

Variables et signaux aléatoires complexes

Complex random variables and signals

par Jean-Louis LACOUME

UIS UPRESA 5083 CNRS/INPG

résumé et mots clés

Les nombres complexes jouent un rôle important en physique et dans de nombreuses autres sciences d'observation. Les variables et les signaux aléatoires sont également un modèle mathématique riche d'applications. Nous proposons ici des modèles pour les variables et les signaux aléatoires complexes. Nous montrons comment ces modèles introduisent des signaux utiles (signal analytique) et des concepts nouveaux (circularité). Nous illustrons les propriétés de ces modèles complexes en estimation, traitement d'antenne et séparation de sources...

Variables, signaux, complexe, aléatoire, analytique, circularité.

abstract and key words

Complex number are an useful tool in physics and in observational sciences. Random variables and signals are used in a great number of applications. We develop here the modelisation of complex random variables and signals. We show that these models introduce usefull signals, like the analytic signal, and new concepts, like the circularity. We illustrate the properties of these complex models in estimation, array processing and source separation.

Variables, signals, complex, random, analytic, circularity.

1. introduction

Le développement des modèles mathématiques fait progresser la description de la réalité expérimentale. Les nombres complexes jouent un rôle important en physique et dans de nombreuses autres sciences de la nature. Les variables et les signaux aléatoires sont également un modèle mathématique riche d'applications. Je propose ici une réflexion sur la définition de grandeurs combinant ces deux modèles : variables ou signaux aléatoires complexes. Nous poserons les questions suivantes : qu'est-ce qu'une variable, ou un signal, aléatoire complexes? Est-il utile de considérer des variables et des signaux aléatoires complexes? Pour apporter des réponses nous définirons ces grandeurs, nous donnerons leurs principales propriétés et nous illustreront leur utilisation sur des exemples. Revenons d'abord sur les nombres complexes.

2. les nombres complexes

2.1. les nombres complexes en mathématique

Les nombres complexes sont apparus au $XVI^{ième}$ siècle en Italie. Cartan et ses élèves les utilisaient pour donner une solution formelle aux équations algébriques. Dénommés *nombres impossibles* ils n'avaient pas encore une identité mathématique. C'est au $XIX^{ième}$ siècle principalement avec Gauss, Cauchy et Hamilton qu'ils ont acquis leurs lettres de noblesse [2].

Un nombre complexe peut être vu sous deux angles : algébriques ou géométriques.

Hamilton a donné les règles de calcul permettant de construire le corps des complexes. La propriété remarquable de ce corps est de contenir toutes les solutions des équations algébriques. En se libérant de la droite réelle pour se mouvoir dans le plan complexe Cauchy a bâti la théorie des fonctions holomorphes si riche d'applications.

En géométrie les nombres complexes sont isomorphes au plan. Ils sont l'affixe d'un point du plan. Cela conduit à leur interprétation géométrique fondée sur leurs deux représentations :

- cartésienne en parties réelles et imaginaires,
- trigonométrique en module et phase.

Un nombre complexe, être à la fois algébrique et géométrique, est bien autre chose qu'un couple de nombres réels. Citons « Feymann lectures on physics » [1] :

...the most remarkable formula in mathematics : is $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. This is our jewel. We may relate the geometry to the algebra....

2.2. les nombres complexes en physique

La physique a également beaucoup fait appel aux nombres complexes, pensons au vecteur de Fresnel si utile dans l'étude des circuits, des vibrations et des ondes.

La transformation de Fourier trouve sa formulation la plus harmonieuse dans le corps des complexes. Cette présentation introduit les fréquences négatives qui sont un concept utile particulièrement en relation avec la transformation de Hilbert et le signal analytique.

En mécanique quantique les fonctions d'ondes sont des fonctions complexes. La fonction d'onde qui décrit la distribution d'une particule dans l'espace-temps est dénommée amplitude de probabilité : toutes les propriétés liées aux interférences qui s'introduisent en mécanique quantique viennent du fait que les probabilités d'amplitude s'additionnent comme des nombres complexes (vecteurs) et non comme des nombres réels positifs...

En traitement du signal les signaux à temps discret conduisent à la transformation en Z qui vit dans le « plan complexe des Z ». La représentation la plus représentative d'un système linéaire et stationnaire à temps discret est donnée par la carte de ses pôles et de ses zéros dans le plan complexes des Z . Cette carte, associée au cercle de rayon 1, caractérise des propriétés aussi fondamentales que la stabilité, la causalité et l'inversibilité causale. Là encore apparaît l'importance de l'interprétation géométrique des nombres complexes. Le phénomène physique de résonance est représenté par deux pôles complexes conjugués. La phase des pôles donne la fréquence (réduite) de résonance. Une construction géométrique simple (figure 1) permet de visualiser la bande passante à 3 dB.

En conclusion le développement des mathématiques, la physique, la théorie du signal et bien d'autres sciences font appel aux

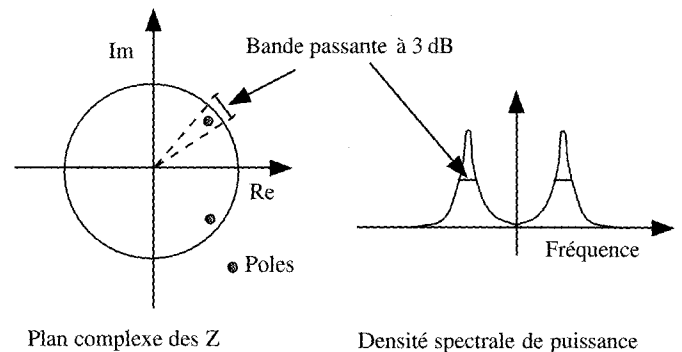


Figure 1. – Les pôles d'un signal résonnant dans le plan complexe des Z

nombres complexes. Ces nombres ont une grande richesse issue des possibilités d'induction qu'apportent leur dualité algébriques et géométriques.

L'importance et le rôle des nombres complexes sont donc une réalité dans le monde des variables et des fonctions certaines. Qu'en est-il dans les modèles probabilistes des variables et des fonctions aléatoires?

3. les variables aléatoires complexes

Cette notion est-elle, comme les nombres complexes à leur origine, impossible? Se ramène-t-elle à une variable aléatoire à 2 dimensions? L'interprétation géométrique des variables aléatoires complexes apporte-t-elle quelque chose? Mais d'abord qu'est-ce qu'une variable aléatoire complexe?

3.1. définition des variables aléatoires complexes

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Avec ces deux variables aléatoires réelles on peut construire la variable aléatoire complexe

$$Z = X + jY.$$

Les réalisations de Z sont les nombres complexes $z = x + jy$ construits avec les réalisations de X et de Y .

Nous rencontrons une difficulté pour définir la densité de probabilité de Z . Aux variables aléatoires réelles X et Y on associe une densité de probabilité d'amplitude $f(x, y)$ qui doit induire la densité de probabilité d'amplitude de Z . Il est facile de voir que si on se limite à une fonction du type $f(z)$ on ne peut pas obtenir toutes les densité de probabilité d'amplitude souhaitables.

La densité de probabilité d'amplitude ne dépend donc pas uniquement de z . Toute fonction de x et y peut se représenter comme une

fonction de z et de son complexe conjugué z^* . Cette remarque fondamentale conduit à définir une variable aléatoire complexe comme une variable aléatoire à 2 dimensions formée de Z et de Z^* . Avec

$$Z = X + jY \quad \text{et} \quad Z^* = X - jY,$$

on retrouve X et Y par

$$X = (Z + Z^*)/2 \quad \text{et} \quad Y = (Z - Z^*)/2j,$$

la densité de probabilité d'amplitude est alors la fonction de z, z^*

$$g(z, z^*) = f((z + z^*)/2, (z - z^*)/2j).$$

Pour obtenir toutes les information contenues dans la variable complexe on doit donc considérer simultanément Z et Z^* . Cette remarque est la clé de l'étude des variables aléatoires complexes et donne, comme nous le verrons, la solution des problèmes mettant en jeu des variables aléatoires complexes.

Ce formalisme pose un problème quand on veut conduire les calculs. Les variables z et z^* sont liées : cela complique fortement le calcul des dérivées partielles. Pour utiliser les formes classiques de dérivation partielle il suffit d'étendre le domaine d'existence des variables aléatoires complexes comme on le fait classiquement dans l'analyse fonctionnelle en immergeant la droite réelle dans le plan complexe [5]. On réalise cette extension en considérant les variables de départ, X et Y comme des variables complexes. On conserve la définition de Z et Z^* par :

$$Z = X + jY \quad \text{et} \quad Z^* = X - jY.$$

On a alors étendu l'espace initial, à 2 dimensions réelles, à un espace à 4 dimensions réelles. Pour revenir aux grandeurs initiales il suffit de se limiter à la partie de l'espace engendrée par la réduction de x et y à leurs parties réelles.

La variable Z^* n'est plus la conjuguée de Z . Le formalisme permettant de compléter cette description est celui des tenseurs.

3.2. le modèle tensoriel des variables aléatoires complexes

Dans le monde des tenseurs on dispose d'une notation permettant de distinguer les deux espaces duaux qui se sont introduits plus haut : ce sont les tenseurs covariants et contravariants. La variable aléatoire complexe Z introduite ci-dessus est, par définition, le tenseur contravariant Z^i et la variable aléatoire associée Z^* , le tenseur covariant Z_i . Avec ces notations, i définit la dimensionalité de l'espace des variables aléatoires considérées. Les variables scalaires sont des tenseurs d'ordre 0 nous les noterons Z^0, Z_0 . Les variables vectorielles sont des tenseurs d'ordre 1 notées $Z^1, Z_1...$

1. En mécanique quantique les particules et les anti-particules qui «remontent le temps».

En conclusion une variable aléatoire complexe est décrite par le couple de tenseurs Z^i, Z_i , sa densité de probabilité d'amplitude est une fonction de z^i et de z_i . Dans les calculs, les variables z^i et z_i , sont algébriquement indépendantes, les intégrales sont calculées sur la réduction de l'espace tensoriel à sa partie réelle définie plus haut.

Pour une variable aléatoire vectorielle (tenseur d'ordre 1), on introduit

- la première fonction caractéristique

$$\Phi_{Z^1, Z_1}(w^1, w_1) = E\left[\left(j \frac{Z^1 \odot w_1 + Z_1 \odot w^1}{2}\right)\right],$$

\odot symbolise un produit contracté,

- la seconde fonction caractéristique

$$\Psi_{Z^1, Z_1}(w^1, w_1) = \log[\Phi_{Z^1, Z_1}(w^1, w_1)].$$

- les moments.

A l'ordre n la description des propriétés de la variable aléatoire est contenue dans les $n - 1$ moments²

$$M_p^{n-p} = E[(Z^{1 \otimes n-p} \otimes Z_1^{\otimes p})] \quad 0 \leq p < n,$$

qui sont des tenseurs $n - p$ fois contravariants et p fois covariants. Les moments sont également obtenus en dérivant la première fonction caractéristique

$$M_p^{n-p} = \frac{2^n}{j^n} \nabla_{w_1}^{\otimes n-p} \otimes \nabla_{w^1}^{\otimes p} [\Phi_{Z^1, Z_1}(0^1, 0_1)].$$

Il apparaît ici une conséquence importante du fait que l'on doit associer les variables duales Z^1 et Z_1 pour décrire complètement la variable aléatoire complexe. A un ordre donné n , contrairement à ce qui se passe pour des variables réelles, on obtient $n - 1$ moments différents ($n - 1$ car le premier et le dernier sont complexes conjugués l'un de l'autre).

- on peut, de même, définir les $n - 1$ cumulants tensoriels C_p^{n-p} par dérivation de la seconde fonction caractéristique

$$C_p^{n-p} = \frac{2^n}{j^n} \nabla_{w_1}^{\otimes n-p} \otimes \nabla_{w^1}^{\otimes p} [\Psi_{Z^1, Z_1}(0^1, 0_1)].$$

Comme dans le cas réel, à partir des variables aléatoires complexes, on peut construire des signaux aléatoires complexes.

4. les signaux aléatoires complexes

4.1. définition

Ils se déduisent des variables aléatoires complexes comme les signaux aléatoires réels des variables aléatoires réelles. Le signal

2. En notant \otimes le produit tensoriel.

aléatoire réel $x(t)$ est connu lorsque l'on connaît les variables aléatoires multidimensionnelles $[x(t_1), \dots, x(t_k)]$ pour toutes les valeurs des t_k et pour tout k . On utilise souvent des descriptions simplifiées à un instant, $k = 1$, à deux instants, $k = 2, \dots$. La différence essentielle dans le cas complexe est la nécessité de connaître, à chaque instant, les valeurs de la fonction aléatoire et leur conjuguée pour caractériser complètement un signal aléatoire complexe.

Le signal aléatoire $z(t)$ sera connu si l'on connaît les variables aléatoires multidimensionnelles complexes $[z(t_1), z^*(t_1), \dots, z(t_k), z^*(t_k)]$ pour tous les t_k et pour tout k .

4.2. propriétés

Les signaux aléatoires complexes sont, comme dans le cas réel, décrits par leurs propriétés moyennes en temps ou en fréquence. On peut étendre à ces signaux les descriptions par les multicorrélations et les multispectres [6].

4.2.1. les multicorrélations des signaux complexes

La description en temps se fait par les multicorrélations. Il apparaît ici une différence avec le cas réel car on peut définir plusieurs multicorrélations différentes selon le nombre de termes non-conjugués ou conjugués qui sont pris en compte pour la définition de la multicorrélation. Par définition la multicorrélation $C_{z,p+q,p}$ est le cumulants d'ordre $p+q$ obtenu avec p termes non-conjugués et q termes conjugués

$$C_{z,p+q,p}(t_0, \tau_1, \dots, \tau_{p+q-1}) = C_p^q[z(t_0), z(t_0 + \tau_1), \dots, z(t_0 + \tau_{p-1}), z^*(t_0 - \tau_p), \dots, z^*(t_0 - \tau_{p+q-1})].$$

Le premier terme est toujours non-conjugué car la multicorrélation avec tous les termes conjugué n'est autre que la conjuguée de la multicorrélation avec tous les termes réels. Pour conserver la forme classique du théorème de Wiener-Kintchine on ajoute τ_i dans les termes non-conjugués et on le retranche dans les termes conjugués. A l'ordre 2 certains auteurs réservent la dénomination de corrélation à la fonction ayant un conjugué, l'autre corrélation étant appelée fonction de relation. Cette distinction est difficile à étendre aux ordres supérieurs à 2. On peut aussi définir les multicorrélations à partir des moments et non à partir des cumulants.

Pour les signaux stationnaires les multicorrélations ne dépendent pas de t_0 . Pour les signaux cyclostationnaires dont nous parlerons plus loin, les multicorrélations sont des fonctions périodiques, ou périodiques au sens large, de t_0 .

4.2.2. les multispectres des signaux complexes

Par extension du théorème de Wiener-Kintchine, les multispectres sont les transformées de Fourier multidimensionnelles des multicorrélations

$$S_{z,p+q,p}(\nu_1, \dots, \nu_{p+q-1}) = TF_{p+q-1}[C_{z,p+q,p}(\tau_1, \dots, \tau_{p+q-1})].$$

Comme pour les multicorrélations il existe $p+q-1$ multispectres différents d'ordre $p+q-1$.

Une interprétation utile des multispectres se déduit de leur expression en fonction de la représentation de Cramer, $dZ(\nu)$ du signal $z(t)$. A partir de

$$X(t) = \int e^{2\pi j\nu t} dZ(\nu),$$

on obtient

$$S_{z,p+q,p}(\nu_1, \dots, \nu_{p+q-1}) d\nu_1 \dots d\nu_{p+q-1} = C_p^q[dZ(-\sum_1^{p-1} \nu_i + \sum_p^{p+q-1} \nu_i), dZ(\nu_1), \dots, dZ(\nu_{p-1}), dZ^*(\nu_p), \dots, dZ^*(\nu_{p+q-1})]. \quad (1)$$

Cette relation nous montre que le multispectre décrit les relations statistiques entre les composantes du signal aux fréquences apparaissant dans le second membre de la relation (1). Ces relations sont le signe de transformations non-linéaires dans la génération du signal considéré. Comme on le sait et comme le montre la relation (1) appliquée à l'ordre 2 les composantes fréquentielles d'un signal stationnaire sont décorréllées. A l'ordre 3,

- la non-nullité de $S_{z,3,3}(\nu_1, \nu_2)$ est l'indicateur d'une relation entre les composantes aux fréquences ν_1, ν_2 et $-\nu_1 - \nu_2$,
- la non-nullité de $S_{z,3,2}(\nu_1, \nu_2)$ est l'indicateur d'une relation entre les composantes aux fréquences ν_1, ν_2 et $-\nu_1 + \nu_2$,
- la non-nullité de $S_{z,3,2}(\nu_2, \nu_1)$ est l'indicateur d'une relation entre les composantes aux fréquences ν_1, ν_2 et $\nu_1 - \nu_2$,
- la non-nullité de $S_{z,3,1}(\nu_1, \nu_2)$ est l'indicateur d'une relation entre les composantes aux fréquences ν_1, ν_2 et $\nu_1 + \nu_2$.

Les différents bispectres permettent de décrire les possibilités de modulation d'une onde à la fréquence ν_1 par une onde à la fréquence ν_2 .

5. la circularité

Cette propriété importante des variables aléatoires est décrite dans ([3], [5]).

5.1. définition de la circularité

La notion de circularité est directement issue de l'interprétation géométrique des variables aléatoires complexes. Une variable aléatoire complexe est circulaire si ses propriétés statistiques sont invariantes par rotation. Pour une variable aléatoire complexe une rotation est isomorphe à une multiplication par

$e^{j\theta}$. Une variable aléatoire complexe Z^i , à une ou plusieurs dimensions, est circulaire si Z^i et $Z^i e^{j\theta}$ ont la même densité de probabilité d'amplitude.

Une variable aléatoire complexe scalaire peut être décrite géométriquement par son module et par sa phase. Pour que cette variable aléatoire soit circulaire il faut et il suffit que les propriétés de sa phase soient invariantes par rotation c'est à dire que la phase soit une variable aléatoire équipartie sur le segment $[0, 2\pi]$.

5.2. propriétés des variables aléatoires circulaires

5.2.1. densité de probabilité et fonction caractéristique

Dans une rotation d'un angle θ la variable Z^i est multipliée par $e^{j\theta}$ et la variable Z_i par $e^{-j\theta}$. Pour que la densité de probabilité, fonction de z^i et de z_i soit invariante par rotation il faut et il suffit qu'elle soit uniquement fonction du produit tensoriel $z^i \otimes z_i$. Ainsi, la densité de probabilité d'une variable aléatoire scalaire circulaire est Z^0 est fonction du produit $z^0 z_0$, c'est-à-dire uniquement du module de la variable et pas de sa phase. Il s'ensuit, de même, que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire complexe circulaire est fonction uniquement du produit tensoriel $w^1 \otimes w_1$. Il en est de même pour la seconde fonction caractéristique.

5.2.2. circularité et indépendance

Une variable aléatoire gaussienne circulaire $Z = X + jY$ est engendrée par 2 variables aléatoires gaussiennes réelles, X et Y , indépendantes, centrées ayant la même variance. L'indépendance des 2 variables aléatoires réelles X et Y engendrant une variable circulaire est spécifique des variables aléatoires gaussiennes. Dans les autres cas la densité de probabilité ne se factorise pas et donc X et Y ne sont pas des variables aléatoires indépendantes. Si $X + jY$ est une variable aléatoire circulaire non-gaussienne chacune des composantes contient des informations sur l'autre composante. Ceci rappelle les relations de Kramers-Kroenig reliant les parties réelles et imaginaires du gain complexe d'un filtre causal.

5.2.3. moments et cumulants, circularité à l'ordre p

Pour les variables aléatoires circulaires les propriétés données plus haut pour les fonctions caractéristiques entraînent que, pour ces variables aléatoires, les moments $M_{p_1 p_2}^{p_1}$ et les cumulants $C_{p_1 p_2}^{p_1}$ sont nuls si $p_1 \neq p_2$.

On en déduit la définition de la circularité à l'ordre p . Une variable aléatoire est circulaire à l'ordre p si ses cumulants vérifient la propriété précédente jusqu'à l'ordre p .

5.2.4. signaux aléatoires circulaires

Au sens strict, un signal aléatoire est circulaire si ses valeurs prises à k instants sont des variables aléatoires multidimensionnelles circulaires quel que soit le nombre d'instant k . Il s'ensuit que les seules multicorrélations et les seuls multispectres d'un signal aléatoire circulaire non nuls vérifient $p = q$. Ils sont donc issus d'un nombre égal de termes non-conjugués et de termes conjugués.

On peut déduire de cette propriété une définition de la circularité à l'ordre p . Un signal est circulaire à l'ordre p si ses multicorrélations (et donc aussi ses multispectres) vérifient la propriété précédente jusqu'à l'ordre p .

5.2.5. circularité, stationnarité et transformation de Fourier

Considérons une fonction aléatoire complexe $Z(t)$. La représentation de Cramer permet de l'écrire

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j\nu t} dZ(\nu).$$

Si le signal aléatoire $Z(t)$ est stationnaire ses propriétés statistiques sont invariantes par translation dans le temps. Dans une translation de t_0 dans le temps la mesure spectrale devient $dZ(\nu)e^{-2\pi j\nu t_0}$. La stationnarité de $Z(t)$ entraîne donc la circularité de la mesure spectrale $dZ(\nu)$.

6. le signal analytique

6.1. définition et propriétés

Une représentation très utilisée des signaux aléatoires complexes est donnée par le signal analytique. A un signal réel $x(t)$ on associe le signal analytique, complexe, $z(t)$ par la relation

$$z(t) = x(t) + jTH[x(t)],$$

$TH\{x(t)\}$ étant la transformée de Hilbert de $x(t)$.

Ce signal complexe est obtenu en ne conservant que les composantes dont les fréquences sont positives. Il contient toutes les informations issues du signal initial que l'on peut retrouver en prenant la partie réelle du signal analytique.

Le signal analytique possède des propriétés utiles.

Tout d'abord son spectre a une étendue fréquentielle divisée par 2 ce qui est utilisé en télécommunications.

Le modèle trigonométrique des nombres complexes représente le signal analytique par son module et sa phase. On introduit ainsi

l'enveloppe et la fréquence instantanée qui sont la distance à l'origine et la vitesse angulaire de rotation de l'affixe M du nombre complexe $z(t)$. La géométrie et la cinématique contribuent ici à donner un sens concret à ces notions fondamentales de la théorie du signal.

La représentation fréquentielle d'un signal réel est redondante car les composantes fréquentielles de valeurs opposées en fréquence sont complexes conjuguées. En éliminant cette redondance le signal analytique donne un sens plus clair aux différentes représentations du signal. Cette propriété est exploitée dans les représentations temps-fréquences. La représentation de Wigner-Ville à partir du signal analytique élimine les interférences entre les fréquences positives et négatives.

A l'ordre 2 le signal analytique est circulaire. En effet le multi-spectre $S_{z,2,0}$ corrèle les composantes aux fréquences ν et $-\nu$, il est donc nul. Cette propriété de circularité ne se prolonge pas aux ordres supérieurs. On peut se poser la question d'une extension de cette propriété : quelle est la transformation qui permettrait d'associer au signal réel $x(t)$ un signal complexe $z_p(t)$ circulaire jusqu'à l'ordre p ?

6.2. illustration

Illustrons les propriétés du signal analytique sur le signal acoustique émis par un canon à air utilisé en prospection sismique sous-marine.

Sur la figure 2 nous avons représenté les caractéristiques du signal émis issues de l'utilisation du signal analytique. Sur l'enveloppe nous suivons l'évolution de l'amplitude moyenne au cours du temps. La fréquence instantanée est donnée par la dérivée de la phase du signal analytique. Nous voyons que l'attaque se fait à une fréquence plus élevée que la fréquence atteinte en régime permanent. Ce comportement est visible sur la forme d'onde dont la première arche est plus brève que les oscillations suivantes. La

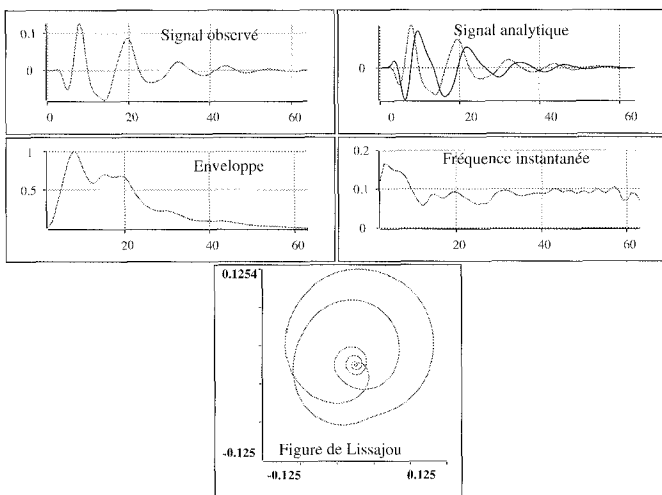


Figure 2. – Les caractéristiques d'un signal introduites par le signal analytique

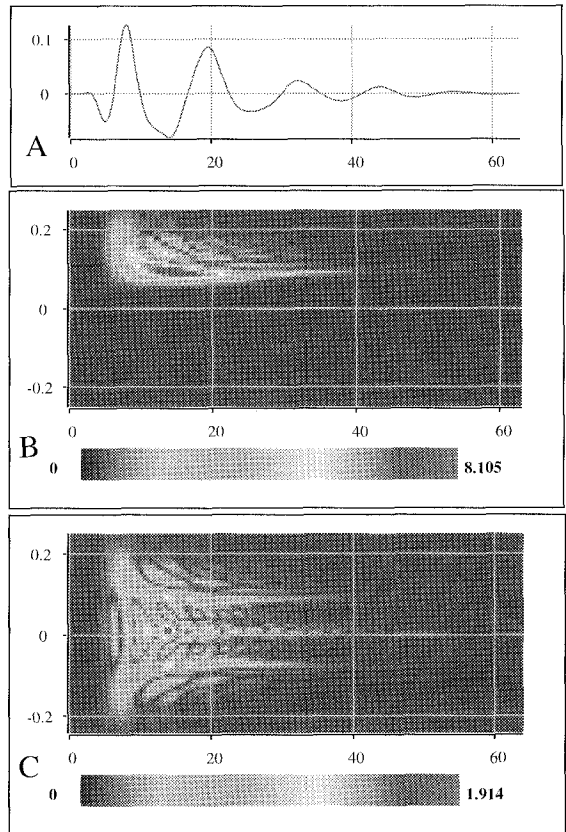


Figure 3. – Le signal (A) et les représentations de Wigner-Ville du signal analytique (B) et du signal réel (C)

figure de Lissajou représente le signal analytique en fonction du temps dans le plan complexe. On voit l'attaque et la décroissance progressive indiquée par une spirale convergant vers l'origine.

Sur la figure 3 nous donnons la représentation de Wigner-Ville du signal réel (signal émis) et du signal analytique. La représentation de Wigner-Ville du signal réel est brouillée par les interférences entre les fréquences positives et négatives. La représentation de Wigner-Ville du signal analytique est beaucoup plus lisible. On y retrouve la décroissance de la fréquence instantanée.

7. applications des variables et des signaux aléatoires complexes

La présentation des variables aléatoires et des signaux aléatoires complexes nous a montré que ce modèle de signal est utile dans un grand nombre de situations et qu'il permet d'introduire simplement des notions comme la circularité. Nous allons voir

qu'il s'applique dans des situations classiques du traitement du signal, qu'il permet de simplifier la modélisation de certains problèmes et qu'il peut conduire à des traitements plus puissants que leurs homologues obtenus sur des signaux réels.

7.1. estimation

Considérons un signal scalaire (pour simplifier) y que nous voulons estimer à partir d'une observation vectorielle \mathbf{x} . La théorie de l'estimation nous indique, dans le cas de signaux réels, que l'estimateur optimal est $E[y|\mathbf{x}]$, moyenne de y conditionnellement à \mathbf{x} .

Posons le même problème pour des signaux complexes. Les résultats précédents nous indiquent que la description complète de \mathbf{x} nécessite de prendre en compte conjointement \mathbf{x} et \mathbf{x}^* . Il s'ensuit que l'estimateur optimal sera, dans ce cas, $E[y|\mathbf{x}, \mathbf{x}^*]$ moyenne de y conditionnellement à \mathbf{x} et \mathbf{x}^* . Ceci nous donne formellement la solution générale dans le cas des signaux complexes.

L'estimation linéaire est développée dans [4]. L'estimateur linéaire optimal de y à partir de \mathbf{x} est la combinaison linéaire de \mathbf{x} et de \mathbf{x}^*

$$\hat{y} = \mathbf{u}^\dagger \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v}^\dagger \cdot \mathbf{x}^*,$$

\mathbf{u}^\dagger (resp. \mathbf{v}^\dagger) étant le transposé complexe conjugué de \mathbf{u} (resp. \mathbf{v})
Le principe d'orthogonalité nous indique que le résidu $\hat{y} - y$ est orthogonal à \mathbf{x} et à \mathbf{x}^*

$$E[\hat{y}^* \mathbf{x}] = E[y^* \mathbf{x}] \quad \text{et} \quad E[\hat{y}^* \mathbf{x}^*] = E[y^* \mathbf{x}^*],$$

conduisant à

$$\mathbf{C}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{D}^* \mathbf{u} + \mathbf{C}^* \mathbf{v} = \mathbf{s}^*,$$

avec $\mathbf{C} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger]$, $\mathbf{D} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]$, $\mathbf{r} = E[y^* \mathbf{x}]$ et $\mathbf{s} = E[y\mathbf{x}]$.

L'estimateur linéaire optimal en moyenne quadratique s'en déduit

$$\mathbf{u} = [\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{C}^{*-1}\mathbf{D}^*]^{-1}[\mathbf{r} - \mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}^*],$$

$$\mathbf{v} = [\mathbf{C}^* - \mathbf{D}^*\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{s}^* - \mathbf{D}^*\mathbf{C}^{-1}\mathbf{r}].$$

Dans le cas général cet estimateur est différent de l'estimateur « classique »

$$\hat{y} = \mathbf{u}^\dagger \cdot \mathbf{x},$$

avec

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{r}.$$

Pour des signaux, y et \mathbf{x} conjointement circulaires

$$\mathbf{D} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{s} = 0,$$

conduisant à la solution classique

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = 0.$$

L'estimateur généralement utilisé est donc valable pour les signaux circulaires. Dans le cas général il faut utiliser l'estimateur donné ci-dessus qui tient compte du fait que les composantes \mathbf{x} et \mathbf{x}^* apportent des informations. On a montré dans [4] que l'erreur quadratique moyenne est plus faible pour cet estimateur étendu.

7.2. traitement d'antenne

7.2.1. apport des propriétés de circularité et de non-circularité

En traitement d'antenne bande étroite les signaux reçus sur un réseau de capteurs sont la somme d'un terme utile issu des signaux émis par les différentes sources après propagation et d'un terme de bruit

$$\mathbf{y}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{b}_c(t),$$

- $\mathbf{y}_c(t)$ est le signal à N dimensions reçu sur les N capteurs. En bande étroite ces signaux sont ramenés en bande de base ils sont complexes.

- $\mathbf{x}_c(t)$ représente les signaux complexes émis par les P sources,

- la matrice \mathbf{A}_c représente la propagation entre les sources et les capteurs. Le module et la phase des nombres complexes A_{ij} décrivent l'atténuation et le déphasage dus à la propagation,

- $\mathbf{b}_c(t)$ représente les parasites ou bruits.

Les méthodes classiques de traitement d'antenne sont fondées sur la matrice de corrélation des signaux reçus prise au retard nul

$$\mathbf{C}_c = E[\mathbf{y}_c(t) \cdot \mathbf{y}_c^\dagger(t)].$$

La présentation que nous avons faite des signaux aléatoires complexes montre que ces méthodes n'exploitent pas complètement l'information contenue dans les signaux. Pour exploiter au mieux ces informations on doit considérer conjointement, comme l'ont montré les auteurs de [8], les signaux et leurs complexes conjugués. Il faut donc considérer le modèle étendu

$$\mathbf{y}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{b}_c(t),$$

$$\mathbf{y}_c^*(t) = \mathbf{A}_c^* \mathbf{x}_c^*(t) + \mathbf{b}_c^*(t).$$

L'idée de base des techniques utilisant la circularité ou la non-circularité est la suivante [9]. Dans le cas de sources circulaires les composantes complexes conjuguées d'une source sont décorréllées; elles occupent donc, dans l'espace des observations, 2 degrés de liberté. Comme nous le verrons l'introduction du modèle étendu n'apporte pas d'amélioration aux méthodes classiques. Dans le cas limite inverse, que l'on pourrait dénommer totalement non-circulaire, les 2 composantes conjuguées d'une source sont proportionnelles : elles occupent un seul degré de liberté dans l'espace des observations. Le modèle étendu agrandit l'espace des observations alors que l'espace signal garde la même dimension : le modèle étendu augmente les possibilités de l'antenne.

En concaténant dans un vecteur de longueur double les composantes non-conjuguées et les composantes conjuguées le modèle étendu devient

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t),$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^* \end{pmatrix}, \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_c(t) \\ \mathbf{y}_c^*(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_c(t) \\ \mathbf{x}_c^*(t) \end{pmatrix}, \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_c(t) \\ \mathbf{b}_c^*(t) \end{pmatrix}.$$

A partir de ce modèle étendu on peut reprendre les techniques classiques en utilisant la matrice de covariance étendue

$$\mathbf{C} = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^\dagger(t)] = \begin{pmatrix} E[\mathbf{y}\mathbf{y}^\dagger] & E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] \\ E[(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)^*] & E[\mathbf{y}\mathbf{y}^\dagger] \end{pmatrix}$$

Cette matrice contient des informations sur les signaux non-conjugués, sur les signaux conjugués et sur les relations entre les parties conjuguées et non-conjuguées. En général les bruits seront supposés circulaires. Un bruit spatialement blanc circulaire conduit à une matrice de corrélation proportionnelle à l'identité. Ceci est une propriété nécessaire pour les techniques du type goniomètre.

Pour les signaux circulaires les termes conjugués et non-conjugués sont découplés $E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] = 0$ et la considération du modèle étendu n'apporte pas d'amélioration au résultat.

Il n'en est pas de même lorsque les signaux émis par les sources ne sont pas circulaires comme l'ont montré ([8], [9]) dans le cas de signaux modulés en amplitude. Pour ces signaux en bande de base

$$x_p(t) = e_p(t)e^{j\psi_p},$$

$e_p(t)$ étant le signal réel reçu sur le capteur p et ψ_p sa phase.

Dans le modèle étendu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^*\Phi^* \end{pmatrix},$$

Φ est le vecteur des déphasages $e^{j\psi_p}$

Le sous-espace source est alors engendré par les p signaux réels $e_p(t)$: il est donc à p dimensions. L'antenne virtuelle engendrée par le modèle étendu a $2N - 1$ capteurs car celui qui sert de référence de phase n'est pas dupliqué. On peut donc, dans cette situation localiser $2N - 2$ sources alors que le traitement classique ne permettait que la localisation de $N - 1$ sources. Il a également été montré dans ([8], [9]) que l'antenne étendue apporte une meilleure précision statistique dans la localisation et augmente le pouvoir de résolution.

7.2.2. interprétation géométrique

La localisation d'une source par une antenne est fondée sur la mesure des déphasages, introduits par la propagation, entre les différents capteurs. Les signaux complexes issus d'une source reçus sur 2 capteurs i et j s'écrivent en module et phase

$$x_i = \rho e^{j\chi},$$

$$x_j = \rho e^{j\chi} e^{j\phi_{i,j}},$$

ρ et $e^{j\chi}$ représentent le module et la phase du signal émis par la source et $\phi_{i,j}$ est le déphasage entre les 2 capteurs introduit par la propagation.

Dans les traitements à l'ordre 2 il est bon d'utiliser tous les cumulants d'ordre 2 qui font apparaître la grandeur à mesurer qui est le déphasage $\phi_{i,j}$. Pour une source circulaire seuls les termes contenant un conjugué et un non-conjugué sont non-nuls par suite de la distribution uniforme de la phase du signal émis. Il n'en est pas de même dans le cas d'une source non circulaire. Cette information supplémentaire est mise à profit dans le traitement que nous avons présenté ci-dessus.

7.3. séparation de sources

La modélisation complexe permet de simplifier le formalisme et conduit à des expressions littérales des bornes de Cramer-Rao dans la séparation de 2 sources. Nous verrons également, en suivant ([8], [9]), que l'on peut réaliser une séparation aveugle à l'ordre 2 en se fondant sur la connaissance *a priori* de la non-circularité des sources.

7.3.1. le modèle de mélange

Pour simplifier la présentation nous nous limitons à 2 sources reçues sur 2 capteurs. Les signaux $y_i(t)$ reçus sur 2 capteurs sont

$$y_i(t) = \sum_j (a_{i,j} * x_j)(t). \tag{2}$$

Dans cette relation les fonctions $x_j(t)$ représentent les signaux émis par les source. Les fonctions $a_{i,j}(t)$ sont les fonctions de transfert des filtres faisant passer des sources aux capteurs.

L'objectif est de séparer les signaux émis par les sources.

Ce modèle convolutif peut être simplifié. Par transformation de Fourier la relation (2) devient un produit matriciel de la matrice des gains complexes par le vecteur des signaux sources fréquentiels

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{3}$$

Les différents signaux apparaissant dans cette relation sont, par suite de la transformation de Fourier, complexes. Le modèle de variables aléatoires complexes est bien adapté à cette situation.

En projetant les signaux recus sur les capteurs sur les vecteurs propres de la matrice spectrale et en les normalisant, la relation (3) devient

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{x},$$

où la matrice \mathbf{U} est une matrice unitaire caractérisée par 2 angles θ et κ .

Les relations entre les signaux observés projetés (z_1 et z_2) et les sources (x_1 et x_2) sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 \\ z_2 &= -\sin \theta e^{j\kappa} x_1 + \cos \theta e^{j\kappa} x_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \theta z_1 - \sin \theta e^{-j\kappa} z_2 \\ x_2 &= \sin \theta z_1 + \cos \theta e^{-j\kappa} z_2. \end{aligned}$$

7.3.2. l'estimateur du maximum de vraisemblance pour des sources circulaires

Plaçons-nous dans le cas où les signaux sources sont circulaires. Les densités de probabilité d'amplitude des sources, p_1 et p_2 sont seulement fonction du produit $s_i s_i^*$. La Logvraisemblance est

$$Lv(z_1, z_2; \theta, \kappa) = Lp_1(x_1 x_1^*) + Lp_2(x_2 x_2^*).$$

On en déduit, par des calculs algébriques simples, le vecteur score à 2 composantes

$$\begin{aligned} sc_\theta(z_1, z_2; \theta, \kappa) &= (x_1 x_2^* + x_1^* x_2) \\ &\quad [Lp_2'(x_2 x_2^*) - Lp_1'(x_1 x_1^*)], \\ sc_\kappa(z_1, z_2; \theta, \kappa) &= j \sin \theta \cos \theta (x_1 x_2^* - x_1^* x_2) \\ &\quad [Lp_2'(x_2 x_2^*) - Lp_1'(x_1 x_1^*)], \end{aligned}$$

et la matrice d'information de Fisher

$$I_{\theta\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{pmatrix} I_{\theta\theta},$$

avec

$$I_{\theta\theta} = 2 \left[\pi \int_0^\infty u Lp_1''(u) p_1(u) du + \pi \int_0^\infty u Lp_2''(u) p_2(u) du - 2 \right],$$

que l'on peut aussi écrire

$$I_{\theta\theta} = 2 \left[2 - \pi \left(p_1(0) + p_2(0) + \pi \int_0^\infty u Lp_1''(u) p_1(u) du + \pi \int_0^\infty u Lp_2''(u) p_2(u) du \right) \right].$$

La modélisation complexe simplifie ici considérablement les calculs algébriques et permet de donner des expressions littérales des propriétés de la séparation.

7.3.3. séparation à l'ordre 2 de sources non-circulaires

Le modèle de mélange est, comme nous l'avons vu plus haut,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Pi}^{1/2}\mathbf{U}.$$

La matrice de corrélation des sources est proportionnelle à l'identité par suite de l'indépendance des sources et de la normalisation des sources. La diagonalisation de la matrice de corrélation des signaux observés

$$E[\mathbf{y}\mathbf{y}^\dagger] = \mathbf{V}\mathbf{\Pi}\mathbf{V}^\dagger,$$

permet d'obtenir les observations blanchies

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{x}.$$

La matrice d'intercorrélation des termes conjugués et non-conjugués

$$E[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] = \mathbf{U}E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{U}^T \quad (4)$$

donne la matrice \mathbf{U} .

On obtient ainsi la matrice \mathbf{A} et l'on peut donc identifier la matrice de mélange à l'ordre 2. Remarquons que cette identification n'est pas possible si les sources sont circulaires car alors $E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = \mathbf{0}$. Lorsque le bruit est circulaire la relation (4) reste valable. Cette technique s'applique, comme l'ont montré ([8], [9]) aux signaux de communication.

7.4. cyclostationnarité et télécommunications

On a montré dans [10] que les propriétés de circularité jouent un rôle important dans la classification des modulations utilisées pour les télécommunications.

Les signaux de télécommunication sont cyclostationnaires si la période symbole est de durée supérieure à la période d'échantillonnage. La cyclostationnarité se manifeste par le fait que les multicorrélations sont fonction du vecteur des retards τ et sont périodiques, ou presque périodiques, en fonction du temps absolu t .

Le signal analytique associé à un signal de communication s'écrit

$$s(t) = z(t)e^{j(2\pi f_0 t + \phi_0)},$$

$z(t)$ étant le signal analytique de la modulation et $e^{j(2\pi f_0 t + \phi_0)}$ la porteuse.

La multicorrélation $C_{s,p+q,p}(t, \tau)$ de ce signal est

$$C_{s,p+q,p}(t, \tau) = e^{j(p-q)(2\pi f_0 t + \phi_0)} C_{z,p+q,p}(t, \tau),$$

$C_{z,p+q,p}(t, \tau)$ étant la multicorrélation de la modulation $z(t)$.

Les propriétés cyclostationnaires de ces signaux de communication sont issues de la porteuse, par le terme $e^{j(p-q)(2\pi f_0 t + \phi_0)}$ et/ou de la modulation par le terme $C_{z,p+q,p}(t, \tau)$.

On voit que des situations très différentes se présenteront selon les propriétés de circularité de la modulation. Pour des modulations circulaires les termes liés à la porteuse, qui n'apparaissent que pour $p \neq q$ seront absents de la multicorrélation alors qu'ils apparaîtront aux fréquences cycliques multiples de la porteuse pour des modulations non circulaires. On a montré [10] que les modulations N-PSK sont circulaires jusqu'à l'ordre $N - 1$ et non circulaire au delà.

En prenant une représentation complexe des signaux de modulation et en combinant l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur et de la cyclostationnarité on dispose de nouveaux facteurs discriminants permettant de classer les différentes modulations...

8. conclusion

Les variables aléatoires et les signaux aléatoires complexes ne sont pas, comme les nombres complexes à leur début, des variables et des signaux *impossibles*.

Ce sont des représentations utiles qui permettent de simplifier la modélisation et qui font apparaître des propriétés importantes des signaux. Cette modélisation permet une présentation symétrique de la transformation de Fourier. Elle introduit le signal analytique pour des signaux aléatoires qui est un outil très utile. Elle ouvre la porte à la notion fondamentale de circularité qui est un

attribut essentiel de la phase des signaux et qui apporte des solutions nouvelles et puissantes dans les traitements fondés sur la phase des signaux comme le traitement d'antenne. Elle élargit et précise le champ d'application des méthodes d'estimation. Enfin elle apporte des caractérisations nouvelles pour les signaux de télécommunication...

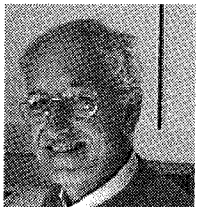
BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.P. Feynman, R.B. Leyton and M. Sands, *The Feynman lectures on Physics*, vol. 1, Addison-Wesley, 1963.
- [2] Encyclopedia Universalis, Vol. 4, p. 779-781.
- [3] B. Picinbono, *On circularity*, IEEE Transactions on signal processing, vol. 42, n° 12, Décembre 1994, p. 3473-3482.
- [4] B. Picinbono, *Systèmes linéaires au sens large en traitement du signal*, Quinzième colloque sur le traitement du signal et des images GRETSI-95, p. 165-168, Juan Les Pins, 1995.
- [5] P.O. Amblard, M. Gaeta and J.L. Lacoume, *Statistics for complex variables and signals- Part I : Variables*, Signal Processing, vol. 53, p. 1-13, 1996.
- [6] P.O. Amblard, M. Gaeta and J.L. Lacoume, *Statistics for complex variables and signals- Part II : signals*, Signal Processing, vol. 53, p. 15-25, 1996.
- [7] J.L. Lacoume, P.O. Amblard et P. Comon, *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*, MASSON, 1997.
- [8] C. Adnet, P. Gounon and J. Galy, *High resolution array processing for non-circular signals* in Signal Processing IX, Theories and Applications, EUSIPCO 98, p. 197-200. Rhodes, 1998.
- [9] J. Galy, *Antenne adaptative du second ordre aux ordres supérieurs, application aux signaux de télécommunications*, Thèse de l'Université Paul Sabatier 1998.
- [10] P. Marchand, *Détection et reconnaissance de modulations numériques à l'aide des statistiques cycliques d'ordre supérieur*, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 25 octobre 1998.

Manuscrit reçu le 11 mars 1999.

L' AUTEUR

Jean-Louis LACOUME



Ancien élève de l'École Normale Supérieure, agrégé de sciences physiques (1964), docteur d'État (1969). Assistant puis Maître Assistant à l'Université d'Orsay (64-67) et à l'Université de Paris VI (69-72), depuis 1972, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble en physique des ondes et traitement du signal.

Mes activités d'enseignement et de recherche allient la modélisation en physique des ondes aux techniques de traitement du signal :

- ondes électromagnétiques dans l'environnement terrestre,
- ondes acoustiques et élastiques dans la terre et les océans,
- vibrations des systèmes mécaniques et électriques,
- analyse spectrale et interspectrale,
- statistiques d'ordre supérieur,
- systèmes de mesure.