

Un panorama des méthodes d'optimisation de l'effort de recherche en détection*

An overview of algorithmic methods for search optimization

par Guillaume SOURIS* et Jean-Pierre LE CADRE**

*Ligeron S.A. Les Algorithmes, Bat. Euclide F 91194, St-Aubin Cedex

** IRISA/CNRS Campus de Beaulieu 35042 RENNES Cedex

résumé et mots clés

Connaissant les probabilités de présence d'un objet dans un certain espace et les contraintes sur les efforts de recherche disponibles, on cherche à optimiser la répartition (spatiale, temporelle) des efforts élémentaires afin d'optimiser la probabilité (globale) de détection de cet objet. Ce type de problème est à l'origine de nombreux développements, dans le domaine de la recherche opérationnelle et est connu sous le nom de « Search Theory » (théorie de la recherche). Le but de cet article est de fournir un panorama des méthodes existantes pour résoudre ce problème d'optimisation sous des hypothèses de complexité croissante : cible fixe, mobile, à trajectoire markovienne, recherche simple ou multi-périodes. Enfin, on examine le problème de l'optimisation de la trajectoire de l'observateur (chercheur). Dans ce cas, la répartition de l'effort de recherche dépend directement de la trajectoire du chercheur.

Optimisation, cible, multi-étapes, effort de recherche, trajectoire Markovienne, détection, algorithme Branch and Bound.

abstract and key words

Knowing the probabilities of an object possible positions in a certain space and the constraints relative to the search resource, our aim is to optimize the (spatial, temporal) distribution of the elementary search efforts in order to maximize the (total) probability of target detection. This type of problems is at the origin of many developments, in the field of operations research and is known under the name of "Search Theory". The aim of this article is to provide a panorama of existing methods under assumptions of increasing complexity : fixed target, moving target (e.g. with Markovian trajectory), multi-period search. Finally, we deal with the optimization of the searcher trajectory.

Optimization, multi-period search, search effort, target, Markovian trajectory, detection, Branch and Bound algorithm.

1. introduction

La « théorie de la recherche » est la discipline qui traite de l'optimisation de l'effort de recherche. Dans ce cadre on considère donc que ces efforts de recherche sont limités et que seules les probabilités de présence d'un objet (aussi désigné sous le vocable de cible) sont connues du chercheur (désigné aussi sous le vocable observateur). Ceci signifie ici que les informations n'incluent généralement pas les observations (sorties de l'appareil

de mesure). Quelques tentatives ont cependant été effectuées dans ce sens ([1], [2]), mais ne seront pas détaillées ici.

Le but de cet article est de présenter une synthèse des méthodes et problèmes fondamentaux de la « théorie de la recherche ». Elle ne peut, certainement pas prétendre à l'exhaustivité. On s'attachera plus particulièrement, à présenter la nature des problèmes d'optimisation, à détailler les algorithmes correspondants ainsi que les résultats obtenus.

Cette discipline a vu le jour durant la seconde guerre mondiale, sous l'impulsion de l'ASWORG (AntiSubmarine Warfare Operations Research Group). Cet organisme (US Navy) avait, dans ses

* Ce travail a été effectué dans le cadre d'une convention de recherche DCN/Ing/Sud – IRISA.

attributions, l'amélioration des méthodes de recherche de submersibles durant « la bataille de l'Atlantique ». Au sein de l'AS-WORG, B.O. Koopman a joué un rôle fondamental. On pourra consulter la série des 3 articles fondateurs [3], [4], [5], ou l'article plus « historique » [6]. On lui doit, en particulier, le formalisme, élégant et très général, de la théorie de la recherche.

Depuis ce temps, celle-ci est devenue une discipline à part entière dans le domaine de la recherche opérationnelle et a suscité un nombre important de publications. Les lecteurs intéressés pourront consulter des synthèses bibliographiques récentes [survey], des textes introductifs et plusieurs ouvrages [ouvrages].

Les principales étapes dans le développement de la théorie de la recherche ont été résumées, comme suit par L.D. Stone :

- Optimisation de l'effort de recherche pour une source fixe,
- cas d'une source mobile,
- répartition optimale de l'effort de recherche multi-étapes,
- optimisation de la trajectoire de l'observateur,
- jeux de « Search Theory » (« Search Games »).

On développera ici les solutions existantes pour les 4 premiers points, en s'attachant à déterminer les relations entre les solutions des divers problèmes et en essayant de dégager une perspective commune.

On présente, dans la section 2, les grandeurs fondamentales des problèmes. Le problème de la répartition optimale de l'effort de recherche est ensuite considéré dans la section 3, tout d'abord dans le cas d'une cible fixe et d'une recherche réduite à une seule étape. Il est ensuite étendu au cas d'une cible mobile (mouvement markovien) et d'une recherche multi-étapes. Enfin, on considère l'optimisation de la trajectoire de l'observateur dans la section 4.

2. définition des grandeurs physiques

Les différents problèmes de la « théorie de la recherche » semblent pouvoir être caractérisés par trois données principales : la probabilité de localisation et d'état de la cible (objet recherché), la probabilité locale de détection, et la quantité totale d'effort de recherche disponible (temps, matériels de détection, carburant, hommes...). La formulation mathématique de ces constituants nécessite certaines hypothèses en rapport avec l'aspect physique et pratique du problème. Celles-ci vont être détaillées ci-dessous.

2.1. la probabilité de localisation de la cible

Plus précisément, il faudrait parler de probabilité a priori de distribution de la cible. En effet, cette probabilité représente les informations connues sur la cible avant la recherche. Représentant le plus souvent les probabilités de présence de la cible, on l'appellera par la suite probabilité de localisation.

Cette probabilité permet de traduire les connaissances a priori sur la cible, i.e. la localisation présumée de la cible avant la recherche et les mouvements qu'elle peut effectuer au cours de cette recherche (cas d'une cible mobile). Si la cible peut être dans des états différents (dissimulée, à découvert...), on tient compte de ces possibilités dans le calcul de la probabilité de localisation de la cible.

La localisation et les mouvements probables de la cible sont traduits respectivement par une densité de localisation et une matrice de transition calculée à partir des distributions sur la direction du déplacement et sur la vitesse. La densité de localisation sera appelée $g(x)$, x étant le vecteur position. La dimension de ce vecteur est caractéristique du problème considéré. Elle sera égale à 2 dans le cas d'un problème plan.

En pratique, les problèmes seront souvent résolus sur des espaces-temps discrétisés. Par conséquent, les espaces de recherche seront souvent réduits à un ensemble de cellules, et le temps à une succession d'étapes. Ceci entraîne donc que la densité de localisation $g(x)$ sera souvent confondue avec la probabilité de localisation dans la cellule x .

On peut aussi traduire le fait qu'il existe une chance (ou plutôt une malchance) que la cible ne soit pas dans l'espace (E) auquel on se restreint pour les recherches :

$$\int_E g(x)dx = \alpha \quad \text{ou} \quad \sum_E g(x) = \alpha \quad \text{et} \quad g(x) \geq 0,$$

- E est l'espace de recherche (ensemble des cellules),
- $\alpha = 1$ signifie que la cible est certainement dans l'espace de recherche,
- $\alpha < 1$ signifie que la cible a une probabilité $1 - \alpha$ de ne pas être dans cet espace.

On présente figures 1 et 2, deux exemples de densité de localisation très simples et d'utilisation courante.

2.2. la densité de l'effort de recherche

L'effort de recherche est la traduction mathématique de nombreuses caractéristiques de recherche. En effet cet effort de recherche peut représenter des phénomènes les plus divers comme le temps passé à explorer une zone, le nombre de détecteurs

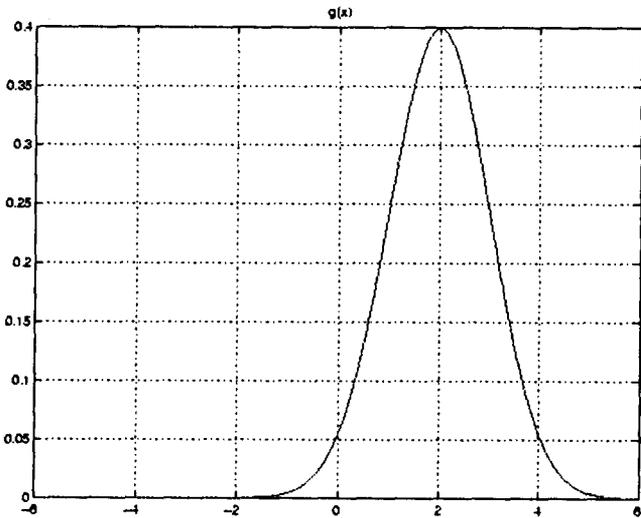


Figure 1. – Loi Normale (moyenne=2;variance=1).

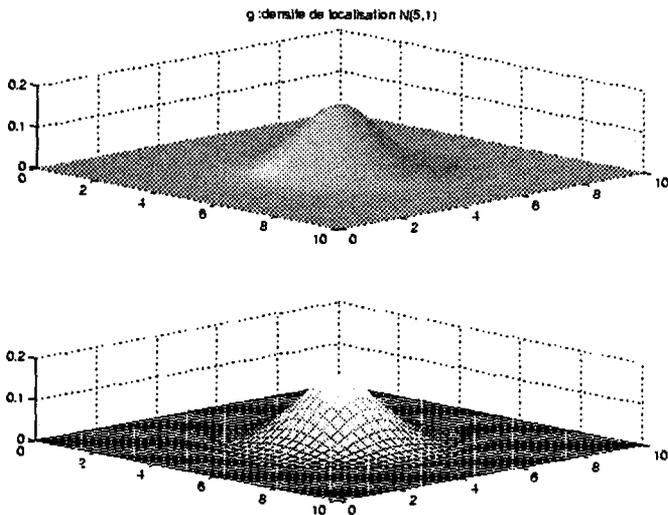


Figure 2. – Loi Normale (moyenne = (5;5); variance = (1;1)) (représentation lissée et quadrillée).

disponibles, le carburant, etc. On appellera $\varphi(x)$ la valeur de l'effort de recherche en x , et Φ l'effort global de recherche, on a donc :

$$\int_E \varphi(x) = \Phi \quad \text{ou} \quad \sum_E \varphi(x) = \Phi$$

Le problème de la définition de l'effort de recherche se trouve dans le fait qu'il faut évaluer de manière précise la valeur globale utilisée, en relation avec la détection et les caractéristiques physiques du problème considéré.

Un autre problème peut intervenir lorsque l'effort de recherche n'est pas indéfiniment divisible. En effet, lorsque l'effort de recherche se compte en hommes, on ne peut que répartir des nombres entiers d'hommes dans chaque cellule. Ceci ajoute donc une contrainte entière au problème, qui ne sera pas considérée dans la suite du texte (effort infiniment divisible).

2.3. la probabilité de détection locale

2.3.1. définition

Le troisième concept nécessaire à la formulation du problème de recherche optimale est la probabilité de détection locale ou élémentaire. Elle sera nommée $p(\varphi(x))$. Elle est définie comme étant la probabilité conditionnelle de détecter la cible dans une région élémentaire x (cellule) en ayant pratiqué un effort $\varphi(x)$ dans cette cellule, et sachant que la cible se trouve dans cette région. Plus précisément, on devrait écrire cette probabilité $p(x, \varphi(x))$, car elle dépend à la fois de la position et de l'effort de recherche. Mais comme φ est elle-même une fonction de x , on la notera simplement $p(\varphi(x))$. Elle dépend des conditions locales de détection (e.g. conditions de propagations, météo, brouilleurs, etc.).

Examinons les propriétés que doit avoir cette probabilité de détection? Tout d'abord, du fait de sa définition de probabilité on a :

$$0 \leq p(\varphi(x)) \leq \beta$$

- $\beta < 1$ s'il existe une chance de ne jamais détecter la cible quel que soit l'effort de recherche appliquée,
- $\beta = 1$ sinon.

Il serait souhaitable, aussi, que lorsqu'on augmente l'effort de recherche la probabilité de détection augmente, et que pour un effort nul la probabilité de détection soit, bien sûr, nulle. Pratiquement, nous serons aussi amené à faire l'hypothèse des rendements décroissants (i.e. le rendement de l'effort de recherche décroît lorsque cet effort augmente).

2.3.2. la probabilité de détection exponentielle

Bernard O. Koopman présenta une loi de probabilité possible répondant aux propriétés désirées. Elle est tirée d'une loi exponentielle et s'exprime de la façon suivante :

$$p(x, \varphi(x)) = 1 - e^{-w(x) \cdot \varphi(x)} \quad (1)$$

où :

- x est la position,
- $\varphi(x)$ est l'effort de recherche appliqué en x ,
- $w(x)$ est le paramètre de détectabilité (visibilité).

L'utilisation de cette loi peut être justifiée sous certaines conditions. En effet, si l'on considère que l'effort de recherche représente le temps (en continu), prenons alors $q(t) = 1 - p(t)$ la probabilité de non-détection ($p(t)$ la probabilité de détection). Si on appelle w le taux de détection instantanée, alors la probabilité de détecter la cible durant un petit intervalle de temps dt est $w dt$. Par conséquent, on peut écrire que le fait de ne pas détecter la cible pendant la période $t + dt$ (probabilité $q(t + dt)$), signifie que, la cible n'a pas été détectée, ni jusqu'à t (probabilité $q(t)$), ni durant dt (probabilité $(1 - w dt)$).

Comme ces dernières probabilités sont supposées indépendantes, on a :

$$q(t + dt) = q(t)(1 - w \cdot dt),$$

i.e. $\frac{dq(t)}{dt} = -w \cdot q(t)$

Comme $q(0) = 1$ (pas de détection sans effort de recherche), on obtient finalement :

$$q(t) = e^{-w \cdot t} \quad \text{et donc} \quad p(t) = 1 - e^{-w \cdot t}.$$

Cette loi exponentielle permet d'obtenir directement le temps moyen avant détection :

$$\bar{t} = \frac{1}{w} \quad (\text{moyenne d'une loi exponentielle}).$$

Le graphique (figure 3) montre bien la croissance de la probabilité de détection en fonction de l'effort de recherche, ainsi que sa nullité pour un effort nul.

2.3.3. le paramètre de visibilité

On a vu que la probabilité de détection dépendait de l'effort de recherche, mais elle dépend aussi du paramètre w (taux de détection par unité de temps ou d'espace), que l'on peut appeler paramètre de visibilité.

Quelles sont les caractéristiques de ce paramètre? Lorsqu'il est nul, la probabilité de détection l'est aussi : les conditions dans la région de recherche ne permettent aucune détection (visibilité nulle). Lorsqu'il tend vers l'infini, la probabilité de détection tend vers 1 : les chances de détecter la cible sont très grandes, même pour un faible effort de recherche.

Le paramètre de visibilité peut être déterminé par plusieurs données du problème réel. Il peut s'agir de conditions physiques liées à l'espace de recherche : conditions de propagation, météo, relief, accessibilité... Il est alors défini par rapport à l'espace de recherche. Mais les conditions de détection peuvent aussi être liées à l'observateur lui-même; si l'observateur utilise un appareil de détection, la détection est souvent liée à la distance entre la cible et l'observateur.

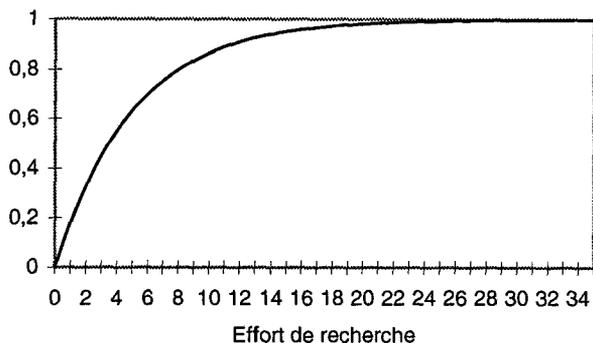


Figure 3. – Probabilité de détection exponentielle ($w = 0, 2$).

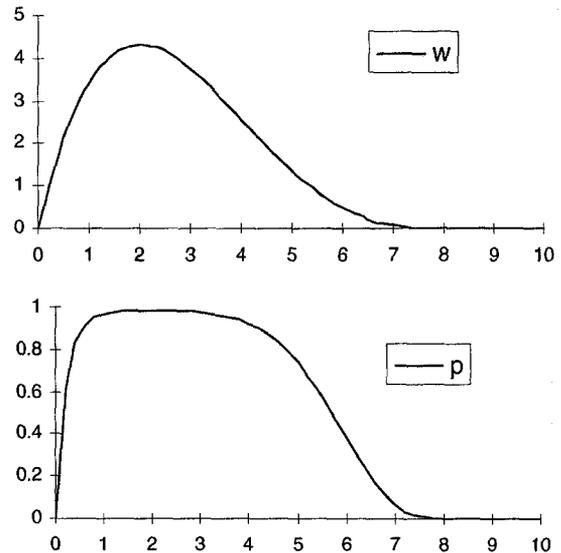


Figure 4. – Paramètre de visibilité et probabilité de détection associée ($\varphi(x) = 1$) en fonction de la distance entre la cible et l'observateur.

On présente (figure 4) un exemple (monodimensionnel) de répartition de la fonction $p(x)$ pour $\varphi \equiv 1$, dans le cas d'une fonction $w(x)$ particulière (cf. figure 4) et d'une loi de détection exponentielle. On constate alors que la détection est proche de 0 dans un voisinage immédiat de 0, puis qu'elle augmente (saturation), pour enfin diminuer.

Les données du problème étant définies, nous pouvons commencer à étudier les premières approches de la résolution des problèmes d'optimisation de l'effort de recherche.

3. distribution optimale de l'effort de recherche

Dans cette partie, nous allons étudier l'un des premiers problèmes qui s'est présenté en théorie de la recherche : il s'agit du problème de la distribution optimale de l'effort de recherche.

Dans ce problème on recherche une cible fixe ou mobile dans un espace donné. Pour cela on va déterminer la distribution de l'effort de recherche qui maximisera la probabilité de détection de la cible. Dans un premier temps, on considérera ce problème dans le cadre d'une recherche simple (une seule étape temporelle), puis pour une recherche multi-étapes.

3.1. la recherche simple

On appellera recherche simple le fait d'effectuer la recherche en une seule étape.

3.1.1. le problème

On recherche un objet (cible) dans un espace donné (E). On suppose avoir des connaissances a priori sur la localisation de la cible. Ces connaissances permettent de définir une densité de localisation de la cible : $g(x)$,

$$g(x)dx = \Pr(x \leq X \leq x + dx)$$

$$\int_E g(x)dx = \alpha \quad \text{ou} \quad \sum_E g(x) = \alpha \quad \text{et} \quad g(x) \geq 0$$

où X représente la variable aléatoire de localisation de la cible, et $\alpha \leq 1$.

X et x pourront être de dimension supérieure à 1 selon la dimension de l'espace de recherche. L'effort de recherche appliqué aux positions comprises entre x et $x + dx$ est $\varphi(x)dx$. Cet effort de recherche doit aussi satisfaire les contraintes suivantes :

$$\int_E \varphi(x)dx = \Phi \quad \text{et} \quad \varphi(x) \geq 0$$

où Φ est l'effort total disponible pour effectuer la recherche.

Rappelons les propriétés de la probabilité de détection locale $p(\varphi(x))$:

$$\begin{cases} \bullet p(0) = 0 \\ \bullet p'(\varphi) \geq 0, \\ \bullet p(\varphi) \xrightarrow{\varphi \rightarrow +\infty} \beta \leq 1. \end{cases}$$

Pour résoudre le problème, nous allons aussi supposer que la probabilité de détection locale suit la loi des rendements décroissants. Cela signifie que $p'(\varphi) = dp/d\varphi$ est une fonction décroissante de φ , avec $p'(0) > 0$ et $p'(+\infty) = 0$. Cette hypothèse semble être vérifiée pour la plupart des cas réels, et ce en particulier pour la loi de détection exponentielle :

$$p(\varphi) = 1 - e^{-w \cdot \varphi}$$

$$\frac{dp(\varphi)}{d\varphi} = w \cdot e^{-w \cdot \varphi} \quad \text{fonction décroissante de } \varphi \quad (w > 0).$$

On a donc une fonction $p'(\varphi)$, positive, décroissante en φ et de dérivée strictement positive en 0. Par conséquent il existe une fonction f inverse de $p'(\varphi)$ telle que $\varphi = f(p')$.

Enfin, sachant que la probabilité de détecter la cible entre x et $x + dx$ est :

$$g(x)p[\varphi(x)]dx$$

on peut écrire mathématiquement le problème auquel on est confronté : trouver la distribution optimale de l'effort de recherche qui maximise la probabilité de détection pour une quantité totale d'effort disponible, fixée. Ce que l'on peut traduire par le problème

d'optimisation ci-dessous :

$$\begin{cases} \hat{\varphi} = \arg \max_{\varphi} P(\varphi) \\ \text{contraintes} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in E \\ \int_E \varphi(x)dx = \phi \end{array} \right. \\ \text{avec} \quad P(\varphi) = \int_E g(x)p[\varphi(x)]dx \end{cases} \quad (2)$$

$P(\varphi)$ représente la probabilité totale de détection en utilisant la fonction de recherche φ .

3.1.2. distribution optimale de l'effort sur un espace à une dimension

Le cas d'un espace de recherche mono-dimensionnel est un cas particulier des résultats obtenus par B.O. Koopman en dimension 2. Ces résultats ont été obtenus sous l'hypothèse d'une loi de détection exponentielle. Ils ont été étendus à une hypothèse plus générale (la loi des rendements décroissants) par J. de Guenin [7]. Nous allons tout d'abord présenter le résultat général. Un algorithme permettant de déterminer la fonction de répartition de l'effort de recherche se déduit des propriétés générales.

Résolution

Le problème de la distribution optimale de l'effort de recherche est un problème d'optimisation sous contraintes. Or, en toute généralité, le calcul des variations ne peut être utilisé ici, à cause des hypothèses de continuité de φ' que nous n'avons pas. Nous allons donc considérer une approche directe et élémentaire.

Soit $\varphi_0(x)$ une solution du problème, c'est-à-dire telle que $P(\varphi_0)$ soit maximale, et x_1 une valeur telle que $\varphi_0(x_1) > 0$, alors, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$:

$$P(\varphi_0) - P(\varphi) = \int_E g(x)\{p[\varphi_0(x)] - p[\varphi(x)]\}dx \geq 0.$$

Nous allons maintenant choisir la fonction φ comme étant obtenue à partir de la fonction φ_0 en apportant du point x_1 au point x_2 le petit effort de recherche représenté par l'aire noircie $\Delta\varphi dx$ (cf. figure 5).

Par conséquent, posant $\varphi(x_1) = \varphi_0(x_1) - \Delta\varphi$, on a :

$$P(\varphi_0) - P(\varphi) = g(x_1)\{p[\varphi_0(x_1)] - p[\varphi(x_1)]\}dx + g(x_2)\{p[\varphi_0(x_2)] - p[\varphi(x_2)]\}dx \geq 0$$

D'après le théorème des accroissements finis, il vient :

$$p[\varphi(x_1)] = p[\varphi_0(x_1)] - \Delta\varphi \cdot p'_{\varphi}[\varphi_0(x_1) - \theta_1 \cdot \Delta\varphi] \quad \text{avec} \quad 0 < \theta_1 < 1$$

soit :

$$p[\varphi_0(x_1)] - p[\varphi(x_1)] = \Delta\varphi \cdot p'_{\varphi}[\varphi_0(x_1) - \theta_1 \cdot \Delta\varphi],$$

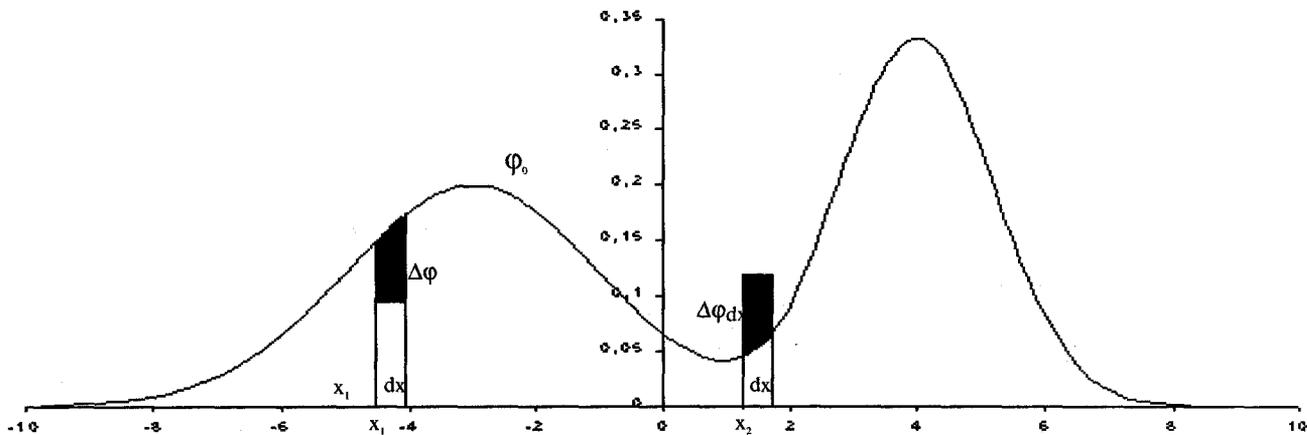


Figure 5.

et de même, on obtient :

$$p[\varphi_0(x_2)] - p[\varphi(x_2)] = -\Delta\varphi \cdot p'_\varphi[\varphi_0(x_2)] - \theta_2 \cdot \Delta\varphi$$

avec $0 < \theta_2 < 1$.

Comme $P(\varphi_0) - P(\varphi) \geq 0$, on a :

$$g(x_1) \cdot p'_\varphi[\varphi_0(x_1)] - \theta_1 \cdot \Delta\varphi - g(x_2) \cdot p'_\varphi[\varphi_0(x_2)] - \theta_2 \cdot \Delta\varphi \geq 0.$$

Cette équation est vérifiée quel que soit $\Delta\varphi < \varphi_0(x_1)$, donc en faisant tendre $\Delta\varphi$ vers 0 on a, par passage à la limite :

$$g(x_1) \cdot p'_\varphi[\varphi_0(x_1)] - g(x_2) \cdot p'_\varphi[\varphi_0(x_2)] \geq 0.$$

La seule condition nécessaire est que $\varphi_0(x) > 0$. Si on choisit maintenant x_2 tel que $\varphi_0(x_2) > 0$, et que de la même manière on déplace l'effort de recherche de x_2 vers x_1 , on obtient :

$$g(x_2) \cdot p'_\varphi[\varphi_0(x_2)] - g(x_1) \cdot p'_\varphi[\varphi_0(x_1)] \geq 0,$$

et donc :

$$g(x_2) \cdot p'_\varphi[\varphi_0(x_2)] = g(x_1) \cdot p'_\varphi[\varphi_0(x_1)].$$

On peut donc résumer ce résultat sous le théorème suivant :

Proposition [de Guenin] : Une condition nécessaire pour que l'effort de recherche φ soit optimum, est que pour chaque point x tel que $\varphi(x) > 0$,

$$g(x) \cdot p'_\varphi[\varphi(x)] = \text{constante}.$$

Bien entendu, ce résultat peut aussi être obtenu par les conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker. On appellera désormais cette constante λ , définie par :

$$g(x) \cdot p'_\varphi[\varphi(x)] = \lambda. \quad (3)$$

Si nous appelons f la fonction inverse de p'_φ , alors on obtient le résultat voulu, l'effort de recherche φ est défini par la relation

suivante :

$$\varphi(x) = f \left[\frac{\lambda}{g(x)} \right] \quad \text{avec } f = p'^{-1}.$$

Cette définition de l'effort de recherche est possible car on a supposé que la probabilité de détection locale suivait la loi des rendements décroissants. La dérivée de la probabilité de détection locale est alors une fonction strictement décroissante que l'on peut inverser. Si on prend l'exemple de la détection exponentielle :

$$p(\varphi(x)) = 1 - e^{-w \cdot \varphi(x)},$$

$$p'_\varphi(\varphi(x)) = w e^{-w \cdot \varphi(x)} \iff \varphi(x) = \frac{1}{w} \ln \left(\frac{w}{p'_\varphi} \right),$$

$$\text{donc } f : y \mapsto \frac{1}{w} \ln \left(\frac{w}{y} \right)$$

$$\text{et } \varphi(x) = f \left[\frac{\lambda}{g(x)} \right] = \frac{1}{w} \ln \left(\frac{w \cdot g(x)}{\lambda} \right).$$

Mais cette formule, n'est utile que pour les zones de recherche où l'effort est non nul. Appelons R , cet ensemble de points x tels que $\varphi(x) > 0$. Comme p' est décroissante et bornée supérieurement par $p'(0) > 0$, pour tout x de R : $g(x) \cdot p'_\varphi[\varphi(x)] = \lambda$ et $0 < p'[\varphi(x)] < p'(0)$, donc $g(x) > \lambda/p'(0)$.

Prenons maintenant un x n'appartenant pas à R ($\varphi(x) = 0$), et x_2 appartenant à R . Alors en reprenant le principe de la démonstration du théorème : on apporte à $\varphi(x)$, du point x_2 ($\varphi(x_2) > 0$) au point x , le petit effort de recherche $\Delta\varphi dx$, et on obtient de la même manière :

$$g(x) \cdot p'_\varphi[\varphi(x)] \leq g(x_2) \cdot p'_\varphi[\varphi(x_2)] = \lambda$$

Comme $\varphi(x) = 0$, on peut donc désormais définir la zone de recherche R .

Proposition : si x appartient à la zone de recherche effective, alors $g(x) > \frac{\lambda}{p'(0)}$ et dans le cas contraire $g(x) \leq \frac{\lambda}{p'(0)}$.

Etudions maintenant l'effort de recherche total :

$$\Phi(\lambda) = \int_E \varphi(x) dx = \int_R \varphi(x) dx = \int_R f \left[\frac{\lambda}{g(x)} \right] dx.$$

$$\Rightarrow \int_{R_1} f \left[\frac{\lambda_1}{g(x)} \right] dx < \int_{R_2} f \left[\frac{\lambda_2}{g(x)} \right] dx,$$

Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs telles que $\lambda_1 > \lambda_2$, et R_1, R_2 leurs ensembles de recherche associés, alors $R_1 \subset R_2$ (grâce à la définition de R) et si $x \in R_1 \cap R_2$ alors :

$$f \left[\frac{\lambda_1}{g(x)} \right] < f \left[\frac{\lambda_2}{g(x)} \right] \text{ (car } p' \text{ est décroissante, donc } f \text{ l'est aussi).}$$

donc :

$$\text{si } \lambda_1 > \lambda_2 \quad \Phi(\lambda_1) < \Phi(\lambda_2).$$

Par conséquent $\Phi(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ donc il existe un et un seul λ définissant une valeur de Φ donnée. Ce qui signifie que $\varphi(x)$ peut être déterminée de manière unique par ces propriétés.

L'algorithme

Les propriétés définies précédemment permettent maintenant de déterminer la fonction de l'effort de recherche, grâce à un algorithme itératif.

On commence avec un λ arbitraire (positif), on détermine l'espace R de recherche associée à ce λ , puis l'effort de recherche $\varphi(x)$, enfin on contrôle l'effort de recherche total par rapport à l'effort total disponible et on modifie la valeur de λ pour se rapprocher de l'effort total désiré. On sort de l'algorithme lorsque l'effort total est atteint à un ϵ près.

On présente ci-dessous l'algorithme de détermination de φ :

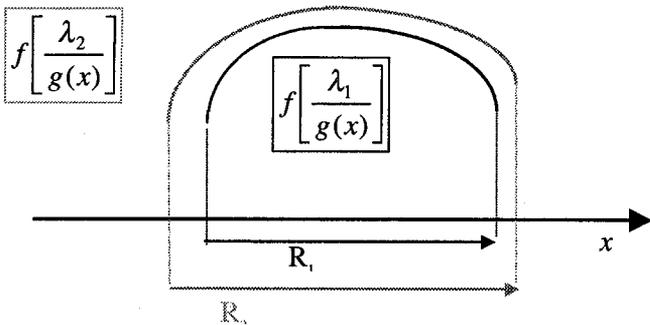


Figure 6.

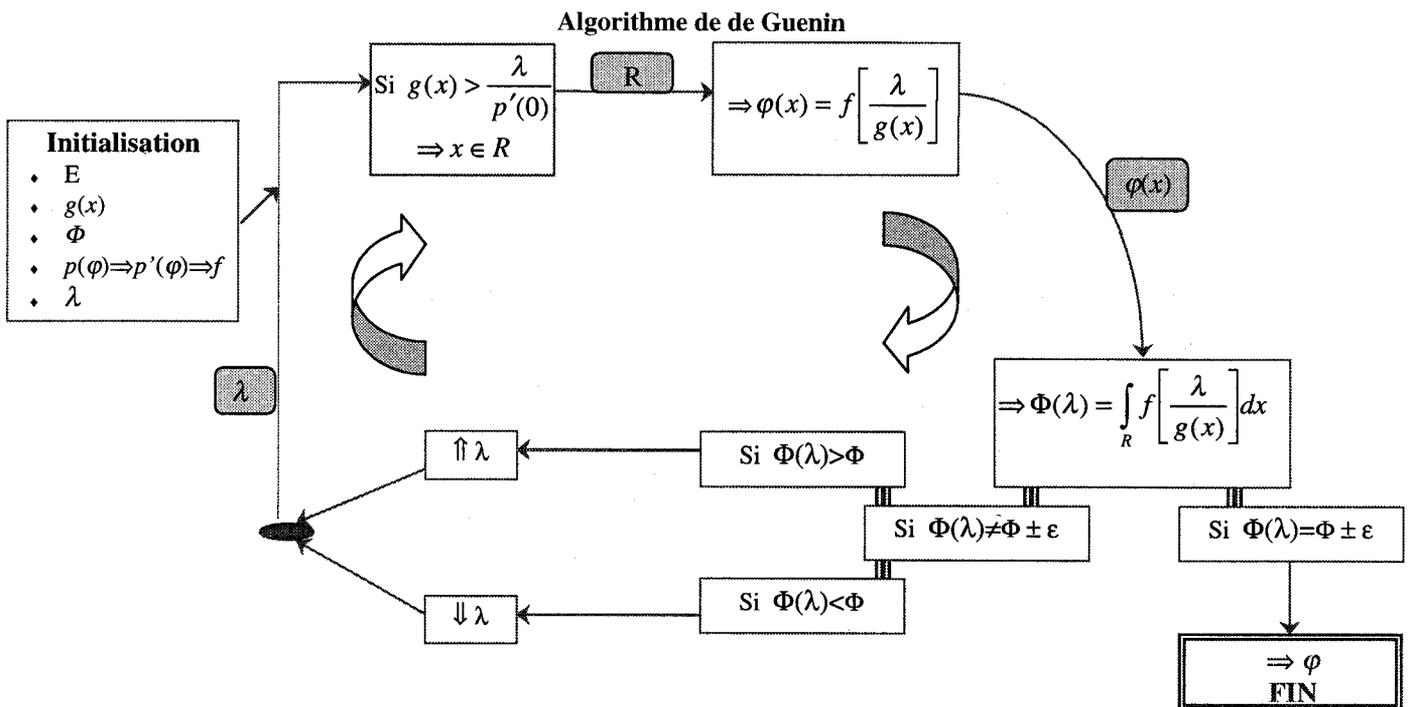


Figure 7. – Algorithme du calcul de l'effort de recherche.

La convergence vers l'effort total disponible est rapide, de 5 à 20 itérations selon la précision souhaitée.

Nous allons voir maintenant l'application de cet algorithme sur quelques exemples.

Résultats

On choisira pour toutes les simulations une loi de détection exponentielle, ce qui entraîne $p'(0) = w(x)$. Pour la figure 8, $w(x) = 1$, donc la courbe définie par $\lambda/p'(0)$ est une droite. L'intersection de cette droite avec la densité de localisation détermine les limites de la zone de recherche, l'inverse de p' appliquée à $\lambda/g(x)$ sur cette zone donnant l'effort de recherche $\varphi(x)$. Il ne reste plus qu'à contrôler l'aire sous cette courbe (Φ). Si elle est trop grande, on augmente λ , ce qui entraîne une élévation de la droite et par conséquent un rétrécissement de la zone de recherche et donc de ϕ .

Quelques calculs seront développés dans la section 2.2.1 (cas dimension 2)

La forme générale du résultat correspond à ce que l'on pouvait attendre; à savoir que, dans ce cas, on applique l'effort de recherche sur les zones à plus forte densité. Nous verrons, par la suite (plan de recherche multi-étapes) que ceci n'est pas une règle générale. De manière plus quantitative, l'apport de l'algorithme est de préciser les limites de la zone de recherche en fonction de l'effort disponible, et d'en caractériser sa répartition.

Ceci est illustré par la figure 9, où on considère une densité plus complexe. On observe ici, deux zones de recherche distinctes avec des répartitions de l'effort différentes. Entre ces deux zones la répartition (de l'effort de recherche) est de (1/5, 4/5); ce qui ne correspond guère à l'intuition.

Quant à la figure 11, elle montre la différence de résultat lorsque l'on modifie le paramètre de visibilité (figure 10). Par rapport, au résultat de la figure 9, la visibilité étant meilleure au centre des deux « bosses » de $g(x)$, la zone de recherche est réunifiée car la bonne visibilité dans cette partie donne un intérêt à porter un effort dans cette zone. On remarque aussi que grâce à la meilleure visibilité, la probabilité de détection est augmentée de pratiquement 2 %.

3.1.3. distribution optimale de l'effort sur un espace à deux dimensions

Le problème de la distribution optimale de l'effort, est identique lorsque l'on passe en dimension 2. En effet, les résultats et les propriétés obtenus en dimension 1 se généralisent d'eux-mêmes en dimension 2. L'application de la méthode générale sur une loi gaussienne (figure 12), permet d'expliquer le principe de la méthode et d'obtenir des résultats explicites.

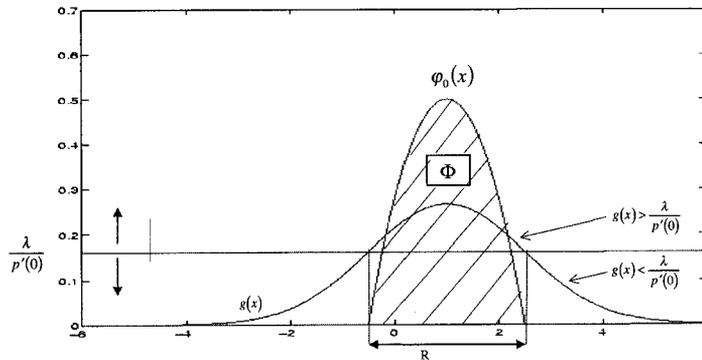


Figure 8. - Calcul de l'effort de recherche avec $w(x) = 1$ et $\Phi = 1$, ($\Rightarrow P = 0,1987$).

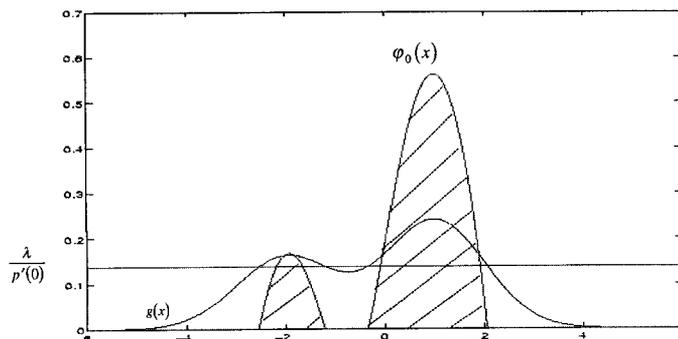


Figure 9. - Calcul de l'effort de recherche avec $w(x) = 1$ et $\Phi = 1$, ($\Rightarrow P = 0,1697$).

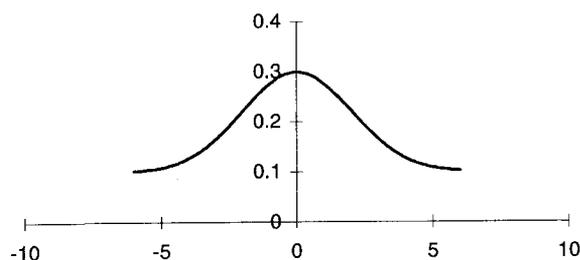


Figure 10. - $w(x) = 0,1 + N(0;2)$.

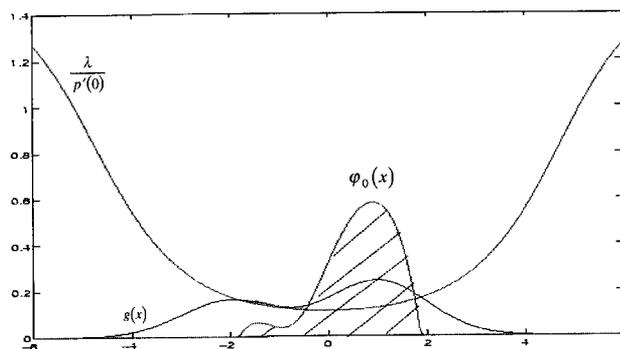


Figure 11. - Calcul de l'effort de recherche avec $w(x) = 0,1 + N(0;2)$ et $\Phi = 1$, ($\Rightarrow P = 0,1880$).

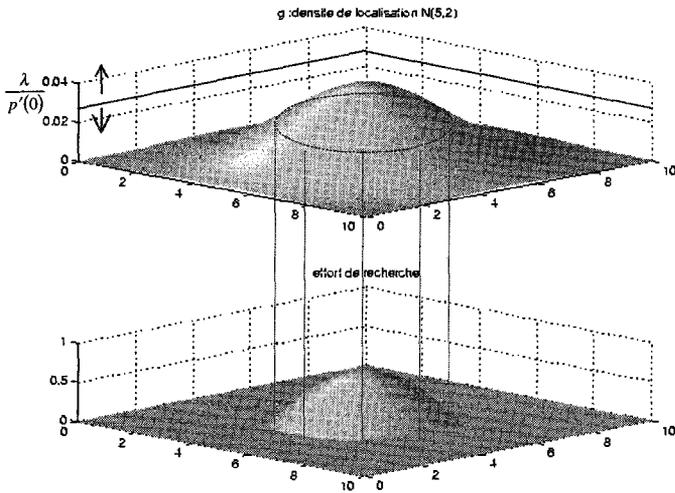


Figure 12. – Calcul de l'effort de recherche pour une loi normale bi-dimensionnelle. avec $w(x) = 1$ et $\Phi = 5$, ($\Rightarrow P = 0,1697$).

Le principe de résolution est identique. On détermine tout d'abord l'espace de recherche, puis sur cet espace on utilise l'inverse de la probabilité de détection pour obtenir φ . Le contrôle de l'effort total se fait en calculant le volume sous cette fonction φ , et en modifiant le paramètre λ pour converger vers l'effort total disponible. Dans le cas de la figure 12, le paramètre de visibilité est constant ce qui entraîne que lorsqu'on modifie λ , on monte ou on descend un plan $z = \lambda/p'(0)$, qui par son intersection avec g détermine la taille de l'espace de recherche.

Pour toutes les simulations, on a supposé la probabilité de détection exponentielle. Par conséquent, on peut réécrire la formule du théorème :

$$g(x, y) \cdot p'_\varphi[\varphi(x, y)] = \lambda \Rightarrow g(x, y) \cdot w(x, y) e^{-w(x, y) \cdot \varphi(x, y)} = \lambda,$$

et le passage au logarithme permet d'obtenir :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{w} \log \left(\frac{g \cdot w}{\lambda} \right)$$

Si on suppose que la distribution g de la cible est une fonction (gaussienne) de la distance r entre sa position et le centre de cette distribution on a :

$$g(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

De plus, si on considère $w(x, y) = 1$, et si on note r le rayon d'une zone de recherche, on obtient sur ce cercle :

$$g(x, y) \cdot e^{-\varphi(x, y)} = \lambda,$$

en passant au logarithme, on a alors :

$$\log \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) - \frac{r^2}{2\sigma^2} - \varphi(r) = \log(\lambda).$$

On peut aisément montrer que φ est continue. En effet, φ est continue sur R car f est continue. De plus, quand x tend vers une borne c de R , $\lambda/g(x)$ tend vers $p'(0)$, et donc la limite à gauche de φ en c est $f(p'(0))$ c'est-à-dire 0, et comme pour $x \geq c$ $\varphi(x) = 0$, la fonction φ est continue. Cette démonstration s'étend sans difficulté au cas bi-dimensionnel.

Si on applique maintenant l'équation précédente sur le cercle de rayon limite a , on obtient ($\varphi(a) = 0$) :

$$\log \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) - \frac{a^2}{2\sigma^2} - 0 = \log(\lambda)$$

et donc :

$$\lambda = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}.$$

On en déduit l'expression de φ , soit :

$$\begin{aligned} \varphi &= \log \left(\frac{g}{\lambda} \right) = \log \left(e^{\frac{a^2 - r^2}{2\sigma^2}} \right) \\ \varphi(x, y) &= \frac{a^2 - r^2}{2\sigma^2} \quad (x^2 + y^2 = r^2). \end{aligned}$$

En intégrant $\varphi(x, y)$ dans le disque de rayon a , on obtient :

$$\Phi = \int_0^a \varphi(r) \cdot 2\pi r dr = \int_0^a \frac{a^2 - r^2}{2\sigma^2} \cdot 2\pi r dr$$

donc

$$\Phi = \frac{\pi}{\sigma^2} \left[\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right]$$

ce qui donne l'expression suivante de a :

$$a^2 = 2\sigma \sqrt{\frac{\Phi}{\pi}}$$

A partir de cela, on peut aussi calculer la probabilité totale de détection en fonction de l'effort total disponible :

$$P[\Phi] = \iint g(x, y) [1 - e^{-w(x, y) \varphi(x, y)}] dx dy,$$

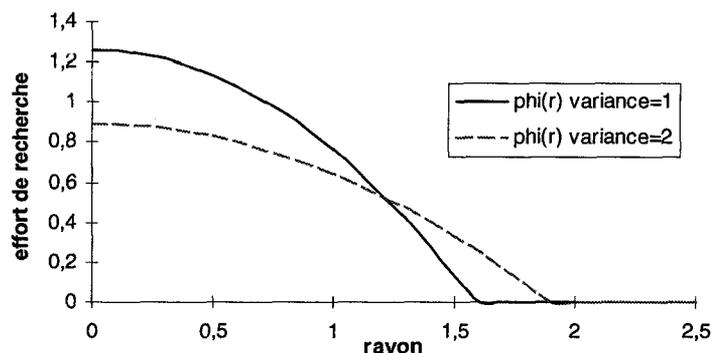


Figure 13. – Effort de recherche en fonction du rayon.

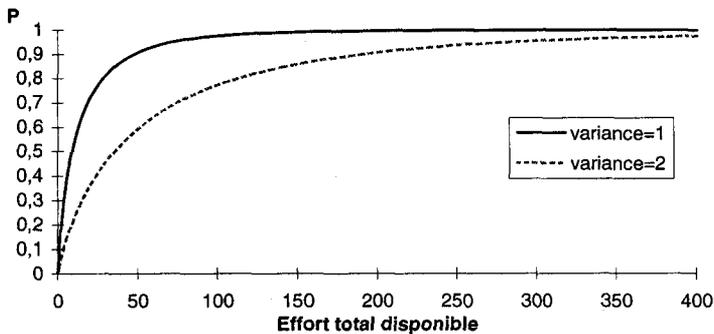


Figure 14. – Probabilité de détection totale en fonction de l'effort total disponible.

Comme $\varphi(r) = \frac{a^2 - r^2}{2\sigma^2}$ et $a^2 = 2\sigma\sqrt{\frac{\Phi}{\pi}}$, on a :

$$P[\Phi] = \int_0^a \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \left[1 - e^{-\frac{a^2 - r^2}{2\sigma^2}} \right] r dr$$

puis finalement après intégration :

$$P[\Phi] = 1 - \left(1 + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\Phi}{\pi}} \right) e^{-\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\Phi}{\pi}}} \quad (4)$$

En examinant les résultats de la figure 14, on met en évidence l'effet de l'incertitude (variance) relative à la localisation de la cible sur les résultats de la recherche (probabilité de détection).

3.2. la recherche en plusieurs étapes

Ce nouveau problème est une extension naturelle du précédent. Auparavant, on disposait d'un effort global (Φ) à répartir sur une seule étape. Maintenant, on se place dans le cas où la recherche est effectuée en plusieurs étapes. Pour chacune d'elles (l'indice de la recherche est alors noté i), un effort total de recherche est disponible.

La difficulté du problème tient au fait qu'il s'agit d'optimiser la probabilité totale (i.e. correspondant à la somme des probabilités de détection obtenues à chaque étape). Comme la densité de localisation $g_i(x)$, à chaque étape, dépend des efforts de recherche effectués aux étapes précédentes, le problème consiste à optimiser une stratégie de répartition multi-étapes de l'effort de recherche. La résolution directe de ce problème conduit à considérer des problèmes d'optimisation combinatoire, qui deviennent rapidement de taille déraisonnable.

Les conditions générales d'optimalité, pour le problème multi-étapes, ont été obtenues par L.D. Stone [8]. Ces conditions requièrent le calcul de la densité de localisation $g_i(x)$ et c'est là le point délicat. La résolution algorithmique de ce problème est due à S.S. Brown [9] et A.R. Washburn [10].

3.2.1. le problème

On va donc étudier le cas où l'on effectue un nombre N de recherches successives sur un ensemble de cellules E . Pour chacune des étapes, un effort total sera disponible : $\Phi(i)$ pour $i = 1 \dots N$. Le plan de recherche sera défini par l'ensemble des N fonctions de répartition de l'effort de recherche φ_i et sera noté $\varphi : \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_N)$. Ce plan constitue la stratégie de recherche.

On étudiera le cas général où la cible est mobile et de mouvement markovien. On connaît donc sa densité de localisation initiale et ses probabilités de transition :

$$\text{Trans}(x, y) = \text{Pr}(\text{la cible arrive en } y \text{ en étant partie de } x)$$

A chaque étape de la recherche on suppose que la cible n'occupe qu'une seule cellule ω_i . L'ensemble $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ représente donc le chemin parcouru par la cible, et la probabilité que la cible emprunte le chemin ω sera notée $\text{Pr}(\omega)$. On définit donc Ω comme étant l'ensemble des chemins possibles ($\Omega = \{\omega : \text{Pr}(\omega) > 0\}$).

On souhaite minimiser la probabilité de non-détection à la fin des N étapes sous la contrainte que l'effort total disponible à chaque étape est limité par $\Phi(i)$. Le problème sera étudié sous l'hypothèse de la détection exponentielle, par conséquent comme les recherches à chaque étape sont statistiquement indépendantes le problème peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\varphi} = \arg \min_{\varphi} Q(\varphi) \\ \text{contraintes} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(c) \geq 0 \quad \forall c \in E \\ \sum_{c \in E} \varphi_i(c) = \Phi(i) \end{array} \right. \quad i = 1 \dots N \\ \text{avec} \quad Q(\varphi) = \sum_{\omega \in \Omega} \text{Pr}(\omega) \cdot e^{-\sum_{i=1}^N w_i(\omega_i) \cdot \varphi_i(\omega_i)} \end{array} \right.$$

La fonction $Q(\varphi)$ représente la fonction de non-détection associée au plan de recherche φ ; elle est la somme, sur tous les chemins possibles, de la probabilité de non-détection de l'étape 1 à N sur ces chemins. Il faut noter que maximiser la probabilité de détection ou minimiser la probabilité de non-détection sont, dans ce cadre, strictement équivalents. L'intérêt de considérer la probabilité de non-détection est d'avoir ainsi une formulation convexe du problème.

3.2.2. résolution du problème d'optimisation multi-étapes

Nous allons tout d'abord déterminer les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire toute solution du problème. La fonction $Q(\varphi)$ est une fonction convexe, et comme l'espace des contraintes l'est aussi, par conséquent il existe un plan φ solution du problème.

Du fait de la convexité de la fonction Q et de la linéarité des contraintes (hypothèse de qualification des contraintes vérifiée), le problème est une application des conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker.

Appliquons ici ces conditions : φ est solution si et seulement si, à l'étape i , il existe un multiplicateur λ_i (contrainte $\sum_{c \in E} \varphi_i(c) = \Phi(i)$) et des multiplicateurs μ_i ($\mu_i \geq 0$ contraintes $-\varphi_i(c) \leq 0, \forall c \in E$) tels que :

$$\begin{cases} \varphi_i(c) = 0 & \text{et } \partial_i^c Q(\varphi) = \lambda_i + \mu_i \\ \varphi_i(c) > 0 & \text{et } \partial_i^c Q(\varphi) = \lambda_i \end{cases}$$

où $\partial_i^c Q$ est la dérivée partielle de Q par rapport à $\varphi_i(c)$.

On retrouve donc ainsi les résultats de de Guenin, ce qui se résume par la proposition suivante :

Proposition : *le plan φ est optimal si et seulement si à chaque étape i , on a*

$$\begin{cases} \partial_i^c Q(\varphi) = \lambda_i & \text{si } \varphi_i(c) > 0 \\ \partial_i^c Q(\varphi) \geq \lambda_i & \text{si } \varphi_i(c) = 0 \end{cases}$$

Connaissant un certain plan φ , nous allons appeler problème de réallocation au temps i , le problème qui consiste à remplacer la fonction de recherche du plan φ au temps i (φ_i), par une fonction φ'_i qui minimise la probabilité totale de non-détection ($Q(\varphi)$), sachant que pour les autres indices temporels $j \neq i$, on conserve les fonctions φ_j . On nommera φ^{*i} le plan issu de φ avec le remplacement de φ_i par φ'_i :

$$\varphi^{*i} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi'_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_N).$$

Le problème de réallocation au temps i de la fonction φ peut donc s'écrire comme :

$$\begin{cases} \hat{\varphi}'_i = \arg \min_{\varphi'_i} Q(\varphi^{*i}) \\ \text{contraintes} \quad \begin{cases} \varphi'_i(c) \geq 0 \quad \forall c \in E \\ \sum_{c \in E} \varphi'_i(c) = \Phi(i) \end{cases} \end{cases}$$

Concrètement, il s'agit de déterminer la fonction de recherche de l'étape i qui minimise la probabilité de non-détection en prenant en compte la totalité des efforts de recherche qui seront effectués au cours des autres étapes.

Ce problème de réallocation au temps i , est en fait un problème de recherche d'une cible stationnaire dont la densité de localisation est définie par :

$$g^{*i}(c) = \sum_{\{\omega \in \Omega: \omega_i=c\}} \Pr(\omega) \cdot e^{\sum_{j \neq i} w_j(\omega_j) \cdot \varphi_j(\omega_j)}$$

et la fonction de non-détection est :

$$Q(\varphi^{*i}) = \sum_{c \in E} g^{*i}(c) \cdot e^{-w_i(c) \cdot \varphi_i(c)}$$

La densité en c est donc la somme des probabilités de non-détection sur l'ensemble des chemins passant par c à l'étape i .

Maintenant si on calcule la dérivée partielle de $Q(\varphi^{*i})$ par rapport à $\varphi'_i(c)$ en φ'_i on retrouve exactement $\partial_i^c Q(\varphi)$. Ceci est évidemment vrai pour toutes les étapes $i = 1 \dots N$, en prenant à chaque fois le problème de réallocation associé. Par conséquent grâce à la proposition précédente qui résulte des conditions de Kuhn-Tucker, on aboutit au résultat suivant :

Proposition : (Brown) *Le plan φ est un plan optimal si et seulement si, pour tout i de 1 à N , φ_i est solution du problème de réallocation au temps i .*

L'algorithme Forward and Backward (FAB)

Grâce au résultat précédent, la mise en œuvre de la détermination du plan de recherche peut enfin être définie. En effet, pour obtenir le plan optimal φ , on va modifier un plan initial sur ses N étapes grâce au problème de réallocation. Puis, ce nouveau plan sera pris comme base pour une nouvelle modification par la même méthode. On continuera jusqu'au moment où l'amélioration de la probabilité de non-détection par rapport au plan précédent sera inférieure à un certain ε . On comparera les probabilités de non-détection uniquement sur les plans ayant subi les N réallocations.

Le plan optimal est obtenu à un ε près, car chaque modification par le résultat du problème de réallocation, entraîne nécessairement une diminution de la probabilité de non-détection. Comme de plus la fonctionnelle Q est convexe, elle ne possède pas de minima locaux, par conséquent les modifications successives par les problèmes de réallocation entraînent la convergence vers le plan optimal.

La seule difficulté restante dans la mise en œuvre de l'algorithme est le calcul de la densité de localisation g^{*i} , qui représente la probabilité qu'un trajet ω ($\omega \in \Omega$) passe par la cellule ω_i .

$$g^{*i}(c) = \sum_{\{\omega \in \Omega: \omega_i=c\}} \Pr(\omega) \cdot e^{\sum_{j \neq i} w_j(\omega_j) \cdot \varphi_j(\omega_j)}$$

où

$$\Pr(\omega) = g_1(\omega_1) \cdot \text{Trans}(\omega_1, \omega_2) \cdot \text{Trans}(\omega_2, \omega_3) \cdot \dots \cdot \text{Trans}(\omega_{N-1}, \omega_N) \cdot g_{\text{fin}}(\omega_N)$$

La densité $g_{\text{fin}}(\omega_N)$ est une contrainte supplémentaire sur le mouvement de la cible. Elle représente la densité de la cible à la fin de son mouvement. Si, comme dans le cas général, elle est inconnue on prendra arbitrairement $g_{\text{fin}}(c) = 1 \quad \forall c \in E$.

On peut remarquer que la valeur de la densité g^{*i} en c est composée de deux parties : avant et après i . C'est pourquoi on peut aussi l'écrire de la manière suivante :

$$g^{*i}(c) = \text{Forward}_i(c, \varphi) \cdot \text{Backward}_i(c, \varphi),$$

avec

$$\text{Forward}_i(c, \varphi) = \sum_{\{\omega \in \Omega: \omega_i=c\}} g_1(\omega_1) \cdot \text{Trans}(\omega_1, \omega_2) \dots \cdot \text{Trans}(\omega_{i-1}, c) \cdot e^{-\sum_{j=1}^{i-1} w_j(\omega_j) \cdot \varphi_j(\omega_j)}$$

et

$$\text{Backward}_i(c, \varphi) = \sum_{\{\omega \in \Omega: \omega_i=c_i\}} \text{Trans}(c, \omega_{i+1}) \dots \cdot \text{Trans}(\omega_{N-1}, \omega_N) \cdot g_{\text{fin}}(\omega_N) \cdot e^{-\sum_{j=i+1}^N w_j(\omega_j) \cdot \varphi_j(\omega_j)}$$

Ces deux quantités peuvent être déterminées par récurrence. Comme leurs noms le suggèrent, la fonction Forward sera initiée par la densité de localisation initiale et se calculera dans l'ordre croissant des étapes, tandis que la fonction Backward sera initiée par g_{fin} et reculera de l'étape N à l'étape i . Ces fonctions Forward et Backward sont alors calculées par la récurrence ci-après [Brown] :

$$\begin{aligned} \text{Forward}_1(c, \varphi) &= g_1(c), \\ \text{Forward}_i(c, \varphi) &= \sum_{d \in E} \text{Forward}_{i-1}(d, \varphi) \cdot e^{-w_i(d) \cdot \varphi_i(d)} \cdot \text{Trans}(d, c) \\ \text{Backward}_N(c, \varphi) &= g_{\text{fin}}(c), \\ \text{Backward}_{i-1}(c, \varphi) &= \sum_{d \in E} \text{Trans}(c, d) \cdot e^{-w_i(d) \cdot \varphi_i(d)} \cdot \text{Backward}_i(d, \varphi). \end{aligned}$$

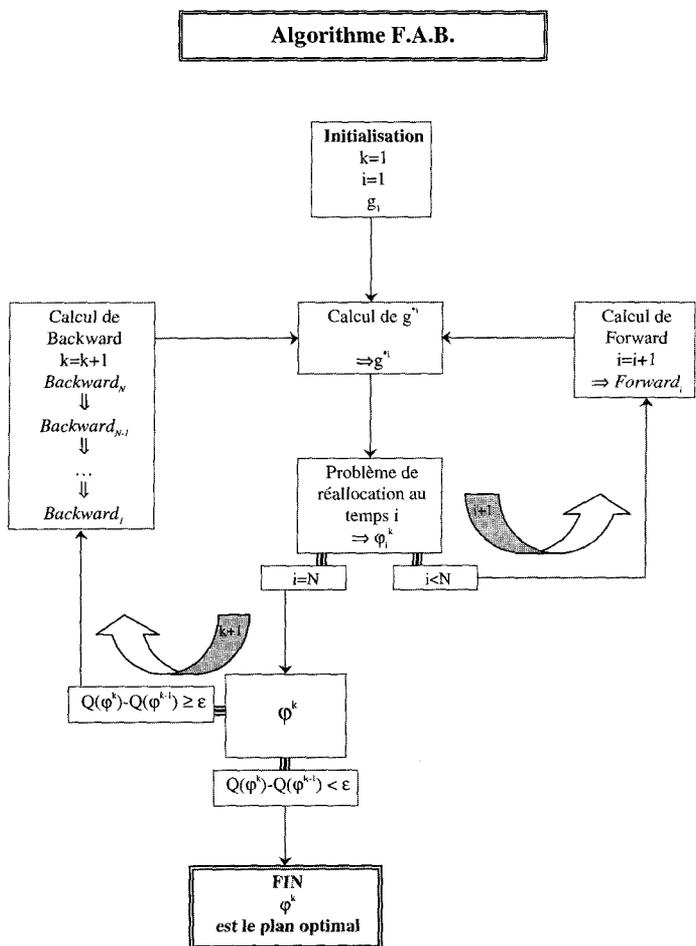
La fonction Forward représente les chances que la cible ait atteint la cellule c à l'étape i . Par contre la fonction Backward représente les chances de survie d'une cible qui occupe la cellule c à l'étape i .

La détermination du plan optimal est maintenant parfaitement définie. Le premier plan sera obtenu en optimisant au fur et à mesure des étapes la probabilité de non-détection. Comme il s'agit du premier plan, la densité de localisation g^{*i} sera calculée sans tenir compte de la fonction Backward qui n'a pas lieu d'exister puisqu'on ne connaît pas encore les efforts de recherches futurs. Ce plan issu de la première itération de l'algorithme est appelé *plan myope*. Son nom vient du fait que ce plan ne tient pas compte des actions futures, mais uniquement des actions passées et de la situation présente. Par contre, la méthode qui permet d'obtenir le plan optimal, effectue une optimisation en tenant compte à la fois des efforts passés et futurs (Forward et Backward). Le *plan myope* pourra servir de référence pour juger de l'amélioration apportée par la solution optimale.

3.2.3. applications

Nous allons maintenant appliquer la technique de résolution sur un exemple susceptible de représenter une application réelle. On supposera que la cible est mobile et que son mouvement est Markovien, c'est-à-dire que l'on supposera connaître la distribution de sa direction ainsi que celle de sa vitesse (module). La distribution du déplacement de la cible est simulée à partir de la distribution de la direction et de celle de la vitesse (cf. figure 15). La distribution de l'angle (cap) du déplacement est caractérisée par une loi triangulaire pour prendre en compte la forte probabilité d'un mouvement rectiligne de direction principale 45° et traduire, cependant, une incertitude relative à son cap réel. La distribution du module du vecteur vitesse correspond à la possibilité d'un déplacement principal de 3 cellules ou d'une vitesse nulle. La combinaison de ces distributions permet d'obtenir les probabilités de déplacement (cf. figure 17) qui seront appliquées à la densité initiale de présence de la cible.

La densité de localisation initiale sera déterminée par la combinaison d'une loi normale tronquée sur le rayon et d'une autre sur la direction (angle), ceci afin de représenter les connaissances possibles sur l'azimut et la distance de la cible (cf. figure 16), obtenues par un appareil d'écoute (sonar, radar, ESM).



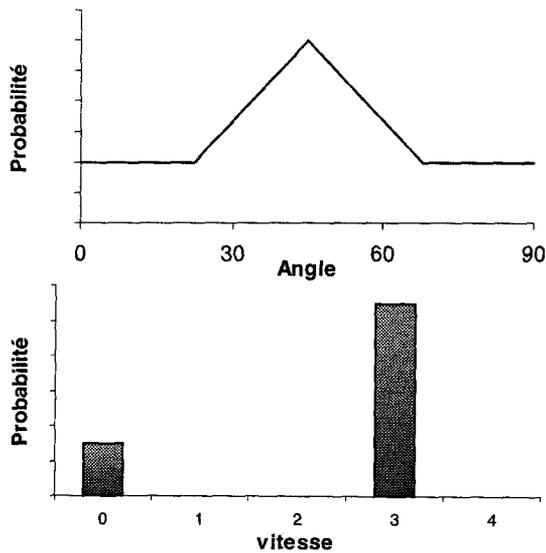


Figure 15. – Caractéristiques du mouvement.

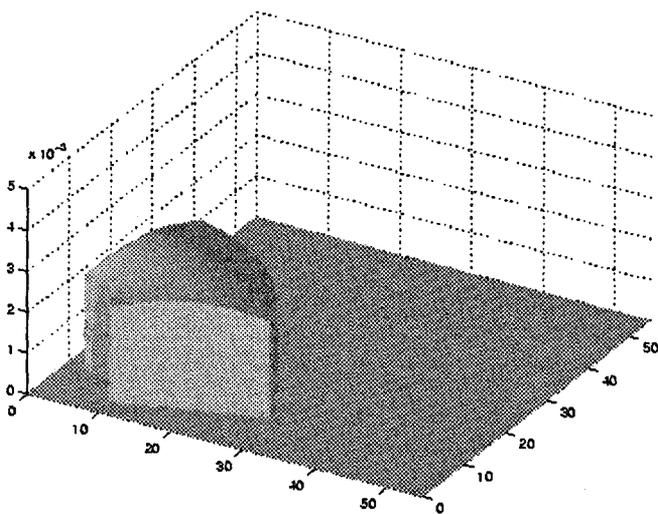


Figure 16. – Densité initiale de la cible.

Le problème est, maintenant, de déterminer la distribution des efforts de recherche à chaque étape afin de maximiser la probabilité de détection à la fin de toutes ces étapes. Le plan optimal sera comparé avec le plan myope (résultat de la première itération), car le plan myope représente la stratégie la plus simple : si après une recherche, la détection n'a pas été obtenue, on renouvelle celle-ci en tenant compte des non détections précédentes.

On déterminera les plans de recherche optimaux pour 2 à 8 étapes. Pour *chaque* étape, un effort total de 80 unités sera disponible.

L'algorithme FAB converge très vite. En effet les résultats ont été obtenus avec une moyenne de 5 itérations, pour une précision de 10^{-2} sur le pourcentage de détection.

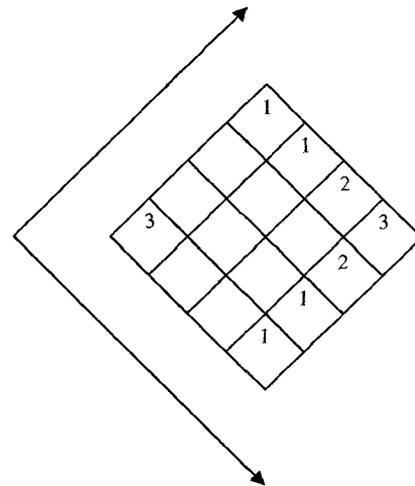


Figure 17. – Probabilités de déplacement de la cible.

Le tableau ci-dessous (figure 18) illustre les probabilités de détection des plans optimaux ainsi que des plans myopes. Même si les différences ne sont pas très importantes, on obtient tout de même une amélioration de 3 % dans le cas d'une recherche sur 8 étapes. On peut aussi remarquer que le plan optimal pour 8 étapes, ne l'est pas pour un nombre inférieur d'étapes, et qu'il est même moins bon pour les premières étapes.

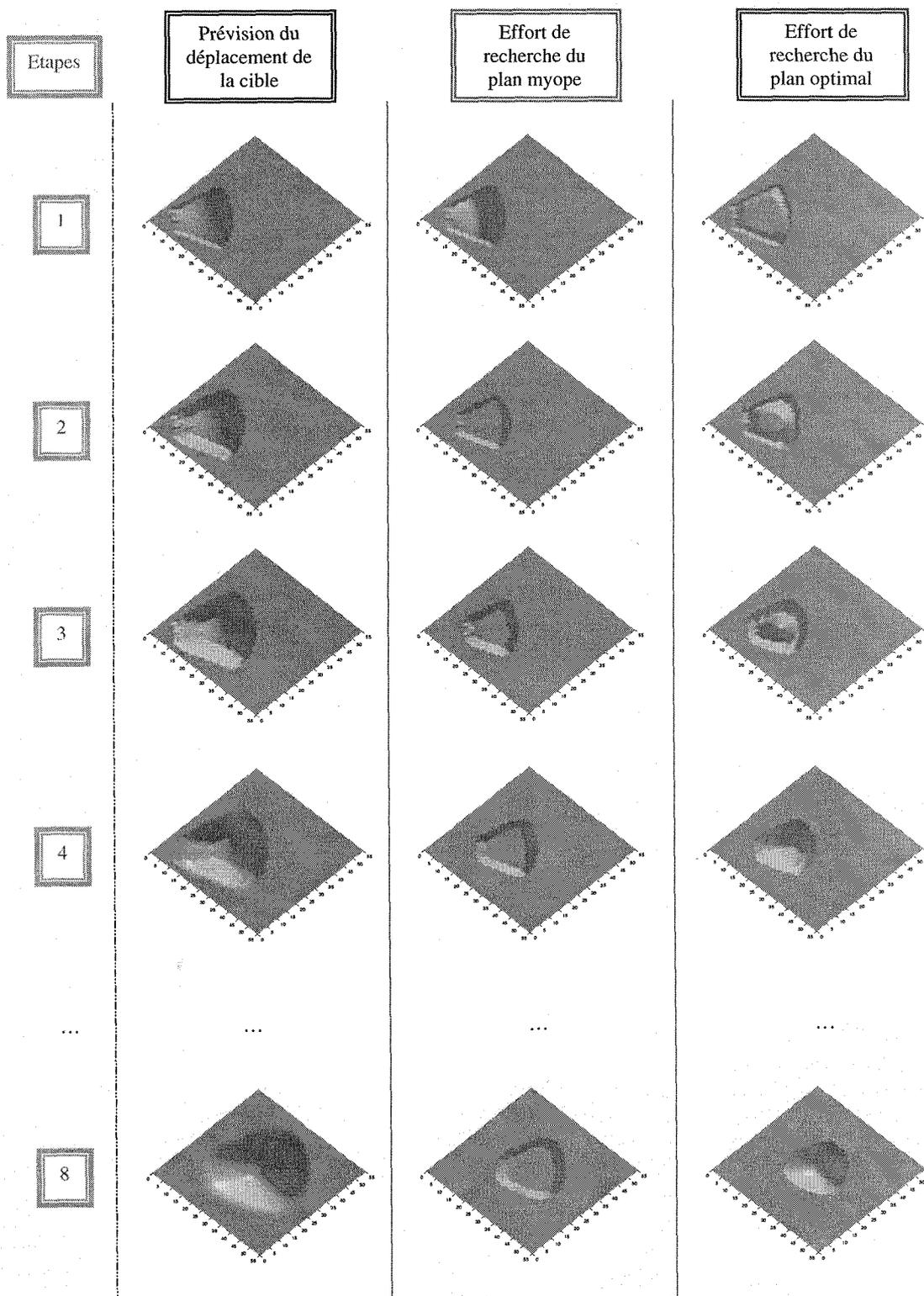
Étapes	1	2	3	4	5	6	7	8
Plan Myope	18.06	32.14	42.66	50.71	57.02	62.08	66.21	69.63
Plans Optimaux	17.40	32.57						
	16.38	32.15	43.83					
	15.90	30.90	43.51	52.50				
	15.53	29.57	42.68	52.27	59.27			
	15.24	38.66	41.64	51.67	59.11	64.66		
	14.99	28.00	40.53	50.90	58.68	64.55	69.02	
	14.78	27.45	39.28	49.87	57.96	64.15	68.92	72.60

Figure 18. – Probabilités de détection des plans optimaux.

Ainsi, c'est le plan myope qui donne la meilleure probabilité de détection pour les premières étapes. L'avantage est ensuite repris par le plan optimal. Ce n'est guère étonnant car il prend en compte tous les efforts de recherche (passés et futurs), (cf. figure 19).

Les figures suivantes mettent en évidence la différence entre stratégies de recherche (myopes et optimales). Les répartitions des efforts de recherche (dans le plan (x, y)), aux différentes étapes, sont visualisées par une vue de dessus. Les différences apparaissent dès la première étape. Alors qu'on peut définir le plan myope par le fait que les efforts de recherche se répartissent globalement sur les maxima de la densité de localisation, le plan optimal préfère porter ses efforts, pour les premières étapes, sur les zones qui risquent le plus de s'éloigner de ces maxima du fait de la diffusion due au mouvement. L'effort est avant tout porté sur les contours de la densité de localisation (stratégie d'encercllement). Ensuite, l'effort de recherche se concentre spécialement pour les dernières étapes sur les maxima de la densité de localisation.

maxima de la densité de localisation.



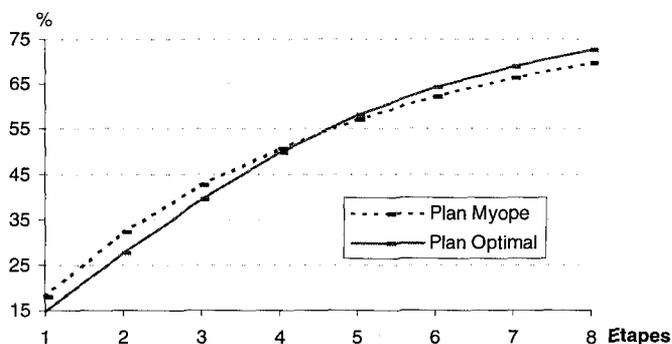


Figure 19. – Evolution des probabilités de détection.

La différence entre la probabilité de détection du plan myope et celle du plan optimal n'est, pourrait-on dire, que de 3 %. Cependant, pour que le plan myope atteigne le même score que le plan optimal il faudrait une augmentation de 10 % de son effort total à chaque étape. Cette remarque montre l'intérêt de déterminer le plan optimal.

Les graphiques ci-dessous (figure 20 et 21) montrent d'une part (figure 20) l'évolution de la probabilité de détection (plan optimal) pour différentes valeurs de l'effort total disponible à chaque étape et, d'autre part, de l'augmentation relative de la probabilité globale de détection obtenue par le plan optimal multi-étapes (8 étapes) relativement au plan myope (figure 21), toujours en fonction de la quantité d'effort de recherche disponible à chaque étape. On constate (figure 21), que cette amélioration croît tout d'abord très vite, puis décroît plus doucement.

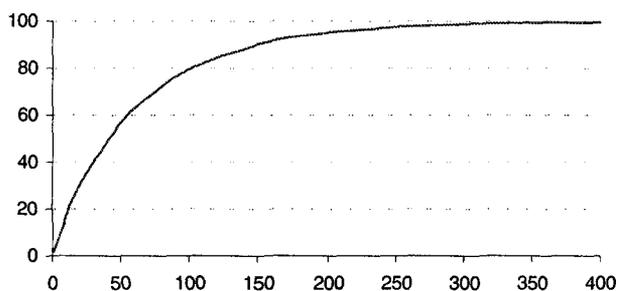


Figure 20. – Probabilité de détection d'un plan à 8 étapes pour différents efforts de recherche.

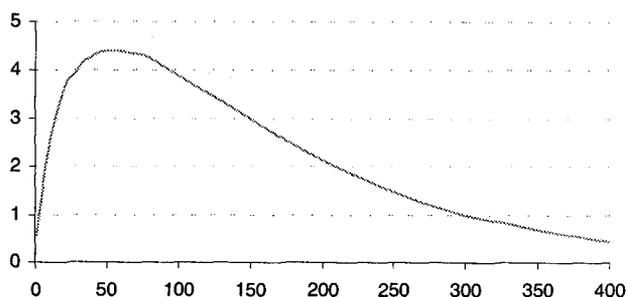


Figure 21. – Amélioration relative du plan optimal sur le plan myope (exprimé en pourcentage d'augmentation).

Nous venons d'étudier une approche de résolution algorithmique d'un problème de recherche optimale sur n étapes. Ce problème a été étudié dans le cas d'un espace et d'un temps discrétisés. Des résultats généraux comprenant des combinaisons de temps et d'espaces continus et discrets ont été obtenus par L. D. Stone [8].

4. le mouvement de l'observateur

Précédemment, dans le problème de la distribution optimale de l'effort de recherche, on ne tenait pas compte de la position de l'observateur et de son déplacement pour affecter l'effort de recherche. Pourtant, dans la majorité des cas concrets, l'observateur doit se déplacer pour atteindre les zones de recherche. Pratiquement cela signifie que la répartition de l'effort de recherche est essentiellement liée au déplacement de l'observateur. On doit donc se poser le problème de l'optimisation de ce déplacement. Par rapport au problème précédent, cela induit donc des contraintes supplémentaires.

4.1. l'observateur mobile

4.1.1. le mouvement de l'observateur

On étudiera ce problème dans un espace de dimension 2 et l'espace sera discrétisé. L'observateur se déplacera donc de case en case. Pour les différents exemples étudiés, il a été fait l'hypothèse que l'observateur peut se déplacer uniquement sur les cases voisines de sa position précédente ou bien encore rester sur la même case. Par conséquent, à chaque déplacement l'observateur a le choix entre 9 possibilités (cf. figure 22).

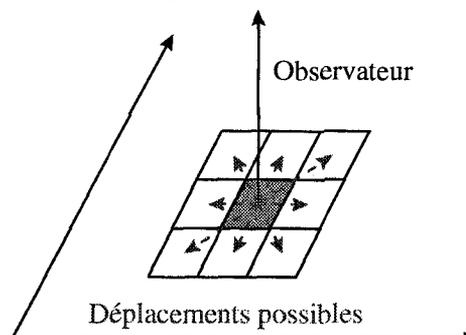


Figure 22. – Déplacement de l'observateur.

4.1.2. la probabilité de détection

Toujours dans le but de se rapprocher des applications réelles, on suppose que l'observateur possède un champ de vision (détection)

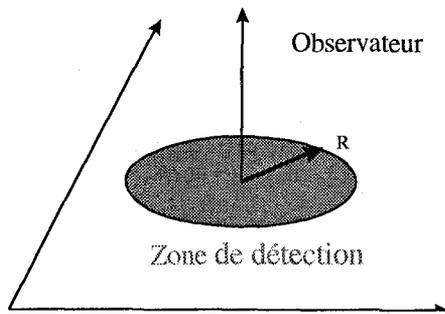


Figure 23. – Zone de détection de l'observateur.

limité, et que de plus, (variations du paramètre de visibilité, cf. figure 4) la détection varie selon la distance entre la cible et l'observateur. Nous allons donc considérer que la détection n'est possible qu'à l'intérieur d'un disque autour de l'observateur.

On obtient alors une probabilité de détection du type de celle qui est représentée ci-dessous.

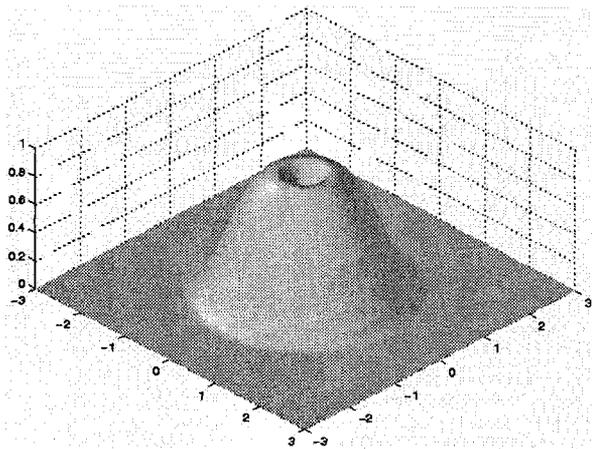


Figure 24. – Probabilité de détection ($\varphi(x) = 1$).

4.1.3. les conséquences du déplacement

L'observateur va donc se déplacer de case en case, et à chaque déplacement il va lancer le processus de détection. Après ce processus, deux cas se présentent : soit l'observateur a détecté la cible, soit il ne l'a pas détectée. Si on se trouve dans le premier cas, on suppose le problème résolu et donc l'algorithme de déplacement n'a plus lieu de continuer. Par contre, si l'observateur n'a pas détecté la cible, on continue le déplacement. Mais le fait de ne pas avoir détecté la cible est une information qui peut servir pour la suite du problème.

En effet si la cible n'a pas été détectée dans la zone de détection, c'est qu'elle a de fortes chances d'être à l'extérieur de cette zone (selon les probabilités de détection dans le disque). A chaque déplacement, l'observateur recueille de nouvelles informations

dont il doit tenir compte, c'est ce qu'on appellera la réallocation de la densité de localisation. On modifie la densité de localisation grâce aux informations de non-détection dans la zone de visibilité. Cette idée correspond à celle de la fonction Forward du chapitre précédent.

$$\Pr(\text{cible en } x, \text{ étape } t + 1) = \Pr(\text{cible en } x, \text{ étape } t) \times \Pr(\text{cible non-détectée en } x \text{ à l'étape } t)$$

ce qui peut s'écrire aussi :

$$g_{t+1}(x) = \frac{g_t(x) \cdot \Pr(\text{cible non détectée en } x)}{\int g_t(x) \cdot \Pr(\text{cible non détectée en } x) dx}, \quad (5)$$

où $\Pr(\text{cible non-détectée en } x) = 1 - p(\varphi(x)) = e^{-w \cdot \varphi(x)}$, et le dénominateur est un terme de normalisation.

On effectuera donc cette réallocation après chaque étape.

4.2. le mouvement myope

De même que dans le chapitre précédent on peut définir un plan myope, qui correspond à une maximisation de la probabilité de détection pour chaque mouvement.

4.2.1. le choix de déplacement

Le mouvement myope se base sur la connaissance de son voisinage pour définir la direction de son mouvement, d'où son nom de myope : il ne voit pas plus loin que ses cases voisines. Par conséquent la tactique myope va consister à calculer la probabilité de détection que peut lui apporter un déplacement dans ses cases voisines et se déplacer dans la case qui donnera la meilleure probabilité de détection. Le mouvement myope optimise la probabilité de détection à chaque étape par rapport à sa position précédente.

La caractéristique principale de son déplacement est qu'il se dirigera toujours vers les maxima de la densité de localisation.

Pour résumer, pour trouver la direction que doit prendre l'observateur, on applique l'algorithme de la distribution optimale de l'effort de recherche en supposant que l'observateur s'est déplacé sur une de ses cases voisines. On calcule les probabilités de détection pour chaque déplacement possible, et on choisit le déplacement qui a la plus forte probabilité de détection :

$$\Pr_{\text{tot}}(t) = \Pr_{\text{tot}}(t - 1) + (1 - \Pr_{\text{tot}}(t - 1)) \cdot \Pr_{\text{inst}}(t),$$

- $\Pr_{\text{tot}}(t)$ la probabilité totale de détection du départ à l'étape t ,
- $\Pr_{\text{inst}}(t)$ la probabilité de détection de l'étape t .

Si on continue le déplacement (cible non-détectée), on applique la réallocation et on recommence le calcul des probabilités de détection comme précédemment.

4.2.2. les résultats

L'exemple suivant a été réalisé à partir d'une densité de localisation normale de variance 1. L'observateur possède une visibilité maximale de 1, et la forme de la détection sur son disque est du même type que celle représentée sur la figure 24. L'observateur commence son déplacement en (2;2).

On constate bien que l'observateur se dirige vers le maximum de la densité de localisation en « effaçant » (réallocation) les zones sur lesquelles il est passé. Les figures 26 et 27 montrent les effets

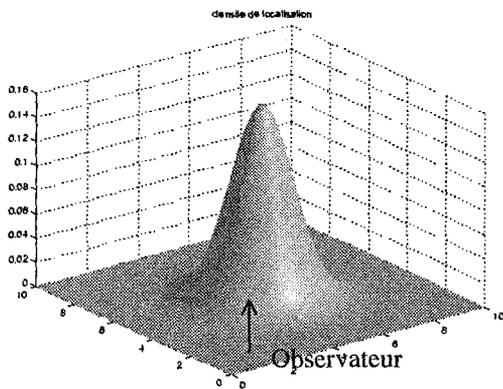


Figure 25. – Densité de localisation ($t = 0$).

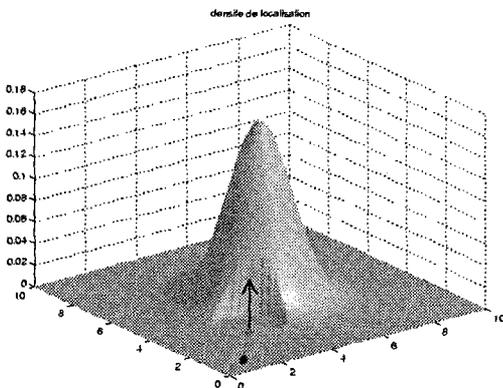


Figure 26. – Densité de localisation ($t = 1$).

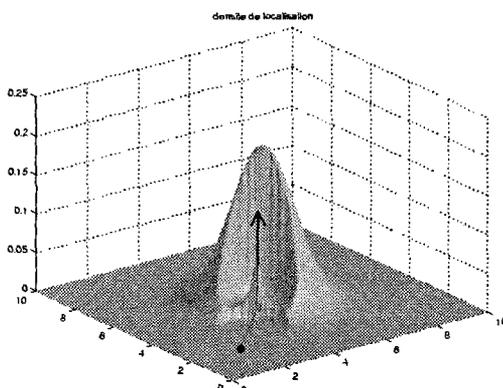


Figure 27. – Densité de localisation ($t = 2$).

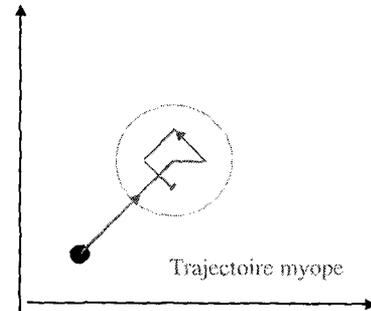


Figure 28. – Trajectoire myope de l'observateur.

de la réallocation après la détection. Dans la figure 27, on peut voir une pointe au niveau de l'observateur qui correspond au creux de la probabilité de détection utilisée (figure 24). Du fait de l'importance du rayon de détection par rapport à la variance de la densité de localisation, la probabilité totale de détection après les 7 étapes est de l'ordre de 80 %.

4.2.3. qualités et défauts

La qualité essentielle de ce type de déplacement est sa rapidité de mise en œuvre. Les calculs pour déterminer les directions à prendre à chaque étape se font très rapidement, ce qui permet d'obtenir le choix de direction pratiquement instantanément.

Par contre, le mouvement myope ne tient pas compte de l'ensemble de l'information puisqu'à chaque étape il n'utilise que l'information contenue sur les cases voisines. Il ne prend pas en compte la forme générale de la densité de localisation et les conséquences de ses mouvements. Par conséquent, on peut penser que la trajectoire myope est souvent assez éloignée de la trajectoire optimale.

4.3. la trajectoire optimale

4.3.1. méthode exhaustive

Pour déterminer la trajectoire optimale, la solution la plus simple est d'étudier tous les chemins. Bien que la méthode soit très lourde, en calculs et en temps, elle assure l'optimalité de la solution trouvée.

Les calculs sur la même grille que précédemment (11×11) n'ont permis d'atteindre une solution optimale que pour des chemins ne dépassant pas 6 étapes. Ceci est dû au grand nombre de chemins possibles : $9^{nb \text{ étapes}}$.

Pour montrer les différences entre la trajectoire myope et la trajectoire optimale, on a calculé ces trajectoires (et les probabilités de détection associées) pour une densité de localisation gaussienne de variance 1 dans une direction (x) et 3 dans l'autre (figure 29).

On s'aperçoit tout de suite de la différence des deux trajectoires. Alors que la trajectoire myope se dirige vers le maximum de la

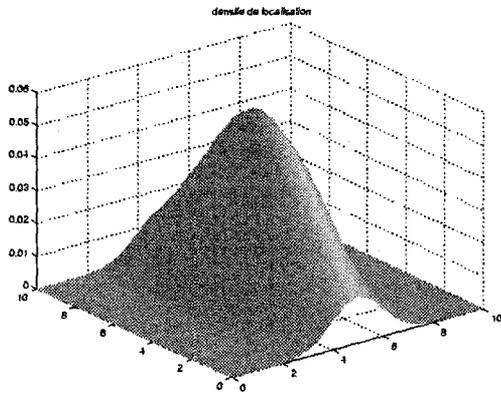


Figure 29. – Densité de localisation ($t = 0$).

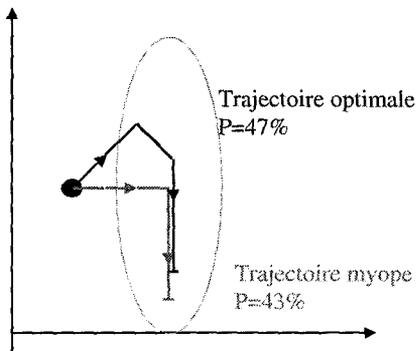


Figure 30. – Trajectoire de l'observateur (6 étapes).

densité, puis choisit un côté, la trajectoire optimale s'écarte au début pour pouvoir passer sur les zones à plus forte densité sur la fin de la trajectoire. La trajectoire myope en choisissant un côté, ne tient pas compte de la densité du côté opposé. Il y a alors un gain de détection de 4

La recherche exhaustive de la trajectoire optimale est très coûteuse en temps de calcul, et, bien sûr, limitée par le nombre d'étapes étudiées. Il serait donc intéressant de trouver une méthode permettant d'obtenir la trajectoire optimale pour un nombre d'étapes (bien) plus important. C'est ce que nous allons étudier avec la méthode Branch and Bound.

4.3.2. la méthode Branch and Bound

Lorsqu'on utilise la méthode exhaustive pour déterminer la trajectoire optimale, on étudie un par un tous les chemins possibles. On peut facilement s'apercevoir qu'il existe un grand nombre de chemins qui sont de toute évidence non-optimaux. En effet, les chemins se dirigeant toujours en opposition à la densité n'ont aucun intérêt. Il serait donc intéressant de trouver une méthode permettant d'étudier uniquement les chemins pouvant donner une bonne probabilité de détection totale. En particulier, il faudrait pouvoir estimer la probabilité de détection que pourrait donner un chemin dont on connaît seulement les premiers déplacements. Un algorithme de type Branch and Bound, étudié par T.J. Stewart [11] en 1979, est basé sur ces idées.

Le principe général

L'idée de l'algorithme Branch and Bound, se base sur l'estimation, connaissant le début du chemin, de la probabilité de détection totale que pourrait donner la meilleure trajectoire utilisant ce début de chemin. A défaut de pouvoir estimer exactement cette probabilité, la connaissance d'une borne supérieure de cette probabilité pourrait aussi être très utile.

En effet, supposant avoir déjà étudié un premier chemin entièrement, c'est-à-dire connaître exactement sa probabilité de détection totale (P_{max}) à la fin de la trajectoire, on prend le même début de trajectoire, mais à une certaine étape t , on choisit une direction différente de celle prise par le chemin précédent. Par une méthode que l'on expliquera par la suite, on estime une borne supérieure (P_{sup}) de la probabilité de détection totale. Par conséquent, si $P_{sup} < P_{max}$, cela signifie que toutes les trajectoires ayant ce même début ne pourront pas être meilleures que le premier chemin (P_{max}). De ce fait, il n'est pas nécessaire d'étudier tous les chemins possédant ce même départ, puisqu'on sait maintenant qu'au mieux ils donneront une probabilité de détection inférieure au chemin qu'on a déjà déterminé. On gagne donc par rapport à la méthode exhaustive sur tous ces chemins qui sont donc écartés *a priori*.

L'estimation de la borne : le problème relaxé

Le problème est maintenant de trouver une méthode pour estimer cette borne supérieure. L'une des méthodes utilisées dans les problèmes d'optimisation sous contraintes entières est d'élargir le problème, et en particulier de relâcher les contraintes entières en contraintes réelles. Le problème, une fois relâché, comprend dans son ensemble de solutions possibles les solutions du problème entier. Par conséquent, la solution optimale du problème relâché donne une borne exacte des solutions du problème de départ.

En résumé, le principe consiste à relâcher les contraintes du problème de départ, c'est-à-dire à trouver des contraintes plus larges qui incluent les contraintes du problème initial.

Dans le cas qui nous intéresse, parmi les contraintes, il existe les contraintes de proximité. Ce sont les contraintes, qui obligent l'observateur à se déplacer sur ces cases voisines. On peut obtenir

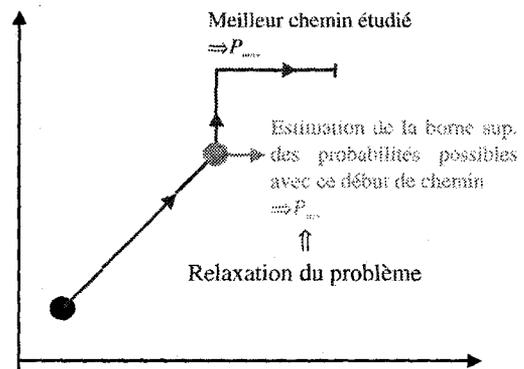


Figure 31. – Intervention de la borne.

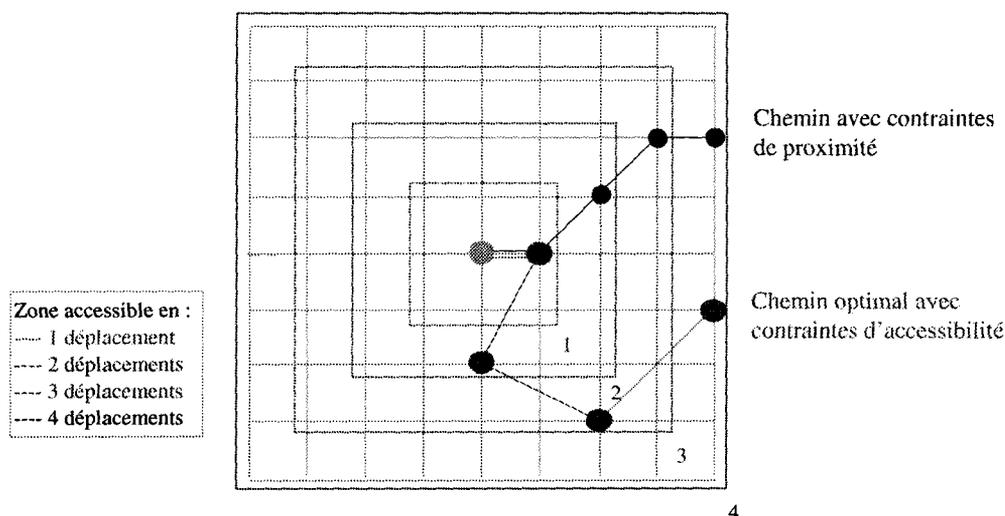


Figure 32. – Le problème relaxé.

un problème relaxé, en relâchant ces contraintes de proximité. On remplace donc ces contraintes par des contraintes d'accessibilité. C'est-à-dire que l'observateur peut se déplacer à chaque étape sur n'importe quelle case accessible depuis le point initial du problème pour le nombre d'étapes en cours (figure 32).

On utilise le problème relaxé uniquement après le début de chemin (figure 31). Comme ce dernier est connu, la probabilité de détection au terme de ce début de trajectoire peut être calculée.

La figure 32 montre le résultat du relâchement des contraintes d'accessibilité. A chaque étape, on détermine la case qui maximise la probabilité de détection, à l'intérieur du carré accessible.

Le chemin optimal dans le problème relaxé peut être obtenu grâce à un algorithme FAB (le problème initial ne peut être résolu avec le FAB à cause du lien qui existe entre les efforts de recherche (contraintes de proximité)).

Le problème relaxé permet donc d'obtenir une borne supérieure des probabilités de détection des trajectoires possibles. En la comparant à la probabilité de détection de la meilleure trajectoire étudiée jusqu'à présent, on détermine s'il est utile de continuer l'étude des chemins partant de ce début de trajectoire.

L'algorithme Branch and Bound, consiste donc à choisir une variable de ramification, ici le déplacement, et un problème relaxé pouvant déterminer une borne permettant de stopper la ramification le cas échéant.

L'algorithme Branch and Bound

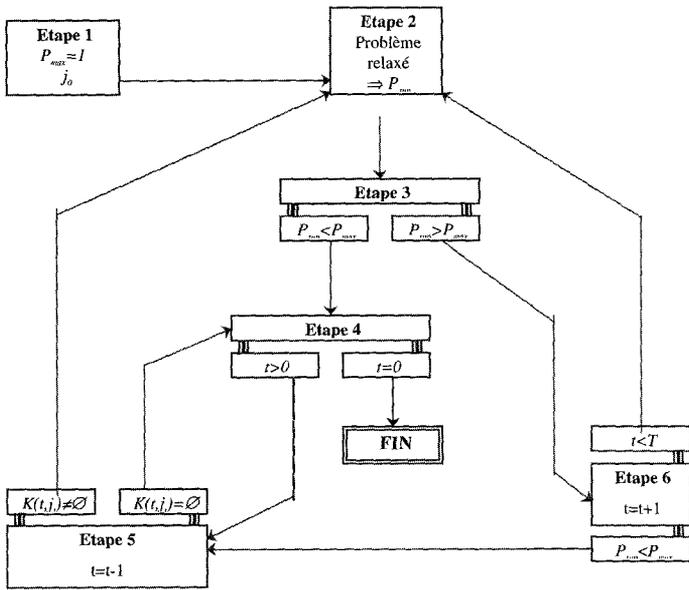
Avant de décrire l'algorithme, il faut définir les différentes variables. On numérotera les étapes par la variable t (jusqu'à T). $K(t, j_t)$ est l'ensemble des directions possibles non étudiées, à l'étape t , à partir du point j_t de la trajectoire en cours d'étude.

L'algorithme définit tout d'abord une première trajectoire complète qui permet de définir une probabilité totale de référence P_{max} , puis il recule sur cette trajectoire et estime pour les autres directions possibles, grâce au problème relaxé, la borne

qui indique s'il doit continuer l'étude dans la direction choisie. En itérant, l'algorithme revient à l'étape initiale où se termine l'algorithme.

Algorithme Branch and Bound

- 1) $P_{max} = 0$; j_0 le point de départ de la trajectoire
- 2) Calcul de la borne supérieure P_{sup} des trajectoires passant par j_0, \dots, j_t , grâce à la résolution du problème relaxé sur les périodes $t+1, t+2, \dots, T$ avec le chercheur en j_t au départ et le premier déplacement restreint par les directions existantes dans $K(t, j_t) \Rightarrow$ étape 3
- 3) • Si $P_{sup} > P_{max} \Rightarrow$ étape 6
• sinon toute continuation du chemin en cours est inutile \Rightarrow étape 4
- 4) • Si $t = 0$, l'algorithme est terminé, la solution courante est optimale
• si $t > 0 \Rightarrow$ étape 5
- 5) On élimine le déplacement ayant conduit à j_t de $K(t-1, j_{t-1})$, $t = t - 1$
• si $K(t, j_t) = \emptyset$, toutes les directions à partir de j_t ont été étudiées
 \Rightarrow étape 4
• sinon \Rightarrow étape 2
- 6) On choisit le point obtenu par la direction de $K(t, j_t)$ utilisée dans le problème relaxé, comme nouveau point j_{t+1} , $t = t + 1$
• si $t < T$ on définit $K(t, j_t)$ et \Rightarrow étape 2
• si $t = T$ on calcule la probabilité totale de détection de la trajectoire j_0, \dots, j_T
• si elle est supérieure à P_{max} , j_0, \dots, j_T devient la meilleure solution courante \Rightarrow étape 5.



Résultats

La comparaison des trajectoires obtenues par la méthode Branch and Bound et par la méthode exhaustive montre que les résultats sont identiques. L'algorithme Branch and Bound donne donc la trajectoire optimale avec une charge de calcul et de mémoire considérablement réduites, tout en assurant l'obtention du chemin optimal, car des chemins sans intérêts (non-optimaux) sont éliminés d'emblée. La méthode exhaustive est restreinte dans nos conditions matérielles à 6 étapes, alors que la méthode Branch and Bound atteint facilement 12 à 15 étapes dans des temps raisonnables. Les résultats suivants sont tirés de l'exemple présenté à la figure 33.

	Etapes	6	8	10	12
B&B	P _{optimal} (%)	46.5	57.4	65.7	70.4
	temps	20 sec.	90 sec.	50min	2h42
Exhaustif	P _{optimal} (%)	46.5			
	temps	4 min.			
Myope	P _{myope} (%)	43.8	49.2	51.3	54.2

On constate facilement la différence de détection entre la trajectoire myope et la trajectoire optimale (+14 % pour 10 étapes). Comme les résultats de la méthode exhaustive et de la méthode Branch and Bound sont identiques jusqu'à six étapes, on peut supposer que la méthode Branch and Bound donne les trajectoires optimales pour des nombres d'étapes plus élevés.

La figure 34 montre les différences de trajectoires pour 10 étapes. Le fait de se déplacer vers le maximum de détection le plus proche oblige le déplacement myope à choisir un côté et à se déplacer dans des zones où la probabilité de présence de la cible s'atténue. Par contre, la trajectoire optimale est définie de manière à pouvoir passer sans recouvrement, sur tout le long de la densité de localisation.

On peut remarquer tout de même l'augmentation importante du temps de résolution pour 10 étapes. C'est pourquoi, il faut essayer de limiter cette augmentation du nombre de calculs.

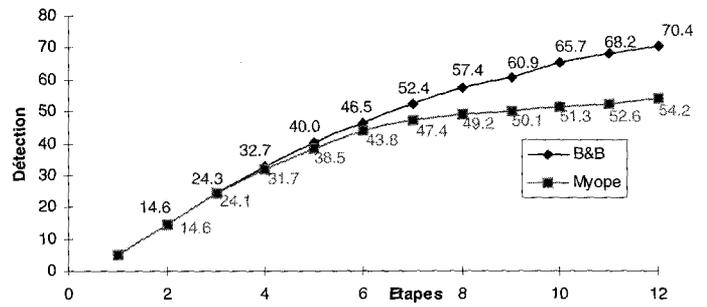


Figure 33. – Comparaison des probabilités de détection totale.

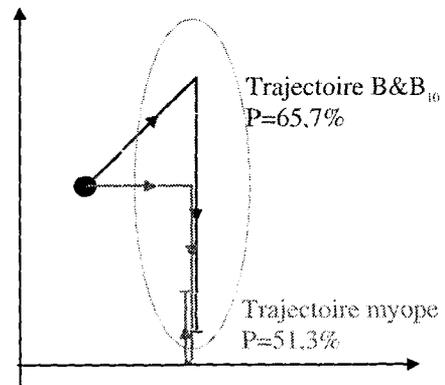


Figure 34. – Comparaison des trajectoires myope et B&B sur 10 étapes pour une densité du type figure 22.

4.3.3. méthode Branch and Bound sous-optimale

Le principe

Le tableau précédent montre la différence du nombre de chemins étudiés dans la méthode Branch and Bound et dans la méthode exhaustive. Le temps de résolution commence à être un inconvénient dans la méthode Branch and Bound, à partir de dix étapes.

Pour réduire la masse de calcul, il est possible d'agir sur la résolution du problème relaxé. En effet, comme nous avons pu le voir précédemment, pour déterminer le chemin solution du problème relaxé avec les contraintes d'accessibilité on calcule la probabilité de détection dans chaque case du carré accessible à l'étape donnée, et ceci pour chaque étape. Or, les cases où la cible n'a qu'une probabilité très faible de présence ne présentent pas d'intérêt. Par conséquent, pour diminuer le temps de résolution, il suffit d'ajouter un nouveau critère de définition des cases accessibles : la valeur de la densité de localisation de la case dépasse un certain seuil. Ce seuil, doit être déterminé empiriquement. Il dépend de la densité de localisation et en particulier de sa variance.

Pour déterminer le seuil, on cherche empiriquement sa valeur sur un problème avec un faible nombre d'étapes. On a ainsi son ordre de grandeur. Si la trajectoire trouvée n'est pas optimale (comparaison avec la méthode exhaustive), on abaisse le seuil. Le fait de baisser le seuil allonge le temps de résolution, mais

dans tous les cas il reste bien inférieur au temps de résolution du Branch and Bound sans le seuil. Par contre, on n'assure pas ainsi l'optimalité de la solution. Les résultats des simulations montrent que si le choix du seuil est judicieux, il permet d'obtenir la solution optimale ou au pire une solution très proche.

Recherche d'une cible stationnaire par un observateur

Les résultats suivants sont tirés d'une application sur une loi normale de variance 3, centrée sur la grille, avec un observateur partant du point (5-2.) On a supposé l'effort de recherche uniforme sur le disque de détection de rayon 1,5. A partir de maintenant la probabilité de détection locale utilisée ressemblera à celle de la figure 24 mais sans le creux.

Etapas		8	10	12
B&B avec seuil	Poptimal(%)	38,4	44,5	50,5
	Nb cases étudiées	88813	1576056	
	seuil	0,016	0,016	0,016
	temps	18sec	5min16	1h25
B&B simple	Poptimal(%)	38,4	44,5	calcul non effectué
	Nb cases étudiées	1236063	1818421	
	temps	3min35	1h30	
Myope	Pmyope(%)	36,8	41,2	45,4

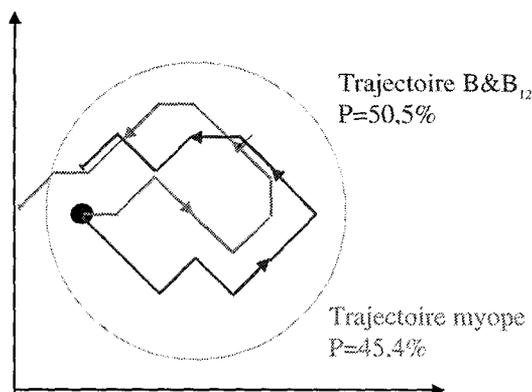


Figure 35. – Comparaison des trajectoires myope et B&B sur 12 étapes pour une gaussienne de variance 3.

Ces résultats montrent que la méthode avec seuil (ici égal à 0,016) permet d'obtenir, dans ce cas, la solution optimale. Comme la trajectoire myope n'utilise que l'information de son voisinage, lorsqu'elle a coupé sa zone de recherche en deux, elle est obligée de contourner son début de chemin pour aller détecter sur la seconde moitié. A l'opposé, la trajectoire B&B (optimale), s'écarte dès le début pour éviter ce phénomène. ce phénomène.

Recherche d'une cible mobile par un observateur

On applique le même algorithme mais on suppose maintenant que la cible est en mouvement rectiligne uniforme (MRU). La vitesse de l'observateur est deux fois supérieure à celle de la cible qui est réparti suivant une loi normale de variance 3 au départ.

Dans ces conditions, les résultats des algorithmes sont obtenus très rapidement pour une recherche sur quinze étapes. On obtient

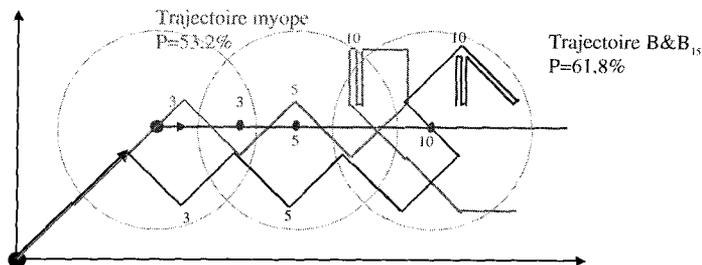


Figure 36. – Trajectoire myope et optimale pour 15 étapes.

une différence significative de la probabilité de détection (+8,6%, cf. figure 36). Alors que la trajectoire myope se concentre essentiellement sur les maxima de la densité de localisation de la source (mobile); la trajectoire optimale s'en écarte très sensiblement afin d'obtenir les meilleures chances de détection en fin de trajectoire. Bien sûr, ceci n'a de sens que pour un nombre d'étapes fixé.

Les différentes applications montrent l'intérêt de l'algorithme Branch and Bound. Il permet d'obtenir des solutions optimales dans des temps de résolution raisonnables pour des problèmes de type combinatoire. En effet, dans ces types de problème l'ensemble des solutions est énorme, et cet algorithme permet de trier parmi ces solutions les plus intéressantes. On peut aussi estimer la borne, plutôt que la calculer exactement. Par exemple, on peut l'estimer par un plan myope qui déterminera une borne. Cette borne étant plus petite que la borne réelle, la méthode étudiera plus de chemins, mais calculera plus rapidement la borne, dans ce cas le chemin est encore optimal.

5. conclusion

Cette étude a permis d'aborder différents problèmes liés à l'optimisation de l'effort de recherche (Search Theory); plus spécialement la recherche mono-étape, la détection (multi-étapes) de sources mobiles et enfin l'optimisation de la trajectoire de l'observateur. Les méthodes algorithmiques de résolution des problèmes d'optimisation associés ont été détaillées, puis illustrées par des résultats de simulations (algorithme de de Guenin, F.A.B., Branch and Bound). Au vu de ce panorama, on constate que l'on dispose de méthodes efficaces pour les résoudre, avec des coûts de calcul raisonnables.

Pratiquement, l'intérêt immédiat des méthodes de la Search Theory se situe au niveau des systèmes de détection (radar, sonar, IR, etc.). Cet intérêt est, bien sûr, fortement lié à l'optimisation de l'utilisation opérationnelle de ces équipements de détection. Dans ce cadre, les gains induits par l'utilisation de ces méthodes peuvent, comme on l'a vu, être considérables. Il est vraisemblable que cet intérêt ne s'arrête pas là et que ces méthodes peuvent aussi prouver leur efficacité et leur pertinence dans d'autres domaines.

6. remerciements

Les auteurs remercient les expert de la revue Traitement du Signal, dont les remarques ont été fort utiles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Eagle J.N., «The Optimal Search for a Moving Target When the Search Path is Constrained», *Operations Research* 33, 1107-1115,(1985)
- [2] O. Trémois and J.-P. Le Cadre, «Optimal Observer trajectory in Bearings-Only Tracking for Maneuvering Sources», *IEE Proc. In radar, Sonar and Navigation*, April 1999
- [3] Koopman B.O., «The Theory of Search :part I, Kinematic Bases», *Operations Research* 4 , 324-346,(1956)

LES AUTEURS

Guillaume SOURIS



Après une scolarité en classes préparatoire (Lycée Faidherle de Lille), Guillaume Souris a intégré l'ENSAI (Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse de l'Information) à Bruz. Statisticien (98) de la filière « Statistiques appliquée à l'industrie » (fiabilité, qualité, traitement du signal); il a effectué son stage de 3ème année à l'IRISA (responsable du stage : J.P. Le Cadre, sujet : « Search Theory »).

Après une année de service national (mise en place de bases de données); il est actuellement Ingénieur-

Consultant au sein de la société Ligeron S.A. (sûreté de fonctionnement, analyse de la fiabilité, management de projets).

- [4] Koopman B.O., «The Theory of Search :part II, Target Detection», *Operations Research* 4, 503-531,(1956)
- [5] Koopman B.O., «The Theory of Search :part III, The Optimum Distribution of Searching Effort», *Operations Research* 5, 613-626,(1957)
- [6] Koopman B.O., «Search and its optimization», *American Mathematical Monthly* 86, 527-540 (1979)
- [7] de Guenin J., «Optimum Distribution of Effort : an Extension of the Koopman Basic Theory», *Operations Research* ,1-7,(1961)
- [8] Stone L.D., «Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Search Plans for Moving Target», *Operations Research* 4, 431-440(1979)
- [9] Brown S.S., «Optimal Search for a Moving Target in Discrete Time and Space», *Operations Research* 28, 1275-1289
- [10] Washburn A.R., «Search for a Moving Target : The FAB algorithm», *Operations Research* 31,739-751(1983)
- [11] Stewart T.J., «Search for a Moving Target when Searcher Motion is Restricted», *Computer and Operation Research*,129-140,(1979)

Manuscrit reçu le 1^{er} mars 1999.

Jean-Pierre LE CADRE



Après des études de mathématiques, Jean-Pierre Le Cadre a soutenu une thèse de 3^{ème} cycle puis une thèse de Doctorat d'Etat; toutes deux en traitement du signal et à l'INPG. De 1980 à 1988, ses travaux portent essentiellement sur le traitement d'antenne, dans le cadre des systèmes sonar et sont effectuées au GERDSM (DCN Toulon). De 1988 à 1996, il a été le responsable du groupe de travail «traitement d'antenne» du GdR TdSI (maintenant ISIS) du CNRS. Depuis 1989, il est affecté à l'IRISA où il est Directeur

de recherche CNRS. Ses thèmes d'intérêt se sont réorientés vers l'analyse de systèmes de détection (aspect recherche opérationnelle), les problèmes de poursuite et d'extraction multi-pistes et, plus généralement, l'analyse du mouvement en signal/image.