

Proposition d'un cadre probabiliste de fusion de croyances

A Probabilistic Framework for Believes Fusion

par Emmanuel PIAT, Dominique MEIZEL

HEUDIASYC-UTC UMR CNRS 6599
BP 20529, 60205 Compiègne cedex, France
e-mail : Emmanuel.Piat@utc.fr

résumé et mots clés

Cet article présente un ensemble de méthodes permettant de fusionner des croyances dans des hypothèses représentées par des propositions. La notion de croyance est introduite dans le cadre de la logique des propositions et du calcul des probabilités. Le problème à traiter est le suivant : si différents experts fournissent à un système plusieurs croyances à propos d'une hypothèse ensembliste, comment ce système peut-il fusionner ces croyances ? Cette fusion est envisagée dans trois cas de figure : soit les experts caractérisent le même élément, soit ils caractérisent des éléments différents appartenant à un même ensemble, soit certains caractérisent le même élément et d'autres des éléments différents. La méthodologie développée est illustrée sur un exemple de fusion multi-capteurs pour des télémètres à ultrasons utilisés en robotique mobile.

Fusion multicapteur, probabilité, logique, reconstruction d'environnement.

abstract and key words

This paper presents a methodology to achieve the fusion of believes associated to logical propositions. The belief concept is introduced within the framework of logic and probability theory and the problem dealt with is the following : if different experts give their advice about a membership property, how to fuse those believes ? This fusion is detailed in three cases : either the experts speak about the same thing or they speak about different things in a given set, and more generally some experts speaks about the same thing while the others characterize different objects. The proposed fusion methodology is illustrated by an example concerning environment building from ultrasonic range scans.

Multisensor fusion, probability theory, logic, environment building.

1. introduction

Cet article propose un cadre conceptuel de fusion de croyances dans des hypothèses ensemblistes représentées par des propositions telles que « tel élément appartient à tel ensemble ». La notion de croyance dans une hypothèse est utilisée dans le cadre combiné de la logique des propositions et du calcul des probabilités, présenté par R.T. Cox en 1946. L'approche subjectiviste de Cox met en avant le fait que l'axiomatique des probabilités peut aussi être considérée comme une extension de la logique classique lorsque la valuation des propositions n'est pas connue avec certitude. Les croyances manipulées sont donc des degrés de probabilité dans des

hypothèses sur le monde représentées par des propositions. Ces degrés de probabilités trouvent alors une justification qui ne fait pas forcément appel aux notions usuelles de variables aléatoires et d'occurrences. Le problème traité dans cet article est le suivant : si un système automatisé manipule des hypothèses pour mener à bien des raisonnements et si ce système a besoin de se faire une opinion sur la pertinence de ces hypothèses (*i.e.* développer une croyance) alors un moyen pour y parvenir consiste à lui faire interroger des « experts¹ » capables de lui fournir leurs propres croyances (semblables ou différentes) sur ces hypothèses. La question est alors : comment le système peut-il agréger ou fusionner

1. Le terme générique d'expert est utilisé ici pour représenter n'importe quelle source d'information.

ner ces croyances? Afin de restreindre le champ des possibilités, le cadre conceptuel développé devra satisfaire par hypothèse les contraintes suivantes : les propositions ne sont manipulées qu'à l'aide des opérateurs usuels de la logique des propositions, les calculs de croyances effectués pendant les opérations de fusion ne reposent que sur l'axiomatique des probabilités, les experts contradictoires entre-eux doivent pouvoir être gérés et la méthodologie doit faire apparaître de façon explicite les différents modes de fusion possibles. Afin de faciliter la présentation de ce cadre conceptuel, nous allons partir d'une problématique pratique de reconstruction d'environnement sous forme de grille d'occupation qui sera ensuite transformée en une problématique de fusion de croyances dans un cadre plus général.

2. énoncé de la problématique pratique

La problématique pratique est la reconstruction de l'environnement perçu par un robot mobile sous forme d'une grille d'occupation à l'aide de télémètres à ultrasons. Cette approche associe à chaque point (inconnu) caractérisé par un télémètre une distribution de coordonnées (x, y) susceptibles de plus ou moins correspondre à ce point. La reconstruction de l'environnement consiste alors à partitionner une région d'intérêt en cellules ou grille² [Elf86, Elf89a, Elf89b]. La plupart du temps, les cellules considérées V_i forment une partition d'un plan S parallèle au sol. Il faut alors déterminer, à partir des distributions obtenues, si chacune de ces cellules est susceptible d'être occupée ou pas par un point, une cellule occupée signifiant qu'il existe un obstacle dans cette région de l'espace selon les mesures. Selon la nature des distributions associées aux points caractérisés par les télémètres, cette détermination est basée sur des approches heuristiques simples [RB90, BK91c, BK91b], sur des approches heuristiques plus complexes utilisant les sous-ensembles flous [G094] ou la théorie des possibilités [Pat94], sur la théorie des croyances de Dempster-Shafer [DP96] et sur des approches de fusion bayésienne utilisant le calcul des probabilités [ME88, Mor88, Elf92]. Dans le cadre de cet article, nous ne considérerons que les méthodes probabilistes de reconstruction de grilles. Notre objectif est de rediscuter les limitations de l'approche Bayésienne introduite en robotique mobile par [Elf86] et de montrer qu'il est possible de fournir une autre solution formelle à la reconstruction d'environnement.

2. Dans la terminologie anglo-saxonne, on parle d'*occupancy grid*.

3. l'approche bayésienne

Dans le cadre des probabilités, une approche classique et très largement utilisée correspond à l'utilisation du raisonnement bayésien. Cette approche introduite en reconstruction de grilles par A. Elfes repose sur le théorème de Bayes utilisable lorsqu'on considère n hypothèses H_i exclusives et exhaustives :

$$i \neq j \Rightarrow P(H_i H_j) = 0 \quad \sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$$

Si ces n hypothèses peuvent être conditionnées par l'observation de k données e_j , la probabilité qu'une hypothèse H_i soit vraie conditionnellement à une donnée e_j est :

$$P(H_i | e_j) = \frac{P(e_j | H_i) P(H_i)}{P(e_j)} \quad \forall i \in [1, \dots, n] \quad (1)$$

et la probabilité totale de e_j vaut :

$$P(e_j) = \sum_{k=1}^n P(e_j | H_k) P(H_k) \quad (2)$$

Lorsqu'on désire fusionner l'information apportée par un ensemble de données e_j pour déterminer la probabilité qu'une hypothèse H_i soit vraie conditionnellement aux données e_1, \dots, e_k , le théorème de Bayes permet d'écrire

$$P(H_i | e_1 \dots e_k) = \frac{P(e_1 \dots e_k | H_i) P(H_i)}{\sum_{j=1}^n P(e_1 \dots e_k | H_j) P(H_j)} \quad (3)$$

Si on cherche à établir $P(H_i | e_1 \dots e_k)$ par mises-à-jour successives et si l'observation de chaque donnée e_i est indépendante de l'observation de toutes les autres, il est possible de montrer que [Elf92] :

$$P(H_i | e_1 \dots e_k) = \frac{P(e_k | H_i) P(H_i | e_1 \dots e_{k-1})}{\sum_{j=1}^n P(e_k | H_j) P(H_j | e_1 \dots e_{k-1})} \quad (4)$$

Dans cette expression, seules les n probabilités $P(e_k | H_j)$ qui dépendent de la nouvelle donnée e_k sont à déterminer.

L'approche utilisée par Elfes pour construire une grille d'occupation repose directement sur la relation (4). Soit p le nombre de cellules de la région d'intérêt considérée. Chaque cellule V_i a deux états possibles qui sont « vide » ou « occupée » représentés par deux propositions qui ont sens sémantique suivant :

$$\begin{aligned} H_{occ, V_i} &\equiv \text{« la cellule } V_i \text{ est occupée »} \\ H_{vide, V_i} &\equiv \text{« la cellule } V_i \text{ est libre »} \end{aligned}$$

Les deux hypothèses H_{occ, V_i} et H_{vide, V_i} sont donc exclusives et exhaustives pour la cellule V_i . Soit r la distance renvoyée par

un télémètre visant une direction donnée. Pour déterminer l'état occupé ou vide d'une cellule V_i en fonction de cette distance, il suffit d'utiliser la relation (1) :

$$P(H_{occ,V_i}|r) = \frac{P(r|H_{occ,V_i})P(H_{occ,V_i})}{P(r|H_{occ,V_i})P(H_{occ,V_i}) + P(r|H_{vide,V_i})P(H_{vide,V_i})} \quad (5)$$

Pour calculer la probabilité $P(r|H_{occ,V_i})$ que le télémètre fournisse la mesure r obtenue si la cellule V_i est occupée, A. Elfes suppose qu'il est nécessaire d'explorer toutes les combinaisons possibles d'états « vide » ou « occupé » de toutes les cellules autres que V_i et d'appliquer le modèle du capteur à chacune de ces combinaisons pour obtenir finalement $P(r|H_{occ,V_i})$. La formulation qu'il propose dans [Elf92] est alors :

$$P(r|H_{occ,V_i}) = \sum_{j=0}^{2^{p-1}-1} (P(r|H_{occ,V_i}M_{i,j}) \times P(M_{i,j}|H_{occ,V_i})) \quad (6)$$

où les propositions $M_{i,j}$ sont :

$$\begin{aligned} M_{i,0} &= H_{vide,V_p} \dots H_{vide,V_{i+1}} H_{vide,V_{i-1}} \dots H_{vide,V_2} H_{vide,V_1} \\ M_{i,1} &= H_{vide,V_p} \dots H_{vide,V_{i+1}} H_{vide,V_{i-1}} \dots H_{vide,V_2} H_{occ,V_1} \\ M_{i,2} &= H_{vide,V_p} \dots H_{vide,V_{i+1}} H_{vide,V_{i-1}} \dots H_{occ,V_2} H_{vide,V_1} \\ &\vdots \\ M_{i,2^{p-1}-1} &= H_{occ,V_p} \dots H_{occ,V_{i+1}} H_{occ,V_{i-1}} \dots H_{occ,V_2} H_{occ,V_1} \end{aligned}$$

Notons que l'indice j de ces propositions correspond à un code binaire sur $\{occ, vide\}$ qui permet de spécifier tous les cas possibles d'états « vide » ou « occupé » des $p-1$ cellules V_j avec $j \neq i$. Les propositions $M_{i,j}$ sont donc mutuellement exclusives. La deuxième probabilité $P(r|H_{vide,V_i})$ est obtenue de la même manière en remplaçant l'indice occ par $vide$ dans (6). Les termes $P(M_{i,j}|H_{occ,V_i})$ dans (6) et $P(M_{i,j}|H_{vide,V_i})$ sont déterminés par A. Elfes à partir des probabilités de l'état individuel de chaque cellule V_i en supposant que les états des cellules sont des variables discrètes indépendantes et que chaque cellule est caractérisée par les probabilités *a priori* non-informatives suivantes :

$$P(H_{occ,V_i}) = P(H_{vide,V_i}) = \frac{1}{2} \quad (7)$$

Enfin les probabilités $P(r|H_{occ,V_i}M_{i,j})$ et $P(r|H_{vide,V_i}M_{i,j})$ sont calculées à partir du modèle du capteur qui permet d'établir quelle est la probabilité d'observer r lorsque les p cellules sont dans un état donné. Notons que chaque proposition $H_{occ,V_i}M_{i,j}$ et $H_{vide,V_i}M_{i,j}$ détermine bien l'état de toutes les cellules de la région d'intérêt.

En présence, non plus d'une mesure r mais de k mesures r_1, \dots, r_k indépendantes, l'état occupé ou vide de la cellule V_i sera déterminé en utilisant la relation (4) de mise à jour itérative.

Cependant, pour certains types de télémètres, tels que par exemple les capteurs à ultrasons, le fait de connaître précisément quelles sont les cellules occupées (comme le précise $H_{i,occ}M_{i,j}$ dans les parties conditionnelles) ne suffit pas pour déterminer la probabilité $P(r|H_{i,occ}M_{i,j})$ que la mesure observée puisse bien être r . Ceci est dû au fait que cette valeur ne dépend pas seulement de la présence d'un obstacle dans certaines cellules mais également de l'orientation de l'obstacle dans ces cellules. Ainsi, il se peut très bien qu'un obstacle à portée du télémètre ne provoque pas d'écho à cause d'une mauvaise orientation. Or, cette information d'orientation n'est pas présente dans une modélisation de l'environnement sous forme de cellules. Il semble donc assez difficile de calculer les probabilités inversées $P(r|H_{occ,V_i}M_{i,j})$ car les hypothèses représentées par $H_{occ,V_i}M_{i,j}$ sont sous-causales vis-à-vis de la mesure r . Autrement dit, l'approche bayésienne développée par Elfes n'est pertinente que si les mesures renvoyées par les télémètres ne dépendent pas de l'orientation des obstacles.

4. L'approche par fusion logique

4.1. modélisation logique des télémètres à ultrasons

Pour pallier les limitations de l'approche précédente, il est possible d'introduire une approche alternative [PM96, Pia96] reposant sur une analyse logique du problème. Soit \mathcal{B}^2 une tribu borélienne de \mathbb{R}^2 et $U_{\vec{e}}$ l'ensemble des propositions $\{H_{\vec{e},V} | V \in \mathcal{B}^2\}$ avec :

$$H_{\vec{e},V} \equiv \text{« le vecteur } \vec{e} \text{ appartient à } V, V \in \mathcal{B}^2 \text{ »}$$

Considérons une personne imaginaire telle qu'un aveugle utilisant un télémètre à ultrasons qui fournit une mesure indicée par i . Le fonctionnement d'un tel télémètre a été détaillé pour des environnements simples composés de murs rectilignes spéculaires et de coins à 90° [BK90], d'arêtes [BK91d], de petits obstacles circulaires [BK91a] et de surfaces rugueuses [BK91e]. Nous allons supposer que ce télémètre comporte un émetteur et un récepteur. L'émetteur génère à un instant t_0 une onde acoustique qui diverge dans un cône d'émission de demi-angle θ_0 (cf. figure 1) après avoir parcouru une très courte distance de quelques centimètres [Wel77]. Lorsque cette onde rencontre un obstacle, elle est soit réfléchiée, soit diffractée selon la nature de l'obstacle. L'ensemble des obstacles présents dans l'environnement produit alors un signal de retour qui peut être calculé de façon déterministe pour des environnements simples et spéculaires [SK87]. Si ce signal revient en direction du récepteur (qui est aussi souvent l'émetteur), et si son amplitude est supérieure à un seuil donné à un instant t , une distance r_0 est généralement calculée grâce à la mesure du temps de vol $(t - t_0)$ [BK91d]. En l'absence de réflexions multiples, on constate en pratique que la distance

Proposition d'un cadre probabiliste de fusion de croyances

bruitée r_0 correspond généralement à la position du plus proche élément de surface $[\vec{e}, \vec{n}]$ (cf. figure 1) :

$$\vec{e} = [x, y, z]^T \quad \text{et} \quad \vec{n} = [n_x, n_y, n_z]^T \quad (8)$$

tel que la normale \vec{n} soit orientée vers le récepteur et tel que le vecteur \vec{e} soit associé à un point E appartenant à l'obstacle et contenu dans le cône d'émission. En pratique, cet élément de surface n'est généralement pas situé le long de l'axe de tir mais autre part dans le cône d'émission. On a donc $r_0 = \|\vec{OE}\| = \|\vec{e}\| + \eta$ où η prend en compte les bruits tels que ceux induits par les circuits électroniques, les sources sonores parasites, l'instabilité de la masse d'air, etc. Dans ce qui suit, on va supposer que la mesure r_0 caractérise l'élément de surface $[\vec{e}, \vec{n}]$. Comme on sait que la normale \vec{n} est orientée vers le récepteur, il reste donc à fournir une caractérisation des composantes du vecteur \vec{e} . De plus, la grille d'occupation étant incluse dans un plan parallèle au sol, seules les deux premières composantes x et y sont intéressantes quand z représente l'élévation. Lorsque le repère utilisé est le repère polaire $\mathcal{R} = (O, \vec{i})$ centré sur la membrane et défini sur la figure 1, l'aveugle qui va effectuer un certain nombre de mesures successives de r_0 (afin d'obtenir des informations sur le bruit η) possède l'espace des hypothèses

$$\Omega_i = U_{\vec{e}} \cup \{C_i\}$$

avec

$C_i \equiv$ « Le fonctionnement du télémètre est celui donné précédemment et le groupe de mesures toutes désignées par l'indice i qui caractérisent le vecteur \vec{e} fournit un ensemble de distances r_0 , dont la moyenne est μ_d et l'écart-type σ_d , si le télémètre positionné en O vise la direction θ_i dans le repère polaire \mathcal{R} »

A cause des imprécisions intrinsèques aux mesures, les composantes exactes du vecteur \vec{e} sont inconnues et la valuation de l'hypothèse $H_{\vec{e},V}$ est incertaine. Une approche possible peut alors consister à essayer de déterminer une croyance dans l'hypothèse $H_{\vec{e},V}$ conditionnellement à l'état de connaissance C_i sous la forme

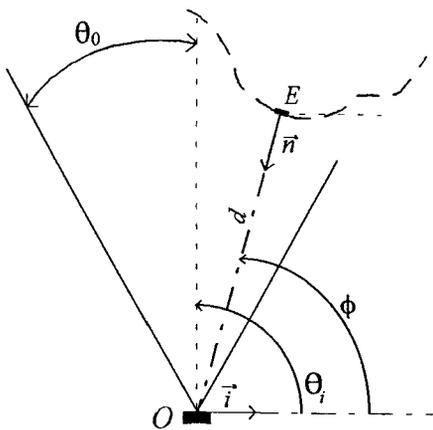


Figure 1. – Cône d'émission d'un capteur à ultrasons.

d'une valeur numérique *unique* et non ambiguë. L'observateur doit donc avoir recours à un système formel de calcul de croyances qui assigne une telle valeur en présence de C_i . La définition des probabilités donnée par R.T. Cox [Cox61, Tri72, Jay-Par94] offre un tel système car elle permet de définir les probabilités comme des croyances *conditionnées* qui forment une extension de la logique classique lorsque la valuation des propositions n'est pas connue avec certitude. Ainsi, si $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des 2^{2^n} propositions logiques ayant une table de vérité différente engendrées à partir d'un ensemble Ω de n propositions auquel est associé une fonction de valuation booléenne v , si $\mathcal{P}_*(\Omega)$ est le sous-ensemble des propositions non-obligatoirement fausses de $\mathcal{P}(\Omega)$ (p.ex. $A\bar{A} \notin \mathcal{P}_*(\Omega)$), alors une fonction de probabilité P est une fonction à deux variables³ :

$$P : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}_*(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ (A, B) & \mapsto P(A|B) \end{cases}$$

telle que

$$\begin{aligned} P(A|B) &= 0 \quad \text{ssi} \quad v(A) = 0 \quad \text{lorsque} \quad v(B) = 1; \\ P(A|B) &= 1 \quad \text{ssi} \quad v(A) = 1 \quad \text{lorsque} \quad v(B) = 1; \end{aligned}$$

et dont l'axiomatique de calcul est totalement définie par :

$$\begin{cases} P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1 \\ P(AB|C) = P(A|C)P(B|AC) = P(B|C)P(A|BC) \end{cases}$$

Dans le repère polaire $\mathcal{R} = (O, \vec{i})$ les composantes de \vec{e} sont $[d, \phi]^T$ et il est possible de montrer que [PM96, Pia96] :

$$P(H_{\vec{e},V}|C_i) = \int_V f(r, \theta|C_i) r dr d\theta \quad (9)$$

$$f(r, \theta|C_i) = \frac{1_{[\theta_i - \theta_0, \theta_i + \theta_0]}(\theta)}{2\theta_0} \times \frac{1}{\sigma_d \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r - \mu_d)^2}{2\sigma_d^2}} \quad (10)$$

4.2. analyse logique du problème

Soit $V = \{V_1, \dots, V_p\}$ la grille d'occupation qu'un système doit déterminer en interrogeant n personnes (typiquement n aveugles). Les personnes effectuent chacune une prise de mesures à l'aide d'un télémètre à ultrasons et caractérisent donc m vecteurs \vec{e}_j avec $m \leq n$ car plusieurs personnes peuvent caractériser le même.

3. Dans l'approche de Cox, une probabilité monovariée n'a pas de sens car une probabilité est toujours conditionnée par un contexte donné qui doit être totalement explicite dans la partie conditionnelle. Il n'existe donc pas de probabilités *a priori* avec cette définition. De plus, la partie conditionnelle d'une probabilité doit toujours contenir toute l'information nécessaire à l'assignation d'une valeur unique à cette probabilité. Lorsque ce n'est pas le cas, le problème est dit mal posé (les probabilités nécessitent une certaine «qualité» d'information) et il est nécessaire de se tourner vers d'autres formalismes plus souples qui ne fournissent pas une valeur unique mais un intervalle de valeurs (théorie des croyances de Shafer, théorie des possibilités, etc.).

Déterminer si une cellule V_i est occupée par un obstacle (d'après les mesures effectuées) revient à déterminer si *au moins un des vecteurs e_j appartient à V_i* , ce qui est équivalent à rechercher la valuation de la proposition logique :

$$H_{occ, V_i} = H_{\vec{e}_1, V_i} + H_{\vec{e}_2, V_i} + \dots + H_{\vec{e}_m, V_i}$$

puisque, selon la définition de la disjonction, H_{occ, V_i} , est vraie si au moins une des propositions $H_{\vec{e}_j, V_i}$ est vraie, c'est-à-dire si au moins un des vecteurs \vec{e}_j appartient à V_i . Bien sur, à cause de l'imprécision des capteurs, les composantes exactes de chaque vecteur \vec{e}_j sont inconnues et la valuation de H_{occ, V_i} est incertaine. On est donc bien dans le cadre de l'approche logique de Cox. Les n personnes caractérisant les m vecteurs différents \vec{e}_j possèdent les n croyances

$$P_j(H_{\vec{e}_{a(j)}, V_i} | C_j)$$

où $P_j : P(\Omega_j) \times P_*(\Omega_j) \rightarrow [0, 1]$ est la fonction de croyance utilisée par le j^e observateur et $a(j) \in \{1, \dots, m\}$ donne le numéro du vecteur qu'il caractérise. Pour que le système puisse référencer ces n croyances et les manipuler à l'aide de sa propre fonction de croyance $P : P(\Omega) \times P_*(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ il est nécessaire de trouver des propositions A_j et E_j appartenant au référentiel Ω du système telles que⁴ :

$$P(A_j | E_j) = P_j(H_{\vec{e}_{a(j)}, V_i} | C_j)$$

Si on suppose que lorsque le système interroge l'observateur $n^o j$ il y a automatiquement une mise à jour de Ω telle que $H_{\vec{e}_{a(j)}, V_i} \in \Omega$ alors on a évidemment $A_j \equiv H_{\vec{e}_{a(j)}}$. Par contre la détermination de la proposition E_j est plus délicate car le système peut, en général, ignorer le contenu sémantique de C_j (i.e. Lorsqu'on interroge une personne sur sa croyance dans une hypothèse donnée, la croyance obtenue sera conditionnée par un certain nombre d'hypothèses supposées vraies par la personne interrogée et ces hypothèses sont généralement inconnues de l'interrogateur. Ce sont en quelque sorte des hypothèses cachées qui *conditionnent* la réponse). Ce point délicat sera laissé en suspens dans cette section pour être pleinement traité dans la suivante. Nous supposons donc simplement ici de façon informelle que les hypothèses E_j référencient d'une certaine manière les hypothèses supposées vraies par les observateurs pour caractériser leur croyance dans $H_{\vec{e}_{a(j)}, V_i}$.

Maintenant que le système dispose de n croyances exprimées à l'aide de sa propre fonction de croyance P , il peut parfaitement les manipuler à l'aide des deux relations de base de l'axiomatique des probabilités. Si on se place par exemple dans le cas simple où chaque observateur caractérise un vecteur \vec{e}_j différent, on a $m = n$. Par conséquent, la croyance dans l'hypothèse que la cellule V_i est occupée, si le système considère l'ensemble des n hypothèses faites par les observateurs, est :

$$B_{occ}^i = P(H_{\vec{e}_1, V_i} + \dots + H_{\vec{e}_m, V_i} | E_1 E_2 \dots E_m) \quad (11)$$

4. Notons que la fonction de croyance P du système est différente des fonctions de croyance P_j des observateurs car elle n'a pas forcément le même ensemble de départ.

si l'appartenance du vecteur \vec{e}_j à V ne dépend pas du fait qu'un autre vecteur \vec{e}_k soit supposé dans V et si chaque hypothèse E_j ne donne aucune information sur les vecteurs \vec{e}_k avec $k \neq j$ alors (11) peut se réécrire [PM96, Pia96] :

$$B_{occ}^i = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - P(H_{\vec{e}_j, V_i} | E_j)) \quad (12)$$

Le cas plus général où $m \leq n$ nécessite une analyse logique plus approfondie. Plutôt que de mener cette discussion sur l'exemple particulier de la reconstruction de grille, nous allons étendre l'approche de fusion vue ci-dessus à un contexte plus général de fusion de croyances. Cette généralisation nous permettra alors de résoudre notre problématique pratique dans tous les cas de figures possibles.

5. proposition d'un cadre formel de fusion de croyance

5.1. énoncé du cadre formel

Soit Ω le référentiel des propositions manipulées par le système et v la fonction de valuation qui donne les valeurs de vérité vraies (représentées par 1) ou fausses (représentées par 0) selon le système de toutes les propositions appartenant à $\mathcal{P}(\Omega)$:

$$v : \left[\begin{array}{l} P(\Omega) \rightarrow \{0, 1\} \\ A \mapsto v(A) \end{array} \right]$$

Soit $H \in \mathcal{P}(\Omega)$ une proposition représentant une hypothèse que le système veut caractériser. Si on suppose que le système ignore la valeur $v(H)$, il peut demander à n experts leur propre croyance sur le fait que H soit vraie.

Chaque expert $n^o i$ possède son propre référentiel Ω_i qui représente les hypothèses qu'il manipule, sa propre fonction de valuation v_i ainsi qu'une fonction de probabilité P_i définie sur $P(\Omega_i) \times P_*(\Omega_i)$. Les croyances que calcule l'expert $n^o i$ sont donc toutes de la forme :

$$P_i(A|B) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega_i) \quad \forall B \in \mathcal{P}_*(\Omega_i)$$

Pour que le système puisse interroger ces n experts, il est nécessaire de supposer que l'hypothèse H appartient à chaque référentiel Ω_i :

$$H \in \mathcal{P}(\Omega_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (13)$$

et la réponse donnée au système par chaque expert sera :

$$P_i(H|h_i(\Omega_i)) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (14)$$

où $h_i(\Omega_i) \in \mathcal{P}_*(\Omega_i)$ est la fonction logique des propositions appartenant à Ω_i qui conditionne la croyance fournie par l'expert. Comme l'illustre la figure 2, même si le système et les experts forment des entités prisonnières de leur propre contexte, le système doit exprimer les n croyances $P_i(H|h_i(\Omega_i))$ sachant que ce dernier ne manipule ses propres croyances qu'à l'aide de la fonction \mathcal{P} définie sur $\mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}_*(\Omega)$. Une façon de procéder consiste à supposer que lorsque le système référence la croyance de expert n° i , il le fait implicitement de façon conditionnelle à l'hypothèse $h_i(\Omega_i)$ que cet expert suppose vraie (selon v_i). Autrement dit, le système suppose que la proposition « $h_i(\Omega_i)$ est vraie selon v » est vraie selon v . Donc, lorsque le système interroge n experts à propos de H , il lui suffit juste de définir n nouvelles propositions E_i :

- $E_1 \equiv$ « l'hypothèse $h_1(\Omega_1)$ faite par l'expert n° 1 est vraie selon cet expert »
- \vdots
- $E_n \equiv$ « l'hypothèse $h_n(\Omega_n)$ faite par l'expert n° n est vraie selon cet expert »

et de les ajouter à son référentiel Ω pour obtenir n croyances $P(H|E_i)$. Chaque croyance $P(H|E_i)$ est la croyance dans H selon l'hypothèse $h_i(\Omega_i)$ supposée vraie par l'expert n° i . Ce faisant le système n'a pas besoin de connaître les contenus sémantiques des propositions $h_i(\Omega_i)$. De plus, cette écriture ne sous-entend pas que l'hypothèse $h_i(\Omega_i)$ est vraie selon le système mais exprime seulement que $h_i(\Omega_i)$ est vraie selon l'expert n° i . Jusqu'à présent, les hypothèses H peuvent avoir un contenu sémantique quelconque. Nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement à des hypothèses ensemblistes telles que « l'élément e appartient à l'ensemble V » dans le cas particulier où les experts se focalisent sur la même ensemble V . Dans ce cas, la proposition E_i devient $E_{e,i}$

$E_{e,i} \equiv$ « l'hypothèse $h_i(\Omega_i)$ de l'expert n° i qui caractérise e est vraie selon cet expert ».

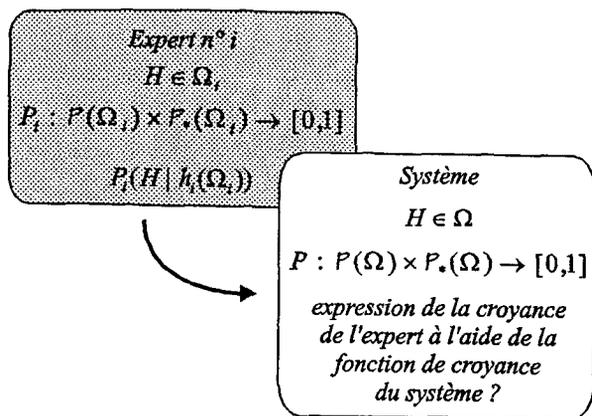


Figure 2. – Croyances des experts et du système.

5.2. modélisation de l'état de connaissance du système

Soit $X_s \in \mathcal{P}_*(\Omega)$ la proposition qui représente toute la connaissance dont le système est certain : $v(X_s) = 1$. En suivant la démarche préconisée par E. T. Jaynes dans [Jay], chaque croyance que va calculer le système est alors conditionnée par son état de connaissance X_s qui doit donc apparaître dans la partie conditionnelle au départ de chaque calcul de croyance afin que le système ne contredise pas sa connaissance. Supposons maintenant qu'un expert fournisse au système une croyance dans une hypothèse $H_{e,V} \equiv$ « l'élément e appartient à l'ensemble V » et que le système veuille à son tour référencer l'élément e . Dans ce cas, il n'est pas correct que le système manipule l'élément e sans connaître l'ensemble auquel e appartient. Par exemple, si le système sait que e est un fruit, il doit connaître la notion de fruit par l'intermédiaire d'un ensemble W tel que par exemple :

$$W = \{\text{pomme, poire, abricot}\}$$

et donc $H_{e,W}$ est nécessairement inclus dans X_s :

$$X_s = H_{e,W}X \tag{15}$$

où X représente la connaissance du système différente de $H_{e,W} \equiv$ « e est une pomme » + « e est une poire » + « e est un abricot ». Donc, si le système manipule e dans une hypothèse H , cette manipulation est automatiquement conditionnée par le référentiel de e connu du système et ce référentiel doit apparaître dans X_s .

5.3. prise en compte de l'état de connaissance du système

D'après la section précédente, le système ne va pas manipuler directement $(H_{e,V}|E_{e,i})$ (qui est conditionnée par le référentiel de e connu de l'expert n° i) mais $P(H_{e,V}|E_{e,i}X_s)$ avec $X_s = H_{e,W}X$ qui est conditionné par l'état de connaissance $H_{e,W}$ du système. Si dorénavant on fait l'hypothèse que X ne contient pas d'information sur la localisation de e alors :

$$P(H_{e,V}|E_{e,i}H_{e,W}X) = P(H_{e,V}|E_{e,i}H_{e,W}) \tag{16}$$

et si W est partitionné en p sous-ensembles $\{W_1, \dots, W_p\}$:

$$P(H_{e,V}|E_{e,i}H_{e,W}) = P(H_{e,V}|(H_{e,W_1} + \dots + H_{e,W_p})E_{e,i})$$

alors, grâce au résultat bien connu qui suit [Jay] :

Théorème 1.

Lorsque $\{A_1, \dots, A_p\}$ est un ensemble de propositions mutuellement exclusives par rapport à une information X , la croyance

$P(H|(A_1 + A_2 + \dots + A_n)X)$ est la moyenne pondérée et normalisée de chaque croyance $P(H|A_iX)$:

$$P(H|(A_1 + A_2 + \dots + A_p)X) = \frac{\sum_{i=1}^p P(A_i|X)P(H|A_iX)}{\sum_{i=1}^p P(A_i|X)} \quad (17)$$

il suffit de substituer A_i par H_{e,W_i} pour obtenir :

$$P(H_{e,V}|E_{e,i}H_{e,W}) = \frac{\sum_{j=1}^p P(H_{e,W_j}|E_{e,i})P(H_{e,V}|H_{e,W_j}E_{e,i})}{\sum_{j=1}^p P(H_{e,W_j}|E_{e,i})}$$

S'il existe k tel que $V = W_k$, on a alors :

$$\begin{cases} k \neq j \Rightarrow P(H_{e,V}|H_{e,W_j}E_{e,i}) = P(H_{e,W_k}|H_{e,W_j}E_{e,i}) = 0 \\ k = j \Rightarrow P(H_{e,V}|H_{e,W_j}E_{e,i}) = P(H_{e,W_j}|H_{e,W_j}E_{e,i}) = 1 \end{cases}$$

Par conséquent, si l'ensemble V qui intéresse le système correspond à l'un des sous-ensembles de la partition de W (ce qui n'est pas restrictif car on peut toujours choisir comme partition de W l'ensemble $\{V, W - V\}$), on a :

$$\forall V \quad P(H_{e,V}|E_{e,i}H_{e,W}) = \frac{P(H_{e,V}|E_{e,i})}{\sum_{j=1}^p P(H_{e,W_j}|E_{e,i})} \quad (18)$$

$$= \frac{P(H_{e,V}|E_{e,i})}{P(H_{e,W}|E_{e,i})} \quad (19)$$

Le dénominateur de la relation (19) est une opération normalisation. Ce dénominateur est non nul si e appartient à W selon l'expert. Par conséquent, le système ne peut « comprendre » que des experts non-contradictoires avec son état de connaissance $H_{e,W}$ (sinon, le système doit commencer par modifier son référentiel W afin qu'il englobe ou au moins intersecte celui de l'expert). Dans le cas continu, la relation (19) devient :

$$\forall \vec{x} \in W \quad f_{\vec{e}}(\vec{x}|E_{e,i}H_{\vec{e},W}) = \frac{f_{\vec{e}}(\vec{x}|E_{\vec{e},i})}{\int_W f_{\vec{e}}(\vec{y}|E_{\vec{e},i})d\vec{y}} \quad (20)$$

5.4. crédibilité d'un expert

La dernière conséquence directe du cadre formel introduit en 5.1 concerne la représentation de la crédibilité d'un expert. Cette représentation est importante car lorsque le système interroge des experts à propos d'éléments e , il est possible qu'il n'ait pas la

même confiance dans les croyances recueillies et ces différentes confiances auront une incidence sur la croyance finale issue du processus de fusion. Ainsi, il se peut très bien que le système n'ait pas la même confiance dans les hypothèses conditionnelles $h_i(\Omega_i)$ faites par les experts. La définition de la crédibilité d'un expert selon l'état de connaissance X_s du système sera alors $P(E_{e,i}|X_s)$

6. cas possible de fusion

Lorsque des experts se focalisent sur le même ensemble V , trois cas sont possibles : soit m experts caractérisent des éléments e_i qui sont tous différents, soit n experts caractérisent le même élément e , soit certains experts caractérisent le même élément et d'autres non. Dans le 1^{er} cas, le système ne s'interroge pas sur la croyance dans une hypothèse H mais dans m hypothèses représentées par m propositions $H_{e_i,V}, V$. Le processus de fusion doit alors correspondre à un calcul de croyance $P(A|B)$ avec A et B générées logiquement à l'aide des propositions connues du système :

$$\{H_{e_1,V}, \dots, H_{e_m,V}, E_{e_1,1}, \dots, E_{e_m,m}, X_s\}$$

Si le système considère l'ensemble des m hypothèses $h_i(\Omega_i)$ utilisées par les experts, cette croyance peut être :

$$P(f(H_{e_1,V}, \dots, H_{e_m,V})|E_{e_1,1} \dots E_{e_m,m} X_s) \quad (21)$$

où f est une fonction logique de ces composantes et

$$X_s = H_{e_1,W_1} H_{e_2,W_2} \dots H_{e_m,W_m} X.$$

Ce cas, détaillé dans [PM96, Pia96], ne sera pas décrit ici. Dans le second cas, les propositions A et B doivent être générées avec $\{H_{e,V}, E_{e,1}, \dots, E_{e,n}, X_s\}$ et la sortie du processus de fusion peut être :

$$P(H_{e,V}|g(E_{e,1}, \dots, E_{e,n})X_s), \quad (22)$$

où g est une fonction logique de ces composantes qui exprime la combinaison des hypothèses $h_i(\Omega_i)$ considérées par le système. Dans le troisième cas, il faut connaître quel expert caractérise quel élément afin de regrouper les experts caractérisant le même élément. Soit m le nombre d'éléments e_i différents. Soit n_i le nombre d'experts qui caractérisent e_i ($n_1 + \dots + n_m = n$). Soient a_1, a_2, \dots, a_m des applications définies par :

$$a_i : \left[\begin{array}{l} \{1, \dots, n_i\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \\ j \mapsto a_i(j) \end{array} \right]$$

telles que $a_i(1), a_i(2), \dots, a_i(n_i)$ soient les numéros des n_i experts caractérisant l'élément e_i . Ainsi, $a_i(j)$ est le numéro du j^e expert caractérisant e_i . La sortie du processus de fusion des croyances

$$P(H_{e_i,V}|E_{e_i,a_i(j)}) \quad 1 \leq j \leq n_i \quad 1 \leq i \leq m$$

avec :

$E_{e_i, a_i(j)} \equiv$ « l'hypothèse $h_{a_i(j)}(\Omega_{a_i(j)})$ faite par l'expert n° $a_i(j)$ qui caractérise l'élément e_i est vraie selon cet expert ».

peut être construite en reprenant les deux premiers cas. Comme il y a n_1 experts qui caractérisent e_1 , le système peut considérer leurs réponses grâce à une fonction logique g_1 des propositions $E_{e_1, a_1(1)}, \dots, E_{e_1, a_1(n_1)}$. Les réponses des n_2 experts qui caractérisent e_2 seront considérées à l'aide d'une fonction logique g_2 , etc. Enfin, les m hypothèses distinctes $H_{e_i, V}$ seront combinées à l'aide d'une fonction logique f . D'où le mode de fusion suivant :

$$P(f(H_{e_1, V}, \dots, H_{e_m, V}) | g_1(E_{e_1, a_1(1)}, \dots, E_{e_1, a_1(n_1)}) g_2(E_{e_2, a_2(1)}, \dots, E_{e_2, a_2(n_2)}) \dots g_m(E_{e_m, a_m(1)}, \dots, E_{e_m, a_m(n_m)}) X_s) \quad (23)$$

7. reconstruction d'environnements

En reconstruction d'environnement, lorsque le système connaît les applications a_1, \dots, a_m la solution générale quand $m \leq n$ est donnée par (23) où f est la disjonction. Par conséquent, si on pose :

$$\forall i \quad R_{\vec{e}_i} = g_i(E_{\vec{e}_i, a_i(1)}, \dots, E_{\vec{e}_i, a_i(n_i)}) \quad (24)$$

la relation (23) devient :

$$P(H_{\vec{e}_1, V} + \dots + H_{\vec{e}_m, V} | R_{\vec{e}_1} \dots R_{\vec{e}_m} X_s)$$

qui est équivalente à (12) en substituant E_i par $R_{\vec{e}_i}$. Donc, si le système suppose que chaque hypothèse $h_{a_i(j)}(\Omega_{a_i(j)})$ n'exprime aucune dépendance entre les vecteurs \vec{e}_k et le dit dans les propositions $E_{e_i, a_i(j)}$ alors (12) devient :

$$P(H_{\vec{e}_1, V} + \dots + H_{\vec{e}_m, V} | R_{\vec{e}_1} \dots R_{\vec{e}_m} X_s) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - P(H_{\vec{e}_i, V} | R_{\vec{e}_i} X_s)) \quad (25)$$

Chacune des m croyances $P(H_{\vec{e}_i, V_x} | R_{\vec{e}_i} X_s)$ dans (25) correspond au second cas de figure dans lequel les experts caractérisent le même élément \vec{e}_i . Donc maintenant, il est nécessaire de choisir des fonctions logiques g_i intéressantes pour le problème de reconstruction de grille et de calculer chaque probabilité $P(H_{\vec{e}_i, V_x} | R_{\vec{e}_i} X_s)$. La prochaine section introduit quelques fonctions g_i possibles.

8. experts caractérisant un même élément

8.1. experts contradictoires

Les experts caractérisant tous le même-élément e , la notation $E_{e, i}$ va être simplifiée en E_i . Lorsque des experts caractérisent le même élément e , les fonctions g possibles doivent au moins vérifier une condition nécessaire reposant sur la notion de non-contradiction.

Définition 1.

Etant donné l'état de connaissance $H_{e, W}$ du système, n experts sont globalement non-contradictaires si pour toute partition \mathcal{P}_W de W

$$\exists V \in \mathcal{P}_W \quad \text{tel que} \quad \prod_{i=1}^n P(H_{e, V} | E_i) \neq 0 \quad (26)$$

Quand e est défini sur un espace continu \mathbb{R}^d , la notion de non-contradiction peut être aussi exprimée grâce aux supports S des lois $f_{\vec{e}}(\cdot | E_i) = f_{\vec{e}, i}$:

$$S(f_{\vec{e}, i}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d / f_{\vec{e}}(\vec{x} | E_i) \neq 0\} \quad (27)$$

Définition 2.

Etant donné l'état de connaissance $H_{\vec{e}, W}$, les n experts sont globalement non-contradictaires si :

$$W \cap S(f_{\vec{e}, 1}) \cap \dots \cap S(f_{\vec{e}, n}) \neq \emptyset \quad (28)$$

Par exemple, avec les trois lois bornées $f_{\vec{e}, 1}$, $f_{\vec{e}, 2}$, $f_{\vec{e}, 3}$ représentées sur la figure 3, les premier et second experts sont non-contradictaires, les second et troisième experts sont non-contradictaires et les premier et troisième experts sont contradictoires. Par conséquent, selon le système, les hypothèses $h_1(\Omega_1)$ et $h_3(\Omega_3)$ sont forcément exclusives (si l'une est vraie, l'autre est fausse) et on a $v(E_1 E_3) = 0$. La connaissance X_s du système est alors $X_s = E_1 E_3 H_{e, W} X$. Pour définir une croyance dans $H_{e, V}$ le système peut considérer conjointement les deux hypothèses $h_1(\Omega_1)$ et $h_2(\Omega_2)$ ou les deux hypothèses $h_2(\Omega_2)$ et $h_3(\Omega_3)$ sachant X_s . Donc, le mode de fusion considéré est $g(E_1, E_2, E_3) = E_1 E_2 + E_2 E_3$ et la croyance dans $H_{e, V}$ associée à ce mode est :

$$P(H_{e, V} | (E_1 E_2 + E_2 E_3) X_s)$$

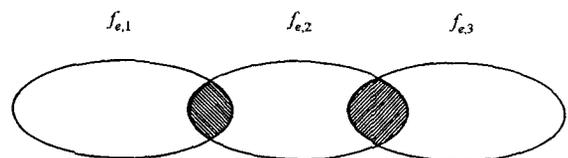


Figure 3. – Exemple de supports de distributions.

sachant qu'on a évidemment $P(E_1 E_3 | X_s) = 0$. Ce court exemple montre qu'il est possible de regrouper à l'aide d'une conjonction uniquement des experts globalement non-contradictaires ($g(\cdot)X_s$, doit appartenir à $P^*(\Omega)$). Cette contrainte peut être prise en compte grâce à la notion de recouvrement définies ci-dessous :

Définition 3.

Un recouvrement R des numéros d'experts $Q = \{1, \dots, n\}$ est un ensemble de sous-ensembles Q_i de Q tel que :

- les sous-ensembles Q_i sont tous différents;
- aucun sous-ensemble Q_i n'est inclus dans un autre Q_j ;
- tout élément de Q apparaît au moins une fois dans un sous-ensemble Q_i .

Ainsi, le recouvrement R qui correspond à l'exemple précédent est $R = \{Q_1 Q_2\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

8.2. modes de fusion associés à un recouvrement

Selon la section précédente, le mode de fusion g associé au recouvrement $R = \{Q_1, \dots, Q_h\}$ est :

$$g(E_1, \dots, E_n) = A_1 + \dots + A_h \quad (29)$$

avec

$$A_u = \prod_{j \in Q_u} E_j$$

et la croyance associée à ce mode de fusion est :

$$P(H_{e,V} | (A_1 + \dots + A_h)X_s)$$

avec

$$X_s = \left(\prod_{i \neq j} \overline{A_i A_j} \right) H_{e,W} X \quad (30)$$

Les deux prochaines sections se focalisent sur des recouvrements R très simples ne contenant qu'un seul élément Q (mode conjonctif) ou des sous-ensembles Q_i avec chacun un seul élément (mode disjonctif).

8.3. mode de fusion conjonctif

Commençons l'étude du mode conjonctif par le cas de deux experts : $R = \{\{1, 2\}\}$. Grâce au théorème de Bayes, on obtient facilement le résultat suivant lorsque W est partitionné en p sous-ensembles $\{W_1, \dots, W_p\}$ et que V correspond à l'un des sous-ensembles W_i :

$$P(H_{e,W_i} | E_1 E_2 X_s) = \frac{P(H_{e,W_i} | E_1 X_s) P(E_2 | H_{e,W_i} E_1 X_s)}{\sum_{j=1}^p (P(H_{e,W_j} | E_1 X_s) P(E_2 | H_{e,W_j} E_1 X_s))} \quad (31)$$

Dans ce cas, si $c_W = \text{card}(W)$ et que l'on partitionne W en singletons :

$$W = \{W_1, \dots, W_{c_W}\} \text{ avec } W_i = \{e_i\}$$

on a :

$$\forall i \quad P(H_{e,e_i} | X_s) = P(H_{e,e_i} | H_{e,W} X) \quad (32)$$

Si on fait alors l'hypothèse 1 que X ne donne aucune information sur la localisation de e , c'est-à-dire que X ne permet pas de privilégier un élément e_i plutôt qu'un autre, on a :

$$\forall i \quad P(H_{e,e_i} | X_s) = P(H_{e,e_i} | H_{e,W}) \quad (33)$$

D'après le principe d'indifférence (cf. annexe 1), il vient :

$$\forall i \quad P(H_{e,e_i} | H_{e,W}) = \frac{1}{c_W} \quad (34)$$

Et donc l'hypothèse 1 entraîne que⁵ :

$$\forall i \quad P(H_{e,e_i} | X_s) = \frac{1}{c_W} \quad (35)$$

Si, en plus, les hypothèses $h_i(\Omega_i)$ faite par les experts sont indépendantes (hypothèse 2) quel que puisse être e dans W selon le système :

$$\forall i \quad \begin{cases} P(E_1 | H_{e,e_i} E_2 X_s) = P(E_1 | H_{e,e_i} X_s) \\ P(E_2 | H_{e,e_i} E_1 X_s) = P(E_2 | H_{e,e_i} X_s) \end{cases}$$

alors la relation (31) devient (cf. annexe 2) :

$$P(H_{e,e_i} | E_1 E_2 X_s) = \frac{P(H_{e,e_i} | E_1) P(H_{e,e_i} | E_2)}{\sum_{j=1}^{c_W} (P(H_{e,e_j} | E_1) P(H_{e,e_j} | E_2))} \quad (36)$$

Pour n experts globalement non-contradictaires et sous les mêmes hypothèses, il est possible de montrer [Pia96] que :

$$P(H_{e,e_i} | E_1 \dots E_n X_s) = \frac{\prod_{k=1}^n P(H_{e,e_i} | E_k)}{\sum_{j=1}^{c_W} \left(\prod_{k=1}^n P(H_{e,e_j} | E_k) \right)} \quad (37)$$

Dans le cas continu, il vient [Pia96] :

$$f_{\vec{e}}(\vec{x} | E_n \dots E_1 X_s) = \frac{\prod_{i=1}^n f_{\vec{e}}(\vec{x} | E_i)}{\int_w \left(\prod_{i=1}^n f_{\vec{e}}(\vec{y} | E_i) \right) d\vec{y}} \quad (38)$$

5. Dans l'approche de Cox, le résultat (34) est un théorème impliqué par les desiderata de base utilisés pour construire le système formel probabiliste (cf. annexe 1) alors que le résultat (35) est une conséquence de l'hypothèse restrictive 1.

8.4. mode de fusion disjonctif

Le mode de fusion disjonctif associé au recouvrement $R = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ est :

$$g(E_1, \dots, E_n) = E_1 + \dots + E_n$$

avec

$$X_s = \left(\prod_{i \neq j} \overline{E_i E_j} \right) H_{e,W} X$$

Si X ne donne aucune information sur la localisation de e , la croyance associée à ce mode est directement donnée par le théorème 1 :

$$P(H_{e,V} | (E_1 + \dots + E_n) X_s) = \frac{\sum_{i=1}^n P(E_i | X_s) P(H_{e,V} | E_i H_{e,W})}{\sum_{i=1}^n P(E_i | X_s)} \quad (39)$$

Le résultat (39) est la moyenne normalisée et pondérée de chaque croyance $P(H_{e,V} | E_i H_{e,W})$ donnée par (19). Les coefficients de pondération $P(E_i | X_s)$ représentent la crédibilité des experts, ce qui semble naturel. Dans le cas continu, on montre facilement :

$$f_{\bar{e}}(\bar{x} | (E_1 + \dots + E_n) X_s) = \frac{\sum_{i=1}^n P(E_i | X_s) f_{\bar{e}}(\bar{x} | E_i H_{e,W})}{\sum_{i=1}^n P(E_i | X_s)} \quad (40)$$

8.5. mode de fusion hybride

Connaissant les résultats pour les modes conjonctif et disjonctif, il est possible de traiter le cas général (29). Lorsque X ne donne aucune information sur la localisation de e , le théorème 1 donne :

$$P(H_{e,V} | (A_1 + \dots + A_n) X_s) = \frac{\sum_{i=1}^n P(A_i | X_s) P(H_{e,V} | A_i H_{e,W})}{\sum_{i=1}^n P(A_i | X_s)} \quad (41)$$

et chaque croyance

$$P(H_{e,V} | A_i H_{e,W}) = P(H_{e,V} | \prod_{j \in Q_i} E_j H_{e,W})$$

est donnée par (19) ou (37) si Q_i contient au moins deux éléments. Par conséquent, le mode hybride est conjonctif pour les experts

globalement non-contradictaires et disjonctif pour les ensembles d'experts contradictoires. Dans le cas continu, on a évidemment :

$$f_{\bar{e}}(\bar{x} | A_1 + \dots + A_n) X_s = \frac{\sum_{i=1}^n P(A_i | X_s) f_{\bar{e}}(\bar{x} | A_i H_{e,W})}{\sum_{i=1}^n P(A_i | X_s)} \quad (42)$$

Par exemple, la distribution $f_e(x | (E_1 E_2 + E_2 E_3) X_s)$ correspondant au recouvrement $R = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ vue précédemment est illustrée en dimension 1 sur la figure 4 lorsque le système possède la même confiance dans les hypothèses faites par les experts :

$$P(E_1 | X_s) = P(E_2 | X_s) = P(E_3 | X_s)$$

Grâce à (42), cette distribution vaut :

$$a_{1,2} f_e(x | E_1 E_2 H_{e,W}) + a_{2,3} f_e(x | E_2 E_3 H_{e,W})$$

$f_e(x | E_1 E_2 H_{e,W})$ et $f_e(x | E_2 E_3 H_{e,W})$ sont données par (38).

Le calcul des coefficients

$$a_{1,2} = \frac{P(E_1 E_2 | X_s)}{P(E_1 E_2 | X_s) + P(E_2 E_3 | X_s)}$$

$$a_{2,3} = \frac{P(E_2 E_3 | X_s)}{P(E_1 E_2 | X_s) + P(E_2 E_3 | X_s)}$$

est totalement décrit dans [Pia96]. Cet exemple montre que le mode de fusion hybride permet un traitement explicite d'hypothèses multiples contradictoires (ce qui est impossible avec un mode de fusion bayésien) et génère la distribution multimodale correspondante qui favorise plus les scalaires pour lesquels les experts s'accordent le mieux. C'est pourquoi le maximum de la distribution hybride se situe au dessus des lois $f_e(\cdot | E_1)$ et $f_e(\cdot | E_2)$

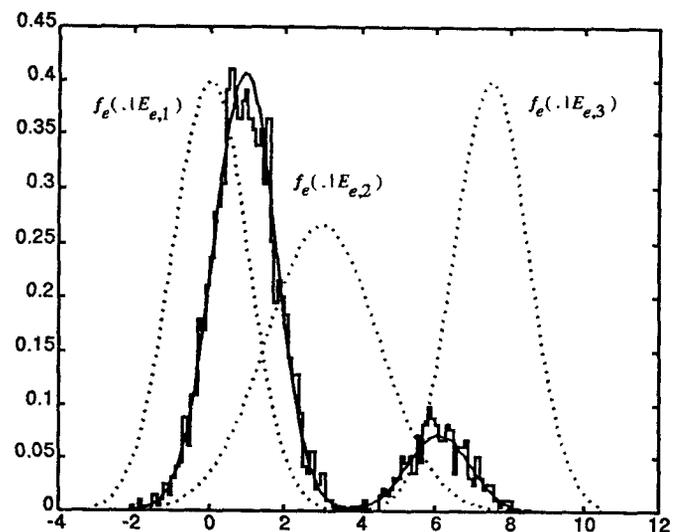


Figure 4. - Mode de fusion hybride.

car les supports de ces dernières se recouvrent plus que ceux des lois $f_e(\cdot|E_2)$ et $f_e(\cdot|E_3)$. L'histogramme qui se superpose à la distribution hybride constitue une vérification fréquentiste du résultat obtenu. Pour cela, le domaine $W = [-4, 12]$ a été partitionné en p intervalles de même longueur $\Delta d = 0.1$:

$$W = \{W_1, \dots, W_p\} = \bigcup_{i=1}^p [x_i, x_i + 1[$$

puis k triplets (u_1, u_2, u_3) ont été tirés aléatoirement, u_i étant une réalisation issue de la loi $f_e(\cdot|E_i)$. Chaque réalisation u_1, u_2 et u_3 des k triplets est donc un candidat possible pour être le paramètre inconnu e . Soit $\{v_j\}_{j \leq k}$ un ensemble de scalaires obtenus par le processus suivant : pour chaque tirage (u_1, u_2, u_3) tel que :

$$\exists i \in \{1, \dots, p\} / \begin{cases} u_1 \in [x_i, x_{i+1}[\\ u_2 \in [x_i, x_{i+1}[\end{cases}$$

ou

$$\exists j \in \{1, \dots, p\} / \begin{cases} u_1 \in [x_j, x_{j+1}[\\ u_2 \in [x_j, x_{j+1}[\end{cases}$$

qui signifie que la proposition $H_{e, [x_i, x_{i+1}[}$ est vraie si on remplace e par u_1 et par u_2 , ou bien que la proposition $H_{e, [x_j, x_{j+1}[}$ est vraie si on remplace e par u_2 et par u_3 on ajoute un point v_j ; soit dans $[x_i, x_{i+1}[$ soit dans $[x_j, x_{j+1}[$. On constate alors que la distribution théorique et la densité estimée par un histogramme sur $\{W_1, \dots, W_p\}$ avec les scalaires v_j correspondent assez bien.

9. exemple applicatif

Deux stratégies de fusion g vont maintenant être illustrées sur un exemple de reconstruction d'environnement à l'aide de trois télémètres rotatifs à ultrasons. La croyance pour qu'un obstacle soit présent dans chaque cellule V étant donnés les vecteurs caractérisés est donnée par la relation (25). Cette solution nécessite de choisir m fonctions logiques appropriées g_i si les mesures caractérisent m points différents. Les deux stratégies de fusion décrites dans cet exemple supposent que toutes les fonctions g_i sont des disjonctions ou que toutes les fonctions g_i sont des modes hybrides. Dans le cas de disjonctions, les m probabilités $P(H_{\vec{e}_i, V} | R_{\vec{e}_i} X_s)$ dans (25) sont données par (39). Ce choix permet au système de représenter toutes les cellules où il est possible de trouver un obstacle selon les mesures effectuées. Par conséquent, le mode de fusion correspondant est un mode prudent qui peut être utilisé pour une navigation la plus sûre possible du robot. Si par contre, on choisit des fonctions logiques g_i qui correspondent à un mode hybride, la grille d'occupation obtenue représente les cellules pour lesquelles les mesures s'accordent le plus pour affirmer qu'un obstacle est présent en elles.

Cet autre mode de fusion est alors utile pour représenter par exemple les régions de passage les plus probables de primitives de plus hauts niveaux telles que des segments de droite ou des B-splines. Pour déterminer $P(H_{\vec{e}_i, V} | R_{\vec{e}_i} X_s)$, il est nécessaire de connaître les croyances $P(H_{\vec{e}_i, V} | E_{\vec{e}_i, a_i(j)} H_{\vec{e}_i, W_i})$ où W_i représente le domaine auquel le système est certain que le vecteur \vec{e}_i appartient. Dans le cas présent, ce domaine sera un anneau compris entre la distance minimale la distance maximale que le capteur peut fournir et de centre la position du capteur. Les croyances précédentes sont directement déterminées à partir du modèle du capteur (10) et de (19). La figure 5 illustre les distances d'impact obtenues par une simulation du fonctionnement de trois télémètres de type Polaroid [Cor82] (le demi cône d'ouverture θ_0 vaut 12 degrés) s'ils effectuent une rotation de cinq degrés entre chaque tir. Les moyennes des distances d'impact ont été reportées le long de la ligne de tir du capteur bien que les éléments de surface réellement détectés ne sont pas forcément situés sur cette ligne. En dehors des coins, des angles ou des régions proches des perpendiculaires au murs passant par la position du capteur, on constate la présence de mesures aberrantes dues soit à des réflexions multiples, soit à l'absence d'écho (dans ce cas, le télémètre renvoie une distance d_{max} correspondant à sa portée maximale). Ces distances aberrantes sont ici générées de façon aléatoire par la simulation.

La figure 6 illustre les grilles d'occupation obtenues avec les deux stratégies de fusion. La première figure 6(a) correspond à la stratégie disjonctive et la deuxième figure 6(b) à la stratégie hybride. Un carré blanc correspond à une croyance nulle et un carré noir à la croyance maximale obtenue sur toute la grille. Cette croyance maximale qui varie d'une grille à l'autre est affichée au dessus de chaque figure. Précisons pour finir que les mesures caractérisant le même vecteur ont été déterminées manuellement pour produire les applications a_1, \dots, a_m

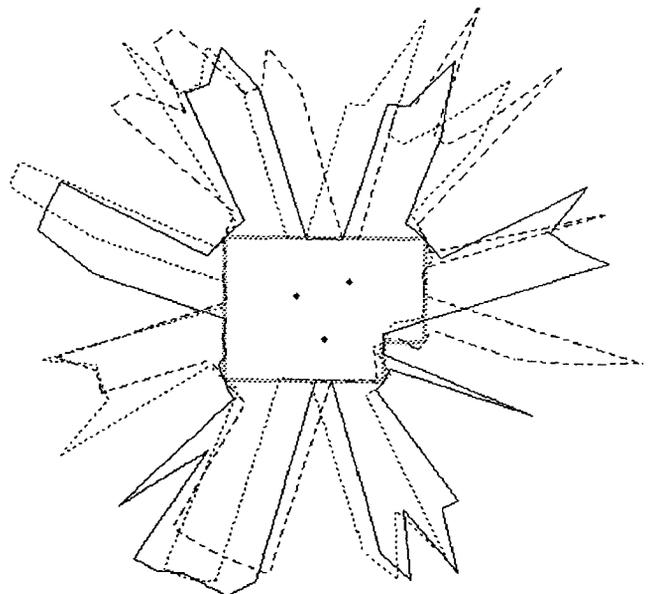
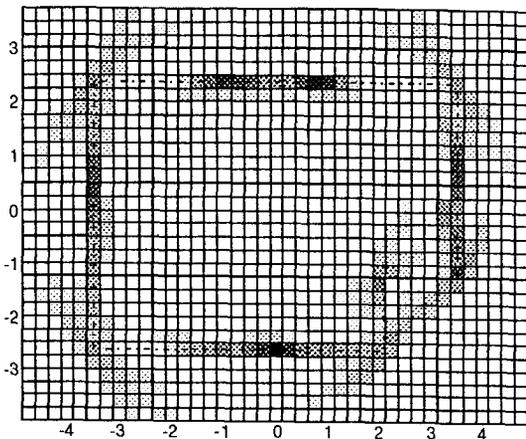
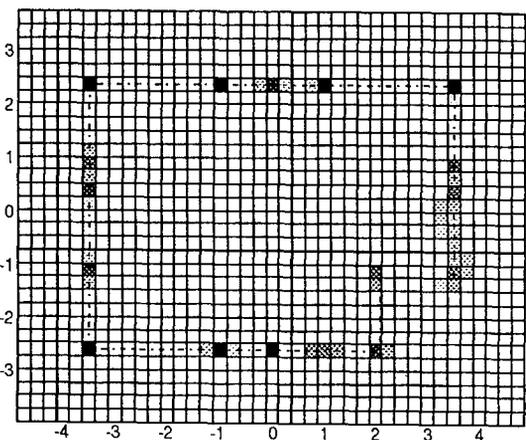


Figure 5. – Images télémétriques de 3 télémètres à ultrasons.



(a) ■ correspond à une croyance de 0.42



(b) ■ correspond à une croyance de 1

Figure 6. – Grilles d'occupation obtenues.

10. perspectives

Le travail présenté se place dans le cadre d'un système automatique qui cherche à évaluer une hypothèse ensembliste portant sur un paramètre qualitatif ou quantitatif supposé appartenir à un ensemble connu W . Cette évaluation se fait grâce à l'interrogation de différents « experts » puis par fusion des croyances recueillies. L'objectif de cet article a été de proposer un cadre conceptuel de fusion de croyances ne se basant que sur une analyse purement logique des contextes ou des états de connaissance qui conditionnent les croyances à fusionner. Cette démarche est rendue possible grâce à l'utilisation de l'axiomatique des probabilités définies par R. T. Cox car ces états de connaissance sont alors représentés par des propositions dans la partie conditionnelle des distributions ou des probabilités fournies par les experts. La définition des modes de fusion possibles n'est alors plus qu'un problème de combinaison logique de ces propositions.

L'avantage d'une telle approche est que tous les modes de fusion obtenus sont des théorèmes formels, et non des heuristiques, qui se déduisent directement de l'axiomatique des probabilités. De plus, on a pu constater que les experts contradictoires entre eux peuvent être gérés naturellement, ce que ne permet pas de faire la fusion purement Bayésienne. Le principal inconvénient de cette approche est précisément dû à ses fondements logiques. En effet, la question se pose de savoir si une simple combinaison logique des états de connaissance des experts est suffisante pour traiter un large panorama d'applications pratiques. Cette interrogation est d'ailleurs une porte ouverte à d'autres approches telle que la théorie de l'évidence qui permet également de gérer des cadres de discernement différents entre les sources. Un futur qui nous semble toutefois prometteur est la possibilité d'effectuer de la gestion d'hypothèses multiples et d'élaborer les densités de probabilités multimodales qui leurs correspondent. Ce type d'approche pourrait alors être appliqué à des problèmes classiques de poursuite de cibles avec filtre multi-hypothèses. Une autre application potentielle concerne les méthodes d'estimation ensembliste qui caractérisent des domaines ensemblistes de paramètres inconnus. L'étendue de ces domaines correspond alors à l'imprécision que l'on a sur les paramètres. L'utilisation de méthodologies de gestion d'hypothèses multiples telles que celles vues à la section 8.5 permettrait alors de caractériser en plus l'incertitude (ou la croyance) sur le fait que ces paramètres appartiennent à tel ou tel domaine d'imprécision.

ANNEXE 1

Pour démontrer le principe d'indifférence qui est un théorème découlant des desiderata de Cox, nous allons supposer que des probabilités doivent être affectées à deux propositions A_1 et A_2 dont on sait uniquement qu'elles forment un ensemble d'hypothèses exclusives et exhaustive (une et une seule de ces hypothèses est vraie). Cette connaissance s'exprime logiquement par :

$$B = (A_1 + A_2)\overline{A_1 A_2} \quad v(B) = 1$$

et on a bien $P(A_1 + A_2|B) = 1$ et $P(A_1 A_2|B) = 0$.

Pour déterminer $P(A_1|B)$ et $P(A_2|B)$, supposons qu'une autre personne nomme ces propositions différemment en écrivant $A'_1 = A_2$ et $A'_2 = A_1$. L'information conditionnant ces nouvelles propositions est $B' = (A'_1 + A'_2)\overline{A'_1 A'_2} = (A_1 + A_2)\overline{A_1 A_2} = B$. Evidemment, on a :

$$P(A'_1|B) = P(A_2|B) \quad P(A'_2|B) = P(A_1|B) \quad (43)$$

Comme l'information exprimée par B est indifférente vis-à-vis de A_1 ou de A_2 (elle ne contient aucun élément qui permet de préférer l'une des deux propositions), l'état de connaissance de la seconde personne considérant A'_1 et A'_2 , incluant leur appellation, est strictement le même que dans le problème initial où l'on considère A_1 et A_2 . Si on suppose alors que des états de connaissance équivalents doivent être représentés par des

affectations de degrés de probabilité identiques⁶ (hypothèse IIIc) on a $P(A_1|B) = P(A_1|B)$. Avec (43) ceci entraîne alors que $P(A_2|B) = P(A_1|B)$. Comme on a de plus :

$$P(A_1 + A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) = 1$$

il vient :

$$P(A_1|B) = P(A_2|B) = 1/2$$

Ce raisonnement peut être étendu à un ensemble de n propositions A_i exclusives et exhaustives et mène alors aux affectations $P(A_i|B) = 1/n$ [Jay68, Jay, chap. 2].

ANNEXE 2

Pour déterminer $P(H_{e,e_i}|E_1E_2X_s)$ avec deux experts globalement non-contradictaires (hypothèse 2) et :

$$X_s = H_{e,W}X$$

où X est supposé ne donner aucune information sur la localisation de e (hypothèse 1), on utilise la règle de Bayes :

$$P(H_{e,e_i}|E_1E_2X_s) = \frac{P(E_1E_2|H_{e,e_i}X_s)P(H_{e,e_i}|X_s)}{P(E_1E_2|H_{e,W}X)} \quad (44)$$

Pour déterminer le dénominateur de (44), on utilise la partition $\{e_1\}, \dots, \{e_{cW}\}$ de W :

$$H_{e,W} = H_{e,e_1} + H_{e,e_2} + \dots + H_{e,e_{cW}}$$

et l'application du théorème 1 puis de l'hypothèse (1) donne :

$$P(H_{e,e_i}|E_1E_2X_s) = \frac{P(E_1E_2|H_{e,e_i}X_s)P(H_{e,e_i}|X_s)}{\sum_{j=1}^{cW} P(E_1E_2|H_{e,e_j}X)P(H_{e,e_j}|X)} \quad (45)$$

$$\stackrel{(35)}{=} \frac{P(E_1E_2|H_{e,e_i}X_s)}{\sum_{j=1}^{cW} P(E_1E_2|H_{e,e_j}X)} \quad (46)$$

Les termes au numérateur et au dénominateur sont alors donnés par :

$$\forall i \quad P(E_1E_2|H_{e,e_i}X_s) = P(E_2|H_{e,e_i}E_1X_s)P(E_1|H_{e,e_i}X_s) \stackrel{\text{Hyp.}(2)}{=} P(E_2|H_{e,e_i}X_s)P(E_1|H_{e,e_i}X_s) \quad (47)$$

Donc (46) devient

$$P(H_{e,e_i}|E_1E_2X_s) = \frac{P(E_1|H_{e,e_i}X_s)P(E_2|H_{e,e_i}X_s)}{\sum_{j=1}^{cW} P(E_1|H_{e,e_j}X_s)P(E_2|H_{e,e_j}X_s)} \quad (48)$$

En reportant la décomposition suivante :

$$P(E_1|H_{e,e_i}X_s) = \frac{P(H_{e,e_i}|E_1X_s)P(E_1|X_s)}{P(H_{e,e_i}|X_s)} \quad (49)$$

$$\stackrel{(35)}{=} \frac{P(H_{e,e_i}|E_1X_s)P(E_1|X_s)}{1/cW} \quad (50)$$

dans (48) puis en simplifiant le numérateur et le dénominateur par :

$$\frac{P(E_1|X_s)P(E_2|X_s)}{(1/cW)^{cW}}$$

on obtient

$$P(H_{e,e_i}|E_1E_2X_s) = \frac{P(H_{e,e_i}|E_1X_s)P(H_{e,e_i}|E_2X_s)}{\sum_{j=1}^{cW} P(H_{e,e_j}|E_1X_s)P(H_{e,e_j}|E_2X_s)} \quad (51)$$

Enfin, en utilisant la relation (19) et en simplifiant les numérateurs et dénominateurs par $P(H_{e,W}|E_1)P(H_{e,W}|E_2)$ on a la relation (36) :

$$P(H_{e,e_i}|E_1E_2X_s) = \frac{P(H_{e,e_i}|E_1)P(H_{e,e_i}|E_2)}{\sum_{j=1}^{cW} P(H_{e,e_j}|E_1)P(H_{e,e_j}|E_2)}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [BK90] B. Barshan et R. Kuc. "Differentiating sonar reflections from corners and planes by employing an intelligent sensor". *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell.*, 12(6): 560-569, Juin 1990.
- [BK91a] B. Barshan et R. Kuc. "A bat-like sonar system for obstacle localization". *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell.*, 22(4): 636-646, Juil.-Août 1991.
- [BK91b] J. Borenstein et Y. Koren. "Histogrammic in-Motion Mapping for Mobile Robot Obstacle Avoidance". *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 7(4) :535-539, Août 1991.
- [BK91c] J. Borenstein et Y. Koren. "The Vector Field Histogram - Fast Obstacle Avoidance for Mobile Robots". *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 7(3): 278-288, Juin 1991.
- [BK91d] Ö. Bozma et R. Kuc. "Building a sonar map in a specular environment using a single mobile sensor". *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell.*, 13(12): 1260-1269, Déc. 1991.
- [BK91e] Ö. Bozma et R. Kuc. "Characterizing pulses reflected from rough surfaces using ultrasound". *J. Acoust. soc. Amer.*, 89(6): 2519-2531, Juil. 1991.

6. Cette hypothèse de base fait partie de l'ensemble des desiderata utilisé dans le théorème de Cox pour construire le système formel probabiliste.

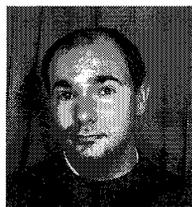
Proposition d'un cadre probabiliste de fusion de croyances

- [Cor82] Polaroid CORP., "Ultrasonic Range Finder", 1982.
- [Cox61] R. T. Cox. *The Algebra of Probable Inference*. The John Hopkins Press, Baltimore, 1961.
- [DP96] H. Durrant-Whyte, D. Pagac, E. M. Nebot. "An evidential approach to probabilistic map-building". Dans *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 745-750, Minneapolis, Minnesota, Avril 1996.
- [Elf86] A. Elfes. "Sonar-based mapping and navigation system". Dans *IEEE Journal on Robotics and Automation*, pages 1151-1156, Avril 1986.
- [Elf89a] A. Elfes. "Occupancy Grids : A Probabilistic Framework for Robot Perception and Navigation". PhD thesis, Carnegie-Mellon University, Electrical and Computer Engineering Department/Robotics Institute, Mai 1989.
- [Elf89b] A. Elfes. "Using occupancy grids for mobile robot perception and navigation". Dans *IEEE Computer Magazine, Special Issue on Autonomous Intelligent Machines*, pages 46-57, Juin 1989.
- [Elf92] A. Elfes. Multi-source Spatial Data Fusion Using Bayesian Reasoning. Dans *Data fusion in robotics and machine intelligence*, Chapitre 3, pages 137-163. Harcourt Brace Jovanovich Publishers, Academic Press, Inc., 1992.
- [GO94] M. Ventitelli, G. Oriolo, G. Ulivi. "Motion planning with uncertainty : Navigation on Fuzzy map". Dans *Proc. of the Fourth IFAC Symposium on Robot Control*, pages 71-78, Capri, Italie, Sept. 1994.
- [Jay] E. T. Jaynes. "Probability Theory : The Logic of Science". Disponible publiquement par FTP à bayes.wustl.edu. Ouvrage en préparation.
- [Jay68] E. T. Jaynes. "Prior Probabilities". Dans *IEEE Trans. SSC*, volume 4, page 227, 1968.
- [ME88] L. Matthies et A. Elfes. "Integration of sonar and stereo range data using a grid-based representation". Dans *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 727-733, 1988.
- [Mor88] H. P. Moravec. "Sensor fusion in certainty grids for mobile robots". *AI Magazine*, 9(2) :61-74, 1988.
- [Par94] Jeff Paris. *The Uncertain Reasoner's Companion*. Cambridge University Press, 1994.
- [Par94] O. Patrouix.. «Modélisation multi-niveau de données ultrasonores : Application à la robotique mobile». Thèse de Doctorat, Université Montpellier II Sciences et Techniques du Languedoc, Formation Doctorale Conception Assistée des Systèmes Informatiques, Automatiques et Microélectroniques, Déc. 1994.
- [Pia96] E. Piat. «Fusion de croyances dans le cadre combiné de la logique des propositions et de la théorie des probabilités : Application la reconstruction de scène en robotique mobile». Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, Formation Doctorale Contrôle des Système, Nov. 1996.
- [PM96] E. Piat et D. Meizel. "Degrees of confidence fusion in a probabilistic context. Application to range data fusion". Dans *proc. of the IROS 96 International Conference on Intelligent Robotics and Systems*, pages 268-275, Japan, Nov. 1996.
- [RB90] U. Raschke et J. Borenstein. "A comparison of grid-type Map-building techniques by index of performance". *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3 :1828-1832, Mai 1990.
- [SK87] M. W. Siegel et R. Kuc. "Physically-based simulation model for acoustic sensor robot navigation". *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell.*, 9(6) :766-778, Nov. 1987.
- [Tri72] M. Tribus. *Décisions rationnelles dans l'incertain*. Masson, Paris, 1972.
- [Wel77] P. N. T. Wells. "Biomedical Ultrasonics", Chapitre 2, pages 26-31. New-York Academic, 1977.

Manuscrit reçu le 13 février 1996.

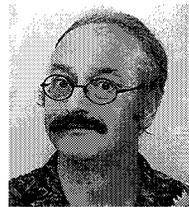
LES AUTEURS

Emmanuel PIAT



Emmanuel Piat est ingénieur (1992) et titulaire du titre de Docteur (1996) de l'Université de Technologie de Compiègne. Il mène ses recherches au sein du thème « Système de Perception et de Commande » du laboratoire Heudiasyc. Dans ce cadre, il travaille sur la synthèse automatique de systèmes mobiles par auto-structuration de leur espace sensori-moteur et s'intéresse à la fusion de données multi-sensorielles comme un outils permettant de structurer l'espace sensoriel des robots.

Dominique MEIZEL



Dominique Meizel est ingénieur I.D.N. (1976), Docteur Ingénieur (1979) et Docteur d'Etat (1984). Après avoir consacré ses efforts à des problèmes de contrôle et en particulier de stabilité, il s'intéresse depuis son transfert au laboratoire Heudiasyc en 1988 à des problématiques liées aux robots mobiles et plus généralement aux «Machines Intelligentes». Ses préoccupations actuelles concernent la planification d'actions en boucle fermée et l'utilisation de techniques ensemblistes d'estimation paramétrique pour la localisation.