

Détermination des coefficients optimaux de rétropropagation des erreurs à partir d'un critère de Chebyshev

La rétropropagation des erreurs est une méthode générale qui permet de réduire les effets dus à la longueur finie des mots dans les calculs numériques. Cette technique a été appliquée avec succès aux filtres numériques récurrents (IIR) utilisant une arithmétique en point fixe, et ceci particulièrement pour l'implémentation de filtres passe-bas possédant des pôles proches du cercle unité [1]. La rétropropagation des erreurs est réalisée en extrayant l'erreur directement après quantification de chaque terme produit et en la réinjectant à travers un filtre simple de type FIR [2]. Ce processus, qui n'agit que sur la composante de bruit du signal de sortie, n'affecte pas les spécifications du filtre récurrent, dont la fonction de transfert demeure inchangée. Beaucoup d'auteurs [3-6] ont étudié le bruit de quantification dans les filtres numériques de structure directe (sans décomposition de type cascade ou parallèle). Ils se sont pour la plupart limités à réduire ce bruit à l'aide de filtres de rétropropagation d'erreurs du premier et du second ordres.

Récemment, Laakso a proposé l'utilisation de filtres de rétropropagation optimaux d'ordre élevé (conçus en minimisant l'erreur quadratique moyenne par des algorithmes de type LMS) pour réduire le bruit de quantification dans des filtres d'ordre élevé de structure directe [2].

Dans cet article, une méthode sous-optimale est proposée en vue de réduire la complexité du filtre correcteur, puis une nouvelle méthode de réduction de bruit basée sur l'approximation de Chebyshev est présentée. La méthode de détermination des coefficients optimaux du filtre de rétropropagation des erreurs à partir d'un critère de Chebyshev est

décrite. Les principaux résultats obtenus sur des exemples particuliers, notamment la réduction de la puissance de bruit, en utilisant les diverses méthodes précédentes sont également donnés.

Rétropropagation optimale des erreurs

Considérons un filtre récurrent d'ordre N affecté d'un certain type de non-linéarité (par exemple arrondi, troncature du module, troncature en complément à 2) après chaque addition, et dont la fonction de transfert $G(z)$ est stable.

Formulation du problème

La rétropropagation d'erreur d'ordre K est appliquée comme indiqué à la figure 1. Dans cette figure, le symbole Q représente l'opération de quantification et le cadre en pointillés entoure la partie ajoutée pour effectuer la rétropropagation de l'erreur.

A la figure 1, nous introduisons la quantification après le premier additionneur (après sommation des produits), ce qui nécessite des circuits multiplicateurs sans troncature et des additionneurs de capacité suffisante. La transformée en z , $Y(z)$, du signal de sortie $y(n)$ est donnée par :

$$Y(z) = G(z)X(z) + B(z)G(z)E(z) \quad (1)$$

où

$$B(z) = 1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_K z^{-K} \quad (2)$$

représente la fonction de transfert du filtre de rétropropagation d'erreur et $E(z)$ est la transformée en z de l'erreur de quantification $e[n]$.

Si la variance du bruit de quantification (à la sortie du quantificateur) est notée

σ_0^2 , celle observée à la sortie du filtre est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \frac{\sigma_0^2}{\pi} \int_0^\pi |B(e^{j\omega})|^2 |G(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \mu \sigma_0^2 \end{aligned} \quad (3)$$

où μ est le gain en moyenne quadratique du bruit de quantification entre le quantificateur et la sortie du filtre, que nous désignerons plus simplement comme la puissance (ou figure) de bruit du filtre IIR corrigé.

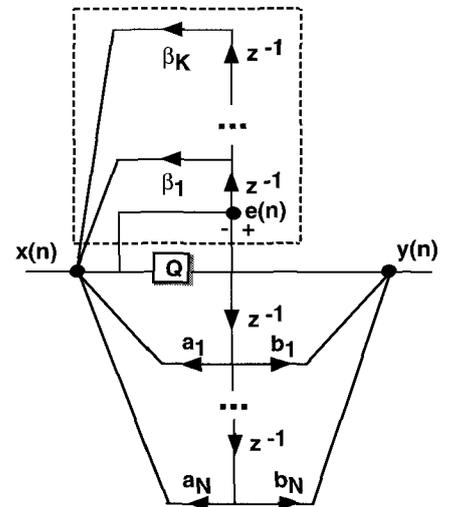


Figure 1. - Structure de rétropropagation d'erreur.

Le problème d'optimisation consiste à trouver des coefficients β_i qui rendent minimale la figure de bruit μ précédente.

Solution optimale

En développant l'équation (3), on obtient [2] :

$$\mu = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \beta_k \beta_l q_{|k-l|} + 2 \sum_{k=1}^K \beta_k q_k + q_0 \quad (4)$$

avec

$$q_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |G(e^{j\omega})|^2 \cos(k\omega) d\omega$$

En introduisant le vecteur colonne $W = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_K)^T$ (l'indice supérieur T représentant la transposition matricielle) des coefficients du filtre correcteur et celui P des coefficients q_i , l'équation (4) peut être mise sous forme matricielle :

$$\mu = W^T R W + 2P^T W + q_0 \quad (5)$$

où R est la matrice de type Toeplitz :

$$R = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \dots & q_{K-1} \\ q_1 & q_2 & \dots & q_{K-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{K-1} & q_{K-2} & \dots & q_0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur optimal W_{opt} est obtenu, en annulant la dérivée $\partial\mu/\partial W$, comme :

$$W_{opt} = -R^{-1}P \quad (6)$$

L'équation ci-dessus peut se résoudre en utilisant l'algorithme rapide de Levinson-Durbin [7], bien adapté aux matrices de structure bande. Cette solution, présentée par Laakso [2] fournit des coefficients optimaux pour le filtre correcteur, qui ne possèdent à priori aucune symétrie particulière.

Solution sub-optimale

Afin de réduire la complexité du filtre correcteur itératif FIR (en divisant approximativement le nombre de multiplications nécessaires par 2), nous pouvons imposer que ce dernier possède une réponse impulsionnelle symétrique ou antisymétrique. Le filtre FIR possède alors une réponse $B(\omega)$ linéaire en fréquence. Le prix à payer consistera évidemment en une diminution des performances du filtre correcteur, que nous essaierons de chiffrer sur des exemples. La longueur $K + 1$ du filtre FIR peut être paire ou impaire.

Filtre FIR d'ordre impair

Considérons d'abord le cas d'un filtre correcteur FIR d'ordre impair : $K = 2M + 1$. Les solutions avec

réponse impulsionnelle symétrique (indice supérieur +) et antisymétrique (indice supérieur -) s'obtiennent en prenant la symétrie des coefficients β_i en compte dans l'équation (4). Il vient ainsi :

$$W_{opt}^\pm = - [R_0 \pm \tilde{R}_0]^{-1} [P_0 \pm \tilde{P}_0] \quad (7)$$

où R_0 est une sous-matrice obtenue en retenant uniquement les M premières lignes et les M premières colonnes de la matrice R ,

$$P_0 = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_M)^T$$

$$\tilde{P}_0 = (q_{2M} \ q_{2M-1} \ \dots \ q_{M+1})^T$$

$$\tilde{R}_0 = \begin{bmatrix} q_{2M-1} & q_{2M-2} & \dots & q_M \\ q_{2M-2} & q_{2M-3} & \dots & q_{M-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_M & q_{M-1} & \dots & q_1 \end{bmatrix}$$

Ces équations sont valables dans le cas où $M > 1$. Pour $M = 1$, les matrices se réduisent à des scalaires et il vient :

$$\beta_{1,opt} = -(q_1 \pm q_2)/(q_0 \pm q_1) \quad (8)$$

Enfin, dans le cas où $K = 1$ ($M = 0$), aucune optimisation n'est possible et $\beta_1 = \pm 1$.

Filtre FIR d'ordre pair

En suivant la même démarche dans le cas d'un filtre correcteur FIR d'ordre pair ($K = 2M$), les résultats deviennent :

$$W_{opt}^\pm = - [R^\pm]^{-1} P^\pm \quad (9)$$

avec

$$R^\pm = \begin{bmatrix} 2(R_e \pm \tilde{R}_e) & r \pm r \\ (r \pm r)^T & q_0 \end{bmatrix}$$

$$P^\pm = \begin{bmatrix} 2(P_e \pm \tilde{P}_e) \\ q_M \pm q_M \end{bmatrix}$$

R_e désignant la sous-matrice obtenue en ne retenant que les $M - 1$ premières lignes et les $M - 1$ premières colonnes de la matrice R et

$$\tilde{R}_e = \begin{bmatrix} q_{2M-2} & q_{2M-3} & \dots & q_M \\ q_{2M-3} & q_{2M-4} & \dots & q_{M-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_M & q_{M-1} & \dots & q_2 \end{bmatrix}$$

$$P_e = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{M-1})^T$$

$$\tilde{P}_e = (q_{2M-1} \ q_{2M-2} \ \dots \ q_{M+1})^T$$

$$r = (q_{M-1} \ q_{M-2} \ \dots \ q_1)^T$$

Ces équations sont valables pour $M > 1$. Pour $M = 1$ et une réponse impulsionnelle symétrique, les matrices se réduisent à des scalaires et il vient :

$$\beta_{1,opt} = -q_1/q_0 \quad (10)$$

Par contre, pour $M = 1$ et une réponse impulsionnelle antisymétrique, aucune optimisation n'est possible et $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -1$.

Exemples

Deux filtres passe-bas sont considérés ici à titre d'exemples. Le premier est un filtre IIR elliptique à bande très étroite de fonction de transfert $H_1(z) = N_1(z)/D_1(z)$, de fréquence de coupure normalisée $f_c = 0,1$, avec :

$$N_1(z) = 1,0000 - 2,0006z^{-1} + \dots$$

$$2,6793z^{-2} - 2,0006z^{-3} + \dots$$

$$1,0000z^{-4}$$

$$D_1(z) = 1,0000 - 3,6065z^{-1} + \dots$$

$$4,9795z^{-2} - 3,1134z^{-3} + \dots$$

$$0,7431z^{-4} \quad (11)$$

La figure de bruit (μ) pour ce filtre, en l'absence de tout filtre correcteur est de 3,94 dB.

Le second exemple est également un filtre passe-bas à bande étroite, possédant une figure de bruit de 43,06 dB et de fréquence de coupure normalisée $f_c = 0,2$, de fonction de transfert $H_2(z) = N_2(z)/D_2(z)$, avec :

$$N_2(z) = 1,0000 + 0,7409z^{-1} + \dots$$

$$2,1045z^{-2} + 1,5635z^{-3} + \dots$$

$$2,1045z^{-4} + 0,7409z^{-5} + \dots$$

$$1,0000z^{-6}$$

$$D_2(z) = 1,0000 - 4,1139z^{-1} + \dots$$

$$8,1026z^{-2} - 9,4512z^{-3} + \dots$$

$$6,8370z^{-4} - 2,9064z^{-5} + \dots$$

$$0,5739z^{-6} \quad (12)$$

Les performances des filtres correcteurs obtenus par la méthode suboptimale ont d'abord été testées en les comparant à celles des filtres optimaux obtenus par la méthode LMS [2]. Le tableau 1 liste les valeurs de la figure de bruit obtenues avec des filtres correcteurs optimaux, symétriques et antisymétriques d'ordres variant entre 2 et 6 (dont les coefficients sont également donnés) pour le filtre IIR H_1 .

Tableau 1. - Figure de bruit et coefficients pour le filtre H_1 . Filtre correcteur FIR optimal, symétrique et antisymétrique de longueur variant de 2 à 6.

Ordre		Optimal	Sym.	Antisym.
2	Bruit (dB)	10.57	10.62	30.73
	β_1	-1.9426	-1.9615	0
	β_2	0.9807	1	-1
3	Bruit (dB)	7.58	15.91	8.27
	β_1	-2.6349	-0.9619	-2.9233
	β_2	2.3521	-0.9619	2.9233
4	Bruit (dB)	4.65	12.90	5.35
	β_1	-2.1404	-3.3409	-1.9289
	β_2	0.7044	4.7042	0
5	Bruit (dB)	4.62	7.99	7.30
	β_1	-2.0838	-2.8413	-1.4389
	β_2	0.6116	1.8446	-0.4382
6	Bruit (dB)	3.36	4.60	9.40
	β_1	-2.1242	-2.1641	-2.0036
	β_2	0.3454	0.0821	1.1411
	β_3	1.6306	2.1700	0
	β_4	-0.2219	0.0821	-1.1411
	β_5	-1.1282	-2.1641	2.0036
	β_6	0.5028	1	-1

Les figures 2 et 3 présentent l'évolution de la figure de bruit avec l'ordre K du filtre correcteur, pour les filtres IIR H_1 et H_2 . Si les variations de la figure de bruit du filtre optimal sont pratiquement monotones avec l'ordre K , un comportement oscillatoire est observé pour les filtres correcteurs à phase linéaire dont les figures de bruit se rapprochent et s'éloignent quasi-périodiquement de celle du filtre optimal. Notons que pour ce dernier filtre, nous avons poussé les calculs plus loin que Laakso [2], qui s'est arrêté à une valeur de l'ordre K du fil-

tre correcteur égale à l'ordre du filtre IIR corrigé.

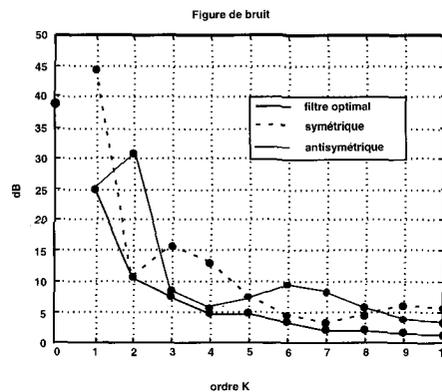


Figure 2. - Spectre de puissance des filtres correcteurs optimaux.

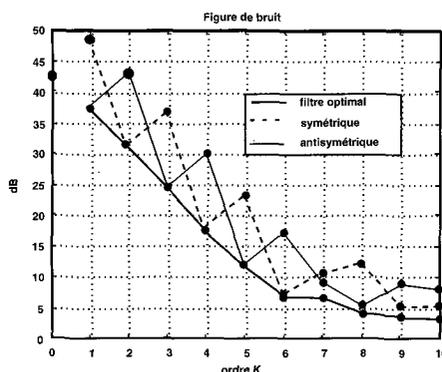


Figure 3. - Spectre de puissance des filtres correcteurs optimaux.

En excluant les cas où aucune optimisation ne peut être effectuée (coefficients fixés par les hypothèses de départ sur la symétrie de la réponse impulsionnelle), nous constatons que les performances des filtres correcteurs à réponse impulsionnelle symétrique ou antisymétrique, bien qu'évidemment inférieures en terme de diminution de figure de bruit à celles des filtres optimaux, n'en sont que très peu éloignées (la différence n'étant égale qu'à une fraction de dB pour certaines valeurs de l'ordre K du filtre correcteur à réponse impulsionnelle symétrique ou antisymétrique). Leur utilisation, qui conduit à une division par deux du nombre de multiplicateurs utilisés pour le correcteur, est donc parfaitement envisage-

able en remplacement des correcteurs optimaux.

Des résultats analogues ont été systématiquement obtenus sur un grand nombre d'exemples de filtre IIR passe-bas, passe-haut et passe-bande, d'ordres allant jusqu'à 10, que nous avons traités : il est toujours possible de trouver des solutions suboptimales n'introduisant qu'une faible augmentation de la figure de bruit, inférieure au dB, par rapport à la solution optimale.

La figure 4 présente les spectres de puissance des filtres correcteurs optimaux pour le filtre H_1 , dont on voit qu'ils correspondent pratiquement à des filtres passe haut dont les bandes d'arrêt sont identiques à la bande passante du filtre elliptique IIR à corriger. On peut donc considérer le problème de conception d'un filtre correcteur comme globalement équivalent à celle d'un filtre FIR passe-haut de gain inverse de celui du filtre IIR à corriger, démarche qui sera explorée dans ce qui suit.

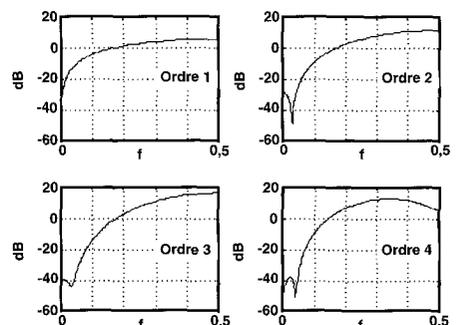


Figure 4. - Spectre de puissance des filtres correcteurs optimaux.

Optimisation au sens de Chebyshev

Formulation du problème

Considérons de nouveau le cas d'un filtre correcteur FIR à réponse impulsionnelle symétrique ou antisymétrique. Le module de la fonction de transfert d'un tel filtre, selon la parité de son ordre, est alors du type [8] :

$$|B(e^{j\omega})| = Q(\omega) P_0(\omega) \quad (13)$$

Informations

avec :

$$\begin{aligned} P_0(\omega) &= \sum_{n=0}^J \alpha_n \cos n\omega \\ &= \alpha_J \cos J\omega + P(\omega) \end{aligned} \quad (14)$$

les coefficients β de l'équation (2) étant liés à ceux α de l'équation (14) :

— filtre symétrique et $K = 2M$ pair (cas 1)

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= 1 \\ J &= M \\ \beta_M &= \alpha_0 \\ 2\beta_{M-k} &= \alpha_k \\ \text{pour } k &= 1, \dots, M \end{aligned} \quad (15)$$

— filtre symétrique et $K = 2M + 1$ impair (cas 2)

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= \cos \frac{\omega}{2} \\ J &= M \\ 2\beta_M &= \alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_1 \\ 2\beta_{M-k} &= \frac{1}{2}(\alpha_{k+1} + \alpha_k) \\ \text{pour } k &= 1, \dots, M-1 \\ 2\beta_0 &= \frac{1}{2}\alpha_M \end{aligned} \quad (16)$$

— filtre antisymétrique et K pair (cas 3)

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= \sin \omega \\ J &= M-1 \\ 2\beta_{M-1} &= \alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_2 \\ 2\beta_{M-k} &= \frac{1}{2}(\alpha_{k-1} - \alpha_{k+1}) \\ \text{pour } k &= 2, \dots, M-2 \\ 2\beta_1 &= \frac{1}{2}\alpha_{M-2} \\ 2\beta_0 &= \frac{1}{2}\alpha_{M-1} \end{aligned} \quad (17)$$

— filtre antisymétrique et K impair (cas 4)

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= \sin \frac{\omega}{2} \\ J &= M \\ 2\beta_M &= \alpha_0 - \frac{1}{2}\alpha_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\beta_{M-k} &= \frac{1}{2}(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \\ \text{pour } k &= 1, \dots, M-1 \\ 2\beta_0 &= \frac{1}{2}\alpha_M \end{aligned} \quad (18)$$

L'équation (2) fournit en outre la condition supplémentaire $\beta_0 = 1$.

Le processus de compensation des erreurs de quantification $e[n]$ peut être considéré comme une réduction du module de la fonction de transfert de l'erreur $B(z)G(z)$ de l'équation (1) à l'unité, l'erreur résiduelle correspondante pouvant être écrite $E(\omega) = 1 - |G(e^{j\omega})| |B(e^{j\omega})|$. Ceci revient alors à la conception d'un filtre FIR à réponse impulsionnelle symétrique ou antisymétrique possédant une réponse spécifiée. Un tel problème peut être résolu en modifiant de façon simple le programme de Parks - Mc Clellan (basé sur le théorème des différences alternées et l'algorithme de Remez) classiquement utilisé pour la synthèse des filtres numériques itératifs [8]. Il suffit d'utiliser pour cela une erreur pondérée de Chebyshev égale à :

$$E(\omega) = W(\omega) \cdot [D(\omega) - P(\omega)] \quad (19)$$

avec $D(\omega)$ réponse désirée et $W(\omega)$ fonction de pondération, dont il est simple de montrer qu'elles s'écrivent :

$$W(\omega) = |G(e^{j\omega})| Q(\omega)$$

$$D(\omega) = \frac{1}{|G(e^{j\omega})| Q(\omega)} - f(\omega)$$

avec :

$$f(\omega) = \begin{cases} 2 \cos(M\omega) & \text{dans le cas 1} \\ 4 \cos((M-1)\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Description de l'algorithme

Les coefficients optimaux de $B(z)$ sont obtenus à partir de l'algorithme de «type Remez» suivant :

1. Lecture des coefficients du filtre récursif, du type de filtre de rétropropagation d'erreur (réponse impulsionnelle symétrique ou antisymétrique, longueur paire ou impaire) et de son ordre.

2. Définition des fonctions désirée et de pondération.

3. Sélection des extrema initiaux sur l'intervalle $[0, \pi]$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{J+1}\}$$

4. Résolution du système d'équations :

$$E(\omega_j) = (-1)^j \delta$$

avec $\delta = \max_{\omega \in \Omega} |E(\omega_j)|$ et $j = 1, \dots, J+1$.

5. Recherche sur l'intervalle $[0, \pi]$ des $J+1$ extrema locaux de $E(\omega_j)$ de plus grandes valeurs absolues, avec comme condition que les minima et maxima soient alternés. Sauvegarde des abscisses des extrema dans

$$\Omega' = \{\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{J+1}\}$$

6. Si $|\omega_j - \omega'_j| \leq \epsilon \forall j = 1, 2, \dots, J+1$, poursuivre à l'étape suivante, sinon faire $\Omega = \Omega'$ et retourner à l'étape 4. 7. Calcul des coefficients β_j à partir des relations données aux équations (5) à (8).

Les étapes 3 à 6 constituent la boucle principale du programme classique de Parks-Mc Clellan [4], conservée ici pratiquement in extenso. La seule modification réelle concerne la diminution d'une unité de l'ordre du polynôme de l'équation (14) : la contrainte $\beta_0 = 1$ impose, conformément aux équations (15) à (18) la valeur du coefficient α_J du terme de plus haut degré du polynôme en cosinus P_0 de l'équation (14), ce qui modifie les définitions classiques des fonctions de pondération et désirée, comme indiqué à l'équation (19).

Résultats numériques

Si nous considérons les équations (15) à (18), nous ne devrions a priori retenir que les cas 1 (équation (15)) et 4 (équation (18)), qui correspondent à une fonction $Q(\omega)$ non identiquement nulle pour $\omega = \pi$ (rappelons que nous essayons en principe de concevoir un filtre passe-haut). Nous ne nous limiterons ici pas uniquement à ces deux cas, car rien ne permet de garantir qu'un filtre correcteur passe-bande ne puisse convenir

« en moyenne » vis-à-vis du critère de Chebyshev choisi.

Les coefficients des filtres optimaux de rétropropagation d'erreur d'ordre 2 à 10 ont été déterminés pour les 4 types de filtres à caractéristique de phase linéaire en utilisant l'algorithme présenté dans la section précédente. Nous avons également calculé la figure de bruit, définie par l'équation (3), pour les filtres correcteurs obtenus.

Les résultats montrent une réduction importante de la puissance de bruit. En particulier, pour le filtre H_2 , les puissances de bruit obtenues sont de 5.24 dB et 5.29 dB pour des filtres de rétropropagation, respectivement, symétrique et du 10ème ordre (voir tableau 3) et antisymétrique et du 8ème ordre (voir tableau 2). Les filtres obtenus par optimisation de Chebyshev sont assez voisins des filtres suboptimaux obtenus par la méthode LMS. Leur figure de bruit n'est que très marginalement supérieure (ce qui est normal car ils ne sont pas obtenus par minimisation de cette figure de bruit).

Tableau 2. - Figure de bruit et coefficients pour le filtre H_2 . Filtres correcteurs optimal, antisymétriques LMS et Chebyshev d'ordre 8.

	Optimal LMS	Antisym. LMS	Antisym. Cheby.
Bruit (dB)	4.43	5.25	5.29
β_1	-4.6547	-4.6099	-4.5881
β_2	9.4676	8.9798	8.9127
β_3	-9.9196	-8.0806	-8.078
β_4	3.7277	0	0
β_5	3.6464	8.0806	8.078
β_6	-5.4080	-8.9798	-8.91279
β_7	2.9819	4.6099	4.5881
β_8	-0.6566	-1	-1

Le spectre de puissance du signal d'erreur $|G(e^{j\omega}) \cdot B(e^{j\omega})|^2$ est représenté aux figures 5 et 6, où l'on distingue clairement la réduction du bruit dans la bande passante du filtre H_2 associée à l'augmentation de l'ordre du filtre correcteur. Le spectre de bruit a bien tendance à se centrer sur la ligne 0 dB (ce qui correspond bien à la condition $|G(e^{j\omega}) \cdot B(e^{j\omega})| = 1$). Sur ces figures, nous constatons également une

augmentation progressive du spectre de bruit dans la bande atténuée.

Tableau 3. - Figure de bruit et coefficients pour le filtre H_2 . Filtres correcteurs optimal, symétriques LMS et Chebyshev d'ordre 10.

	Optimal LMS	Antisym. LMS	Antisym. Cheby.
Bruit (dB)	4.43	5.25	5.29
β_1	-4.6547	-4.6099	-4.5881
β_2	9.4676	8.9798	8.9127
β_3	-9.9196	-8.0806	-8.078
β_4	3.7277	0	0
β_5	3.6464	8.0806	8.078
β_6	-5.4080	-8.9798	-8.91279
β_7	2.9819	4.6099	4.5881
β_8	-0.6566	-1	-1

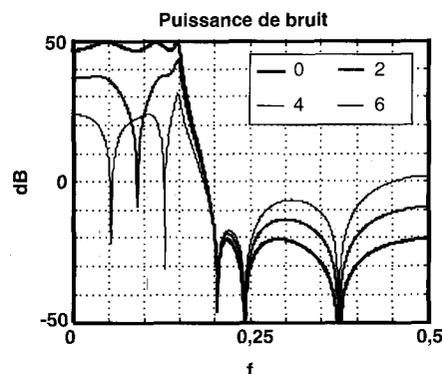


Figure 5. - Spectre de bruit du filtre H_2 pour des filtres correcteurs symétriques d'ordres 2,4,6. (f : fréquence numérique - 0 \rightarrow pas de filtre correcteur).

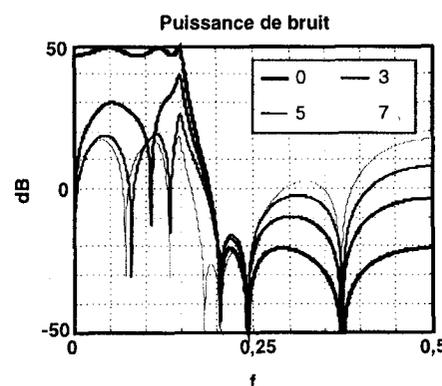


Figure 6. - Spectre de bruit du filtre H_2 pour des filtres correcteurs antisymétriques d'ordres 3,5,7. (f : fréquence numérique - 0 \rightarrow pas de filtre correcteur).

La figure 7 montre l'évolution de la figure de bruit globale avec l'ordre K du filtre correcteur. Les différences par rapport à la figure 3, qui correspond à l'optimisation de la figure de bruit, sont tout à fait minimes. En fait, les filtres à

caractéristique de phase linéaire conçus par les deux méthodes sont pratiquement équivalents, et ce d'autant plus que leur ordre K est élevé. Ceci est encore confirmé par les figures 8 et 9, qui présentent le spectre de puissance de bruit pour la réalisation du filtre correcteur d'ordre 10 illustré au tableau 3, comparé à ceux (optimal et suboptimal) obtenus par la méthode LMS.

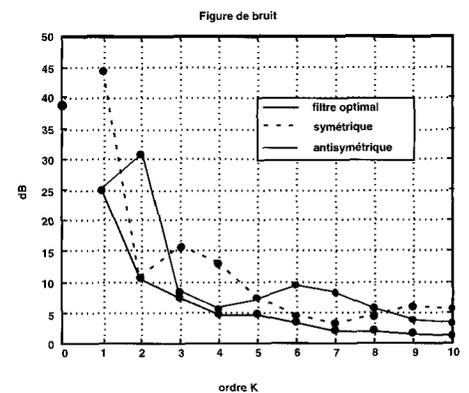


Figure 7. - Figures de bruit pour des filtres correcteurs symétriques et antisymétriques conçus par la méthode de Remez. cas du filtre H_2 . Le point $K = 0$ correspond au filtre IIR non corrigé.

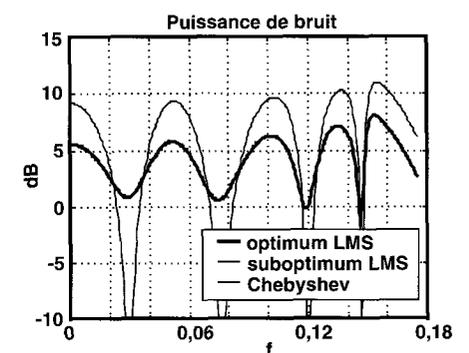


Figure 8. - Spectre de puissance du filtre H_2 pour des filtres correcteurs symétriques d'ordre 10. Basses fréquences.

La figure 8 présente la partie basse du spectre où les différences sont les plus marquées entre les correcteurs obtenus par nos deux méthodes, la figure 9 présentant la totalité du spectre. Les variations de la puissance de bruit ont pratiquement même valeur moyenne et même écart type pour les filtres correcteurs non optimaux.

Pour chacun des nombreux exemples que nous avons traités, nous avons pu concevoir des filtres permettant de réduire la puissance de bruit de façon très significative et toujours assez proches de leurs homologues obtenus par minimisation de la figure de bruit (algorithme LMS).

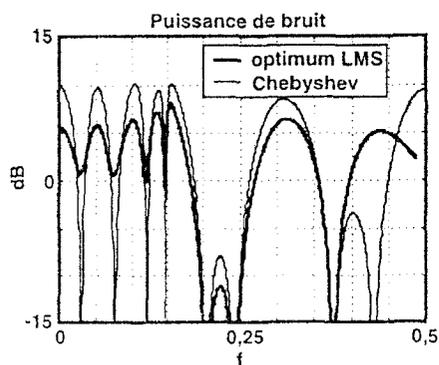


Figure 9. - Spectre de bruit du filtre H_2 pour des filtres correcteurs symétriques d'ordre 10. Spectre complet.

Conclusion

Deux méthodes de conception de filtres correcteurs à phase linéaire pour réduire le bruit de quantification des filtres récursifs d'ordre élevé ont été proposées. Ces méthodes sont basées sur la minimisation de la figure de bruit et sur la conception d'un filtre inverse avec un critère d'erreur de Chebyshev, la contrainte supplémentaire d'une réponse impulsionnelle symétrique ou antisymétrique pour les filtres correcteurs étant imposée. Parmi un grand nombre de cas étudiés, ceux de deux filtres IIR passe-bas à bande étroite ont été présentés à titre d'exemples. Les puissances de bruit obtenues après correction montrent l'efficacité des deux méthodes.

Les deux critères envisagés dans ce travail n'agissent en fait qu'en «moyenne». Une figure de bruit faible peut être obtenue aussi bien avec une puissance de bruit assez uniforme sur le spectre des fréquences numériques $[0, 0,5]$ qu'avec une puissance de bruit variant de façon beaucoup plus marquée avec des extréma nets (voire élevés) et des minima marqués à certaines fréquences. Tout comme l'algorithme LMS, la minimisation au sens de Chebyshev centre bien les variations de la puissance de bruit autour d'une valeur moyenne désirée, mais ces variations peuvent demeurer significatives (bien que l'on puisse affirmer qu'elles correspondent au minimum réalisable dans le cas de l'utilisation d'une erreur de Chebyshev). Du point de vue des applications pratiques, il serait peut-être plus intéressant de recourir à un critère assurant une puissance de bruit maximale garantie sur tout le spectre des fréquences numériques : cette puissance devrait être (à toute fréquence) inférieure à un certain seuil fixé a priori, seuil devant évidemment être supérieur à la figure de bruit du filtre correcteur optimal LMS de même ordre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L.B. Jackson, "Round-off analysis for fixed-point digital filters realised in cascade or parallel form", *I.E.E.E. Trans. Audio Electro-Acoust.*, Vol. AU-18, pp. 107-122, Juin 1970.
- [2] T. Laakso et I. Hartimo, "Noise reduction in recursive digital filters using high order error feedback", *I.E.E.E. Trans. Signal Proc.*, Vol. 40, pp. 1096-1107, Mai 1992.
- [3] T. Thong et B. Liu, "Error spectrum shaping in narrow-band recursive filters", *I.E.E.E. Trans. Acoust. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-25, pp. 200-203, Avril 1977.
- [4] T.L. Chang, "Correction to Comparison to round-off noise variances in several low round-

off noise digital filter structures", *Proc. I.E.E.E.*, Vol. 68, p. 1167, Septembre 1980.

- [5] D.C. Munson et B. Liu, "Narrowband recursive filters with error spectrum shaping", *I.E.E.E. Trans. Circuits Syst.*, Vol. CAS-28, pp. 160-163, Février 1981.
- [6] W.E. Higgins et D.C. Munson, "Noise reduction strategies for digital filters: Error spectrum versus the optimal linear state-space formulation", *I.E.E.E. Trans. Acoust. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-30, pp. 936-973, Décembre 1982.
- [7] S. Haykin, "Adaptive filter theory", Prentice Hall, New York, 1986.
- [8] L.R. Rabiner et B. Gold, "Theory and application of digital signal processing", Prentice Hall, New York, 1975.

LES AUTEURS

A. DJEBBARI, né en 1964, Ingénieur diplômé de l'Université des Sciences et Techniques d'Oran en 1988, a obtenu en 1991 le diplôme de Magister en Traitement du Signal à l'Université de Sidi Bel Abbes, où il prépare actuellement une Thèse de Doctorat en collaboration avec l'Université de Valenciennes. Ses centres d'intérêt sont le filtrage numérique, le traitement du signal multicanal et les télécommunications.

Al. DJEBBARI, né en 1969, est Ingénieur de l'Institut d'Electronique de Sidi Bel Abbes. Il a soutenu un Magister en Traitement du signal à l'Université des Sciences et de Technologie d'Oran en 1996. Il travaille actuellement sur la compression du son et des images.

J.M. ROUVAEN, né en 1947, est Docteur d'Etat en Electronique de l'Université de Paris VI en 1976. Il est actuellement Professeur d'Electronique à l'ENSI de Mécanique Energétique de Valenciennes. Ses centres d'intérêt concernent les applications du traitement du signal pour les ultrasons, le radar et les télécommunications.

F. HAINE, né en 1944, Docteur Ingénieur de l'Université de Valenciennes en 1980, est Ingénieur de Recherche dans le Département OAE de l'EMN (UMR 9929 CNRS), localisé à Valenciennes. Il fait partie de l'Equipe Télécommunications de ce Département.

Manuscrit reçu le 17 juin 1996.