, \hat{\mathbf{j}}_{MAP})$. A chaque itération l'image de référence est remplacée par son estimée $\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{j}}^{MV}$ dans la deuxième équation du système 5. Les quantités j_p et j_{p-1} sont alors les valeurs courantes, estimées à partir de l'image courante $\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{j}}^{MV}$. Bien que nous ne le démontrions pas, nous supposons que la convergence est obtenue pour la valeur de \mathbf{j} qui minimise la probabilité *a posteriori* de \mathbf{j} .

Nous avons vérifié expérimentalement pour un large domaine de valeurs des déplacements et du coefficient de bruitage λ que cette convergence est obtenue numériquement.

La prise en compte du modèle du mouvement permet d'aboutir au critère suivant :

$$\hat{\mathbf{j}}_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{j}} \left\{ C_{MV}^{(1)}(\mathbf{j}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{p=1}^P [j_p - a.j_{p-1} - v(p - a(p - 1))]^2 \right\}, \quad (13)$$

que l'on écrira :

$$\hat{\mathbf{j}}_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{j}} \{ C_{MAP}^{(2)}(\mathbf{j}) \}.$$

Ainsi, la connaissance *a priori* sur le mouvement du capteur apportée par ce modèle vient pénaliser les déplacements j_p qui s'éloignent trop de leur position moyenne $\bar{j}_p = pv$.

Remarque sur les critères d'optimisation utilisés

Lors de la mise en oeuvre de l'optimisation de $C_{MV}^{(1)}(\mathbf{j})$, ce critère s'est avéré instable. En effet, une petite variation des déplacements réels j_p peut conduire à une grande variation des déplacements estimés j_p^{MV} . Remarquons que chaque pixel $r_{\mathbf{j}}^{MV}(i)$ de l'image reconstruite est estimé avec une variance qui dépend du nombre d'images à faible flux participant à cette estimation. Ainsi, pour les pixels placés sur les bords des images, l'estimation de $r_{\mathbf{j}}^{MV}(i)$ est faite avec une erreur quadratique moyenne plus grande que pour les pixels placés au centre, car peu d'images participent à cette estimation à cause du mouvement de la séquence. Nous avons donc décidé de ne pas utiliser le « poids » $\sum_l w(i - j_l)$ qui impose la même dynamique à tous les pixels de l'image reconstruite, et d'utiliser le critère suivant :

$$C^{(1)}(\mathbf{j}) = \sum_p \sum_i s_p(i - j_p) \ln [\hat{r}_{\mathbf{j}}(i)], \quad (14)$$

$$\text{avec } \hat{r}_{\mathbf{j}}(i) = \frac{1}{\lambda \cdot P} \sum_l s_l(i - j_l).$$

Les simulations ont montré que l'optimisation du critère $C^{(1)}(\mathbf{j})$ ne présente pas les mêmes inconvénients que celle de $C_{MV}^{(1)}(\mathbf{j})$. $C^{(1)}(\mathbf{j})$ est donc utilisé à la place de $C_{MV}^{(1)}(\mathbf{j})$ dans toutes les simulations. De même,

$$C^{(2)} = C^{(1)}(\mathbf{j}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{p=1}^P [j_p - aj_{p-1} - v(p - a(p - 1))]^2$$

est utilisé à la place de $C_{MAP}^{(2)}$.

2.2.2. cas où la vitesse est inconnue

Dans de nombreux cas la vitesse du capteur est inconnue. Nous pouvons alors la considérer comme un paramètre auxiliaire et rechercher une estimation du couple (v, \mathbf{d}) . Nous avons considéré ici le cas simple où la direction de v est connue, et seul son module est recherché. Nous avons alors envisagé deux méthodes d'estimation de la vitesse : l'estimation au sens du *MV*, et une méthode d'estimation prenant en compte la connaissance *a priori* apportée par le modèle.

Rappelons que la vitesse est supposée constante au cours du temps.

Estimation de v au sens du *MV*

Nous cherchons à optimiser le critère du *MV*. Les équations 2 et 14 permettent d'obtenir l'estimateur de la vitesse du capteur :

$$\hat{v}_1 = \arg \max_v \sum_i \left\{ \left[\sum_p s_p(i - pv - d_p) \right] \ln \left[\sum_l s_l(i - pv - d_l) \right] \right\}. \quad (15)$$

Dans cette expression, v et d_p sont inconnus. Dans un premier temps nous estimons numériquement v sans faire varier d_p (c'est à dire que les d_p sont tous nuls), en optimisant le critère $C^{(1)}$.

Ceci correspond à un recalage « grossier » de la séquence. Dans un deuxième temps, nous fixons v à la valeur estimée, puis nous optimisons le critère suivant les déplacements aléatoires d_p pour compléter l'estimation de j_p .

Remarquons que le critère du *MV* ne permet pas d'obtenir une expression littérale pour l'estimateur de la vitesse v .

Estimateur de v avec connaissance du modèle

Nous cherchons ici à utiliser la connaissance *a priori* que nous avons sur le mouvement, et en particulier sur le vecteur \mathbf{j} . Ainsi nous recherchons l'estimateur qui maximise la probabilité du vecteur \mathbf{j} , solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial \ln P(\mathbf{j}|v, a, \sigma)}{\partial v} = 0, \quad (16)$$

d'où l'expression de l'estimateur de v :

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{\sum_p [p - a(p - 1)]^2} \sum_p [p - a(p - 1)](j_p - aj_{p-1}). \quad (17)$$

L'obtention de cet estimateur devrait nous permettre, lors du recalage d'une séquence, de maximiser le critère $C^{(1)}$ (ou $C^{(2)}$) simultanément sur les déplacements j_p et sur la vitesse v en remplaçant la vitesse inconnue par son expression en fonction de j_p . Cependant, pour des raisons purement algorithmiques, il est nécessaire d'avoir une bonne estimation de la vitesse v pour commencer l'estimation de la partie aléatoire du mouvement du capteur.

Ainsi, dans un premier temps, nous estimons la vitesse du capteur, puis nous estimons les déplacements j_p en remplaçant v par sa valeur estimée.

2.3. deuxième modèle du mouvement : filtre de Kalman

Dans le problème de reconstruction d'images que nous étudions nous estimons conjointement le vecteur déplacement et l'image reconstruite. Ces deux aspects sont indissociablement liés, mais la grandeur recherchée peut être soit l'image, soit le mouvement. Nous nous plaçons maintenant dans la perspective de l'estimation de trajectoire. Dans ce cas, nous avons vu que l'optimisation du critère $C^{(1)}(\mathbf{j})$ (ou $C^{(2)}(\mathbf{j})$) sur l'image estimée permet de retrouver la position de l'image considérée dans la séquence. Il est ainsi possible d'estimer la position du capteur aux instants échantillonnés pT , pour le modèle du mouvement considéré. Le filtrage de Kalman est largement utilisé dans des problèmes

d'estimation de trajectoires ou d'une manière générale en poursuite [17]. Nous avons cherché à l'adapter à notre problématique.

Le but est donc de proposer une méthode de suivi de trajectoire à partir de la mesure d'une séquence d'images.

2.3.1. modèle développé pour le filtre de Kalman

Appelons T la durée d'observation pour une image et p le numéro de l'image dans la séquence.

Nous cherchons à estimer la position j_p et la vitesse v_p de l'image numéro p dans la séquence, correspondants aux instants échantillonnés $p \cdot T$. De plus nous posons $T = 1$ dans toutes les équations du filtrage de Kalman.

Le vecteur d'état \mathbf{x}_p est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} j_p \\ v_p \end{bmatrix}. \quad (18)$$

L'évolution du système est décrite par l'équation d'état :

$$\begin{bmatrix} j_p \\ v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{p-1} \\ v_{p-1} \end{bmatrix} + \mathbf{b}_{p-1}, \quad (19)$$

où $\mathbf{b}_{p-1} = [b_{1,p-1} \quad b_{2,p-1}]^t$ est un vecteur aléatoire qui décrit le bruit de modèle. Par hypothèse ce bruit est supposé gaussien, blanc, et de moyenne nulle.

Posons $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$. L'équation 19 s'écrit :

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}_{p-1} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}_{p-1}.$$

Cette modélisation suppose que la vitesse du déplacement des images dans la séquence est constante au cours de la mesure. Appelons v cette vitesse (v est en nombre de pixels par intervalle de temps T). Le déplacement ($j_p - j_{p-1}$) entre les images $p - 1$ et p est la somme d'une composante déterministe $T \cdot v$ et d'une composante aléatoire $b_{1,p-1}$. La composante $b_{2,p-1}$ caractérise les éventuelles variations de vitesse générées par le mouvement aléatoire et les erreurs d'estimation sur v .

L'observation z_p du système porte sur la position de l'image p et est décrite par l'équation :

$$z_p = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} j_p \\ v_p \end{bmatrix} + n_p = \mathbf{h}^t \cdot \mathbf{x}_p + n_p. \quad (20)$$

Ici, l'observation z_p n'est pas directe mais est obtenue par une pré-estimation de la position j_p de l'image numéro p . Cette pré-estimation est donnée par une des méthodes de recalage décrites dans le paragraphe 2.2.2. n_p est le bruit de mesure et correspond à l'erreur de pré-estimation dans notre cas.

Nous supposons que le bruit n_p est gaussien, blanc, de moyenne nulle, que les deux bruits \mathbf{b}_p et n_p sont non corrélés. Nous notons σ_z^2 la variance du bruit de mesure n_p et \mathbf{Q}_p la matrice de covariance du bruit de modèle \mathbf{b}_p , les bruits étant supposés stationnaires.

2.3.2. algorithmme

Le filtrage de Kalman comprend une étape de prédiction et une étape de filtrage de la grandeur recherchée, qui est l'état du système.

Nous définissons les grandeurs suivantes :

$E[\bullet|z_p]$ l'estimée linéaire à variance minimale étant donné les mesures z_p ,

$\hat{\mathbf{x}}_{p|p-1} = E[\mathbf{x}_p|z_{p-1}]$ l'estimée de \mathbf{x}_p a priori,

$\hat{\mathbf{x}}_{p|p} = E[\mathbf{x}_p|z_p]$ l'estimée de \mathbf{x}_p a posteriori,

$\tilde{\mathbf{x}}_{p|p-1} = \mathbf{x}_p - \hat{\mathbf{x}}_{p|p-1}$ l'erreur de prédiction,

$\tilde{\mathbf{x}}_{p|p} = \mathbf{x}_p - \hat{\mathbf{x}}_{p|p}$ l'erreur d'estimation,

$\mathbf{P}_{p|p-1}$ la matrice de covariance de l'erreur de prédiction (erreur a priori),

$\mathbf{P}_{p|p}$ la matrice de covariance de l'erreur d'estimation (erreur a posteriori).

L'état initial \mathbf{x}_0 est inconnu. Pour initialiser l'algorithmme, nous utilisons la pré-estimation qui sert d'observation aux instants $p = 0$ et $p = 1$. Ainsi, $\hat{j}_{0|0} = z_0$, et $\hat{v}_{0|0} = \frac{z_0 - z_{-1}}{T}$.

Par définition, la matrice de covariance de l'erreur a posteriori à l'itération p a pour expression :

$$\mathbf{P}_{p|p} = E \left[[\mathbf{x}_p - \hat{\mathbf{x}}_{p|p}] [\mathbf{x}_p - \hat{\mathbf{x}}_{p|p}]^t \right]. \quad (21)$$

Ainsi, la matrice de covariance est initialisée de la manière suivante :

$$\mathbf{P}_{0|0} = \sigma_z^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{T} \\ \frac{1}{T} & \frac{2}{T^2} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Nous reprenons maintenant les trois étapes de la mise en oeuvre du filtre de Kalman : La prédiction, le filtrage et la mise à jour, la période d'échantillonnage étant fixée à $T = 1s$.

Prédiction

L'équation de Kalman est, dans notre cas d'étude :

$$\begin{bmatrix} \hat{j}_{p|p-1} \\ \hat{v}_{p|p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{j}_{p-1|p-1} \\ \hat{v}_{p-1|p-1} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

La matrice de covariance de l'erreur *a priori* sur le vecteur estimé est :

$$\mathbf{P}_{p|p-1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{p-1|p-1} \cdot \mathbf{F}^t + \mathbf{Q}, \quad (24)$$

où \mathbf{Q} est la matrice de covariance du bruit de modèle :

$$\mathbf{Q} = E[\mathbf{b}_p \cdot \mathbf{b}_p^t].$$

Filtrage

On obtient une nouvelle mesure z_p en utilisant l'algorithme du *MV* pour déterminer la position de l'image p observée à l'instant pT . Puis, en utilisant les équations de prédiction du filtre de Kalman, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \hat{j}_{p|p} \\ \hat{v}_{p|p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{j}_{p|p-1} \\ \hat{v}_{p|p-1} \end{bmatrix} + \mathbf{g}_p [z_p - \hat{j}_{p|p-1}], \quad (25)$$

où $\mathbf{g}_p = \mathbf{P}_{p|p-1} \mathbf{h}_p [\mathbf{h}_p^t \mathbf{P}_{p|p-1} \mathbf{h}_p + \sigma_z^2]^{-1}$ est le gain de Kalman.

Mise à jour du gain et de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction

L'actualisation est faite d'après l'équation :

$$\mathbf{P}_{p|p} = [\mathbf{I}_2 - \mathbf{g}_p \mathbf{h}_p^t] \mathbf{P}_{p|p-1} = [\mathbf{I}_2 - \mathbf{g}_p [1 \ 0]] \mathbf{P}_{p|p-1}, \quad (26)$$

avec :

$$\mathbf{g}_p = \mathbf{P}_{p|p-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[[1 \ 0] \mathbf{P}_{p|p-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_z^2 \right]^{-1}. \quad (27)$$

En pratique, la pré-estimation est réalisée au fur et à mesure du traitement des données. Ainsi, à l'instant p , l'observation z_p est calculée par la méthode du *MV* sur la séquence d'images (s_0, \dots, s_p) . Ensuite, nous estimons \hat{j}_p .

3. mise en œuvre des algorithmes et résultats

3.1. stratégie d'optimisation pour l'estimation bayésienne

Le déplacement total dans la direction de la vitesse est tel qu'il n'est pas nécessaire de considérer toutes les images de la séquence en même temps, car les premières images de la séquence sont spatialement disjointes des dernières. Nous découpons donc la

séquence d'images en plus petites séquences de taille *taillebloc* que nous nommerons « blocs » auxquels nous appliquons l'algorithme de recalage basé sur l'optimisation du critère $C^{(1)}$ ou $C^{(2)}$. Pour assurer la jonction entre les blocs lors de la reconstruction de l'image, deux blocs successifs ont en commun la moitié de leurs images. (cf. figure 2)

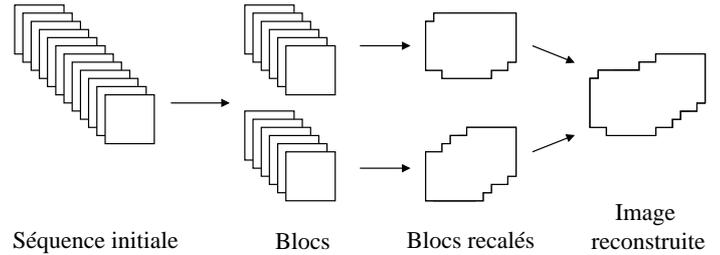


Figure 2. – Recalage par blocs : La séquences d'images bruitées est divisée en séquences plus petites nommées « blocs ». Chaque bloc est recalé indépendamment des autres. Le raccord entre deux blocs est assuré par l'information commune à deux blocs successifs.

L'algorithme d'optimisation est un algorithme itératif de type gradient. La recherche de la valeur optimale de j_p se fait à l'intérieur d'une fenêtre spatiale de taille choisie, chaque image du bloc étant considérée successivement. Une itération est effectuée lorsque chaque image du bloc a été déplacée à la position j_p de la fenêtre qui optimise le critère choisi, que cela soit $C^{(1)}$ ou $C^{(2)}$. Pour la totalité de la séquence, deux possibilités sont envisagées :

- itérer jusqu'à arriver à convergence du critère sur chaque bloc avant de passer au bloc suivant (algorithme « bloc »)
- effectuer une seule itération sur chaque bloc avant de passer au bloc suivant, jusqu'à arriver à convergence du critère pour l'ensemble des blocs (algorithme « itération »).

3.2. résultats de l'estimation bayésienne avec vitesse connue

Pour comparer ces deux stratégies, nous recalons la séquence illustrée par l'image 1 avec les mêmes décalages initiaux, avec les deux algorithmes. Les paramètres de l'étude sont présentés dans la table 3.2.

La figure 3 représente pour chaque algorithme, les positions résiduelles (position initiale moins position estimée) des images dans la direction Ox (direction du mouvement déterministe) pour l'estimation du maximum de vraisemblance et l'estimation du maximum *a posteriori*.

Quel que soit l'algorithme utilisé, les images sont recalées autour d'une dérive globale, qui correspond à une translation globale de l'image reconstruite et n'est pas gênante si elle reste constante.

Estimation de mouvements et reconstruction d'images

Table 1. – Résultats obtenus pour le MV et le MAP avec les deux stratégies de recalage pour un décalage aléatoire d'écart-type 7,07 pixels et une vitesse de 1/20 pixel par image.

algorithme et taille fenêtre pix.	images non recalées MV	images non recalées MAP	nbre de calculs
« itérations », $f = 20 \times 20$	0,08 %	0,08 %	$5 \cdot 10^7$
« blocs », $f = 20 \times 20$	0,7 %	0,8 %	$5 \cdot 10^7$
« blocs », $f = 60 \times 60$	< 0,01 %	< 0,01 %	$4 \cdot 10^8$

On peut en conclure que les deux stratégies sont opérantes. L'avantage de l'algorithme « bloc » est qu'il n'est pas nécessaire de connaître l'ensemble des données pour effectuer le recalage, celui-ci pouvant être effectué au fur et à mesure des acquisitions. L'avantage de l'algorithme « itérations » est de nécessiter une taille de fenêtre de recherche moins grande, ce qui réduit le nombre de calculs à effectuer.

Dans les cas que nous avons examinés, l'introduction de connaissance *a priori* sur les déplacements de la séquence n'a pas permis d'amélioration notable des résultats, l'erreur d'estimation étant déjà faible sans utiliser cette connaissance *a priori*. Le champ reconstruit est présenté en figure 4.

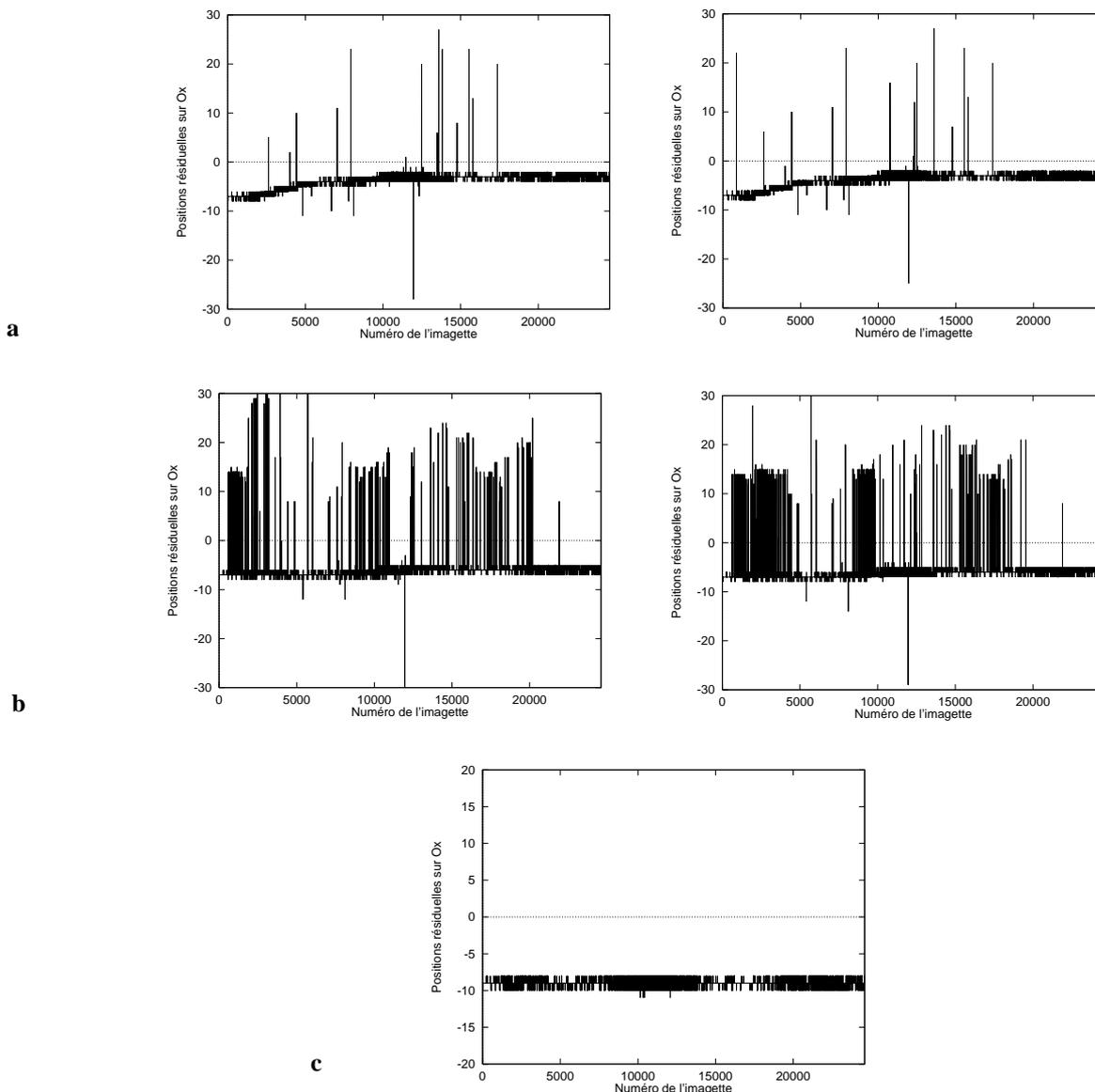


Figure 3. – Positions résiduelles en pixels dans la direction Ox après le recalage de la même séquence avec le même mouvement initial et au bout de 5 itérations, en fonction du numéro p de l'image dans la séquence) ; a : algorithme « itération » (à gauche, résultats du MV et à droite, résultats pour le MAP) ; b : algorithme « bloc » (à gauche, résultats du MV et à droite, résultats pour le MAP). Pour ces résultats, nous avons utilisé une fenêtre de recherche de 20×20 pixels ; c : algorithme « bloc » avec une fenêtre de recherche de 60×60 pixels. La séquence est formée de 24600 images, $\lambda = 5 \cdot 10^{-3}$, l'écart-type du mouvement est $\sigma = 7,07$ pixels, et la vitesse $v = 0.05$ pixel par image.



Figure 4. – Champ reconstruit. Le mouvement du capteur est de 1 pixel toutes les 20 images et le mouvement aléatoire a un écart-type $\sigma = 7,07$ pixels.

3.3. résultats de l'estimation bayésienne avec vitesse inconnue

Lorsque la vitesse est inconnue, celle-ci est dans un premier temps estimée, puis la valeur estimée est introduite dans l'algorithme de recherche des déplacements. Nous comparons en table 2 les résultats obtenus avec les deux estimateurs que nous avons présentés, pour deux séquences d'images différentes. La première (resp. deuxième) séquence est obtenue à partir de l'image 1, avec une vitesse de 1 pixel (resp. 4 pixels) toutes les 20 images et un déplacement aléatoire du capteur d'écart-type de 7,07 pixels.

Table 2. – Estimation de la vitesse pour les deux estimateurs \hat{v}_1 et \hat{v}_2 .

Vitesse vraie (pixels/ 20 images)	\hat{v}_1 (pixels/ 20 images)	\hat{v}_2 (pixels/ 20 images)
$v = 4,00$	3,96	3,79
$v = 1,00$	0,96	0,98

Les deux méthodes donnent des résultats proches et globalement, les vitesses estimées sont inférieures aux vraies valeurs. Ceci introduit, lors de l'estimation des déplacements, un retard qui s'accumule au fil des images de la séquence (voir exemple en figure 5) et qui se traduit par une dérive pour les positions estimées dans la direction Ox (direction du mouvement déterministe). La précision obtenue par les deux méthodes d'estimation n'est pas toujours suffisante pour recalibrer parfaitement la séquence d'images.

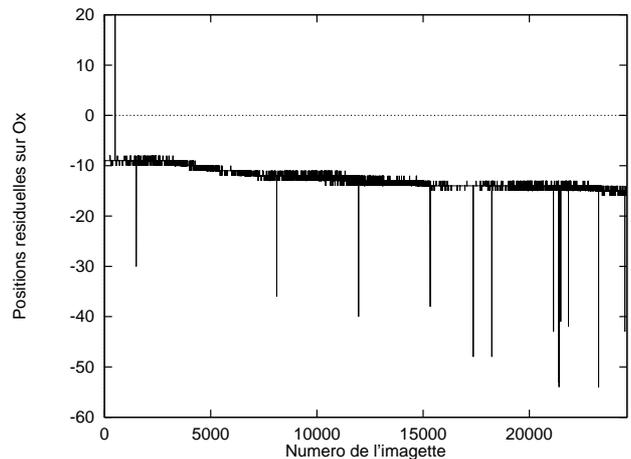


Figure 5. – Positions résiduelles en pixels dans la direction Ox en fonction de la position de l'image dans la séquence), après dix itérations de l'algorithme « itération ». $\lambda = 5.10^{-3}$, $\sigma = 7,07$ pixels, $v = 1/20$ pixel par image, la vitesse estimée est $\hat{v}_2 = 0.98/20$ pixel par image. La taille de la fenêtre est 30×30 pixels et la séquence est de 24600 images.

3.4. résultats obtenus avec le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman appliqué aux mouvements des section 3.2 et 3.3 n'a pas permis d'améliorer les résultats (nous ne présenterons pas ceux-ci en détail dans cet article), aussi nous avons évalué cette méthode pour d'autres paramètres du mouvement. Dans ces simulations, la vitesse moyenne est plus grande et la partie aléatoire des déplacements plus petite que dans les simulations présentées en section 3.2 et 3.3. En effet ces valeurs représentent mieux une application que nous envisageons pour cette étude, qui est l'estimation de la trajectoire d'un satellite à partir d'observation d'images à faible flux. Comme conséquence de la vitesse élevée, le nombre d'images de la séquence est plus faible si le champ imagé est le même.

Nous considérons une séquence de 300 images, générée à partir de la même référence 1. Les « blocs » sont constitués de 30 images. On choisit $T = 1$, ainsi la vitesse v est en pixels par image. Les paramètres de la simulation sont donnés dans la table 3.

Estimation de mouvements et reconstruction d'images

Table 3. – Paramètres de la simulation.

paramètre	valeur	description
λ	$5 \cdot 10^{-3}$	paramètre de bruitage de la séquence
v	4 pixels/image	vitesse moyenne
σ	2,12 pixels	écart-type du mvt aléatoire
σ_z	3 pixels	écart-type de n , bruit de mesure
\mathbf{Q}	$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \sigma^2$	matrice de covariance de \mathbf{w} , bruit de modèle

La figure 6 présente d'une part, les positions résiduelles des images après une estimation au sens du maximum de vraisemblance et, d'autre part, les positions résiduelles des images après

une estimation avec le filtre de Kalman. Nous présentons également l'estimation de la vitesse avec ce même filtre.

Nous pouvons constater que la méthode du MV permet de recalculer cette séquence sauf le premier bloc (les 30 premières images), cependant une légère dérive apparaît sur les dernières images de la séquence. Elle est la conséquence d'une erreur d'estimation de la vitesse avec les méthodes décrites dans la partie 3.3. Le premier bloc n'est pas recalculé car au début de la séquence, peu d'images participent à l'image moyenne. Si nous ignorons ce premier bloc, la valeur moyenne des positions résiduelles est $\bar{j}_p = -0,91$ pixel et l'écart-type vaut 1,17 pixels.

Le filtre de Kalman permet de ré-estimer les paramètres du mouvement, et les résultats présentés en table 4 montrent qu'une amélioration est obtenue dans l'estimation de la vitesse, permettant de corriger la dérive moyenne des images. En effet, après la phase transitoire qui apparaît au début de la séquence, la valeur moyenne des positions résiduelles passe de $-0,91$ pour le MV à $-0,16$ pixels avec le filtre de Kalman, l'écart-type des positions

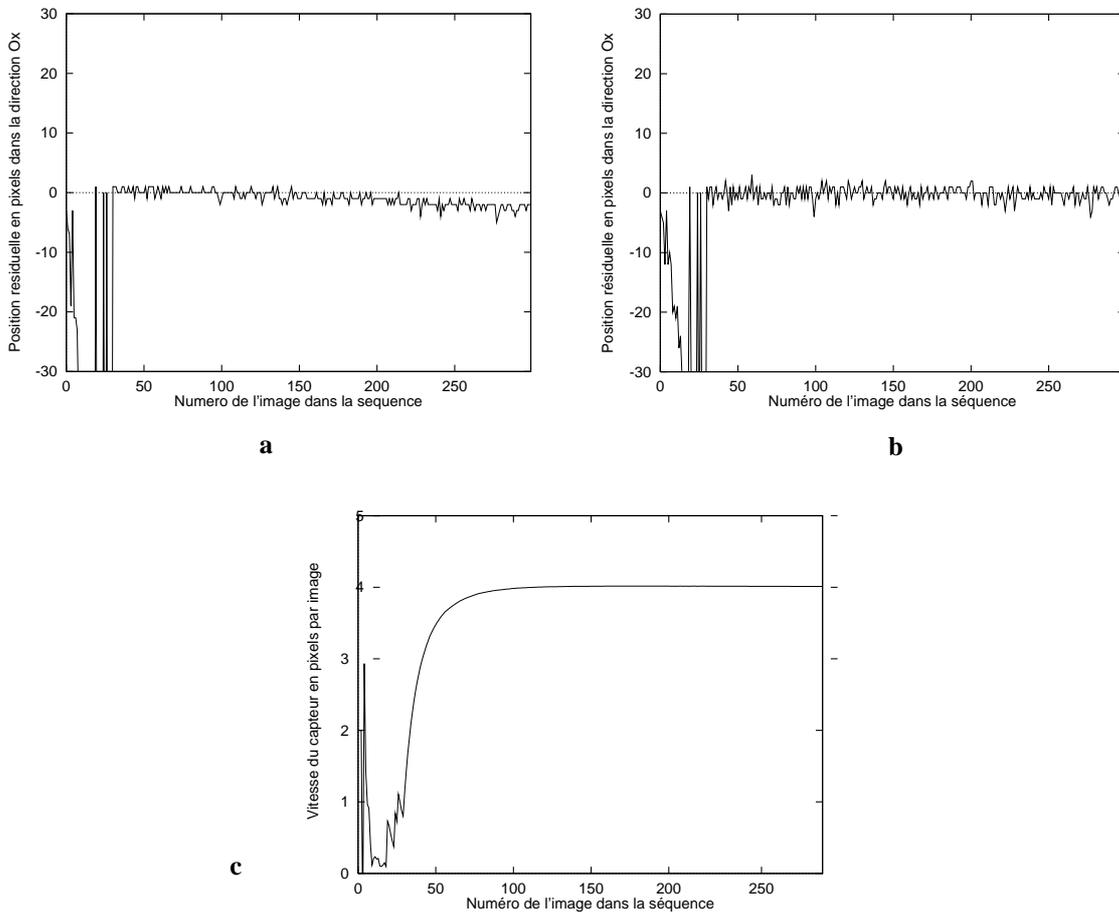


Figure 6. – a : Positions résiduelles en pixels dans la direction Ox après le recalage par la méthode du MV ($\lambda = 5 \cdot 10^{-3}$, $\sigma = 2,12$ pixels, $v = 4$ pixels par image), en fonction du numéro de l'image dans la séquence ; b : positions résiduelles dans la direction Ox après le recalage par filtrage de Kalman de la même séquence ; c : évolution de l'estimation de la vitesse par le filtre de Kalman.

résiduelles valant 1,11 pixels et restant voisin de la valeur obtenue pour le MV .

Tableau 4. – Comparaison des valeurs estimées avant et après le filtre de Kalman.

paramètre	valeur réelle	estimation du MV	estimation par Kalman
v (pix./image)	4	3,98	4,01
σ (pixels)	val. init. : 2,12	ap. recalage : 1,17	ap. recalage : 1,11
\bar{j}_p (pixels)	val. init. : 600	ap. recalage : -0,91	ap. recalage : -0,16

3.5. comparaison de l'estimation Bayésienne et du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman permet d'obtenir une amélioration de l'estimation de la trajectoire lorsque la vitesse est importante (4 % de la taille d'une image entre deux images de la séquence) et les mouvements aléatoires faibles (1 % de la taille d'une image), alors que nos simulations ont montré que les résultats de l'estimation Bayésienne sont meilleurs pour une faible vitesse (0,2 % de la taille d'une image entre deux images de la séquence) et de forts déplacements aléatoires (3 % de la taille d'une image). Ces deux méthodes se complètent ainsi, car elles sont performantes pour des domaines de mouvements différents.

Un avantage du filtre de Kalman est l'évolutivité : à partir de cette modélisation, les paramètres du mouvement sont mis à jour lors de la trajectoire, ainsi la vitesse v peut varier au cours du mouvement. Un deuxième avantage est la rapidité. En effet, l'algorithme de recalage par la méthode du MV est actuellement trop coûteux en terme de temps de calcul pour envisager un traitement en temps réel des données. Une stratégie combinant le filtre de Kalman et une pré-estimation grossière par le MV pourrait être recherchée.

4. conclusion

Dans cet article, nous proposons deux nouveaux outils pour la reconstruction d'images et pour l'estimation de mouvement à partir d'une séquence d'images spatiales à très faible flux. Ces deux outils sont performants pour des paramètres de mouvement différents.

Nous avons tout d'abord présenté un nouvel algorithme, basé sur la théorie bayésienne de l'estimation, pour le recalage d'images

d'une séquence à faible flux, en introduisant un modèle de déplacement rectiligne uniforme, perturbé par des translations aléatoires, pour les images de la séquence. Nous avons étudié et mis en oeuvre deux méthodes d'estimation de la vitesse moyenne du mouvement lorsque celle-ci est inconnue, et nous avons montré que cette modélisation permet de reconstruire des champs avec une très bonne précision lorsque la vitesse moyenne du mouvement est faible et s'ajoute à des déplacements aléatoires relativement importants.

Nous avons de plus proposé une méthode de suivi du mouvement basée sur le filtre de Kalman. Cette nouvelle approche permet, à partir de l'estimation des déplacements par la méthode bayésienne, d'améliorer les résultats lorsque la vitesse moyenne du mouvement est forte et s'ajoute à des déplacements aléatoires relativement faibles. Cet outil ouvre de nombreuses perspectives et voies d'études. Nous pouvons, en particulier, envisager un traitement des données moins coûteux en temps de calcul. De plus, la généralisation à des mouvements non uniformes déboucherait sur de nombreuses applications.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. B. Lucy, "An iterative technique for the rectification of observed distributions," *The Astronomical Journal* 79, 745-754 (1974).
- [2] G.M. Morris, "Scene matching using photon-limited images," *J.Opt.Soc. Amer. A* 1, 482-488 (1984).
- [3] R. G. Lane, "Blind deconvolution of speckle images," *J. Opt. Soc. Am. A* 9, 1508-1514 (1992).
- [4] E. Thiebaut and J. M. Conan, "Strict *a priori* constraints for maximum-likelihood blind deconvolution," *J. Opt. Soc. Am.* 12, 485-492 (1995).
- [5] T.J. Schulz and D.L. Snyder, "Imaging a randomly moving object from quantum-limited data: applications to image recovery from second and third-order autocorrelations," *J. Opt. Soc. Am. A* 8, 801-807 (1991).
- [6] T. J. Schulz, B. E. Stribling, and J. J. Miller, *Optics Express* 1, 355-362 (1997).
- [7] K. T. Knox and B. J. Thompson, "Recovery of images from atmospherically degraded short exposure images," *Astrophys. J.* 192, L45-L48 (1974).
- [8] R.L. Gilliland, P.D. Edmonds, L. Petro, A. Saha, and M.M. Shara, "Stellar variability in the central populations of 47 tucanae from WF/PC observations with the hubble space telescope. i. project overview, reduction techniques, and first results," *Astrophysical Journal* 447, 191-203 (1995).
- [9] J. A. Morse, "A method for correcting aspect solution errors in ROSAT HRI observations of compact sources," *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 106, 675-682 (1994).
- [10] R. E. Sequeira, J. A. Gubner, and B. E. A. Sala, "Image detection using low-level illumination," *IEEE Trans. Image Processing* 2, 18-26 (1994).
- [11] D.L. Snyder and T.L. Schluz, "High resolution imaging at low-light levels through weak turbulence," *J. Opt. Soc. Am. A* 7, 1251-1265 (1990).
- [12] B. D. Hall, D. Reinhard, and R. Monot, "Optimum rate for a CCD detector," *Review of Scientific instruments* 66, 2668-2671 (1995).
- [13] D. S. Lalush and M. W. Tsui, "The importance of preconditioners in fast Poisson-based iterative reconstruction algorithms for SPECT", *IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging*, P. A. Moonier, ed., IEEE, New York 3, 1326-1330 (1995).

Estimation de mouvements et reconstruction d'images

- [14] M. Guillaume, P. Melon, Ph. Refregier, and Llebaria A., "Maximum likelihood estimation of an astronomical image from a sequence at low photon levels," J.Opt. Soc.Am. A 15, 2841-2848 (1998).
- [15] S. Cabanillas, M. Guillaume et P. Réfrégier : « Reconstruction d'images astronomiques à partir de séquences à faible flux : étude pour des mouvements gaussiens », Traitement du Signal, 17, 125-138,(2000)
- [16] S. Cabanillas, « Approche bayésienne pour la reconstruction d'images astronomiques à partir de séquences d'images à faible niveau de photons ». Thèse (Aix-Marseille III), Laboratoire Signal et Image, 2000.
- [17] Y. Bar-Shalom and T.E. Fortmann, "Tracking and data association", N.Y. academic, 1988.

Manuscrit reçu le 21 mars 2002

LES AUTEURS

Mireille GUILLAUME



Mireille Guillaume est maître de conférences à l'Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille, où elle enseigne le traitement du signal. Elle effectue ses recherches à l'Institut Fresnel, en traitement d'images. Ses travaux portent sur la reconstruction d'images ou d'objets 3D, ainsi que la localisation d'objets et l'estimation de paramètres dans des images multicomposantes.

Salah BOURENNANE



Salah Bourennane est Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille. Ses activités de recherche concernent les traitements de signaux multidimensionnels et/ou multicomposante. Applications en acoustique, télécommunications, sismique, environnement et imagerie.

Fabrice HERRMANN



Fabrice Herrmann est diplômé de l'Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille et titulaire d'un DEA de traitement du signal et de l'image de l'Université d'Aix-Marseille III depuis 2001. Il est ingénieur Recherche et Développement dans le service Algorithmes de Thales Optronique. Ses travaux portent sur l'identification automatique de cibles en imagerie infrarouge et active.