

Estimation de fréquences : panorama des méthodes paramétriques

Frequency Estimation: Survey of Parametric Methods

par Alain DUCASSE, Corinne MAILHES, Francis CASTANIÉ

ENSEEIH - GAPSE,
2 rue Camichel BP7122, 31071 Toulouse Cedex

résumé et mots clés

Le but de cet article est de dresser un panorama des méthodes paramétriques appliquées à l'estimation de fréquences de signaux sinusoïdaux bruités (bruit additif). Nous rappelons les principales méthodes d'estimation basées sur les moments du signal : méthodes classiques déduites des équations de Yule-Walker et méthodes « Haute Résolution » (SVD tronquée, Root-MUSIC et ESPRIT). Nous présentons aussi l'estimateur du maximum de vraisemblance et l'estimation Bayésienne. L'efficacité de ces méthodes étant souvent liée au choix de l'ordre du modèle, nous rappelons les principaux estimateurs de l'ordre. Enfin, une comparaison des méthodes met en évidence les performances de chacune.

Sinusoïdes, estimation de fréquences, méthodes paramétriques, modèle AR, méthodes « Haute Résolution »

abstract and key words

This paper is a survey of parametric modeling applied to frequency estimation of sinusoidal signals corrupted by an additive noise. A summary of major estimation methods using second or higher order statistics is presented. Discussed techniques include classical AR modeling (based on Yule-Walker equations) and "High Resolution" methods (Truncated SVD, Root-MUSIC and ESPRIT). The maximum likelihood estimator and Bayesian methods are also under interest. But the selection of the model order in these methods is often a critical one. Thus major model order estimation methods are reviewed. Finally, the efficiency of each method is examined through a simulation example.

Sinusoids, frequency estimation, parametric modeling, AR model, « High Resolution » methods.

1. introduction

L'estimation de fréquences d'un signal constitué d'une somme de sinusoïdes perturbées par un bruit additif (blanc ou coloré) est un problème intervenant dans de nombreux domaines [Besson, 1992] [Ducasse, 1997]. Le périodogramme, performant dans ce type de problème, devient inexploitable lorsque le nombre d'échantillons est trop faible et que l'écart entre les fréquences est inférieur à la résolution de Fourier. Dans ces conditions extrêmes, l'estimation paramétrique et particulièrement les méthodes dites « Haute Résolution », offrent des performances intéressantes. Mais devant la multitude de méthodes, le choix d'une technique n'est pas évident même si les conditions de mise en œuvre, les caractéristiques des signaux et les performances souhaitées permettent de limiter les solutions.

Les principaux articles de synthèse sur l'estimation paramétrique (modèle autorégressif essentiellement) [Makhoul, 1975] [Kay, 1981] [Cadzow, 1982] datent des années 70 et 80. Plus récemment, des auteurs d'ouvrages [Haykin, 1989] [Duvaut, 1991] [Proakis, 1992] [Porat, 1994] ont consacré plusieurs chapitres à l'estimation des fréquences d'une somme de sinusoïdes bruitées. L'objectif de cet article est de présenter d'une façon pratique c'est-à-dire avec un maximum de renseignements (algorithmes, performances, avantages et inconvénients), les différentes approches existantes. Des exemples aident à l'analyse des performances (résolution, précision et sensibilité au bruit) des méthodes présentées.

Chaque méthode est identifiée par sa dénomination anglo-saxonne et son abréviation correspondante la plus utilisée dans la littérature. Toutefois, nous proposons également une dénomination française.

2. modèle autorégressif

La modélisation autorégressive (AR) est une méthode très populaire en analyse spectrale paramétrique. Le modèle AR exprime le signal à l'instant n comme étant une combinaison linéaire des p échantillons précédant l'instant n . Cette description a largement été mise en œuvre pour l'approximation des séries temporelles où elle est connue sous le nom de prédiction linéaire. L'intérêt de cette méthode réside dans la possibilité d'obtenir des estimations très précises des paramètres AR (atteignant les bornes de Cramér-Rao pour des rapports signal-à-bruit élevés) même pour un nombre faible d'échantillons. Cette description temporelle du signal permet une extrapolation en dehors de la fenêtre d'observation du signal et par conséquent une résolution fréquentielle élevée. Le modèle AR d'ordre p s'écrit :

$$u(n) = - \sum_{k=1}^p a_k u(n-k) + w(n) \quad (1)$$

où les $\{a_k\}$ sont les paramètres AR et $w(n)$ un bruit blanc centré. Lorsqu'un signal $y(n)$ est approché par le modèle (1), le bruit $w(n)$ correspond à l'erreur de modélisation qui ne vérifie pas forcément l'hypothèse de blancheur. Le signal $u(n)$ correspond au filtrage linéaire du bruit blanc $w(n)$ par un filtre stable de fonction de transfert en z :

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = \frac{1}{A(z)} \quad (2)$$

Le choix d'un filtre stable contraint les racines du polynôme $A(z)$ à être de module strictement inférieur à 1, c'est-à-dire à l'intérieur du cercle unité. Cependant on notera que le modèle AR obtenu en inversant et en conjuguant les pôles (les rejetant en dehors du cercle unité) conduit à la même représentation spectrale.

Un signal $x(n)$ composé d'une somme de sinusoides s'exprime par la relation de récurrence suivante :

$$x(n) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi f_k n + \phi_k) = - \sum_{k=1}^{2K} a_k x(n-k) \quad (3)$$

Les pôles $Z_k = e^{j2\pi f_k}$ sont les racines du polynôme suivant [Kay, 1988] :

$$1 + \sum_{k=1}^{2K} a_k z^{-k} = \prod_{k=1}^K (1 - Z_k z^{-1})(1 - Z_k^* z^{-1}) \quad (4)$$

avec

$$k = 1, 2, \dots, K$$

Par la suite, nous utiliserons le terme « pôles du signal » pour désigner les Z_k , $k = 1, \dots, 2K$, qui contiennent l'information de fréquence.

La relation (3) justifie l'utilisation des méthodes d'estimation des paramètres AR pour l'estimation des pôles du signal (i.e. des fréquences). Cependant, il serait faux d'assimiler une somme de

K sinusoides à un processus AR d'ordre $2K$. Lorsque le signal est bruité, nous obtenons :

$$y(n) = x(n) + w(n) \quad \text{avec} \quad x(n) = - \sum_{k=1}^{2K} a_k x(n-k) \quad (5)$$

soit

$$y(n) - w(n) = - \sum_{k=1}^{2K} a_k (y(n-k) - w(n-k))$$

$$y(n) = - \sum_{k=1}^{2K} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{2K} a_k w(n-k) \quad (6)$$

avec $a_0 = 1$

Le signal bruité $y(n)$ vérifie les équations de récurrence d'un modèle AutoRégressif à Moyenne Ajustée ARMA(2K, 2K) dont les coefficients AR et MA sont identiques mais avec une partie autorégressive instable (pôles sur le cercle unité).

Dans ce qui suit, nous allons décrire et analyser les méthodes d'estimation des paramètres AR et des pôles d'une somme de sinusoides bruitées.

3. estimation des paramètres AR et des pôles

3.1. méthodes basées sur la minimisation d'une erreur de prédiction

Supposons que l'on souhaite approcher un signal $y(n)$, $n = 0, \dots, N-1$, par le modèle (1) en minimisant la puissance de l'erreur d'approximation (ou erreur de prédiction) :

$$\min_{a_k} \left\{ \varepsilon = \sum_{k=p}^{N-1} |w(n)|^2 = \sum_{k=p}^{N-1} \left| y(n) + \sum_{k=1}^p a_k y(n-k) \right|^2 \right\} \quad (7)$$

La solution de ce problème des moindres carrés (LS : least squares) s'exprime par :

$$\hat{a} = - (Y_1^H Y_1)^{-1} Y_1^H \underline{y}_1 \quad (8)$$

avec

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} \quad Y_1 = \begin{bmatrix} y(p-1) & \dots & y(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-2) & \dots & y(N-p-1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_1 = \begin{bmatrix} y(p) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix}$$

où $(\bullet)^H$ désigne le transposé conjugué de (\bullet) . Afin de ne pas nous limiter uniquement au cas des signaux réels, nous garderons par la suite les notations complexes.

Cette méthode d'estimation est appelée méthode des covariances car la matrice $Y_1^H Y_1$ et le vecteur $Y_1^H \underline{y}_1$ sont des estimations des covariances du signal $y(n)$ à un coefficient multiplicatif près. Morf a élaboré un algorithme récursif en ordre permettant de calculer cette solution sans inversion de matrice [Morf, 1977] [Kay, 1988]. Les pôles estimés peuvent parfois être à l'extérieur du cercle unité mais c'est relativement rare. Cette méthode peut être améliorée en tenant compte du fait que le signal $y(n)$ vérifie les équations suivantes :

$$y(n) = - \sum_{k=1}^p a_k^* y(n+k) + w_r(n) \quad (9)$$

Dans (9), $w_r(n)$ est l'erreur de prédiction arrière alors que dans (1) $w(n)$ est l'erreur de prédiction avant. La solution des moindres carrés qui minimise la somme des erreurs de prédiction arrière et avant est :

$$\hat{\underline{a}} = - (Y_2^H Y_2)^{-1} Y_2^H \underline{y}_2 \quad (10)$$

avec

$$Y_2 = \begin{bmatrix} y^*(N-p) & \cdots & y^*(N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^*(p) & \cdots & y^*(1) \\ y(p-1) & \cdots & y(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-2) & \cdots & y(N-p-1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_2 = \begin{bmatrix} y^*(N-p-1) \\ \vdots \\ y^*(0) \\ y(p) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix}$$

Cette méthode appelée méthode modifiée des covariances, est généralement plus performante que la méthode des covariances. Elle aussi est parfois appelée méthode du maximum d'entropie (*MEM : maximum entropy method*) [Lang, 1980] car elle en est un cas particulier lorsque le bruit est gaussien. Burg a développé un algorithme récursif en ordre permettant d'obtenir les coefficients de réflexion qui minimisent la somme des erreurs de prédiction avant et arrière, ce qui permet d'en déduire via la récursion de Levinson-Durbin les paramètres *AR* [Burg, 1975]. L'avantage de cet algorithme est que les pôles estimés sont toujours à l'intérieur ou sur le cercle unité. Ses principaux inconvénients sont un dédoublement de raies spectrales dans le cas d'un signal composé d'une sinusoïde bruitée avec un fort rapport signal-à-bruit (*SNR : signal-to-noise ratio*) et une sensibilité à la phase initiale [Swingler, 1980] [Wilkes, 1993]. Cette sensibilité à la phase peut être simplement mise en évidence sur l'exemple suivant :

$$y(n) = \cos(2\pi f n + \phi) + w(n)$$

$$\hat{\underline{a}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y(1) & y(0) \\ y(2) & y(1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} \quad (11)$$

La sensibilité de la solution $\hat{\underline{a}}$ est évaluée grâce au conditionnement κ du système (11) [Golub, 1989] :

$$\kappa = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (12)$$

où λ_{\max} et λ_{\min} sont les valeurs propres de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \cos(2\pi f + \phi) & \cos(\phi) \\ \cos(4\pi f + \phi) & \cos(2\pi f + \phi) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \lambda_{\max} &= \cos(2\pi f + \phi) + \sqrt{\frac{\cos(\phi) \cos(4\pi f + \phi)}{\cos(\phi) \cos(4\pi f + \phi)}} \\ \lambda_{\min} &= \cos(2\pi f + \phi) - \sqrt{\frac{\cos(\phi) \cos(4\pi f + \phi)}{\cos(\phi) \cos(4\pi f + \phi)}} \end{aligned} \quad (13)$$

L'écart entre ces 2 valeurs propres traduit l'ampleur des erreurs dans $\hat{\underline{a}}$. Lorsque $\phi = \frac{\pi}{2}$, les valeurs propres sont identiques (conditionnement minimum) et les erreurs dans $\hat{\underline{a}}$ sont minimales. Lorsque l'estimation des paramètres *AR* est réalisée au sens des moindres carrés, la sensibilité aux phases initiales des sinusoïdes diminue mais peut rester importante si le nombre d'échantillons est faible.

3.2. méthodes type Yule-Walker

Les paramètres d'un modèle *AR*(p) vérifient les équations de *Yule-Walker* (*YW*) définies par :

$$r_y(m) = E[y(n)y^*(n-m)] = - \sum_{k=1}^p a_k r_y(m-k) + \sigma_w^2 \delta(m) \quad (14)$$

Ce résultat montre que la fonction d'autocorrélation de $y(n)$ satisfait la même récursion que le signal. De nombreuses méthodes d'estimation consistent à remplacer dans les équations de *Yule-Walker*, $r_y(m)$ par une estimation $\hat{r}_y(m)$:

$$\hat{\underline{a}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{r}_y(0) & \hat{r}_y(1) & \cdots & \hat{r}_y(p-1) \\ \hat{r}_y(1) & \hat{r}_y(0) & \cdots & \hat{r}_y(p) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_y(p-1) & \cdots & \cdots & \hat{r}_y(0) \end{bmatrix}}_{\hat{R}_y^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{r}_y(1) \\ \hat{r}_y(2) \\ \vdots \\ \hat{r}_y(p) \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{r}}_y} \quad (15)$$

$$\hat{r}_y(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} y^*(n)y(n+m) \quad (16)$$

ou

$$\hat{r}_y(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} y^*(n)y(n+m) \quad (17)$$

C'est la méthode des autocorrélations. Lorsque $\hat{r}_y(m)$ est l'estimateur biaisé de l'autocorrélation (16), les pôles sont toujours à l'intérieur du cercle unité, ce qui n'est pas le cas avec l'estimateur non biaisé (17) qui donne cependant une meilleure estimation. L'algorithme de Levinson-Durbin [Levinson, 1947] permet une résolution récursive en ordre du système (15) en $O(p^2)$ opérations. Afin de réduire l'influence du bruit et d'obtenir une meilleure estimation, on peut résoudre au sens des moindres carrés ou des moindres carrés totaux (*TLS : total least squares*) [Van Huffel, 1991] un système surdéterminé analogue à (15). Ces méthodes se nomment *LSYW* et *TLSYW* :

• *LSYW*

$$\hat{\underline{a}} = - \left(\hat{R}_y^H \hat{R}_y \right)^{-1} \hat{R}_y^H \hat{\underline{r}}_y \quad (18)$$

• *LSYW*

$$\hat{\underline{a}} = - \left(\hat{R}_y^H \hat{R}_y - \sigma_{\min}^2 I \right)^{-1} \hat{R}_y^H \hat{\underline{r}}_y \quad (19)$$

avec

$$\hat{R}_y = \begin{bmatrix} \hat{r}_y(0) & \cdots & \hat{r}_y^*(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_y(N_0-1) & \cdots & \hat{r}_y^*(N_0-p) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{r}}_y = \begin{bmatrix} \hat{r}_y(1) \\ \vdots \\ \hat{r}_y(N_0) \end{bmatrix}$$

où σ_{\min} est la plus petite valeur singulière de la matrice $\begin{bmatrix} \hat{R}_y & \hat{\underline{r}}_y \end{bmatrix}$ et I la matrice identité. Le nombre d'équations N_0 doit être inférieur à N lorsque l'estimateur non biaisé de l'autocorrélation est utilisé afin de ne pas faire intervenir des points de l'autocorrélation avec une forte variance. Nous allons vérifier ce phénomène à l'aide de l'exemple suivant. On considère $N = 100$ échantillons d'un signal composé d'une sinusoïde de fréquence 0.2 et d'un bruit blanc tel que $SNR = 0$ dB. Pour un ordre $p = 6$, nous avons tracé sur la figure suivante l'erreur quadratique moyenne (*MSE* : *mean-square error*) (100 réalisations) sur la fréquence en fonction de N_0 :

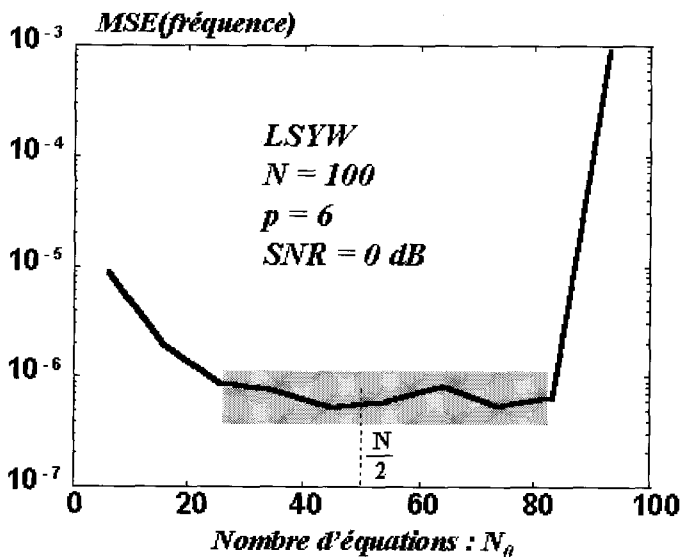


Figure 1. – Erreur quadratique moyenne sur la fréquence en fonction de N_0 .

Lorsque N_0 est proche de N les erreurs deviennent très importantes. Un nombre d'équations autour de $\frac{N}{2}$ permet d'obtenir la meilleure estimation. Cependant, on notera qu'une large gamme de valeurs de N_0 (zone grisée de la figure) permet d'avoir une erreur quasiment minimale.

Comparée à la méthode *LS*, l'estimation *TLS* est plus performante [Van Huffel] car elle minimise à la fois les erreurs dans $\hat{\underline{r}}_y$ et dans \hat{R}_y mais elle présente un inconvénient que nous aborderons à la fin de ce paragraphe. Il est généralement préférable d'envisager un calcul des solutions *LS* et *TLS* via la décomposition en valeurs singulières (*SVD* : *singular value decomposition*) de la

matrice \hat{R}_y , particulièrement lorsque le système est mal conditionné. En effet, la *SVD* fait preuve d'une plus grande stabilité numérique. Les solutions *LS* et *TLS* calculées à partir de la *SVD* sont :

• *LSYW*

$$\hat{\underline{a}} = -V_p (\Sigma_p)^{-1} U_p^H \hat{\underline{r}}_y \quad (20)$$

$$\hat{R}_y = U_p \Sigma_p V_p^H \quad \Sigma_p = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \quad \sigma_k \geq \sigma_{k+1}$$

• *TLSYW*

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{a}} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{v_{p+1}}{v_{p+1}(p+1)} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_y & \hat{\underline{r}}_y \end{bmatrix} = U_{p+1} \Sigma_{p+1} V_{p+1}^H$$

$$V_{p+1} = [v_1, \dots, v_{p+1}]$$

où $v_{p+1}(p+1)$ représente la $(p+1)^{\text{ème}}$ composante du vecteur v_{p+1} , vecteur propre associé à la plus petite valeur singulière.

Il existe une extension de l'algorithme Levinson-Durbin pour résoudre *LSYW* appelée méthode des moindres carrés treillis [Makhoul, 1977] [Proakis, 1992]. L'intérêt de cet algorithme est qu'il est récursif en temps et en ordre ce qui permet de le mettre en œuvre dans des procédures adaptatives d'estimation des paramètres.

On peut très facilement remarquer que ces méthodes sont biaisées car l'autocorrélation en zéro fait intervenir la puissance du bruit blanc σ_w^2 [Lacoume, 1988]. La valeur approchée de ce biais pour (15) est :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{a}} &= - \left(\hat{R}_{y-w} + \sigma_w^2 I \right)^{-1} \hat{\underline{r}}_{y-w} \\ &\approx - \left(\hat{R}_{y-w}^{-1} - \sigma_w^2 \hat{R}_{y-w}^{-2} \right) \hat{\underline{r}}_{y-w} \\ &\approx \underline{a} + \sigma_w^2 \hat{R}_{y-w}^{-2} \hat{\underline{r}}_{y-w} = \underline{a} - \sigma_w^2 \hat{R}_{y-w}^{-1} \underline{a} \\ \hat{\underline{a}} - \underline{a} &\approx -\sigma_w^2 \hat{R}_{y-w}^{-1} \underline{a} \quad (22) \end{aligned}$$

où $y(n) - w(n)$ est le signal sans bruit. Certaines méthodes (itératives) [Sakai, 1979] [Kay2, 1980] exploitent cette relation pour tenter d'éliminer ce biais à l'aide d'une estimation de σ_w^2 . Une solution pour obtenir une estimation non biaisée des paramètres *AR* consiste à ne pas faire intervenir l'autocorrélation en zéro dans l'estimation :

$$\hat{\underline{a}} = - \begin{bmatrix} \hat{r}_y(p) & \cdots & \hat{r}_y(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_y(2p-1) & \cdots & \hat{r}_y(p) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{r}_y(p+1) \\ \vdots \\ \hat{r}_y(2p) \end{bmatrix} \quad (23)$$

On obtient la méthode de *Yule-Walker modifiée* (*MYW* : *modified Yule-Walker*). Lorsque l'on résout ce système au sens des moindres carrés classiques ou totaux, on nomme ces méthodes *LSMYW* et *TLSMYW* [Stoica, 1992]. Lorsque le signal $y(n)$ est réellement un *AR(p)*, ces estimateurs sont asymptotiquement sans biais ($N \rightarrow +\infty$). Il en est de même lorsque $y(n)$ est composé d'une somme de sinusoïdes et d'un bruit blanc [Gingras, 1985].

Le cas d'un bruit coloré modifie les estimateurs *MYW*. Un bruit coloré $w(n)$ est généralement modélisé par un modèle à Moyenne Ajustée (*MA*) d'ordre q :

$$w(n) = \sum_{k=0}^q b_k \varepsilon(n-k) \quad (24)$$

où $\varepsilon(n)$ est un bruit blanc gaussien centré. Dans ce cas, $r_w(m) = 0$ pour $m > q$. Ainsi, l'estimateur non biaisé des paramètres *AR* d'un *ARMA*(p, q) ou d'une somme de sinusoides bruitées par un *MA*(q) est [Kay, 1988] :

$$\hat{a} = - \begin{bmatrix} \hat{r}_y(p+q) & \cdots & \hat{r}_y(q+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_y(2p+q-1) & \cdots & \hat{r}_y(p+q) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{r}_y(p+q+1) \\ \vdots \\ \hat{r}_y(2p+q) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Ces méthodes supposent la connaissance de l'ordre p ou du nombre de sinusoides K ($p = 2K$). Lorsque p est surestimé, l'estimation des pôles du signal est améliorée mais il apparaît des pôles liés au bruit qui sont généralement plus amortis (pour un *SNR* pas trop faible). Cela permet de faire une distinction entre les pôles du signal et ceux du bruit. La méthode *LSMYW* est relativement efficace pour faire cette distinction, par contre la méthode *TLSMYW* présente l'inconvénient d'attirer les pôles liés au bruit sur le cercle unité, rendant la distinction très difficile. Nous allons mettre en évidence ce phénomène sur un exemple. On considère $N = 64$ échantillons d'un signal composé de 2 sinusoides de fréquences 0.2 et 0.21, d'amplitudes $\sqrt{2}$ et 1 et d'un bruit blanc de puissance 0.2 (*SNR* ≈ 9 dB). Les valeurs numériques de cet exemple sont choisies de façon à ce que le périodogramme échoue dans la séparation des 2 sinusoides. Les pôles sont estimés par les méthodes *LSMYW* et *TLSMYW* avec un nombre d'équations $\frac{N}{2}$ et un ordre $p = 10$. Le tableau suivant donne les valeurs des fréquences positives et des amortissements obtenues pour une réalisation du signal.

LSMYW		TLSMYW	
fréq.	amort.	fréq.	amort.
0.2033	-0.0167	0.2023	-0.0195
0.2057	-0.1095	0.3563	-0.0233
0.3744	-0.2223	0.1506	-0.0637
0.5	-0.3301	0.2097	-0.0792
0.0698	-0.3494	0.4556	0.0307

On constate que les 2 pôles les moins amortis obtenus par *LSMYW* sont les estimations des pôles du signal ce qui n'est pas le cas pour *TLSMYW*. On voit aussi qu'un des pôles estimés par *TLSMYW* sort du cercle unité. On notera toutefois, que l'estimation des fréquences 0.2 et 0.21 est meilleure par *TLSMYW* (propriété des moindres carrés totaux [Van Huffel, 1991]). La méthode *TLSMYW* est donc plus sensible au bruit présent dans le signal que les moindres carrés classiques.

La méthode *LSMYW* est parmi celles que nous avons décrites, l'une des plus performantes [Chan, 1982] [Stoica, 1989a]. Söderström montre qu'elle fait un bon compromis entre précision et charge de calcul [Soderstrom, 1991].

3.3. méthodes géométriques

Le terme « géométrique » provient du fait que beaucoup de ces méthodes sont issues du traitement d'antennes (Radar, Sonar ...) où l'on cherche à retrouver les directions d'arrivée des ondes

émises. L'idée est d'utiliser certaines propriétés de la matrice d'autocorrélation R_y pour estimer les paramètres *AR* ou les pôles d'une somme de sinusoides perturbées par un bruit blanc additif. Les principales méthodes qui ont été étudiées sont les méthodes *Kumaresan-Tufts*, *Pisarenko*, *Root-MUSIC* et *ESPRIT*. On classe ces méthodes parmi les méthodes « Haute Résolution » pour leur capacité à détecter des sinusoides de fréquences très proches. Avant de décrire ces méthodes, nous allons rappeler les résultats concernant la matrice d'autocorrélation.

La matrice d'autocorrélation R_y d'un signal $y(n)$ composé de K sinusoides noyées dans un bruit blanc additif de puissance σ_w^2 est définie par :

$$R_y = \begin{bmatrix} r_y(0) & \cdots & r_y^*(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_y(p-1) & \cdots & r_y(0) \end{bmatrix} = R_x + \sigma_w^2 I \quad (26)$$

avec

$$R_x = \sum_{k=1}^{2K} \frac{A_k^2}{4} \underline{e}_k \underline{e}_k^H \underline{e}_k^T = \begin{bmatrix} 1 & e^{j2\pi f_k} & \cdots & e^{j2\pi f_k(p-1)} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } f_{K+l} = -f_l \quad l = 1, \dots, K$$

où R_x est la matrice d'autocorrélation du signal $x(n)$, I la matrice identité et $e^{j2\pi f_k}$ les pôles du signal $x(n)$. On montre que [Kay] :

$$R_y = \sum_{k=1}^{2K} \lambda_k \underline{v}_k \underline{v}_k^H + \sigma_w^2 \sum_{k=2K+1}^p \underline{v}_k \underline{v}_k^H \quad \lambda_k \geq \lambda_{k+1} \quad (27)$$

où $\{\lambda_k\}$ et $\{\underline{v}_k\}$ sont les valeurs propres et les vecteurs propres de R_y . Les vecteurs propres de R_y sont aussi ceux de R_x . Les valeurs propres $\{\lambda_k\}$ sont les valeurs propres de R_x augmentées de σ_w^2 (donc $\lambda_k \geq \sigma_w^2 \quad \forall k$). Ce résultat est la base des méthodes géométriques car il permet de mettre en évidence un sous-espace signal ($k = 1, \dots, 2K$) et un sous-espace bruit ($k = 2K+1, \dots, p$). De plus, l'espace engendré par les vecteurs propres de l'espace signal correspond à celui engendré par les vecteurs \underline{e}_k [Kay, 1988] et est orthogonal à l'espace bruit. Notons enfin que pour pouvoir mettre en œuvre les méthodes présentées dans la suite, il est impératif de connaître le nombre K de sinusoides c'est-à-dire la dimension du sous-espace signal ($2K$).

3.3.1. méthode Kumaresan-Tufts et SVD tronquée

La méthode *Kumaresan-Tufts* [Tufts, 1982] est un cas particulier des méthodes *SVD tronquée*. L'idée est de contraindre la matrice intervenant dans les méthodes des covariances et *Yule-Walker* à être de rang $2K$, ce qui est théoriquement le cas en l'absence de bruit. La meilleure approximation de rang $r < n$ d'une matrice $m \times n$ consiste à mettre les $n-r$ plus faibles valeurs singulières à zéro [Golub, 1989]. Kumaresan applique ce principe à la matrice signal intervenant dans la méthode modifiée des covariances ($p > 2K$). On dit parfois que cela revient à filtrer les valeurs singulières et donc à éliminer celles liées au bruit. Rao a montré qu'augmenter l'ordre ($p \gg 2K$) et calculer la solution de norme minimale permet de réduire la sensibilité au bruit des paramètres *AR* [Rao, 1988]. Lorsqu'on applique la *SVD tronquée* à la matrice d'autocorrélation intervenant dans les équations de *Yule-Walker*, on parle de la méthode des composantes principales [Kay, 1988]. Le principe général de ces méthodes est le suivant :

- Construire le système linéaire surdéterminé :

$$\widehat{R}_y \widehat{\underline{a}} \approx -\widehat{\underline{r}}_y$$

- Calculer la SVD de la matrice \widehat{R}_y :

$$\widehat{R}_y = U \Sigma V^H$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \quad (\sigma_k \geq \sigma_{k+1})$$

- Dédurre l'approximation \widetilde{R}_y de la matrice \widehat{R}_y , de rang $2K < p$:

$$\widetilde{R}_y = U \widetilde{\Sigma} V^H \quad \widetilde{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{2K}, 0, \dots, 0)$$

- Calculer la solution de norme minimale :

$$\widehat{\underline{a}} = -V \widetilde{\Sigma}^\# U^H \underline{r}_y$$

avec $\widetilde{\Sigma}^\# = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_{2K}}, 0, \dots, 0\right)$

Cadzow a proposé d'améliorer cette méthode en calculant la SVD tronquée de la matrice $X = \begin{bmatrix} \widehat{\underline{r}}_y & \widehat{R}_y \end{bmatrix}$ permettant ainsi de tirer tout l'avantage de la SVD. De plus, il a proposé une procédure itérative qui permet de garder la structure Toeplitz de la matrice \widehat{R}_y (structure liée au signal) après la SVD tronquée. Pour cela, il réalise successivement une SVD tronquée et une approximation de \widetilde{R}_y par la matrice Toeplitz la plus proche, ce qui consiste à remplacer tous les éléments de chaque diagonale de \widetilde{R}_y par la valeur moyenne de la diagonale. Ces 2 étapes sont itérées jusqu'à convergence. On nomme cette méthode, méthode de *Cadzow rehaussée* (*Enhanced Cadzow method*). Une comparaison de ces méthodes est donnée dans [Cadzow, 1991]. Il existe aussi des méthodes de troncature basées sur la décomposition QR qui ont un coût calculatoire plus faible que la SVD mais des performances inférieures [Hsieh, 1990].

3.3.2. pisarenko

Cette méthode [Pisarenko, 1973] est le résultat de la décomposition de R_y :

$$R_y = R_x + \sigma_w^2 I \quad (28)$$

Si le signal $x(n)$ vérifie une récursion d'ordre p telle que :

$$R_x \underline{a} = -\underline{r}_x \quad (29)$$

le vecteur $\begin{bmatrix} 1 & \underline{a} \end{bmatrix}^T$ est le vecteur propre de la matrice $R_{y,p+1}$ de dimension $(p+1) \times (p+1)$:

$$R_{y,p+1} = \begin{bmatrix} r_y(0) & \dots & r_y^*(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_y(p) & \dots & r_y(0) \end{bmatrix} \quad (30)$$

associé à la plus petite valeur propre σ_w^2 . En pratique on estime la matrice $R_{y,p+1}$ et on déduit du vecteur propre $\widehat{\underline{v}}_{p+1}$ associé à la plus petite valeur propre, une estimation du vecteur paramètre :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \widehat{\underline{a}} \end{bmatrix} = \frac{\widehat{\underline{v}}_{p+1}}{\widehat{\underline{v}}_{p+1}(1)} \quad (31)$$

où $\widehat{\underline{v}}_{p+1}(1)$ est la première composante du vecteur $\widehat{\underline{v}}_{p+1}$. Il a été montré que la méthode *Pisarenko* a des performances très moyennes [Sakai, 1984] [Kay, 1988]. Une extension de cette méthode a été proposée par Kumaresan : c'est la méthode de la norme minimale (*MN : minimum norm*) [Kumaresan, 1983]. Le vecteur paramètre est une combinaison des vecteurs propres du sous-espace bruit avec la contrainte d'être de norme minimale. Cette méthode, plus performante que *Pisarenko*, est dans son principe équivalente à la méthode *Root-MUSIC*.

3.3.3. root-MUSIC

L'algorithme *MUSIC* (Multiple Signal Characterization) [Bienvenu, 1979] [Schmidt, 1981] basé sur l'orthogonalité des sous-espaces bruit et signal permet d'obtenir une représentation spectrale du signal. L'algorithme *Root-MUSIC* [Barabell, 1983] permet un calcul numérique des pôles du signal. Son principe est le suivant (dans le cas d'un signal composé de K sinusoides) :

- Estimation de la matrice d'autocorrélation :

$$\widehat{R}_y = \begin{bmatrix} \widehat{r}_y(0) & \dots & \widehat{r}_y^*(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{r}_y(p-1) & \dots & \widehat{r}_y(0) \end{bmatrix} \quad p > 2K$$

- Calcul des p vecteurs propres de \widehat{R}_y :

$$\widehat{R}_y \widehat{\underline{v}}_k = \widehat{\lambda}_k \widehat{\underline{v}}_k \quad \text{avec} \quad \widehat{\lambda}_k \geq \widehat{\lambda}_{k+1}$$

- Calcul des racines du polynôme obtenu à partir de la somme des vecteurs propres du sous-espace bruit (la méthode *Pisarenko* étant un cas particulier pour $p = 2K + 1$) :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \beta_k Z^{-k} \quad \text{avec} \quad \beta_k = \sum_{l=2K+1}^p \widehat{\underline{v}}_l(k+1)$$

Les $2K$ racines les plus proches du cercle unité sont l'estimation des $2K$ pôles du signal. Les $p-1$ paramètres *AR* estimés peuvent être obtenus à partir des β_k :

$$\widehat{a}_k = \frac{\beta_k}{\beta_0} \quad k = 1, \dots, p-1$$

Une analyse de cet algorithme a été faite par Stoica [Stoica, 1991]. Il est montré en particulier que l'estimation devient meilleure lorsque p augmente. Clergeot compare *MUSIC* et la méthode *Kumaresan-Tufts* aux bornes de Cramér-Rao en fonction du rapport $\frac{p}{N}$ [Clergeot, 1989]. Lorsque ce rapport n'est pas trop proche de 0 et de 1 et pour un *SNR* élevé, les 2 méthodes ont des résultats identiques très proches de la borne de Cramér-Rao. L'efficacité asymptotique de *MUSIC* est aussi déterminée dans [Stoica, 1989b].

3.3.4. ESPRIT

L'algorithme *ESPRIT* (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) qui utilise une propriété dite de « rotation » du sous-espace signal [Roy, 1986], permet d'obtenir une estimation des pôles du signal. Reprenons l'expression de la matrice d'autocorrélation d'une somme de K sinusoides :

$$R_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & \cdots & r_x^*(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p-1) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{2K} \frac{A_k^2}{4} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^H = E^H A E \quad (32)$$

$$(33)$$

avec

$$A = \text{diag}\left(\frac{A_1^2}{4}, \dots, \frac{A_{2K}^2}{4}\right)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{j2\pi f_1} & \cdots & e^{j2\pi f_{2K}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi f_1(p-1)} & \cdots & e^{j2\pi f_{2K}(p-1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_1 \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ E_2 \end{bmatrix}$$

$$f_{K+l} = -f_l \quad l = 1, \dots, K$$

où E_1 représente les $p-1$ premières lignes de la matrice E ($p \times 2K$) et E_2 les $p-1$ dernières lignes de la matrice E . Ces 2 matrices sont reliées par la relation :

$$E_2 = E_1 \Psi \quad \text{avec} \quad \Psi = \text{diag}(e^{j2\pi f_1}, \dots, e^{j2\pi f_{2K}}) \quad (34)$$

Les $2K$ vecteurs propres \mathbf{v}_k du sous-espace signal (ceux associés aux valeurs propres non nulles) de la matrice R_x vérifient une relation semblable à (34) :

$$V = [\mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{2K}] = \begin{bmatrix} V_1 \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$V_2 = V_1 \Omega \quad (36)$$

où la matrice Ω est telle que ses valeurs propres sont les $2K$ pôles du signal. Ce résultat constitue le principe de la méthode *ESPRIT*, qui peut être résumé de la façon suivante :

- Estimation de la matrice d'autocorrélation R_y :

$$\hat{R}_y = \begin{bmatrix} \hat{r}_y(0) & \cdots & \hat{r}_y^*(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_y(p-1) & \cdots & \hat{r}_y(0) \end{bmatrix} \quad p > 2K$$

- Calcul des $2K$ principaux vecteurs propres de \hat{R}_y et construction des estimations des matrices V_1 et V_2 :

$$\hat{R}_y \hat{\mathbf{v}}_k = \hat{\lambda}_k \hat{\mathbf{v}}_k \quad \text{avec} \quad \hat{\lambda}_k \geq \hat{\lambda}_{k+1}$$

$$\hat{V} = [\hat{\mathbf{v}}_1 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{v}}_{2K}] = \begin{bmatrix} \hat{V}_1 \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix}$$

- Estimation de la matrice Ω :

$$\hat{\Omega} = (\hat{V}_1^H \hat{V}_1)^{-1} \hat{V}_1^H \hat{V}_2$$

Les pôles estimés correspondent aux valeurs propres de $\hat{\Omega}$. L'estimation de la matrice Ω peut être réalisée au sens des moindres carrés totaux, on parle alors de méthode *TLS-ESPRIT* [Roy, 1987] :

$$[\hat{V}_1 \quad \hat{V}_2] \stackrel{SV\text{-}D}{=} U \Sigma W^H$$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \quad (4K \times 4K)$$

$$\hat{\Omega} = -W_{22}^{-1} W_{12}$$

où les matrices W_{11} , W_{12} , W_{21} et W_{22} sont de dimension $(2K \times 2K)$.

Roy a montré que pour de faibles *SNR*, *LS-ESPRIT* est biaisé alors que *TLS-ESPRIT* ne l'est pas [Roy, 1987]. Il montre aussi que l'algorithme *ESPRIT* est plus performant que *MUSIC* [Roy, 1988]. Une méthode équivalente à *ESPRIT* mettant en œuvre la matrice signal a été développée par Hua : la méthode *Matrix Pencil* [Hua, 1990].

3.4. méthodes basées sur les moments d'ordres supérieurs

3.4.1. autocorrélations successives

Le pouvoir réducteur de bruit de l'autocorrélation a donné l'idée d'estimer les paramètres du signal à partir des autocorrélations successives généralement non biaisées :

$$\hat{c}_y(m) = \frac{1}{N_0 - m} \sum_{n=0}^{N_0 - m - 1} \hat{r}_y(n) \hat{r}_y(n+m) \quad (37)$$

où N_0 représente une partie des N points de l'autocorrélation utilisables pour le calcul de $\hat{c}_y(m)$. Lorsque $n \rightarrow N$, la variance de $\hat{r}_y(n)$ devient importante alors on se limite généralement à $N_0 = \frac{N}{2}$ voire $N_0 = \frac{3N}{4}$. Un certain nombre de travaux ont été publiés sur la mise en œuvre des autocorrélations successives : [McGinn, 1983] [Sudhakar, 1985] [Castanie, 1987] [Gasmi, 1988]. Cependant, il est très difficile d'évaluer le gain apporté par l'utilisation des autocorrélations successives car cela dépend des caractéristiques du signal (nombre d'échantillons, *SNR*). Park montre que pour un signal de 1024 échantillons et un rapport signal-à-bruit $SNR_y = \gamma$, le *SNR* de l'autocorrélation devient $SNR_{r_y} = \gamma + 7.8 \text{ dB}$ [Park, 1989].

3.4.2. cumulants

Depuis quelques années sont apparues des techniques d'estimation basées sur les cumulants du signal. Cet intérêt est essentiellement motivé par le fait que les cumulants d'ordre supérieur à 2 d'un bruit blanc ou coloré gaussien sont nuls [Mendel, 1991]. De plus, certains cumulants d'ordre 4 d'un signal composé d'une somme de sinusoides à phases aléatoires sont semblables à l'autocorrélation, ce qui permet de les mettre en œuvre dans les estimateurs décrits précédemment. Cependant leur intérêt ne s'arrête pas là, ils permettent aussi de détecter des couplages de phases et des non linéarités (bispectre et trispectre) [Proakis, 1992]. L'estimation de fréquences à l'aide de cumulants est basée sur le résultat suivant :

• **Cumulant d'ordre 4 d'une somme de sinusoides bruitées :**

$$y(n) = x(n) + w(n) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi f_k n + \phi_k) + w(n) \quad (38)$$

où $w(n)$ est un bruit gaussien (blanc ou coloré) indépendant des phases aléatoires ϕ_k . Les cumulants diagonaux $C_{4y}(m)$ s'écrivent [Swami, 1991] [Anderson, 1995] :

$$\begin{aligned} C_{4y}(m) &\triangleq E[y(n)y(n+m)y(n+m)y(n+m)] \\ &\quad - 3r_y(0)r_y(m) \\ &= -\sum_{k=1}^K \frac{3A_k^4}{8} \cos(2\pi f_k m) \\ &= -\sum_{k=1}^{2K} a_k C_{4y}(m-k) \quad \forall m \end{aligned} \quad (39)$$

La relation de récurrence (39) justifie une possible extension des méthodes basées sur l'autocorrélation aux cumulants $C_{4y}(m)$.

• **Estimation des cumulants :**

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{4y}(m) &= \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} y(n)y^3(n+m) \\ &\quad - 3\widehat{r}_y(0)\widehat{r}_y(m) \end{aligned} \quad (40)$$

où $\widehat{r}_y(m)$ est l'estimation de l'autocorrélation. Cet estimateur des cumulants est consistant ($Var(\widehat{C}_{4y}(m)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$) mais il est cependant difficile d'évaluer la variance pour N fini.

Pour comparer les performances de l'estimation de fréquences à partir de l'autocorrélation et des cumulants, nous avons réalisé des simulations avec 2 signaux, l'un composé de 2 sinusoides et d'un bruit blanc gaussien, l'autre de 2 sinusoides et d'un bruit coloré gaussien ($ARMA(2, 2)$) :

$$\begin{aligned} x(n) &= \sqrt{2} \cos(2\pi f_1 n + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 n + \phi_2) \\ y_1(n) &= x(n) + w_1(n) \\ y_2(n) &= x(n) + w_2(n) \end{aligned} \quad (41)$$

avec $n = 0, \dots, 63$, $f_1 = 0.2$, $f_2 = 0.21$, ϕ_1 et ϕ_2 uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$ et indépendantes, $w_1(n)$ un bruit blanc et

$$w_2(n) = -\sum_{k=1}^2 a_k w_2(n-k) + w_1(n) + \sum_{k=1}^2 b_k w_1(n-k) \quad (42)$$

avec $a_1 = 1.4563$, $a_2 = 0.81$, $b_1 = 2$ et $b_2 = 1$ [Swami, 1991]. Leur puissance est fixée à 0.15 ($SNR = 10$ dB).

A partir de 100 réalisations du signal, nous avons estimé les fréquences par la méthode *LSMYW* ($\frac{N}{2}$ équations, $p = 10$) avec des estimations non biaisées de l'autocorrélation et des cumulants et nous avons calculé les erreurs quadratiques moyennes. Les fréquences estimées \widehat{f}_1 et \widehat{f}_2 sont obtenues à partir des 2 pôles les plus proches du cercle unité avec la contrainte d'être dans l'intervalle de résolution suivant :

$$[f_1 - 4\sqrt{CRB(f_1)}, f_2 + 4\sqrt{CRB(f_2)}] \quad (43)$$

Les bornes de Cramér-Rao $CRB(f_1)$ et $CRB(f_2)$ [Porat, 1994] ont été calculées à chaque réalisation en fonction des paramètres du signal.

• **Bruit blanc :**

	$\widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in (43)$	$MSE(f_1)$	$MSE(f_2)$
A	50	$1.64 \cdot 10^{-5}$	$2.68 \cdot 10^{-5}$
C	11	$2.11 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$

A : Autocorrélation **C** : Cumulants

L'estimation obtenue à partir des cumulants est nettement moins performante que celle obtenue avec l'autocorrélation.

• **Bruit coloré :**

	$\widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in (43)$	$MSE(f_1)$	$MSE(f_2)$
A	40	$7.76 \cdot 10^{-6}$	$1.47 \cdot 10^{-5}$
C	5	$2.10 \cdot 10^{-5}$	$2.43 \cdot 10^{-4}$

A : Autocorrélation **C** : Cumulants

L'estimation à partir des cumulants reste moins efficace. Ce résultat n'est pas suprenant compte tenu que la variance d'estimation des cumulants est plus importante que celle de l'autocorrélation. Leur mise en œuvre nécessite d'avoir plusieurs réalisations du signal afin d'opérer un moyennage. A partir d'une seule observation, une estimation basée sur l'autocorrélation est préférable même lorsque le bruit est coloré.

Les cumulants ont un inconvénient majeur : la génération d'harmoniques. Considérons une sinusoïde sans bruit :

$$x(n) = A \cos(\omega n + \phi) \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (44)$$

avec $\omega = 2\pi f$ et ϕ uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$. Examinons l'estimation du moment d'ordre 4 intervenant dans l'estimateur des cumulants (40) :

$$\widehat{M}_{4x} = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x^3(n+m) \quad (45)$$

avec

$$\begin{aligned} x^3(n+m) &= \frac{A^3}{4} (3 \cos(\omega(n+m) + \phi) \\ &\quad + \cos(3\omega(n+m) + 3\phi)) \end{aligned} \quad (46)$$

qui fait apparaître un terme de fréquence $3f$. Or il reste un résidu de ce terme dans \widehat{M}_{4x} et par conséquent dans \widehat{C}_{4x} . Ce résultat peut être démontré de la façon suivante :

$$\widehat{M}_{4x} = \frac{A^4}{4(N-m)} \sum_{n=0}^{N-m-1} \cos(\omega n + \phi) (3 \cos(\omega(n+m) + \phi) + \cos(3\omega(n+m) + 3\phi)) \quad (47)$$

Intéressons-nous au terme $\cos(\omega n + \phi) \cos(3\omega(n+m) + 3\phi)$ générateur d'harmoniques :

$$\cos(\omega n + \phi) \cos(3\omega(n+m) + 3\phi) = \frac{1}{2} (\cos(4\omega n + 3\omega m + 4\phi) + \cos(2\omega n + 3\omega m + 2\phi)) \quad (48)$$

La sommation de ce terme donne :

$$\sum_{n=0}^{N-m-1} \cos(2\omega n + 3\omega m + 2\phi) = \frac{1}{2 \sin(\omega)} [\sin(\omega m + \omega(2N-1) + 2\phi) + \sin(\omega - 3\omega m - 2\phi)] \quad (49)$$

$$\sum_{n=0}^{N-m-1} \cos(4\omega n + 3\omega m + 4\phi) = \frac{1}{2 \sin(2\omega)} [\sin(-\omega m + \omega(4N-2) + 4\phi) + \sin(2\omega - 3\omega m - 4\phi)] \quad (50)$$

Il reste donc des termes de fréquence $3f$ et d'amplitude de l'ordre de $\frac{1}{N-m}$. On peut mieux s'en rendre compte en observant la transformée de Fourier discrète des cumulants, $|FFT(\widehat{C}_{4x})|$ avec une fenêtre de Hanning :

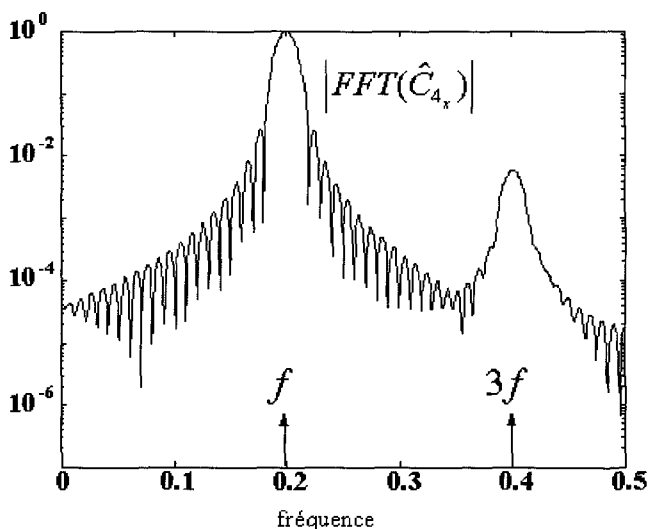


Figure 2. – Module de la transformée de Fourier discrète de \widehat{C}_{4x} .

La fréquence de la sinusoïde est $f = 0.2$ et le nombre d'échantillons $N = 100$. La transformée de Fourier fait apparaître une sinusoïde de fréquence 0.4 qui est le repliement de la fréquence $3f = 0.6$. On notera que le rapport des amplitudes des 2 sinusoïdes est de l'ordre de N . Malgré sa faible amplitude, l'harmonique $3f$ peut être faussement interprétée comme une composante du signal. Il est donc risqué d'utiliser une technique d'estimation basée sur les cumulants dans un problème d'estimation-détection de raies spectrales. Cependant si l'on dispose d'un certain nombre de réalisations du signal (à condition que les phases soient aléatoires), une estimation moyennée des cumulants permet d'éliminer ce problème.

3.5. autres méthodes

3.5.1. maximum de vraisemblance

Considérons le problème de l'estimation du vecteur paramètre $\underline{\theta}$ à partir du signal \underline{y} . L'estimateur du maximum de vraisemblance (*MLE* : *maximum likelihood estimator*) correspond à la valeur de $\underline{\theta}$ qui maximise la densité de probabilité $p(\underline{y}, \underline{\theta})$ appelée aussi fonction de vraisemblance :

$$\underline{\theta}_{ML}(\underline{y}) = \arg \max_{\underline{\theta} \in \mathbb{R}^n} p(\underline{y}, \underline{\theta}) \quad (51)$$

où n est la dimension du vecteur $\underline{\theta}$. Sous certaines hypothèses [Porat, 1994], le MLE possède les propriétés asymptotiques suivantes :

- il est non biaisé, $E[\underline{\theta}_{ML}] \rightarrow \underline{\theta}$,
- il est efficace, $var[\underline{\theta}_{ML}] \rightarrow CRB[\underline{\theta}]$,
- il converge en loi vers la loi normale.

Pour un nombre modéré d'échantillons, le MLE est un bon estimateur même si les propriétés précédentes ne sont pas vérifiées. Notons qu'il peut être préférable de mettre en œuvre une méthode d'estimation basée sur les moments (*LSMYW* par exemple) en termes de coût de calcul lorsque le nombre d'échantillons du signal est important et lorsque le *SNR* est élevé.

Considérons une somme de K sinusoïdes perturbées par un bruit additif gaussien de moyenne nulle et de variance σ_w^2 :

$$y(n) = x(n) + w(n) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi f_k n + \phi_k) + w(n) \quad (52)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

La densité de probabilité de $\underline{w} = [w(0) \dots w(N-1)]^T$ est :

$$p(\underline{w}) = p(\underline{y} - \underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(R_w)}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{y} - \underline{x})^H R_w^{-1} (\underline{y} - \underline{x})} \quad (53)$$

où R_w est la matrice d'autocorrélation du bruit $w(n)$. Le vecteur signal \underline{x} peut s'écrire :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ e^{j2\pi f_1(N-1)} & e^{-j2\pi f_1(N-1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ e^{j2\pi f_K(N-1)} & e^{-j2\pi f_K(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} \\ \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} \\ \vdots \\ \frac{A_K}{2} e^{j\phi_K} \\ \frac{A_K}{2} e^{-j\phi_K} \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$= E \underline{A}_c$$

où E est la matrice de Vandermonde et \underline{A}_c le vecteur des amplitudes complexes.

Dans le cas d'un bruit blanc (i.e. $R_w = \sigma_w^2 I$), le MLE de

$$\underline{\theta} = [A_1 \dots A_K \phi_1 \dots \phi_K f_1 \dots f_K]^T \quad (55)$$

s'obtient en maximisant

$$p(\underline{y} - \underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \sigma_w^{2N}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2} (\underline{y} - \underline{x})^H (\underline{y} - \underline{x})} \quad (56)$$

c'est-à-dire en minimisant

$$\begin{aligned} S(\underline{\theta}) &= S(E, \underline{A}_c) = (\underline{y} - \underline{x})^H (\underline{y} - \underline{x}) \\ &= (\underline{y} - E \underline{A}_c)^H (\underline{y} - E \underline{A}_c) \end{aligned} \quad (57)$$

Une condition nécessaire de minimum est

$$\frac{\partial S(\underline{\theta})}{\partial \underline{A}_c} = 0 \quad (58)$$

d'où

$$\hat{\underline{A}}_c = (E^H E)^{-1} E^H \underline{y} \quad (59)$$

Le MLE de $\hat{\underline{A}}_c$ s'obtient en remplaçant dans (59) E par son MLE, E_{ML} . En remplaçant l'expression (59) dans (57), on obtient :

$$\begin{aligned} S(E, \hat{\underline{A}}_c) &= \underline{y}^H (\underline{y} - E \hat{\underline{A}}_c) \\ &= \underline{y}^H \underline{y} - \underline{y}^H E (E^H E)^{-1} E^H \underline{y} \end{aligned} \quad (60)$$

Le MLE des fréquences f_k est obtenu en maximisant :

$$L(E) = \underline{y}^H E (E^H E)^{-1} E^H \underline{y} \quad (61)$$

qui est une fonction non linéaire des fréquences f_k .

Dans le cas monofréquentiel complexe ou réel, il est bien connu que le MLE de la fréquence est obtenu en recherchant la fréquence pour laquelle le périodogramme est maximum [Kay, 1988]. On peut montrer de la même façon, que pour une somme de deux exponentielles, le MLE est obtenu à partir des 2 pics les plus grands du périodogramme, à la condition que les fréquences soient espacées de plus de $\frac{1}{N}$ [Kay, 1988]. Mais d'une façon générale, le

MLE est difficile à obtenir analytiquement. On peut alors faire appel aux méthodes d'optimisation [Abatzoglou, 1985] [Stoica, 1989c] [Starer, 1992]. Palmer a utilisé le périodogramme pour obtenir une solution approchée, suivie d'une méthode d'optimisation [Palmer, 1974]. Il existe aussi des méthodes itératives qui approchent le MLE. L'une de ces méthodes est la suivante. A partir des paramètres AR , on définit la matrice A^H $(N-p) \times N$:

$$A^H = \begin{bmatrix} a_p & a_{p-1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_p & \dots & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_p & a_{p-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

On a alors $A^H E = 0$, c'est-à-dire que les colonnes de E sont orthogonales aux colonnes de A . En termes d'opérateurs de projection, on a :

$$I = E(E^H E)^{-1} E^H + A(A^H A)^{-1} A^H \quad (63)$$

Ainsi, d'après l'expression (61), le MLE est obtenu en minimisant

$$\begin{aligned} S(A) &= \underline{y} A (A^H A)^{-1} A^H \underline{y}^H \\ &= \|A(A^H A)^{-1} A^H \underline{y}\|^2 \end{aligned} \quad (64)$$

par rapport au vecteur paramètre AR . La fonction $S(A)$ est non linéaire par rapport à \underline{a} mais une forme itérative peut en être déduite. Pour cela, remplaçons le terme $A^H \underline{y}$ par $Y \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a} \end{bmatrix}$ où

$$\underline{a} = [a_1 \dots a_p]^T$$

$$Y = \begin{bmatrix} y(p) & \dots & y(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N-1) & \dots & y(N-1-p) \end{bmatrix}$$

On obtient

$$S(A) = \left\| A(A^H A)^{-1} Y \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a} \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (65)$$

Pour minimiser $S(A)$ de façon itérative, considérons A_k le $k^{ième}$ itéré de A et \underline{a}_{k+1} le $(k+1)^{ième}$ itéré de \underline{a} qui minimise

$$\left\| A_k (A_k^H A_k)^{-1} Y \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a}_{k+1} \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (66)$$

Une fois obtenu \underline{a}_{k+1} on construit A_{k+1} et on itère le processus. On peut remarquer que (66) se résout simplement car la matrice A_k est fixée. Dans un même ordre d'idée, on peut citer l'Algorithme du Filtrage Itératif (IFA) [Kay] qui remplace les opérations matricielles dans (66) par le filtrage du signal par $\frac{1}{A_k(Z)}$. Cependant, dans le cas de sinusoides non amorties, le filtre AR est proche de l'instabilité ce qui rend difficile la convergence de l'IFA. D'autres algorithmes ont été développés [Bresler, 1986] [Parker, 1990] [James, 1994] [McWhorter, 1995] [Shaw, 1995] [Umesh, 1996] [Nagesha, 1996].

3.5.2. estimation bayésienne

Dans l'estimation bayésienne, le vecteur paramètre $\underline{\theta}$ est considéré aléatoire avec une densité de probabilité donnée (densité de probabilité *a priori*) alors que le MLE suppose $\underline{\theta}$ inconnu mais déterministe. Le principe de l'estimation bayésienne consiste alors à minimiser une fonction coût qui constitue une mesure de l'erreur d'estimation ($c[\underline{\theta} - \underline{\theta}_{Bayes}]$). Johnston a formulé l'estimateur bayésien du vecteur paramètre AR [Johnston, 1994]. Il montre que cette méthode dépasse les performances du MLE, en termes d'erreur quadratique moyenne. Des méthodes d'estimation bayésienne des fréquences ainsi que du nombre de sinusoides ont été données dans [Djuric, 1993] [Cho, 1995] [Djuric, 1995] [Dublanche, 1995].

4. estimation du nombre de sinusoides

L'estimation du nombre de sinusoides est un problème déterminant lorsque l'on met en œuvre les méthodes estimant les sous-espaces signal et bruit. On pourrait croire que surestimer la dimension du sous-espace signal est une solution efficace pour estimer toutes les composantes du signal mais les pôles liés au bruit peuvent perturber l'analyse spectrale. Il existe un très grand nombre d'estimateurs dont les plus connus sont le critère *AIC* (*Akaike Information Criterion*) et le critère *MDL* (*Minimum Description Length*) [Djuric, 1996]. Wax a exprimé ces 2 critères en fonction des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation \hat{R}_y de dimension $p \times p$ [Wax, 1985]:

$$AIC(k) = -N(p-k) \ln \left(\frac{\left(\prod_{l=k+1}^p \hat{\lambda}_l \right)^{\frac{1}{p-k}}}{\frac{1}{p-k} \sum_{l=k+1}^p \hat{\lambda}_l} \right) + k(2p-k) \quad (67)$$

$$k = 1, \dots, p-1$$

$$MDL(k) = -N(p-k) \ln \left(\frac{\left(\prod_{l=k+1}^p \hat{\lambda}_l \right)^{\frac{1}{p-k}}}{\frac{1}{p-k} \sum_{l=k+1}^p \hat{\lambda}_l} \right) + \frac{1}{2}k(2p-k) \ln(N) \quad (68)$$

où $\hat{\lambda}_l$ sont les valeurs propres ordonnées ($\hat{\lambda}_l \geq \hat{\lambda}_{l+1}$) de la matrice \hat{R}_y ($p \times p$). Il est possible de définir ces critères en fonction des valeurs singulières $\hat{\sigma}_l$ de la matrice \hat{R}_y ($M \times p$, $M > p$) en remplaçant dans les expressions (67) et (68), $\hat{\lambda}_l$ par $\hat{\sigma}_l^2$ [Haykin, 1989]. L'augmentation des dimensions de la matrice \hat{R}_y permet

une amélioration des performances d'estimation. Un estimateur basé sur l'analyse statistique des valeurs et des vecteurs propres de la matrice d'autocorrélation est donné dans [Fuchs, 1988].

Nous allons vérifier les performances des critères (67) et (68) sur l'exemple suivant. On considère $N = 64$ échantillons d'un signal composé de 2 sinusoides de fréquences 0.2 et 0.21 et d'amplitudes $\sqrt{2}$ et 1, perturbées par un bruit blanc de puissance 0.5 ($SNR = 4.8 \text{ dB}$). La valeur de p est fixée à $\frac{N}{2}$. Le tableau suivant résume les résultats obtenus à partir de 100 réalisations et avec l'estimateur biaisé de l'autocorrélation.

	sous-estimé	exact	surestimé
AIC	0	74	26
MDL	11	89	0

Les résultats mettent en évidence l'efficacité des critères (67) et (68) appliqués à un signal présentant des difficultés majeures (un écart de fréquence inférieur à $\frac{1}{N}$ et un niveau de bruit important). On notera que *AIC* a tendance à surestimer l'ordre alors que *MDL* tend à le sous-estimer. Cela provient du terme de pénalisation du critère *MDL* ($0.5k(2p-k) \ln(N)$) qui est plus important que celui du critère *AIC* ($(2p-k)k$).

5. comparaison des méthodes

Nous allons analyser à l'aide d'un exemple les performances des principales méthodes abordées dans cet article.

Le signal de simulation est le suivant :

$$y(n) = \sqrt{2} \cos(2\pi f_1 n + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 n + \phi_2) + w(n) \quad (69)$$

avec $n = 0, \dots, 63$, $f_1 = 0.2$, $f_2 = 0.21$, ϕ_1 et ϕ_2 uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$ et indépendantes. $w(n)$ est un bruit blanc de puissance 0.15 ($SNR = 10 \text{ dB}$).

Nous avons choisi de mettre en œuvre les méthodes considérées comme les plus performantes : *LSMYW*, *TLSMYW*, *SVD tronquée*, *MYW*, *Root-MUSIC*, *ESPRIT* et le *MLE*. Pour les méthodes géométriques, la dimension du sous-espace signal est fixée à 4. Le *MLE* est obtenu par minimisation de l'expression (61) à l'aide de l'algorithme d'optimisation Simplex [Nelder, 1965]. La méthode *LSMYW* est utilisée comme solution initiale. Pour les méthodes *Root-MUSIC* et *ESPRIT*, $p = \frac{N}{2}$.

Les fréquences estimées \hat{f}_1 et \hat{f}_2 sont obtenues à partir des 2 pôles les plus proches du cercle unité avec la contrainte d'être dans l'intervalle de résolution suivant :

$$\left[f_1 - 4\sqrt{CRB(f_1)}, f_2 + 4\sqrt{CRB(f_2)} \right] \quad (70)$$

Les bornes de Cramér-Rao $CRB(f_1)$ et $CRB(f_2)$ ont été calculées à chaque réalisation en fonction des paramètres du signal.

Les tableaux suivants résument les résultats obtenus à partir de 100 réalisations.

	$p = 10$		
	<i>LSMYW</i>	<i>TLSMYW</i>	<i>SVDMYW</i>
$\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in (70)$	51	19	74
$MSE(\hat{f}_1)$	$1.02 \cdot 10^{-5}$	$7.04 \cdot 10^{-6}$	$1.55 \cdot 10^{-5}$
$MSE(\hat{f}_2)$	$2.29 \cdot 10^{-5}$	$3.65 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$

	$p = 20$		
	<i>LSMYW</i>	<i>TLSMYW</i>	<i>SVDMYW</i>
$\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in (70)$	16	12	93
$MSE(\hat{f}_1)$	$4.60 \cdot 10^{-6}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$	$7.08 \cdot 10^{-6}$
$MSE(\hat{f}_2)$	$1.58 \cdot 10^{-5}$	$2.23 \cdot 10^{-5}$	$1.22 \cdot 10^{-5}$

	<i>Root-MUSIC</i>	<i>ESPRIT</i>
$\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in (70)$	37	79
$MSE(\hat{f}_1)$	$8.08 \cdot 10^{-6}$	$1.21 \cdot 10^{-5}$
$MSE(\hat{f}_2)$	$2.87 \cdot 10^{-5}$	$2.23 \cdot 10^{-5}$

	<i>MLE (p = 10)</i>	<i>MLE (p = 20)</i>
$\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in (70)$	51	18
$MSE(\hat{f}_1)$	$1.14 \cdot 10^{-6}$	$6.67 \cdot 10^{-6}$
$MSE(\hat{f}_2)$	$2.29 \cdot 10^{-6}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$

Ces simulations mettent en évidence les points suivants :

• Résolution ($\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in (70)$)

Les méthodes *SVDMYW* ($p = 20$) et *ESPRIT* sont les plus résolventes. On notera que ces 2 techniques utilisent une estimation du sous-espace signal, éliminant ainsi partiellement le bruit. Dans une moindre mesure *LSMYW* ($p = 10$) donne de bons résultats. L'estimateur du maximum de vraisemblance obtient des performances identiques à sa solution initiale *LSMYW* ce qui montre l'importance de l'initialisation. L'algorithme *Root-MUSIC* (qui utilise une estimation du sous-espace bruit) atteint des performances moyennes. Enfin, la méthode *TLSMYW*, très sensible au bruit, est relativement inefficace.

• Précision de l'estimation (*MSE*)

Le MLE est sans conteste la méthode la plus efficace avec des erreurs jusqu'à dix fois plus faibles. Pour les méthodes *LSMYW* et *TLSMYW*, la précision est améliorée lorsque l'ordre est augmenté mais au prix d'une nette dégradation de la résolution. Par contre, *SVDMYW* ($p = 20$) obtient à la fois une bonne précision et une excellente résolution. Les algorithmes *Root-MUSIC* et *ESPRIT* ont des résultats comparables et du même ordre que ceux des méthodes *MYW* ($p = 10$).

• Tolérance au bruit

L'influence du bruit sur les méthodes *LSMYW* et *TLSMYW* est clairement mise en évidence lorsque l'ordre passe de 10 à 20. Ce problème est cependant efficacement éliminé par la technique *SVD tronquée* à condition de connaître précisément le nombre de sinusoides.

Ces différents résultats ont été résumés dans le tableau suivant :

	Résolution	Précision	Remarques
L	Bonne	Bonne	Mise en œuvre simple
T	Faible	Bonne	Grande sensibilité au bruit
S	Excellente	Très Bonne	Détermination de la dimension du sous-espace signal
R	Moyenne	Bonne	
E	Très bonne	Bonne	
M	(*)	Excellente	(*) Performances liées à la solution initiale

L : *LSMYW* T : *TLSMYW* S : *SVD tronquée (MYW)*
 R : *Root-MUSIC* E : *ESPRIT* M : *MLE*

6. conclusion

L'objectif de cet article était de présenter les principales méthodes paramétriques d'estimation des fréquences d'une somme de sinusoides bruitées. Il aurait été difficile de rassembler toutes les techniques qui ont pu être développées mais les principales approches sont décrites : méthodes de minimisation de l'erreur de prédiction, méthodes basées sur les équations de *Yule-Walker*, méthodes basées sur les moments d'ordres supérieurs, méthodes géométriques, estimateurs du maximum de vraisemblance ainsi que les principaux estimateurs du nombre de sinusoides. Dans cette description, nous avons fait apparaître les limites de certains algorithmes (*TLSMYW* et cumulants). A partir d'un signal test composé de deux sinusoides de fréquences très proches, nous avons analysé les performances des principales méthodes en termes de résolution, de précision et de sensibilité au bruit. La méthode *SVD tronquée* atteint une excellente résolution et une bonne précision. C'est aussi le cas de l'algorithme *ESPRIT*. Cependant, ces méthodes demandent une charge de calculs importante qui peut être incompatible avec des applications temps réel. La méthode *LSMYW*, obtient de bons résultats et présente l'avantage de pouvoir être mise en œuvre dans un traitement adaptatif. Concernant le maximum de vraisemblance, sa précision est excellente mais il requiert pour cela une initialisation performante.

Les auteurs tiennent à remercier les experts pour leur lecture attentive et leurs remarques constructives.

BIBLIOGRAPHIE

[Abatzoglou, 1985] Abatzoglou T.J. : "A fast ML algorithm for frequency estimation of a sinusoid based Newton's method", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 33, No 1, Feb. 1985, pp. 77-89.
 [Anderson, 1995] Anderson, J.M.M., Giannakis G.B. & Swami A. : "Harmonic retrieval using higher order statistics : A deterministic formulation", IEEE Trans. on SP, Vol. 43, No 8, Aug. 1995, pp. 1880-1889.
 [Barabell, 1983] Barabell A.J. : "Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms", Proceedings ICASSP 1983, pp. 336-339.

- [Besson, 1992] Besson, O. : "Analyse spectrale paramétrique et modèles multiplicatifs : Application aux signaux de radar Doppler", Thèse de l'INPT, No 527, 1992.
- [Bienvenu, 1979] Bienvenu G. & Kopp, L. : "Principle of adaptive localization in passive listening", Actes du GRETSI 1979, pp. 106/1-106/5.
- [Bresler, 1986] Bresler Y. & Macovski A. : "Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 34, No 5, Oct. 1986, pp. 1081-1089.
- [Burg, 1975] Burg J.P. : "Maximum entropy spectral analysis", Ph.D. dissertation, Stanford University, 1975.
- [Dadzwow, 1982] Dadzwow J.A. : "Spectral estimation : An overdetermined rational model equation Approach", Proceedings of the IEEE, Vol. 70, N09, Sep. 1982, pp. 907-939.
- [Dadzwow, 1991] Dadzwow J.A. & Wilkes D.M. : "Enhanced sinusoidal and exponential data modeling", SVD and Signal Processing II, Ed. Vaccaro, Elsevier Science Publishers B.V., 1991, pp. 335-352.
- [Castanie, 1987] Castanié F. & Gasmî F. : "Extraction of sinusoids from noise Prony modeling of high-order correlation functions", Proceedings DSP 1987.
- [Chan, 1982] Chan Y.T., Langford R.P. : "Spectral estimation via the HOYW equations", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 30, No 5, Oct. 1982, pp. 689-698.
- [Cho, 1995] Cho C.-M. & Djuric P.M. : "Bayesian detection and estimation of cisoids in colored noise", IEEE Trans. on SP, Vol. 43, No 12, Dec. 1995, pp.2943-2952.
- [Clergeot, 1989] Clergeot H., Tressens S. & Ouamri A. : "Performance of high resolution frequencies estimation methods compared to the Cramér-Rao bounds", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 37, No 11, Nov. 1989, pp. 1703-1720.
- [Djuric, 1993] Djuric P.M. : "Simultaneous detection and frequency estimation of sinusoidal signals", Proceedings ICASSP 1993, Vol. IV, pp. 53-56.
- [Djuric, 1995] Djuric P.M. & Li H.T. : "Bayesian spectrum estimation of harmonic signals", Signal Processing Letters, Vol. 2, No 11, Nov. 1995, pp. 213-215.
- [Djuric, 1996] Djuric P.M. : "A model selection rule for sinusoids in white gaussian noise", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 44, No 7, Jul. 1996, pp. 1744-1751.
- [Dublanchet, 1995] Dublanchet F., Duvaut P., Idier J. & Demoment G. : "Expulse Complexe, estimation bayésienne de sinusoides par déconvolution de la transformée de Fourier discrète du signal", Actes du GRETSI 1995, pp. 37-40.
- [Ducasse, 1997] Ducasse A. : "Estimation de sous-harmoniques à l'aide de méthodes paramétriques", Thèse de l'INPT, No 1269, Jan. 1997.
- [Duvaut, 1991] Duvaut P. : "Traitement du signal : concepts et applications", éditions Hermès, 1991.
- [Fuchs, 1988] Fuchs J.-J. : "Estimating the number of sinusoids in additive white noise", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 36, No 12, Dec. 1988, pp. 1846-1853.
- [Gasmî, 1988] Gasmî F. & Castanié F. : "Successive correlation based Prony modeling very low SNR behavior analysis", Proceedings ICASSP 1988, pp. 2420-2423.
- [Gingras, 1988] Gingras D.F. : "Asymptotic properties of HOYW estimates of the AR parameters of an time series", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 33, No 4, Oct. 1985, pp. 1095-1101.
- [Golub, 1989] Golub G.H. & Van Loan C.F. : "Matrix Computations", ed. The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [Haykin, 1989] Haykin S. : "Modern filters", MacMillan Publishing Company, 1989.
- [Hsieh, 1990] Hsieh S.F., Liu K.J.R. & Yao K. : "Applications of truncated QR methods to sinusoidal frequency estimation", Proceedings ICASSP 1990, pp. 2571-2574.
- [Hua, 1990] Hua Y. & Sakar T.K. : "Matrix Pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 38, No 5, May 1990, pp. 814-824.
- [James, 1994] James B., 2 B.D.O. & Williamson R.C. : "Conditional mean and maximum likelihood frequency estimation", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 42, No 6, Jun. 1994, pp. 1366-1375.
- [Johnston, 1994] Johnston D.E. & Djuric P.M. : "An efficient bayes solution to AR signal modelling for short sequences", Proceedings ICASSP 1994, Vol. IV, pp. 345-348.
- [Kay, 1980] Kay S.M. : "Noise compensation for autoregressive spectral estimates", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 28, No 3, Jun. 1980, pp. 292-303.
- [Kay, 1981] Kay S.M. & Marple S.L. : "Spectrum analysis : A modern perspective", Proceedings of the IEEE, Vol. 69, Nov. 1981, pp. 1380-1419.
- [Kay, 1988] Kay S.M. : "Modern Spectral Estimation : Theory and Application". Prentice Hall, chap. 7.
- [Kumaresan, 1983] Kumaresan R. & Tufts D.W. : "Estimating the angles of arrival of multiple plane waves", Trans. Aerosp. Electron. Syst., Vol. 19, Jan. 1983, pp. 134-139.
- [Lacoume, 1988] Lacoume J.L. & Martin M. : "Statistical properties of AR estimators", Proceedings EUSIPCO 1988, pp. 523-526.
- [Lang, 1980] S.W. Lang & J.H. McClellan : "Frequency estimation with maximum entropy spectral estimators", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 28, No 6, Dec. 1980, pp. 716-724.
- [Levinson, 1947] Levinson N. : "The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction", J. Math. Phys., Vol. 25, pp. 261-278.
- [Makhoul, 1975] Makhoul J. : "Linear prediction : a tutorial review", Proceedings of the IEEE, Vol. 63, Apr. 1975, pp. 561-580.
- [Makhoul, 1977] Makhoul J. : "Stable and efficient Lattice methods for linear prediction", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 25, No 5, Oct. 1977, pp. 423-428.
- [McGinn, 1983] McGinn D. & Johnson D.H. : "Reduction of all-pole parameter estimator bias by successive autocorrelation", Proceedings ICASSP 1983, pp. 1088-1091.
- [McWhorter, 1995] McWhorter L.T. & Scharf L.L. : "Nonlinear ML estimation of autoregressive time series", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 43, No 12, Dec. 1995, pp. 2909-2919.
- [Mendel, 1991] Mendel J.M. : "Tutorial on high-order statistics in signal processing and system theory : Theoretical results and some applications", Proceedings of the IEEE, Vol. 79, No 3, Mar. 1991, pp. 277-305.
- [Morf, 1977] Morf M., Dickinson B., Kailath T. & Vieira A. : "Efficient solution of covariance equations for linear prediction", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 25, No 5, Oct. 1977, pp. 429-433.
- [Nagesha, 1996] Nagesha V. & Kay S. : "Spectral analysis based on the canonical autoregressive decomposition", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 44, No 7, Jul. 1996, pp. 1719-1733.
- [Nelder, 1965] Nelder J.A. & Mead R. : "A Simplex method for function minimization", Computer Journal, Vol. 7, pp. 308-313.
- [Palmer, 1974] Palmer L.C. : "Coarse frequency estimation using the discrete Fourier transform", IEEE Trans. on IT, Vol. 20, Jan. 1974, pp. 104-109.
- [Park, 1989] Park S. & Gerhardt L.A. : "A robust spectral estimation by modeling an estimated autocovariance with an ARMA model", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 37, No 2, Feb. 1989, pp. 181-191.
- [Parker, 1990] Parker P.J. & 2 B.D.O. : "Frequency tracking of nonsinusoidal periodic signals in noise", Signal Processing 20, 1990, pp. 127-152.
- [Pisarenko, 1973] Pisarenko V.F. : "The retrieval of harmonics from covariance function", Geophys. J. Roy. Astron. Soc., Vol. 33, 1973, pp. 347-366.
- [Porat, 1994] Porat B. : "Digital processing of random signals, Theory & Methods", Prentice Hall, 1994.
- [Proakis, 1992] Proakis J.G., Rader C.M., Ling F. and Nikias C.L. : "Advanced digital signal processing", Macmillan Publishing Company, 1992.
- [Rao, 1988] Rao B.D. : "Perturbation analysis of an SVD-based linear prediction method for estimating the frequencies of multiple sinusoids", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 36, No 7, Jul. 1988, pp. 1026-1035.
- [Roy, 1986] Roy R., Paulraj A. and Kailath T. : "ESPRIT - A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 34, No 4, Oct. 1986, pp. 1340-1342.
- [Roy, 1987] Roy R. & Kailath T. : "Total least squares ESPRIT", Proceedings 21th Asilomar Conf. Circuits Syst. Computing, Nov. 1986.

- [Roy, 1988] Roy R. Paulraj A. & Kailath T. : "Direction of arrival estimation by subspace rotation methods - ESPRIT", Proceedings ICASSP 1986, pp. 2495-2498.
- [Sakai, 1979] Sakai H. & Arase M. : "Recursive parameter estimation of an autoregressive process disturbed by white noise", Int. J. Contr., Vol. 30, 1979, pp. 949-966.
- [Sakai, 1984] Sakai H. : "Statistical analysis of Pisarenko's method for sinusoidal frequency estimation", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 32, No 1, Feb. 1984, pp. 95-101.
- [Schmidt, 1981] Schmidt R.O., "A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation", Ph. D. dissertation, Stanford University, 1981.
- [Shaw, 1995] Shaw A.K. : "ML estimation of multiple frequencies with constraints to guarantee unit circle roots", IEEE Trans. on SP, Vol. 43, No 3, Mar. 1995, pp. 796-799.
- [Soderstrom, 1991] Söderström T. & Stoïca P. : "On accuracy of HOYW methods for cisoids", Proceedings ICASSP 1991, pp. 3573-3576.
- [Starer, 1992] Starer D. & Nehorai A. : "Newton algorithm for conditional and unconditional ML estimation of the parameters of exponential signals in noise", IEEE Trans. on SP, Vol. 40, No 6, Jun. 1992, pp. 1528-1533.
- [Stoica, 1989a] Stoïca P., Söderström T. & Ti F. : "Asymptotic properties of HOYW estimates of sinusoidal frequencies", IEEE Trans. on ASSP, Vol 37, No 11, Nov. 1989, pp. 1721-1734.
- [Stoica, 1989b] Stoïca P. & Nehorai A. : "MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramér-Rao bound", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 37, No 5, May 1989, pp. 720-741.
- [Stoica, 1989c] Stoïca P., Friedlander B. & Söderström T. : "Maximum likelihood estimation of the parameters of multiple sinusoids from noisy measurements", IEEE Trans. on ASSP, Vol 37, No 3, Mar. 1989, pp. 378-392.
- [Stoica, 1991] Stoïca P. & Söderström T. : "Statistical analysis of MUSIC and subspace Rotation estimates of sinusoidal frequencies", IEEE Trans. on SP, Vol. 39, No 8, Aug. 1991, pp. 1836-1847.
- [Stoica, 1992] Stoïca P., Söderström T. & Van Huffel S. : "On SVD-based and TLS-based high-order Yule-Walker methods of frequency estimation", Signal Processing, Vol. 29, 1992, pp. 309-317.
- [Sudhakar, 1985] Sudhakar R., Agarwal R.C. & Duttaroy S.C. : "Frequency estimation based on iterated autocorrelation function", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 33, No 1, Feb. 1985, pp. 70-76.
- [Swami, 1991] Swami A. & Mendel J.M. : "Cumulant-based approach to the harmonic retrieval and related problems", IEEE Trans. on SP, Vol. 39, No 5, May 1991, pp. 1099-1108.
- [Swingler, 1980] Swingler D.N. : "Frequency errors in MEM processing", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 28, No 2 Apr. 1980, pp. 257-259.
- [Tufts, 1982] Tufts D.W. & Kumaresan R. : "Estimation of frequencies of multiple sinusoids : Making linear prediction perform like maximum likelihood", Proceedings of the IEEE, Vol. 70, No 9, Sept. 1982.
- [Umesh, 1996] Umesh S. & Tufts D.W. : "Estimation of parameters of exponentially damped sinusoids using fast ML estimation with application to NMR spectroscopy data", IEEE Trans. on SP, Vol. 44, No 9, Sep. 1996, pp. 2245-2259.

[Van Huffel, 1991] Van Huffel S. & Vandewalle J. : "The total least squares problem", ed. SIAM, 1991.

[Wax, 1985] Wax M. & Kailath T. : "Detection of signals by information theoretic criteria", IEEE Trans. on ASSP, Vol. 33, No 2, Apr. 1985, pp. 387-392.

[Wilkes, 1993] Wilkes D.M. & Cadzow J.A. : "The effects of phase on high-resolution frequency estimators", IEEE Trans. on SP, Vol. 41, No 3, Mar. 1993, pp. 1319-1330.

Manuscrit reçu le 20 janvier 1997.

LES AUTEURS

Corinne MAILHES



Corinne Mailhes est née en 1965. Elle est diplômée de l'ENSEEIH en 1986, docteur de l'INP Toulouse en 1990. Maître de Conférences à l'ENSEEIH depuis 1991, elle est responsable de la formation spécialisée Traitement du Signal et des Images. Elle fait partie du groupe Signaux Images et Communications du Laboratoire d'Electronique de cette école. Ses activités de recherche concernent l'analyse spectrale paramétrique, la compression de données et le domaine d'application biomédical.

Francis CASTANIÉ



Francis Castanié est Professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INP-ENSEEIH), responsable du D.E.A en Signaux, Images et Communications de Toulouse, et de l'Equipe de recherche éponyme du laboratoire d'Electronique (LEN7) de l'ENSEEIH. Ses axes de recherche se situent, depuis le début de sa carrière, en Traitement Numérique du Signal, avec un intérêt particulier pour la Modélisation Paramétrique et la Classification Automatique de

Signaux. Dans les dernières années, ses centres d'intérêt ont évolué vers la décomposition en Ondelettes appliquée à la détection de non-stationnarités dans les signaux aléatoires, et plus récemment, vers les techniques Neuronales appliquées aux télécommunications avec les mobiles. Il est, à ce titre, Coordinateur du projet européen NEWTEST du programme ACTS. F.Castanié est membre de EURASIP, de IEEE où il occupe la position de Chairman du Chapitre français Signal processing, de IEE (fellow), et de Int. Neural Network Society.

Alain DUCASSE



Alain Ducasse est né en 1971 à Auch. Il obtient le diplôme de Docteur de l'INPT en 1997. ATER à l'ENSEEIH depuis 1997. Ses thèmes de recherche concernent l'analyse spectrale (méthodes d'optimisation et de déflation) et les modélisations paramétriques.