

Caractérisation spatio-temporelle de la propagation acoustique sous-marine : reconstruction des vitesses de groupe et de phase

Spatio-Temporal Characterization of the Underwater Acoustic Propagation: Group and Phase Velocities Reconstruction

par Patrick PIGNOT

Centre d'Étude des PHénomènes Aléatoires et Géophysiques de Grenoble
Domaine Universitaire, BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères
e-mail : patrick.pignot@cephag.inpg.fr

résumé et mots clés

Cette étude traite du problème *inverse* en Tomographie Acoustique Océanique par la théorie des modes. Nous considérons des milieux de propagation invariants en distance. À partir des signaux reçus sur une antenne verticale, nous montrons d'abord dans le cas particulier du guide d'ondes homogène, puis dans le cas général, qu'un traitement classique par formation de voies permet de reconstituer le lien entre les vitesses de groupe horizontales et les vitesses de phase des ondes propagées dans le milieu. Nous terminons l'étude par deux applications : la reconstruction directe du profil de célérité sans information *a priori* et l'estimation de la profondeur relative des instruments.

Théorie des modes, temps de propagation, angles de propagation, vitesse de phase, vitesse de groupe, formation de voies.

abstract and key words

This study deals with the inverse problem in Ocean Acoustic Tomography by using the modal theory. We consider a range independent environment and a large vertical array receiver. We show in the case of the homogeneous medium first and in the general case then, that the beamforming patterns allow to reconstruct the link between the horizontal group velocities and the phase velocities of the propagated waves. Finally, we consider two applications : the direct sound speed reconstruction without *a priori* information and the depth estimation of transmitters or receivers.

Modal theory, propagation time, propagation angle, phase velocity, group velocity, beamforming.

1. introduction

La Tomographie Acoustique Océanique, introduite par W. Munk et C. Wunsch en 1979 [1], est une méthode d'investigation des propriétés physiques de l'océan. Cette méthode est basée sur la mesure précise de certains paramètres physiques de la

propagation afin de connaître l'état du milieu traversé par les ondes sonores. L'étude qui suit est axée sur la résolution du problème *inverse*, qui consiste à retrouver les propriétés physiques du milieu de propagation à partir de données reçues sur une antenne verticale. Les caractéristiques du signal émis sont connues, tout comme les positions des instruments. De façon générale, les méthodes de résolution du problème inverse sont basées sur

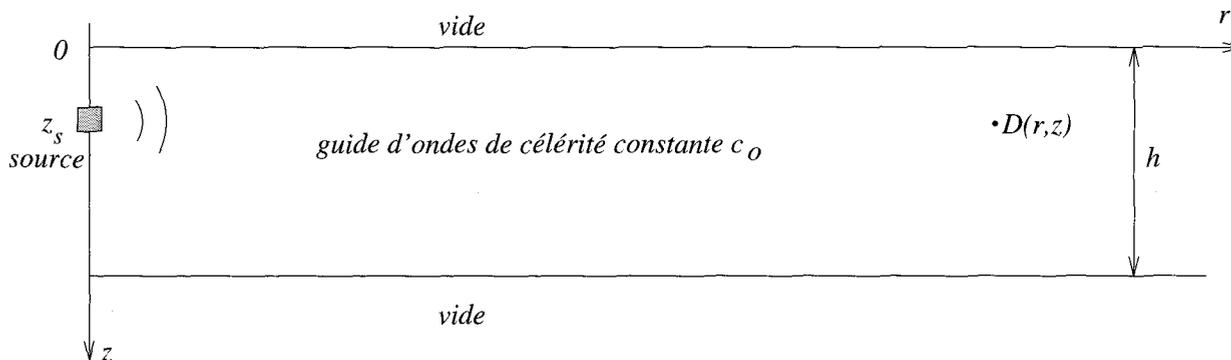


Figure 1. – guide d’ondes homogène de célérité du son c_0 .

les temps de propagation des rayons sonores reçus sur un ou plusieurs récepteurs [2]. La principale difficulté de cette méthode réside dans la détermination expérimentale des temps de trajets. Un filtrage modal appliqué aux signaux reçus sur une antenne verticale améliore l’estimation des temps de propagation. Un tel traitement nécessite néanmoins une bonne connaissance *a priori* du profil de célérité [3].

Nous proposons dans cette étude une reconstruction directe des propriétés physiques du milieu de propagation à partir d’une représentation spatio-temporelle des signaux reçus sur une antenne. L’étude se limite aux milieux de propagation invariants en distance. La propagation est envisagée ici par une approche modale. Nous traitons dans un premier temps le cas simple du guide d’ondes homogène, puis le cas général des guides hétérogènes suivant la profondeur. La dernière partie de l’étude concerne les diverses applications d’un tel traitement, avec notamment, la reconstruction sans aucune information *a priori* du profil de célérité du milieu.

2. étude d’un cas simple - le guide d’ondes homogène

Considérons le guide d’ondes homogène de la figure 1.

La quantité z_s représente la profondeur de la source. On s’intéresse à la pression acoustique $P(r, z, t)$ reçue au point $D(r, z)$. On suppose que la distance r de propagation est très grande devant la hauteur h . L’épaisseur suivant la troisième direction du guide d’ondes n’intervient pas dans cette étude; nous nous intéressons uniquement à la propagation des ondes dans le plan décrit par la figure 1.

2.1. équation de propagation - Résolution par la théorie des modes

Pour une onde monochromatique, la pression acoustique $p(r, z)$ telle que $P(r, z, t) = p(r, z)e^{-i\omega t}$, satisfait en tout point du plan de propagation l’équation générale de propagation d’Helmholtz (donnée ici en coordonnées cylindriques) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} p = - \frac{\delta(r)\delta(z - z_s)}{2\pi r} \tag{1}$$

où $\rho(z)$ représente la masse volumique, $c(z)$ la célérité du son et ω la pulsation. La pression $p = p(r, z)$ doit satisfaire les conditions aux limites : $p(r, 0) = 0$ et $p(r, h) = 0$. Dans le cas du guide d’ondes homogène, la masse volumique et la célérité sont constantes. Il vient : $\rho(z) = \rho$ et $c(z) = c_0$. Dans la théorie des modes, les solutions recherchées sont de la forme : $p(r, z) = R(r)\Psi(z)$, où les fonctions R et Ψ dépendent respectivement de r et z . En remplaçant cette expression dans l’équation (1) et en supposant le second membre nul, il vient après avoir divisé par $R\Psi$:

$$\frac{1}{R(r)} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) \right] + \frac{1}{\Psi(z)} \left[\frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \Psi(z) \right] = 0. \tag{2}$$

Le premier terme de cette équation ne dépend que de r et le second que de z , ce qui implique que chaque terme est constant (méthode de séparation des variables). Nous noterons $k_{r,m}^2$ cette constante (m entier naturel), $R_m(r)$ et $\Psi_m(z)$ les solutions associées à cette constante. L’équation en z s’écrit alors :

$$\frac{d^2\Psi_m(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_{r,m}^2 \right) \Psi_m(z) = 0. \tag{3}$$

Par ailleurs, dans les problèmes de Sturm-Liouville les modes sont *orthonormés*, i.e. :

$$\int_0^h \frac{\Psi_m(z)\Psi_n(z)}{\rho} dz = \delta_{mn}, \tag{4}$$

où δ_{mn} est le symbole de Kröneckner ($\delta_{mn} = 1$ pour $m = n$ et $\delta_{mn} = 0$ pour $m \neq n$). La pression acoustique totale au point $D(r, z)$ s'exprime par :

$$p(r, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m(r) \Psi_m(z). \quad (5)$$

En substituant cette expression dans l'équation de propagation d'Helmholtz (1), il vient :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_m(r)}{dr} \right) \Psi_m(z) + R_m(r) \left[\frac{d^2 \Psi_m(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_o^2} \Psi_m(z) \right] \right\} = - \frac{\delta(r) \delta(z - z_s)}{2\pi r}. \quad (6)$$

Le terme entre crochet peut se simplifier en utilisant l'équation (3), soit :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_m(r)}{dr} \right) \Psi_m(z) + k_{r,m}^2 R_m(r) \Psi_m(z) \right\} = - \frac{\delta(r) \delta(z - z_s)}{2\pi r}. \quad (7)$$

Enfin, en appliquant l'opérateur $\int_0^h (\cdot) \frac{\Psi_n(z)}{\rho} dz$ à cette équation, on obtient l'équation différentielle en r :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n(r)}{dr} \right) + k_{r,n}^2 R_n(r) = - \frac{\delta(r) \Psi_n(z_s)}{2\pi r \rho}, \quad (8)$$

dont la solution générale s'exprime par la fonction de Hankel H_o^1 (seule solution physiquement possible) :

$$R_n(r) = \frac{i}{4\rho} \Psi_n(z_s) H_o^1(k_{r,n} r). \quad (9)$$

À une distance r grande de la source, la fonction de Hankel peut s'exprimer par le développement asymptotique :

$$H_o^1(k_{r,n} r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_{r,n} r}} e^{i(k_{r,n} r - \frac{\pi}{4})} \text{ pour } r \rightarrow \infty. \quad (10)$$

L'équation en z (3) est une équation différentielle du second degré à coefficients constants dont la solution générale est donnée par :

$$\Psi_m(z) = A \sin(k_{z,m} z) + B \cos(k_{z,m} z), \quad (11)$$

où $k_{z,m}$ est le nombre d'onde vertical défini par

$$k_{z,m} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_o}\right)^2 - k_{r,m}^2}.$$

Les grandeurs A et B sont des constantes à déterminer en fonction des conditions aux limites. Les conditions de pression nulle sur les bords du guide d'ondes imposent :

$$\begin{cases} p(r, z = 0) = 0 \\ p(r, z = h) = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} B = 0 \\ A \sin(k_{z,m} h) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

La solution $A = 0$ est à rejeter (la pression ne peut pas être nulle en tout point du plan de propagation). Le terme $k_{z,m} h$ doit alors être un multiple de π . Il vient :

$$k_{z,m} h = \pi m, \quad (13)$$

qui est la condition de résonance du milieu (m entier naturel). La pression modale $p_m(r, z) = R_m(r) \Psi_m(z)$ s'exprime à l'aide des équations (9) et (11) par :

$$p_m(r, z) = \frac{iA^2}{4\rho} \sin(k_{z,m} z) \sin(k_{z,m} z_s) H_o^1(k_{r,m} r). \quad (14)$$

En remplaçant dans cette expression les fonctions sinus par des fonctions exponentielles et la fonction d'Hankel par son développement asymptotique (10), la pression modale $P_m(r, z, t)$ pour une onde monochromatique s'exprime comme une somme de quatre ondes planes :

$$\begin{aligned} P_m(r, z, t) &= p_m(r, z) e^{-i\omega t} \\ &\simeq \frac{A^2 e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{8\rho} \sqrt{\frac{1}{2\pi k_{r,m} r}} e^{-i(\omega t - k_{r,m} r)} \\ &\quad [e^{ik_{z,m}(z+z_s)} + e^{-ik_{z,m}(z+z_s)} - e^{-ik_{z,m}(z-z_s)} - e^{ik_{z,m}(z-z_s)}]. \end{aligned} \quad (15)$$

Il apparaît quatre termes de phase selon la profondeur z exprimés par $\pm k_{z,m} z \pm k_{z,m} z_s$ que nous noterons $\varepsilon_1 k_{z,m} z + \varepsilon_2 k_{z,m} z_s$ avec $\varepsilon_1 = \pm 1$ et $\varepsilon_2 = \pm 1$ ($\varepsilon_1 = 1$ correspond à la propagation vers les z croissants et $\varepsilon_1 = -1$ à la propagation vers les z décroissants).

Par ailleurs, chaque mode est caractérisé par un angle de propagation θ_m tel que (Cf. [7] p. 33) :

$$\begin{cases} k_{r,m} = k_o \cos \theta_m \\ k_{z,m} = k_o \sin \theta_m \end{cases} \text{ avec } k_o = \frac{\omega}{c_o}. \quad (16)$$

En remplaçant l'expression du nombre d'onde vertical $k_{z,m}$ dans la condition de résonance donnée par l'équation (13), on obtient le lien direct entre l'angle de propagation modal et le mode m . Il vient :

$$\sin \theta_m = \frac{m\pi}{k_o h} \text{ avec } m \text{ entier naturel} \quad (17)$$

Pour $m > \frac{k_o h}{\pi}$, le nombre d'onde horizontal $k_{r,m}$ est imaginaire pur et les modes sont évanescents.

2.2. vitesse de phase et vitesse de groupe

La vitesse de phase est la célérité d'un front d'onde à phase constante [4]. Dans un guide d'ondes, cette célérité est calculée suivant la direction de propagation horizontale r et donnée par la relation :

$$v_{\phi,m} = \frac{\omega}{k_{r,m}}. \quad (18)$$

Dans la direction de propagation horizontale, la vitesse de groupe a pour expression :

$$v_{gr,m} = \frac{\partial \omega}{\partial k_{r,m}}. \quad (19)$$

Appliquées au guide d'ondes homogène, ces deux expressions donnent respectivement la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction du mode m (avec $m \leq \frac{k_o h}{\pi}$) :

$$v_{\phi,m} = \frac{c_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\pi}{k_o h}\right)^2}} \text{ et } v_{gr,m} = c_o \sqrt{1 - \left(\frac{m\pi}{k_o h}\right)^2}. \quad (20)$$

On peut alors mettre en avant une relation très intéressante entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Le produit des deux donne :

$$v_{\phi,m} v_{gr,m} = c_o^2, \quad (21)$$

qui est un résultat totalement indépendant de la pulsation ω .

2.3. temps et angles de propagation

Le temps de propagation modal est obtenu à partir de la vitesse de groupe. Au point $D(r, z)$, il s'exprime par :

$$t_m = \frac{r}{v_{gr,m}}. \quad (22)$$

Par ailleurs, les relations (16) et (18) donnent l'angle de propagation en fonction de la vitesse de phase :

$$\cos \theta_m = \frac{c_o}{v_{\phi,m}}. \quad (23)$$

À partir des équations (21), (22) et (23), nous pouvons écrire que l'ensemble des couples (t_m, θ_m) appartient à la courbe d'équation :

$$\cos \theta = \frac{r}{c_o t} \quad \text{avec } t \geq \frac{r}{c_o}. \quad (24)$$

Notons que cette courbe est parfaitement symétrique par rapport à l'axe θ et qu'elle ne dépend ni de la position de l'émetteur, ni de celle du récepteur. Pour les petits angles, l'équation (24)

tend asymptotiquement (en effectuant un développement limité à l'ordre 2) vers l'équation de la parabole :

$$t = \frac{r}{c_o} \left(1 + \frac{\theta^2}{2} \right) \quad (25)$$

où θ s'exprime en radians et t en secondes.

Les équations (22) et (23) mettent en avant le lien direct entre les angles et temps de propagation, et les vitesses de phase et vitesses de groupe. La représentation spatio-temporelle des signaux reçus en un point quelconque $D(r, z)$ du plan de propagation sera ainsi directement liée à la relation entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe, c'est-à-dire à une relation qui ne dépend que du milieu de propagation et qui est indépendante du signal émis (d'après la relation (21)).

2.4. maximums d'énergie

D'un point de vue énergétique, tous les modes ne sont pas significatifs dans la représentation (t, θ) puisqu'en un point donné de la courbe décrite par l'équation (24) vont se superposer plusieurs modes de façon incohérente dans le cas général et cohérente en certains points particuliers correspondant à des maximums d'énergie. Tindle et Guthrie [10] ont montré que ces maximums apparaissent pour des interférences constructives d'un nombre restreint de modes voisins. En notant ϕ la phase du mode m , cette condition est satisfaite lorsque la variation de phase $\Delta\phi$ sur une variation Δm du nombre de modes est un multiple de 2π , soit (Cf. [10] p. 292) :

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta m} = 2p\pi \quad (26)$$

où p est un entier. Appliquée aux quatre termes de phase de l'expression (15), cette équation donne :

$$\frac{\Delta k_{r,m}}{\Delta m} r + \varepsilon_1 \frac{\Delta k_{z,m}}{\Delta m} z + \varepsilon_2 \frac{\Delta k_{z_s,m}}{\Delta m} z_s = 2p\pi. \quad (27)$$

À chaque valeur de p correspond quatre groupes de modes possibles puisque $\varepsilon_1 = \pm 1$ et $\varepsilon_2 = \pm 1$. Nous noterons $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ le mode central pour chacun de ces groupes. Les interférences constructives apparaissent ainsi pour les groupes de modes $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \pm \frac{\Delta m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{2}$. Au mode $m = m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, les termes $\frac{\Delta k_{r,m}}{\Delta m}$ et $\frac{\Delta k_{z,m}}{\Delta m}$ s'expriment par :

$$\frac{\Delta k_{r,m}}{\Delta m} = -\frac{\pi}{h} \tan \theta_m$$

et

$$\frac{\Delta k_{z,m}}{\Delta m} = \frac{\pi}{h}.$$

En remplaçant ces deux expressions dans l'équation (27), nous obtenons finalement la relation liant le mode central de chaque groupe à la valeur de p :

$$\frac{1}{h} [-r \tan \theta_m + \varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z_s] = 2p, \quad (28)$$

qui pour les angles petits s'exprime par (en utilisant la relation (17)) :

$$\frac{1}{h} \left[-r \frac{mc_o}{2\nu_o h} + \varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z_s \right] = 2p, \quad (29)$$

où ν_o est la fréquence. On peut ainsi prédire les positions spatio-temporelles des maximums d'énergie à une fréquence donnée et en un point quelconque $D(r, z)$ du plan de propagation.

2.5. reconstitution des vitesses de groupe et des vitesses de phase dans le cas de données simulées

Nous allons distinguer dans ce chapitre deux cas de propagation possibles : une propagation soit symétrique soit asymétrique correspondant respectivement à une représentation spatio-temporelle des maximums d'énergie soit symétrique soit non symétrique par rapport à l'axe θ . Nous choisissons un signal d'émission large bande de façon à obtenir une bonne résolution temporelle des signaux reçus. Nous considérons un signal d'allure gaussienne en fréquence, centré autour de la fréquence $\nu_o = 300$ Hz et de largeur de bande 200 Hz. La résolution spatiale est obtenue grâce à une antenne verticale de réception centrée autour du point $D(r, z)$. La taille de l'antenne doit être suffisamment grande pour obtenir une bonne résolution spatiale. La représentation spatio-temporelle des signaux reçus est obtenue par un traitement classique de formation de voies. Pour ces simulations, l'épaisseur du guide d'ondes, la distance de propagation et la célérité de référence sont respectivement : $h = 1000$ m, $r = 50$ km et $c_o = 1500$ m/s. Le calcul des modes est obtenu à l'aide du logiciel KRAKEN, adapté aux signaux large bande. À la fréquence centrale, le nombre de modes pris en compte est de 45.

2.5.1. propagation symétrique

Nous allons tout d'abord nous intéresser au cas particulier où la source et le récepteur sont situés au centre du guide d'ondes, soit $z = z_s = \frac{h}{2}$. En utilisant l'équation (29), les maximums d'énergie sont obtenus pour les groupes de modes centrés autour des modes m vérifiant les relations :

$$\text{pour } \theta > 0 \ (\varepsilon_1 = -1) \quad - \frac{rc_o}{2h^2\nu_o} m = \begin{cases} 2p \\ \text{ou} \\ 2p + 1, \end{cases} \quad (30)$$

$$\text{et pour } \theta < 0 \ (\varepsilon_1 = 1) \quad - \frac{rc_o}{2h^2\nu_o} m = \begin{cases} 2p - 1 \\ \text{ou} \\ 2p. \end{cases} \quad (31)$$

Les valeurs positives de p ne donnent que des solutions modales négatives ($m < 0$). Seules les valeurs négatives de p donnent des solutions physiquement possibles. La valeur $p = 0$ donne une seule valeur positive : $m = 8$ (interférence constructive de modes voisins centrés autour du mode 8), les trois autres valeurs de m sont négatives ou nulles. Pour $p = -1$, nous obtenons deux maximums pour $\theta < 0$ au voisinage des modes 16 et 24 et deux maximums pour $\theta > 0$ au voisinage des modes 8 et 16, etc ...

Nous présentons sur la figure 2 une simulation numérique d'une image de formation de voies calculée sur 21 récepteurs uniformément répartis entre 300 et 700 mètres de profondeur. L'énergie des signaux est donnée en décibels.

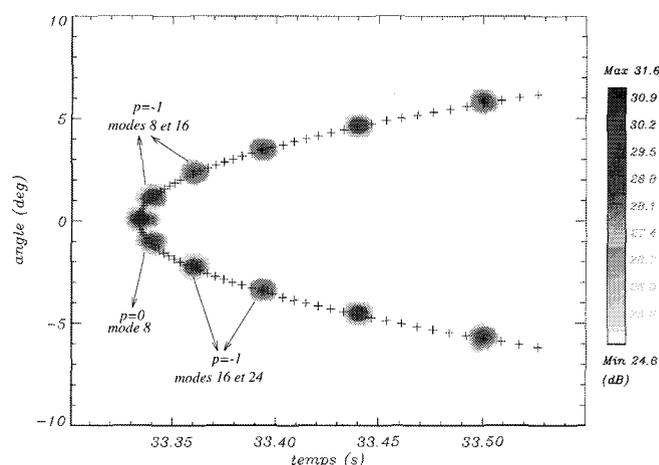


Figure 2. – Formation de voies et représentation des couples $(t_m, \pm\theta_m)$.

Nous superposons à cette figure, l'ensemble des valeurs discrètes $(t_m, \pm\theta_m)$, représentées par des croix, calculées à partir de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe de chaque mode à la fréquence centrale ν_o , en utilisant les équations (22) et (23). On vérifie sur la figure 2 que l'ensemble des maximums d'énergie appartient à la courbe définie par l'équation (24) et que leurs positions (taches d'énergie) sont bien symétriques par rapport à θ autour des modes 8, 16, 24, ... On retrouve bien ici l'allure parabolique donnée par l'équation (25). Les différentes positions des maximums d'énergie définissent un ensemble de points correspondant au maximum de chaque tache ($n = 1, 2, \dots, N$, où N est le nombre de taches). En utilisant les relations (22) et (23) et en supposant connues la distance de propagation r et la célérité du son c_o , il est alors possible de calculer la vitesse de groupe et la vitesse de phase pour chaque maximum d'énergie. Par construction, cet ensemble de points appartient à la courbe théorique liant la vitesse de groupe à la vitesse de phase définie par l'équation (21).

Ceci se vérifie parfaitement par simulation (Cf. figure 3). La figure 3 représente la superposition de l'ensemble des N points reconstitués (étoiles) à la courbe théorique liant la vitesse de groupe à la vitesse de phase (ligne pleine) donnée par l'équation (21).

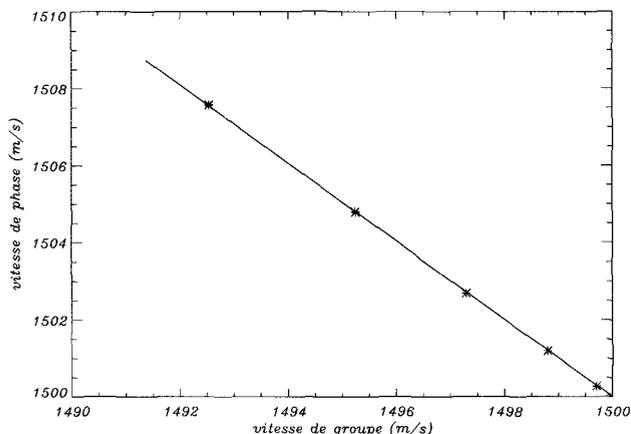


Figure 3. – Représentation des vitesses de groupe et vitesses de phase théoriques (ligne pleine) et reconstruites (étoiles) à partir des positions spatio-temporelles des maximums d'énergie.

2.5.2. propagation asymétrique

L'allure symétrique de l'image de formation de voies obtenue précédemment est un cas très particulier, où l'émetteur et le récepteur sont situés au centre du guide d'ondes. Dans le cas général cette symétrie n'existe plus : la symétrie des maximums d'énergie est obtenue uniquement lorsque $\frac{1}{h}(z \pm z_s)$ est un nombre entier rationnel : soit -1 et 0 , cas impossible (aucune solution), soit 1 et 0 qui correspond au cas traité précédemment. Pour tous les autres cas ($z_s \neq \frac{h}{2}$ ou $z \neq \frac{h}{2}$), le terme non entier $\frac{1}{h}(z \pm z_s)$ impliquera une dissymétrie des maximums d'énergie. Notons que cette dissymétrie ne modifie pas la symétrie globale de l'allure de la formation de voies : la relation (24) est toujours vérifiée. Pour illustrer cette dissymétrie des taches, la figure 4 est une image de formation de voies obtenue pour $z_s = 200$ m, et une position moyenne de l'antenne de réception située à 400 m, les autres paramètres restent inchangés par rapport au cas précédent. Comme pour la figure 2, nous superposons à cette

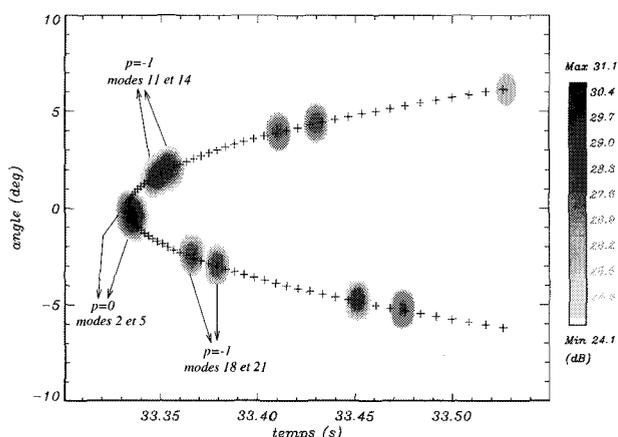


Figure 4. – Formation de voies et représentation des couples $(t_m, \pm\theta_m)$, cas asymétrique.

figure l'ensemble des valeurs discrètes $(t_m, \pm\theta_m)$ représentées par des croix.

Les différentes positions des maximums d'énergie sont obtenues comme précédemment en utilisant l'équation (29). Pour $p = 0$, il n'existe des maximums d'énergie que pour $\theta < 0$ au voisinage des modes 2 et 5 (en arrondissant à l'entier le plus proche puisque les valeurs obtenues sont 1,6 et 4,8) Pour $p = -1$, les maximums se situent au voisinage des modes 11 et 14 pour $\theta > 0$ et au voisinage des modes 18 et 21 pour $\theta < 0$, etc ...

La figure 4 met en évidence la très nette dissymétrie par rapport à θ des taches d'énergie de la formation de voies. L'allure globale reste quant à elle inchangée : l'ensemble des taches appartient à la courbe définie par l'équation (21). Les positions spatio-temporelles des maximums d'énergie définissent un ensemble de points que nous représentons par des étoiles sur la figure 5. Nous superposons en trait plein la courbe théorique liant les vitesses de phase aux vitesses de groupe. Comme dans le cas précédent (propagation symétrique), l'ensemble des points reconstruits (étoiles) appartient à la courbe théorique donnée par la relation (21).

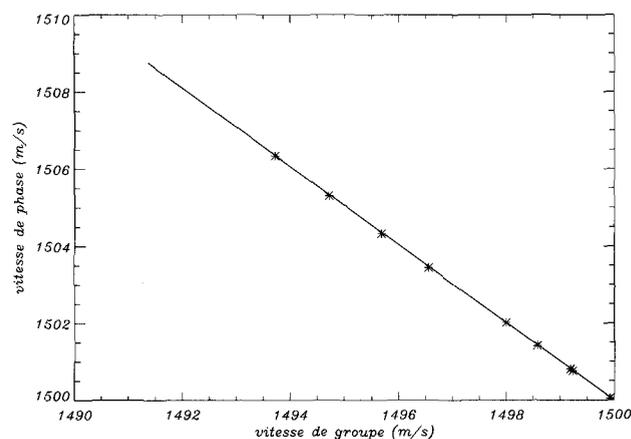


Figure 5. – Représentation des vitesses de groupe et vitesses de phase théoriques (ligne pleine) et reconstruites (étoiles) à partir des positions spatio-temporelles des maximums d'énergie. Cas asymétrique.

2.6. conclusion sur le guide d'ondes homogène

Nous avons vu dans ce chapitre que la relation liant la vitesse de phase à la vitesse de groupe est indépendante de la pulsation, et ne dépend que de la célérité du son c_o . Par ailleurs, les différents paquets d'énergie (ou taches) obtenus par formation de voies définissent un ensemble de N points (t_n, θ_n) qui permettent de reconstruire la courbe théorique liant la vitesse de phase à la vitesse de groupe. Ce résultat est d'autant plus intéressant qu'il est indépendant de la pulsation mais également indépendant de la position de la source et de l'antenne de réception. Ce traitement nécessite néanmoins une bonne résolution spatio-temporelle des signaux reçus sur l'antenne.

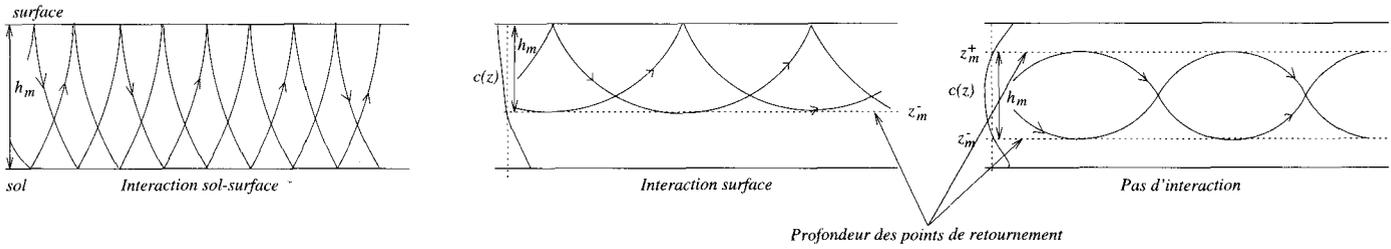


Figure 6. – Propagation modale, (a) interaction surface-sol - (b) interaction surface - (c) pas d'interaction (SOFAR).

3. le guide d'ondes hétérogène

Nous allons voir dans ce chapitre que certaines propriétés mises en évidence dans le cas du guide d'ondes homogène peuvent se généraliser à tout type de guide d'ondes hétérogène suivant la profondeur, avec en particulier la reconstruction des vitesses de groupe et vitesses de phase à partir de la représentation spatio-temporelle des signaux reçus en un point $D(r, z)$ du plan de propagation. Nous utilisons l'approximation W.K.B. (Wentzel-Kramers-Brillouin) correspondant aux milieux faiblement hétérogènes (variations du milieu faibles sur une longueur d'onde) et qui est également une approximation haute fréquence. Nous limitons cette étude aux milieux invariants en distance. La masse volumique ρ est supposée constante.

3.1. généralités sur la propagation par modes

Les hétérogénéités du milieu suivant la profondeur entraînent le phénomène bien connu de réfraction de l'énergie vers les zones de moindre célérité (loi de Snell). À la différence du guide d'onde homogène, les nombres d'onde verticaux $k_{z,m}$ et les angles θ_m dépendent de la profondeur. Les relations entre les angles de propagation et les nombres d'onde horizontaux et verticaux sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} k_{r,m} = \frac{\omega}{c(z)} \cos \theta_m(z) \\ k_{z,m}(z) = \frac{\omega}{c(z)} \sin \theta_m(z). \end{cases} \quad (32)$$

La profondeur pour laquelle l'angle θ_m est nul correspond, par analogie avec la théorie des rayons, à la profondeur du point de retournement. Chaque mode se propage dans un guide d'ondes horizontal, d'épaisseur h_m pour laquelle $c(z) \leq v_{\phi,m}$. On peut résumer les différents types de propagation dans le guide d'ondes hétérogène par trois figures [12].

Les cas (a), (b) et (c) de la figure 6 correspondent respectivement à un mode dont l'énergie est confinée entre la surface et le sol,

la surface et la profondeur z_m^- du point de retournement inférieur et entre les profondeurs z_m^+ et z_m^- des points de retournement supérieur et inférieur.

Dans un guide d'ondes invariant en distance, le nombre d'onde horizontal $k_{r,m}$ est constant si bien que l'équation en r donnée par l'équation (8) est toujours vérifiée. En utilisant l'équation (5) et la solution générale de l'équation en r donnée par son développement asymptotique (10), la pression au point $D(r, z)$ s'écrit :

$$p(r, z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\rho\sqrt{8\pi r}} \sum_m \Psi_m(z_s) \Psi_m(z) \frac{e^{ik_{r,m}r}}{\sqrt{k_{r,m}}} \quad (33)$$

Dans l'approximation W.K.B., la solution modale $\Psi_m(z)$ est donnée par [5] :

$$\Psi_m(z) = \frac{1}{\sqrt{k_{z,m}(z)}} \sin \left[\int_{z_m^+}^z k_{z,m}(z) dz \right], \quad (34)$$

où z_m^+ représente la profondeur du point de retournement supérieur. Cette relation n'est pas valable au point de retournement, puisque dans ce cas le nombre d'onde vertical tend vers zéro et l'équation (34) diverge. En écrivant la fonction sinus sous forme d'exponentielles complexes, la pression modale a alors l'expression :

$$p_m(r, z) = \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}} e^{ik_{r,m}r}}{8\rho\sqrt{2\pi k_{z,m}(z)k_{z,m}(z_s)k_{r,m}r}} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{i\left(\varepsilon_1 \int_{z_m^+}^z k_{z,m}(z) dz + \varepsilon_2 \int_{z_m^+}^{z_s} k_{z,m}(z) dz\right)}, \quad (35)$$

avec $\varepsilon_1 = \pm 1$ et $\varepsilon_2 = \pm 1$. Comme dans le cas du guide d'ondes homogène, la valeur $\varepsilon_1 = 1$ correspond à la propagation vers les z croissants ($\theta < 0$) et la valeur $\varepsilon_1 = -1$ à la propagation vers les z décroissants ($\theta > 0$). Dans l'approximation W.K.B., la pression modale est une somme de quatre ondes dont les phases ont pour expression [8] :

$$\phi_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, r, z) = k_{r,m}r + \varepsilon_1 \int_{z_m^+}^z k_{z,m}(z) dz + \varepsilon_2 \int_{z_m^+}^{z_s} k_{z,m}(z) dz. \quad (36)$$

Par ailleurs, la condition de résonance du milieu (principe de l'état stationnaire) impose que la variation de phase d'une onde se propageant sur toute la hauteur d'eau h_m (aller et retour) soit un multiple de 2π . Dans l'approximation W.K.B. cette condition s'écrit [2] :

$$\Phi^+ + \Phi^- + 2 \int_{h_m} k_{z,m}(z) dz = 2m\pi. \quad (37)$$

Le coefficient 2 devant le signe intégral correspond à l'aller et retour vertical de l'onde dans le guide d'ondes. Les termes de phase Φ^+ et Φ^- correspondent aux sauts de phase des ondes sur les interfaces (surface et sol) ou bien aux sauts de phase aux points de retournement.

3.1.1. vitesse de phase et angle de propagation

Le nombre d'onde horizontal $k_{r,m}$ donné dans l'équation (32) est une constante, si bien que pour un mode donné m le rapport $\frac{c(z)}{\cos \theta_m(z)}$ est constant. La vitesse de phase définie au paragraphe 2.2 s'exprime directement en fonction de la célérité du milieu et de l'angle de propagation par la relation :

$$v_{\phi,m} = \frac{\omega}{k_{r,m}} = \frac{c(z)}{\cos \theta_m(z)} = c(z_m), \quad (38)$$

où z_m est le point de retournement soit supérieur (z_m^+) soit inférieur (z_m^-), avec la relation $c(z_m) = c(z_m^+) = c(z_m^-)$. La vitesse de phase du mode m n'est autre que la célérité aux points de retournement (z_m^+) ou (z_m^-). L'équation (38) met en évidence la relation directe entre la vitesse de phase du mode m et l'angle de propagation de ce même mode à une profondeur z donnée.

3.1.2. vitesses de groupe et temps de propagation

Le temps de propagation des ondes est calculé en considérant les phases des différentes ondes propagées dans le milieu comme stationnaires ([6] p. 113), c'est-à-dire que la différence $\omega t - \phi_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, r, z)$ est indépendante de la pulsation ω , ce qui revient à écrire :

$$\frac{d}{d\omega} [\omega t - \phi_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, r, z)] = 0, \quad (39)$$

Expression que l'on peut encore écrire :

$$t - \frac{r}{\frac{\partial \omega}{\partial k_{r,m}}} - \varepsilon_1 \int_{z_m^+}^z \frac{dz}{\frac{\partial \omega}{\partial k_{z,m}(z)}} - \varepsilon_2 \int_{z_m^+}^{z_s} \frac{dz}{\frac{\partial \omega}{\partial k_{z,m}(z)}} = 0. \quad (40)$$

Il apparaît alors que le temps de propagation en un point quelconque du plan de propagation $D(r, z)$ s'exprime en fonction des vitesses de groupe horizontales et des vitesses de groupe verticales définies respectivement par $v_{gr,m}^h = \frac{\partial \omega}{\partial k_{r,m}}$ et

$v_{gr,m}^v(z) = \frac{\partial \omega}{\partial k_{z,m}(z)}$. Le temps de propagation est différent pour

chaque onde suivant les valeurs de ε_1 et ε_2 . En utilisant l'expression de l'équation (40), le temps de propagation modal s'écrit alors :

$$t_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, r, z) = \frac{r}{v_{gr,m}^h} + \varepsilon_1 \int_{z_m^+}^z \frac{dz}{v_{gr,m}^v(z)} + \varepsilon_2 \int_{z_m^+}^{z_s} \frac{dz}{v_{gr,m}^v(z)}. \quad (41)$$

Notons que le premier terme de cette expression (terme en r) est très supérieur aux deux autres termes (termes en z) puisque nous avons supposé $r \gg z$ et que dans le cas général la vitesse de groupe horizontale est très inférieure à la vitesse de groupe verticale. Dans le cas du guide d'ondes homogène, les nombres d'onde verticaux $k_{z,m}$ sont indépendants de la pulsation si bien que les vitesses de groupe verticales sont infinies. Avec ces hypothèses, le temps de propagation s'exprime comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent en fonction de la vitesse de groupe horizontale uniquement.

3.2. indépendance fréquentielle de la relation vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase dans l'approximation W.K.B.

Nous avons vu dans le cas du guide d'ondes homogène que la relation entre les vitesses de groupe et vitesses de phase est indépendante de la fréquence (Cf. éq. (21)) et ne dépend que de la célérité du milieu. Dans le cas des milieux faiblement hétérogènes, on peut pressentir qu'il en sera pratiquement de même. Qu'en est-il exactement? W. Munk et C. Wunsch ont montré ([13] et [2] p. 62, éq (2.10.8)) que cette relation, pour un milieu hétérogène, est donnée par :

$$v_{gr}^h v_{\phi} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(z) dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^2(z)}{c^2(z)} dz}. \quad (42)$$

Cette relation fait intervenir la fréquence puisque la pression acoustique $p(z)$ en dépend. Néanmoins, dans l'approximation W.K.B. et dans le cas de la propagation d'un mode entre les profondeurs z^+ et z^- des points de retournement supérieur et inférieur, cette relation est donnée par (Cf. [2] p. 63 éq. (2.10.11)) :

$$v_{gr}^h v_{\phi} = \frac{\int_{z^-}^{z^+} \left(\frac{1}{c^2(z)} - \frac{1}{v_{\phi}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dz}{\int_{z^-}^{z^+} \frac{1}{c^2(z)} \left(\frac{1}{c^2(z)} - \frac{1}{v_{\phi}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dz}. \quad (43)$$

Les profondeurs z^+ et z^- étant des fonctions de la vitesse de phase puisque $v_{\phi} = c(z^+) = c(z^-)$, le terme de droite de la relation (43) est donc une fonction de la vitesse de phase et de la célérité uniquement. Cette relation peut s'exprimer plus simplement par :

$$f(v_{gr}^h, v_{\phi}, c(z)) = 0, \quad (44)$$

où f est une fonction indépendante de la fréquence. Dans le cas d'ondes réfléchies sur les interfaces (sol et surface), la relation entre les vitesses de groupe horizontales et les vitesses de phase est analogue à la relation (43) [13]. Les bornes des intégrales sont à remplacer par les profondeurs des interfaces. Cette relation est toujours indépendante de la fréquence.

3.3. maximums d'énergie

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.4 dans le cas du guide d'ondes homogène, les maximums d'énergie sont obtenus pour des interférences constructives de modes voisins. En utilisant le terme de phase donné par la relation (36), l'équation (26) s'écrit (Cf. [10] éq. (5)) :

$$\frac{\Delta k_{r,m}}{\Delta m} r + \varepsilon_1 \int_{z_m^+}^z \frac{\Delta k_{z,m}(z)}{\Delta m} dz + \varepsilon_2 \int_{z_m^+}^{z_s} \frac{\Delta k_{z,m}(z)}{\Delta m} dz = 2p\pi, \quad (45)$$

où p est un nombre entier relatif.

Chaque valeur de p donne quatre groupes de modes possibles (puisque $\varepsilon_1 = \pm 1$ et $\varepsilon_2 = \pm 1$) compris dans l'intervalle $\left[m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - \frac{\Delta m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{2}, m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \frac{\Delta m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{2} \right]$, où $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est le mode central de chaque groupe. Les positions angulaires et temporelles de ces maximums d'énergie sont données par les équations (38) et (41), il vient :

$$\begin{cases} \cos \theta_m(z) = \frac{c(z)}{v_{\phi,m}} \\ t_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, r, z) = \frac{r}{v_{gr,m}^h} + \varepsilon_1 \int_{z_m^+}^z \frac{dz}{v_{gr,m}^v(z)} + \varepsilon_2 \int_{z_m^+}^{z_s} \frac{dz}{v_{gr,m}^v(z)} \end{cases} \quad (46)$$

avec $m = m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

Les quatre valeurs de $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sont centrées autour d'un mode « moyen » M_p obtenu pour les valeurs moyennes de ε_1 et ε_2 , soit $\langle \varepsilon_1 \rangle = 0$ et $\langle \varepsilon_2 \rangle = 0$, et vérifiant la relation :

$$\frac{\Delta k_{r,M_p}}{\Delta M_p} r = 2p\pi \quad (47)$$

Dans ce cas le temps de propagation associé au mode M_p s'exprime uniquement en fonction de la vitesse de groupe horizontale par la relation :

$$t_{M_p} = \frac{r}{v_{gr,M_p}^h}. \quad (48)$$

Son angle de propagation est donné par la première ligne de l'équation (46) :

$$\cos \theta_{M_p}(z) = \frac{c(z)}{v_{\phi,M_p}}. \quad (49)$$

Les équations (48) et (49) donnent une relation directe entre les temps et angles « moyens » des quatre maximums et les vitesses de phase et de groupe horizontales. L'ensemble de points (\mathcal{E}) défini par $\left(\frac{r}{t_{M_p}}, \frac{c(z)}{\cos \theta_{M_p}(z)} \right)$ appartient à la courbe théorique liant la vitesse de phase à la vitesse de groupe horizontale. Nous pouvons alors conclure que, dans une représentation spatio-temporelle, les positions moyennes des maximums d'énergie regroupés par paquets de quatre permettent de retrouver la relation $f(v_{\phi}, v_{gr}^h) = 0$. Nous noterons (C) la courbe définie par cette fonction.

En supposant connues la distance de propagation r , ainsi que la célérité $c(z)$ à la profondeur du récepteur, on peut alors reconstruire la courbe liant la vitesse de groupe horizontale à la vitesse de phase en utilisant les relations :

$$\begin{cases} v_{gr,n} = \frac{r}{t_n} \\ v_{\phi,n} = \frac{c(z)}{\cos \theta_n(z)} \end{cases} \quad (50)$$

où $n = 1, 2, \dots, N$ (N est le nombre de maximums d'énergie). Les couples $(t_n, \theta_n(z))$ sont les positions spatio-temporelles de ces maximums. Ces maximums étant regroupés par paquets de quatre (quatre solutions modales possibles pour chaque valeur entière de p), les valeurs moyennes des vitesses de groupe et vitesses de phase calculées pour chaque paquet de quatre maximums appartiennent à la courbe théorique (C).

3.4. un exemple : le profil de célérité linéaire

Nous allons illustrer par une simulation numérique les propriétés décrites précédemment dans le cas d'un profil de célérité linéaire : $c(z) = c_o + az$, où a est une constante. Nous allons en particulier reconstruire l'ensemble des points (\mathcal{E}) obtenus par formation de voies et les comparer à la courbe (C) liant la vitesse de groupe horizontale à la vitesse de phase. Pour illustrer un cas de propagation réaliste nous avons choisi $c_o = 1500$ m/s et $a = 0,017$ s⁻¹. Le signal d'émission est centré autour de la fréquence 400 Hz, d'allure gaussienne en fréquence, et de largeur de bande 100 Hz. La source est située à $z_s = 100$ m de profondeur, la distance r est égale à 150 km et l'antenne verticale de réception comporte 21 capteurs, situés entre les profondeurs 250 m et 350 m (position moyenne pour $z = 300$ m). La figure 7 est une représentation spatio-temporelle des signaux reçus sur l'antenne obtenue par formation de voies. L'énergie des signaux reçus est donnée en décibels. Le nombre de modes à la fréquence centrale d'émission est de 120. Nous superposons à cette figure l'ensemble des valeurs discrètes $(t_m, \pm \theta_m)$ calculées à partir de la vitesse de groupe horizontale et de la vitesse de phase de chaque mode à la fréquence centrale d'émission (Cf éq. (48) et (49)). Nous ne représentons qu'un mode sur deux (croix sur la figure) de façon à ne pas surcharger la figure. On peut mettre

en avant ici le lien évident entre les positions spatio-temporelles des maximums d'énergie et l'ensemble des valeurs discrètes $(t_m, \pm\theta_m)$. Néanmoins, on peut constater que les maximums ne se situent pas exactement sur cet ensemble de points, mais en son voisinage. Les écarts spatio-temporels observés sont dus aux vitesses de groupe verticales qui ne sont pas prises en compte dans le calcul de t_m .

Les maximums d'énergie sont regroupés par paquets de quatre : deux pour les angles d'arrivée positifs et deux pour les angles d'arrivée négatifs puisque $\varepsilon_1 = \pm 1$. En utilisant les relations des angles et temps de propagation données par les équations (38) et (41) on peut déterminer sans ambiguïté les différents paquets, à condition que les signaux soient résolus spatialement et temporellement. C'est le cas sur la figure 7 pour les signaux dont le temps de propagation ne dépassent pas 99,88 s. Ce n'est plus le cas pour les signaux observés au voisinage du temps $t = 99,90$ s. Dans un paquet de quatre maximums d'énergie et d'après la relation (41), le temps de propagation le plus faible est donné pour $\varepsilon_1 = -1$ et $\varepsilon_2 = -1$, correspondant au cas $\theta > 0$. À l'inverse, le temps de propagation le plus grand est donné pour $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = 1$ correspondant à $\theta < 0$. À titre d'exemple, nous avons entouré un paquet de quatre maximums sur la figure 7. On peut en discerner très distinctement cinq voire six.

A partir de ces différentes positions spatio-temporelles des maximums d'énergie (position temporelle t_n et angulaire θ_n de chaque maximum où $n = 1, 2, \dots, N$, N est le nombre de maximums observables), nous obtenons à l'aide de l'équation (50) un ensemble de points $(v_{gr,n}, v_{\phi,n})$ représenté par des croix sur la figure 8. Nous construisons alors l'ensemble de points (\mathcal{E}) en utilisant la méthode décrite au paragraphe 3.3 et représenté par des étoiles sur la figure 8. Il est alors possible de vérifier sur cette simulation que l'ensemble de points (\mathcal{E}) appartient bien à la courbe théorique (C) vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase (en trait plein sur la figure 8). Quant à l'ensemble des points reconstruit $(v_{gr,n}, v_{\phi,n})$, on vérifie aisément ici qu'il n'appartient pas à la courbe théorique (C) : la vitesse de groupe verticale est à l'origine de ce décalage.

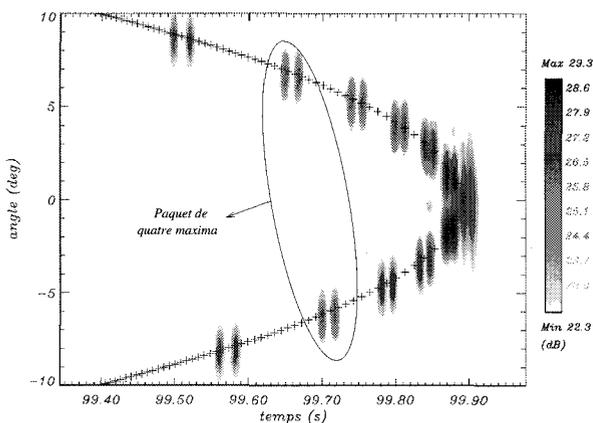


Figure 7. – Formation de voies : cas du profil de célérité linéaire et superposition des points $(t_m, \pm\theta_m)$.

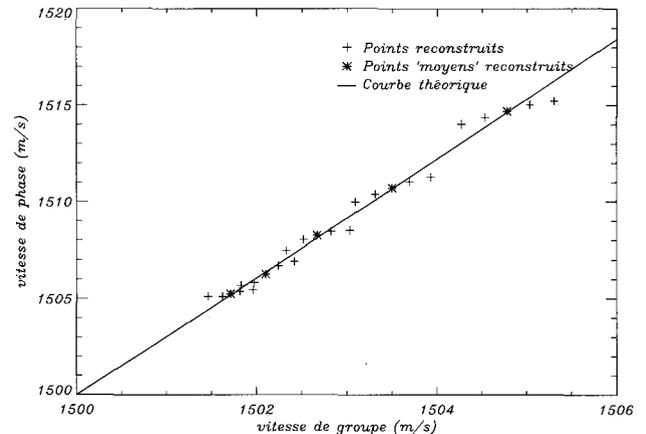


Figure 8. – Reconstruction des vitesses de groupe et des vitesses de phase.

3.5. conclusion sur le guide d'ondes hétérogène

La reconstruction de la relation *vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase* est à peu près analogue pour un guide d'ondes homogène et hétérogène. Dans l'approximation W.K.B., cette relation est indépendante de la fréquence et ne dépend que des caractéristiques physiques du milieu de propagation. Le cas du guide d'ondes hétérogène est néanmoins plus compliqué à traiter puisque le temps de propagation ne s'exprime pas uniquement en fonction de la vitesse de groupe horizontale. Nous avons mis en évidence que les trajets peuvent se regrouper par paquets de quatre, centrés autour d'un mode « moyen » M_p . La reconstruction de la vitesse de groupe horizontale et de vitesse de phase est donnée par la position spatio-temporelle de ce mode « moyen ». Ce traitement nécessite une bonne résolution spatiale et temporelle des signaux reçus.

4. diverses applications

4.1. reconstruction du profil de célérité - Inversion par les modes

La représentation par formation de voies contient, nous venons de le voir, un très grand nombre d'informations spatiales et temporelles. La connaissance de la distance r de propagation et de la célérité moyenne sur l'antenne de réception permet, à partir des signaux reçus sur l'antenne, de reconstruire la courbe *vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase*. Nous avons vu au chapitre 3 que, dans l'approximation W.K.B., cette courbe ne dépend que du profil de célérité du milieu. Celle-ci peut alors servir de point de départ pour traiter le problème d'inversion et pour reconstruire le profil de célérité.

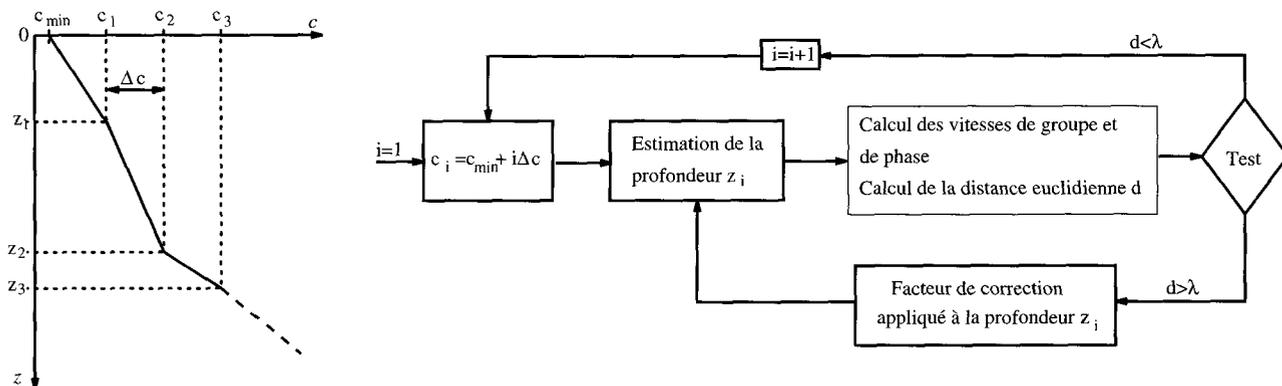


Figure 10. – Reconstruction de l'épaisseur du guide d'ondes. Schéma d'inversion.

L'équation (43) liant les vitesses de groupe horizontales et vitesses de phase à la célérité du milieu pourrait laisser supposer une relation de bijection entre les fonctions $c(z)$ et $f(v_{gr}^h, v_\phi)$ donnée par l'équation (44). Ce n'est malheureusement pas le cas. Cette relation est injective, mais non surjective : à un profil de célérité $c(z)$ donné correspond une et une seule fonction $f(v_{gr}^h, v_\phi)$, mais la réciproque est fautive. Plusieurs profils de célérité différents peuvent avoir la même relation *vitesse de groupe - vitesse de phase*. Il faut introduire ici la notion d'épaisseur du guide d'ondes en fonction de la célérité, où l'épaisseur du guide d'ondes est la différence entre les profondeurs des points de retournement inférieur et supérieur pour une vitesse de phase donnée, soit $z^- - z^+$ avec $v_\phi = c(z^+) = c(z^-)$. Une infinité de profils de célérité peuvent avoir la même épaisseur de guide d'ondes quelque soit la célérité, comme l'illustre la figure 9.

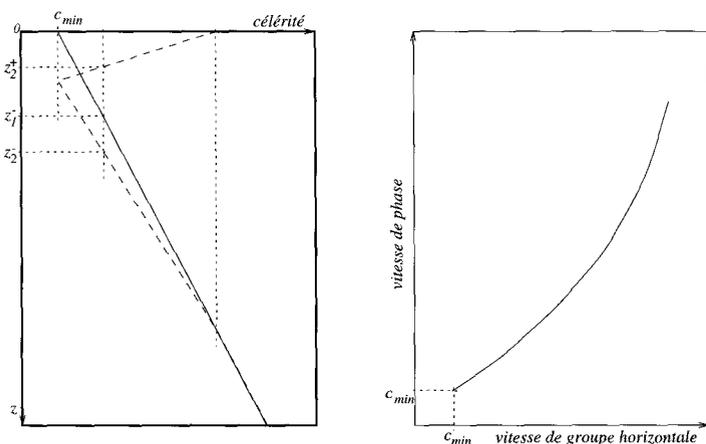


Figure 9. – Deux profils de célérité différents (ligne pleine et ligne brisée) pour une même relation *vitesses de groupe - vitesse de phase*.

Les deux profils considérés (en ligne pleine et en ligne brisée) ont un guide d'ondes de même épaisseur quelque soit la célérité : $z_1^- = z_2^- - z_2^+$. La relation entre les vitesses de groupe et les vitesses de phase est alors la même pour ces deux profils.

L'inversion doit être dissociée en deux étapes qui consistent tout d'abord à retrouver la profondeur du guide d'onde en fonction de la célérité à partir de la relation *vitesse de groupe - vitesse de phase*, puis à reconstituer le profil de célérité.

Par ailleurs, la fonction $f(v_{gr}^h, v_\phi)$ est également invariante à toute homothétie suivant la profondeur du profil de célérité. Ce rapport est à déterminer.

4.1.1. reconstruction de l'épaisseur du guide d'ondes en fonction de la célérité

À partir de la relation *vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase*, nous avons développé un algorithme de reconstruction de l'épaisseur du guide d'ondes en fonction de la célérité. Le principe de cet algorithme est de reconstituer par tranche d'eau la célérité du milieu présentant les mêmes caractéristiques *vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase* que la courbe de référence (décrite par la fonction f) obtenue à partir de la représentation spatio-temporelle des signaux reçus sur une antenne donnée.

La première étape consiste à choisir un pas élémentaire de célérité Δc , ainsi qu'une fréquence de travail. L'algorithme, dont le schéma de principe est donné sur la figure 10, estime pour l'indice $i = 1$, la profondeur z_1 de telle façon que la distance euclidienne d entre les fonctions \hat{f} et f soit inférieure à une valeur seuil λ , où \hat{f} est la fonction qui décrit la relation *vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase* estimée (calculée pour la valeur z_1). La fonction \hat{f} est calculée sur un nombre discret de points correspondant aux différents modes. La distance euclidienne est ici définie par :

$$d = \sum_{m=1}^M \sqrt{(\hat{v}_{gr,m}^h - v_{gr\perp m}^h)^2 + (\hat{v}_{\phi,m} - v_{\phi\perp m})^2} \quad (51)$$

où M est le nombre de modes, $(v_{gr\perp m}^h, v_{\phi\perp m})$ la projection orthogonale du point $(\hat{v}_{gr,m}^h, \hat{v}_{\phi,m})$ sur la courbe de référence décrite par f , $\hat{v}_{gr,m}^h$ et $\hat{v}_{\phi,m}$ respectivement la vitesse de groupe horizontale et la vitesse de phase estimées. Si la distance d est supérieure à λ , la profondeur z_1 estimée est corrigée par un facteur

de correction proportionnel à d . L'opération est ainsi répétée jusqu'à ce que la distance d soit inférieure à λ . L'indice i est alors incrémenté de 1. Cet algorithme reconstruit au fur et à mesure l'épaisseur du guide d'ondes en fonction de la célérité.

4.1.2. cas où la célérité est une fonction monotone suivant l'axe z

Dans le cas où le milieu ne possède pas de chenal de propagation, correspondant à un profil de célérité croissant ou décroissant en fonction de la profondeur z , le résultat de l'inversion du paragraphe précédent correspond au profil de célérité recherché, à un rapport d'homothétie près. La connaissance d'un point particulier $c(z_P)$ de la courbe $c(z)$ permet de déterminer ce rapport d'homothétie. D'un point vue pratique, on choisira un point à une très grande profondeur pour laquelle la célérité est pratiquement invariante au cours du temps (variations de température négligeables) et donc supposée connue. Dans le cas contraire, $c(z_P)$ est un paramètre à déterminer.

En tomographie la distance de propagation r est connue. La vitesse de groupe horizontale d'un maximum est estimée par la première équation de la relation (50). La vitesse de phase dépend de la célérité $c(z_R)$ à la profondeur du récepteur central de l'antenne, qui est un paramètre à déterminer.

Enfin, la célérité minimale c_{min} (point de départ de la courbe vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase) doit également être connue.

Le résultat de l'inversion dépend de la connaissance *a priori* de ces trois paramètres ($c(z_P)$, $c(z_R)$ et c_{min}). S'ils sont connus, l'inversion se réduit à la résolution de l'algorithme décrit au paragraphe précédent et est donc très rapide. Dans le cas contraire, il est possible de les déterminer en utilisant une méthode dite de *Traitement de Champs Adaptés* (Matched-Field Processing). Les trois paramètres sont estimés de façon à minimiser l'erreur quadratique moyenne $\varepsilon(c(z_P), c(z_R), c_{min})$ entre le signal expérimental $x_{exp,n}(t)$ reçu sur chaque capteur et le signal reconstruit par simulation $x_{th,n}(t, c(z_P), c(z_R), c_{min})$ pour les valeurs $c(z_P)$, $c(z_R)$ et c_{min} . L'erreur quadratique moyenne se définit ici par :

$$\varepsilon(c(z_P), c(z_R), c_{min}) = \frac{1}{N_c} \sum_{n=1}^{N_c} \frac{1}{T} \int_T \|x_{exp,n}(t) - x_{th,n}(t, c(z_P), c(z_R), c_{min})\|^2 dt, \quad (52)$$

où N_c est le nombre de capteurs sur l'antenne de réception et T l'étalement temporel du signal reçu. Si le temps de calcul peut être très long, cette méthode présente l'avantage de reconstruire le profil de célérité sans information *a priori*.

4.1.3. inversion dans le cas d'un chenal de propagation

Dans le cas où la célérité n'est plus une fonction monotone suivant l'axe z , la reconstruction du profil de célérité est beaucoup

plus délicate que précédemment. En effet, le résultat de l'inversion donné au paragraphe 4.1.1 donnant la profondeur du guide d'ondes en fonction de la célérité (fonction monotone), ne correspond plus au profil de célérité recherché. Nous nous limitons ici à un unique chenal supposé proche de la surface (typiquement entre 0 et 200 m pour un profil méditerranéen). La célérité décroît de la surface jusqu'à une certaine profondeur (voisine de 100 m en mer méditerranée l'été) puis croît avec la profondeur. La reconstruction du profil de célérité est alors possible à condition d'utiliser une antenne de réception assez grande comprise entre 0 et 200 m de profondeur. En effet, on peut dans un premier temps réaliser une formation de voies sur les capteurs compris entre 100 et 200 m, ce qui donnera une représentation spatio-temporelle des signaux reçus sur le récepteur central à 150 m. Par estimation de la célérité $c(z_R)$ sur ce récepteur central, on pourra déduire la relation vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase qui ne dépend que du milieu de propagation et qui est indépendante de la position de l'antenne. Si l'on recommence le même traitement pour les capteurs situés entre 50 et 150 m, on pourra alors déduire la célérité à 100 m de façon à reconstituer la même courbe vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase. Ainsi, il sera possible d'estimer la célérité en un certain nombre de points particuliers en répétant ce traitement pour différentes profondeurs de l'antenne. Le résultat dépend de la valeur $c(z_R)$ choisie et qui est un paramètre à estimer. La connaissance du minimum de célérité c_{min} , ainsi qu'un point particulier $c(z_P)$ est nécessaire pour réaliser correctement l'inversion. Ces trois paramètres peuvent s'estimer en utilisant la méthode de minimisation de l'erreur quadratique entre le signal reconstitué et le signal enregistré sur chaque capteur et présentée au paragraphe précédent.

4.1.4. inversions de données simulées

Nous présentons une inversion dans les deux cas étudiés précédemment, tout d'abord pour un profil de célérité croissant avec la profondeur, puis pour un profil de célérité présentant un chenal de propagation. Dans les deux cas, le signal émis est centré à la fréquence 400 Hz, d'allure gaussienne en fréquence et de largeur de bande 200 Hz. La profondeur de la source est de 100 m et la distance de propagation de 150 km. Les inversions sont réalisées dans le cas de signaux reçus sur une antenne verticale constituée de 41 récepteurs équidistants entre 0 et 100 m de profondeur. Le résultat de la première simulation est donné sur la figure 11. Le calcul des modes est effectué par le logiciel KRAKEN.

La représentation spatio-temporelle (a) obtenue par formation de voies pour les récepteurs compris entre 50 et 150 m, est calculée pour un profil de référence représenté en pointillé sur la figure 11(c). Nous représentons pour ce profil de référence la courbe théorique (C) liant la vitesse de groupe horizontale à la vitesse de phase, représentée en trait plein sur la figure 11(b). Les pointillés correspondent à la droite $v_\phi = v_{gr}$; le point d'intersection entre cette droite et la courbe (C) correspond au minimum de célérité c_{min} . Nous cherchons alors à résoudre le problème inverse.

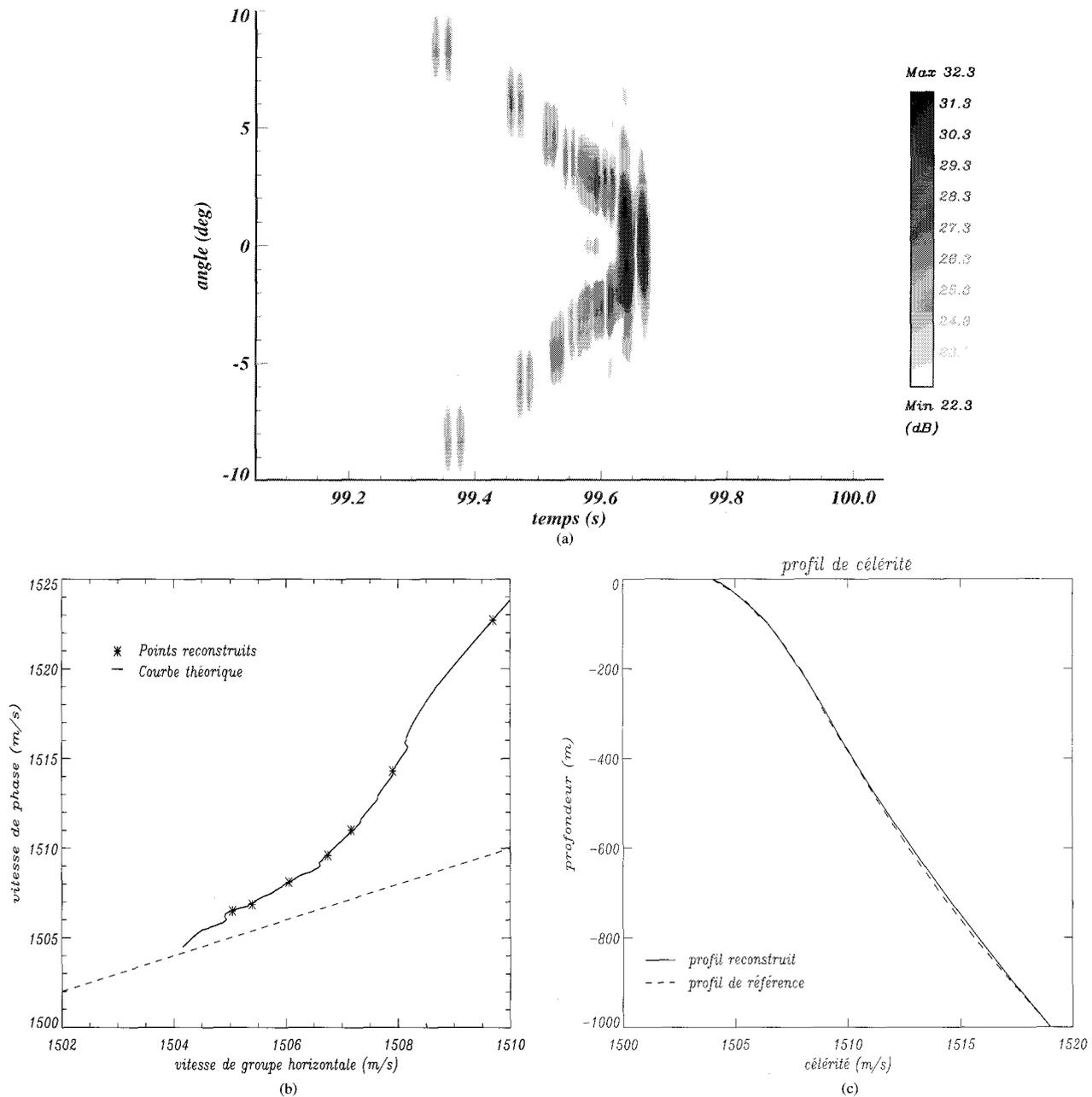


Figure 11. – Inversion de données simulées. Cas d'un profil de célérité croissant avec la profondeur.

À partir de la représentation spatio-temporelle (a) et en utilisant la méthode décrite au paragraphe 4.1.2 dans le cas où les trois paramètres $c(z_R)$, c_{min} et $c(z_P)$ sont inconnus, nous estimons ces trois paramètres en minimisant l'erreur quadratique de l'équation (52). Pour la valeur $c(z_R)$ estimée, nous représentons sur la figure (b) l'ensemble des points (\mathcal{E}) reconstruits (étoiles), que nous comparons à la courbe théorique (C). Le profil de célérité reconstruit est donné en trait plein sur la figure (c). Le résultat de l'inversion est ici très satisfaisant. Tous les points de l'ensemble (\mathcal{E}) reconstruits sont situés sur la courbe théorique (C) (Cf. figure (b)), ce qui donne une très bonne estimation du profil de célérité.

Les écarts entre le profil reconstruit et le profil de référence sont minimes. Notons également que le minimum de célérité c_{min} a été parfaitement estimé comme le montre la figure (c).

Nous présentons sur la figure 12 une seconde simulation dans le cas d'un profil de célérité présentant un chenal de propagation. La courbe en ligne brisée sur la figure 12(c) représente le profil de célérité de référence. La représentation spatio-temporelle (a) a été obtenue par formation de voies sur les capteurs compris entre 100 et 200 m. Pour ce profil de célérité, la relation *vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase* est donnée en ligne pleine sur la figure 12(b). Nous avons appliqué l'inversion décrite au

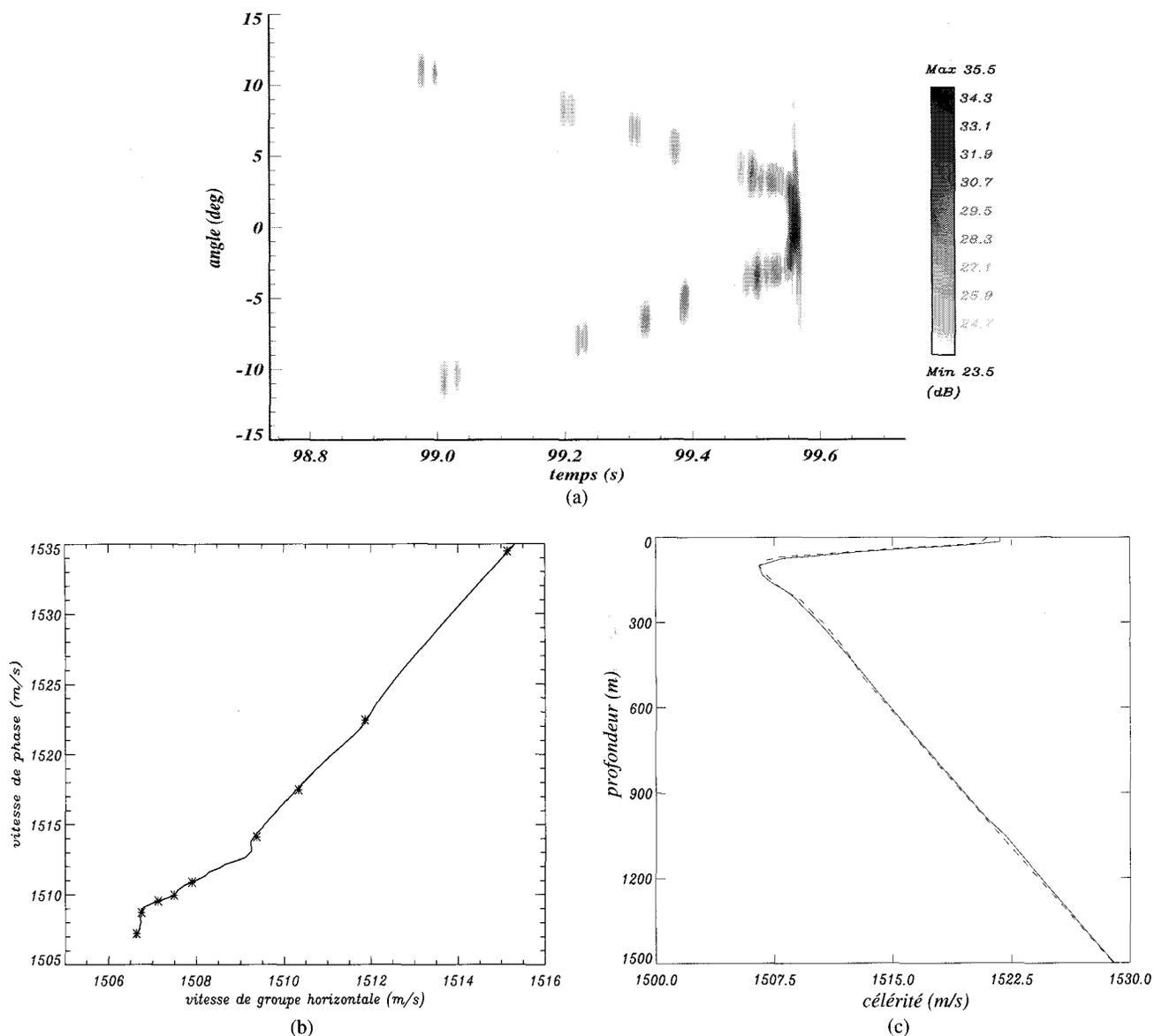


Figure 12. – Inversion de données simulées. Cas d'un profil de célérité présentant un chenal de propagation.

paragraphe 4.1.3 dans le cas où les grandeurs c_{min} , $c(z_P)$ et $c(z_R)$ sont inconnues (inversion sans information *a priori*). La profondeur z_R vaut ici 150 m. Nous présentons sur la figure 12(b) le résultat de la reconstruction de l'ensemble des points (\mathcal{E}) pour la valeur estimée de $c(z_R)$, et le profil de célérité reconstruit en ligne pleine sur la figure 12(c). Dans ce cas encore, le résultat de l'inversion est très satisfaisant. À noter néanmoins une légère erreur d'estimation de la célérité au voisinage de la surface. La couche thermocline a été reconstituée au moyen de quatre formations de voies réalisées respectivement entre les profondeurs 0 et 30 m, 0 et 50 m, 25 et 75 m, et 50 et 100 m donnant la valeur de la célérité aux profondeurs 15 m, 25 m, 50 m et 75 m. Pour la formation de voies effectuée entre 0 et 30 m, soit pour une antenne de 30 m de long, la résolution spatiale n'est pas suffisante pour

pouvoir estimer correctement la célérité au centre de l'antenne à 15 m, ce qui explique le décalage observé sur la figure 12(c) entre le profil de référence et le profil estimé au voisinage de la surface.

4.1.5. inversion de données expérimentales

Nous présentons les résultats d'une inversion de données enregistrées lors de l'expérimentation THETIS II réalisée en mer Méditerranée en 1994. Nous nous intéressons aux signaux émis par la station W5 située au large de la Corse et reçus près de Cap Ferrat sur une antenne constituée de 16 capteurs situés entre 145 et 185 m de profondeur. À la date de l'enregistrement, la distance de propagation était de 153,427 km et la profondeur de la source de 127 m. La source émettait un signal BPSK (Binary

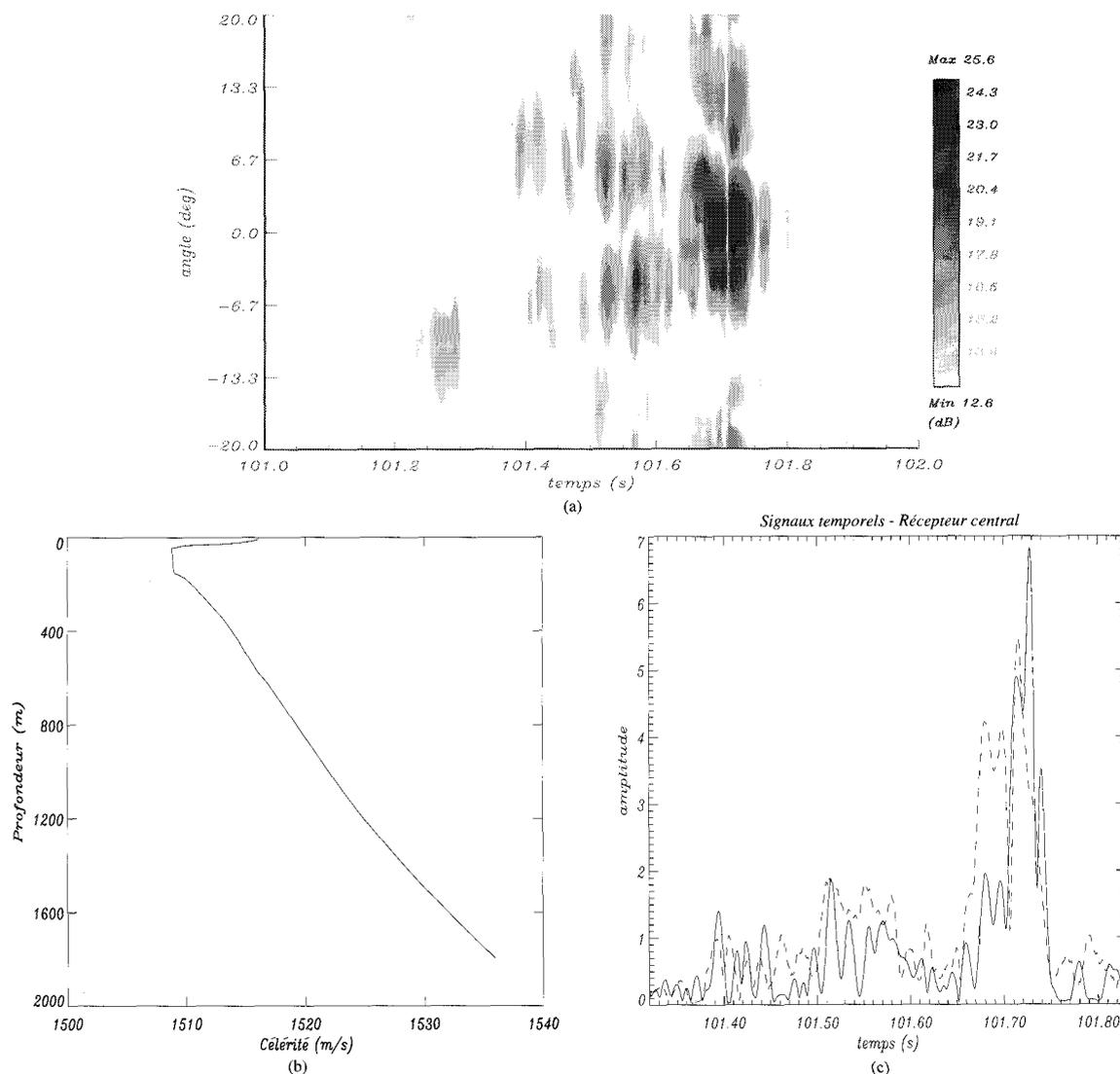


Figure 13. – Inversion de données expérimentales. (a) Formation de voies. (b) Résultat de l'inversion. (c) Comparaison entre le signal reconstruit et le signal enregistré sur le récepteur central de l'antenne.

Phase Shift Keying, signal modulé en phase à deux états), centré à la fréquence 400 Hz et de largeur de bande 100 Hz. La figure 13(a) est le résultat de la formation de voies réalisée sur tous les capteurs de l'antenne après filtrage adapté (démodulation complexe et intercorrélacion entre le signal émis et le signal reçu). On retrouve ici l'allure en fer à cheval de la représentation spatio-temporelle des signaux reçus telle qu'on l'obtient en simulation. Les paquets d'énergie obtenus vers le temps $t = 100,7$ s pour les angles supérieurs (en valeur absolue) à 10 degrés sont des lobes secondaires de la formation de voies.

Cette représentation est le point de départ de l'inversion du profil moyen de célérité. La seule information *a priori* que nous ayons sur le profil est la présence d'un chenal de propagation puisque l'enregistrement a eu lieu à la fin de l'été (septembre). À cette période, la température de l'eau en surface est élevée

(supérieure à 20 degrés). La méthode d'inversion utilisée est celle présentée au paragraphe 4.1.3. Malheureusement, l'antenne utilisée ici n'est pas assez grande pour pouvoir reconstituer le profil de célérité dans la couche thermocline (de 0 à 100 m de profondeur environ). Le traitement aurait nécessité une antenne trois à quatre fois plus grande située entre 0 et 200 m. L'inversion des données expérimentales ne permet dans ce cas de reconstituer le profil de célérité qu'en dessous de la couche thermocline, c'est-à-dire d'environ 100 m de profondeur jusqu'au sol. Le traitement de champs adaptés (Matched-Field Processing) nous impose de reconstituer le profil de célérité sur toute la hauteur d'eau de façon à comparer les signaux expérimentaux et reconstruits dans le sens direct. Puisqu'il n'est pas possible par inversion de reconstituer le profil de célérité sur les 100 premiers mètres, nous avons utilisé un enregistrement en température réalisé lors de l'expérimentation à

proximité de Cap Ferrat. La célérité reconstituée sur la figure 13(b) est le résultat d'une mesure expérimentale de 0 à 100 m et d'une inversion de 100 m jusqu'au sol (2500 m de fond) obtenue en minimisant l'erreur quadratique moyenne entre le signal expérimental et le signal reconstruit sur tous les capteurs de l'antenne en faisant varier les trois paramètres $c(z_R)$, c_{min} et $c(z_P)$. La profondeur z_R du récepteur central est ici de 165 m. La profondeur z_P a été choisie arbitrairement : nous avons estimé $c(z_P)$ pour la profondeur $z_P = 1500$ m. À titre de comparaison nous présentons sur la figure 13(c) le signal enregistré lors de l'expérimentation (ligne brisée) et le signal reconstruit pour les trois paramètres estimés (ligne pleine) sur le récepteur central de l'antenne. Il est difficile de conclure ici sur la qualité de l'inversion. Notons que l'étalement temporel des deux signaux est à peu près identique, tout comme leur allure globale (pics de faible amplitude entre les temps 101,40 s et 101,65 s, et pics de forte amplitude vers 101,70 s). Néanmoins la structure fine est assez différente d'un signal à l'autre.

4.1.6. conclusion sur la reconstitution du profil de célérité

Nous avons proposé dans ce paragraphe un algorithme d'inversion permettant de reconstruire le profil de célérité du milieu. Son principal avantage est de tenir compte des informations temporelles et spatiales des signaux reçus sur l'antenne. L'amplitude des signaux est également prise en compte lors du traitement de champs adapté (Matched-Field Processing). Nous avons pu mettre en avant la bonne précision de cet algorithme sur des données simulées. Par ailleurs, cette méthode d'inversion est directement applicable à des données expérimentales en utilisant un traitement classique par formation de voies. La qualité de l'inversion dépend essentiellement de la quantité d'information recueillie sur la représentation spatio-temporelle des signaux. Plus le nombre de maximums d'énergie sera grand et meilleure sera l'inversion. La distance de propagation doit donc être suffisamment grande, supérieure à 50 voire 100 km. Mise à part l'allure globale du profil de célérité (avec ou sans chenal), cette inversion ne nécessite aucune information *a priori*. Le temps de calcul dépend essentiellement de la connaissance des trois paramètres $c(z_R)$, c_{min} et $c(z_P)$. Si ces trois paramètres sont connus, l'inversion est réalisée en 5 à 10 minutes (sur un IBM RS 6000). En pratique, la célérité $c(z_P)$ est généralement connue par grand fond et est quasiment invariante au court du temps. L'inversion se réduit alors à l'estimation de deux paramètres seulement ($c(z_R)$, c_{min}).

4.2. estimation de la profondeur relative des instruments

Nous présentons dans ce paragraphe une deuxième application liée à l'écriture des positions modales des maximums d'énergie donnée par la relation (45). Nous allons mettre en évidence que

les écarts temporels entre les maximums d'énergie au sein d'un même paquet sont proportionnels à la somme ou à la différence des profondeurs de l'émetteur et du récepteur.

Dans le cas où les profondeurs des instruments (source et récepteur) sont relativement faibles (quelques centaines de mètres dans le cas d'un milieu de propagation de type océanique), on peut considérer que les nombres d'onde $k_{z,m}$ sont pratiquement constants de la surface aux profondeurs des instruments. Pour simplifier l'écriture, on considère que la profondeur z_m^+ du point de retournement supérieur est nulle (réflexions en surface). On peut alors écrire les simplifications suivantes :

$$k_{z,m}(z) \simeq k_{z,m}(0) \text{ et } v_{gr,m}^h(z) \simeq v_{gr,m}^h(0) \quad (53)$$

On considère un paquet de quatre maximums centrés autour des modes $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Le mode « moyen » est noté M_p comme au paragraphe 3.3. En soustrayant membre à membre les équations (45) et (47) et en utilisant l'approximation (53), il vient après avoir multiplié par $\frac{k_{z,m}(0)}{k_{r,m}} \frac{\Delta m}{\Delta k_{r,m}}$:

$$\frac{k_{z,m}(0)}{k_{r,m}} \frac{\Delta m}{\Delta k_{r,m}} \left[\frac{\Delta k_{r,m}}{\Delta m} - \frac{\Delta k_{r,M_p}}{\Delta M_p} \right] r - \varepsilon_1 z - \varepsilon_2 z_s = 0, \quad (54)$$

avec $m = m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Le terme entre crochets de l'expression (54) peut s'exprimer par un développement en série de Taylor en fonction de la différence $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - M_p$. On peut alors exprimer le terme $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - M_p$ en fonction de $\varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z_s$. Par un développement en série de Taylor, l'équation (54) s'écrit à l'ordre 1 :

$$m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - M_p = \alpha_o + \alpha_1 [\varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z_s] + o(\varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z_s), \quad (55)$$

où α_o et α_1 sont des constantes dépendant des paramètres autres que z et z_s . Dans le cas particulier où $z = z_s$, et où ε_1 et ε_2 sont opposés, les modes $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et M_p sont nécessairement égaux si bien que $\alpha_o = 0$. La différence $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - M_p$ est donc directement proportionnelle au terme $\varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z_s$.

La différence temporelle $\Delta T_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ entre les temps de propagation $t_{m_p}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et t_{M_p} s'exprime en tenant compte de l'approximation (53) :

$$\Delta T_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \simeq \frac{r}{v_{gr,m_p(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}^h} - \frac{r}{v_{gr,M_p}^h} + \frac{\varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z_s}{v_{gr,m_p(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}^v(0)} \quad (56)$$

la différence $\frac{r}{v_{gr,m_p(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}^h} - \frac{r}{v_{gr,M_p}^h}$ peut s'exprimer en fonction de la différence $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - M_p$ par le développement en série de Taylor (exprimé ici à l'ordre 1) :

$$\frac{r}{v_{gr,m_p(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}^h} - \frac{r}{v_{gr,M_p}^h} =$$

$$\beta_o + \beta_1 [m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - M_p] + o[m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - M_p], \quad (57)$$

où β_o et β_1 sont des constantes dépendant des paramètres autres que $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et M_p . Le cas particulier $z = z_s$ et $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$

impose $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = M_p$, ce qui implique que le coefficient β_o est nul.

En tenant compte du résultat donné par l'équation (55), la variation $\Delta T_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ s'exprime à l'ordre 1 par :

$$\Delta T_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \alpha_1 \beta_1 (\varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z_s) + \frac{\varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z_s}{v_{gr, m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^v(0)}. \quad (58)$$

Le produit $\alpha_1 \beta_1$ dépend du mode $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et est homogène à l'inverse d'une vitesse. Nous noterons $V_{m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^h = \frac{1}{\alpha_1 \beta_1}$. La variation $\Delta T_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une somme de deux termes :

$$\Delta T_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \Delta T_p^h(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \Delta T_p^v(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (59)$$

$$\text{avec } \Delta T_p^h(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{(\varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z_s)}{V_{m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^h}$$

$$\text{et } \Delta T_p^v(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{(\varepsilon_1 z + \varepsilon_2 z_s)}{v_{gr, m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^v(0)}.$$

La variation temporelle $\Delta T_p^h(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est due à la différence de vitesse de groupe horizontale entre les modes $m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et M_p . La variation $\Delta T_p^v(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est due à la vitesse de groupe verticale. Ces deux termes sont proportionnels à la somme ou à la différence des profondeurs des instruments.

On peut alors envisager d'estimer la profondeur relative des instruments par une simple mesure des temps de propagation des maximums d'énergie. Dans une représentation spatio-temporelle, un paquet de quatre maximums peut-être représenté comme sur la figure 14. La moyenne arithmétique des quatre temps de propagation $t_{m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$ donnent une très bonne estimation du temps « moyen » t_{M_p} . Les variations $\Delta T_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sont données par la relation :

$$\Delta T_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = t_{m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} - t_{M_p}. \quad (60)$$

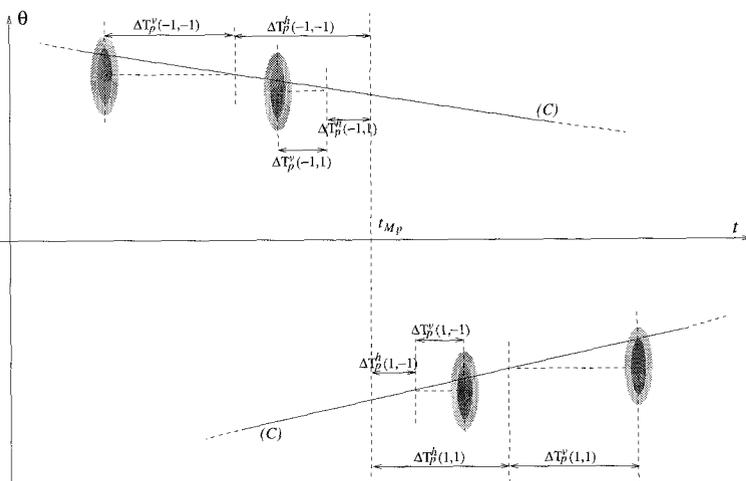


Figure 14. – Représentation des temps de propagation pour un paquet de quatre maximums centré autour du mode M_p .

En considérant que les vitesses $V_{m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^h$ et $v_{gr, m_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^v$ sont à peu près constantes au voisinage du mode M_p , on déduit de l'équation (59) la relation entre les profondeurs des instruments et les variations temporelles $\Delta T_p(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. La relation :

$$z_s = z \frac{[\Delta T_p(1, -1) - \Delta T_p(-1, 1)] - [\Delta T_p(1, 1) - \Delta T_p(-1, -1)]}{[\Delta T_p(1, -1) - \Delta T_p(-1, 1)] + [\Delta T_p(1, 1) - \Delta T_p(-1, -1)]} \quad (61)$$

exprime ainsi la profondeur de la source en fonction de celle du récepteur. On peut également exprimer la relation inverse qui donne la profondeur du récepteur en fonction de celle de l'émetteur par :

$$z = z_s \frac{[\Delta T_p(1, -1) - \Delta T_p(-1, 1)] + [\Delta T_p(1, 1) - \Delta T_p(-1, -1)]}{[\Delta T_p(1, -1) - \Delta T_p(-1, 1)] - [\Delta T_p(1, 1) - \Delta T_p(-1, -1)]} \quad (62)$$

L'estimation des profondeurs relatives des instruments est donnée uniquement en fonction des temps de propagation relatifs. Notons ici que la distance de propagation r n'intervient pas dans cette estimation. Nous pouvons illustrer ceci à l'aide de l'exemple du chapitre 3 (cas du profil de célérité linéaire). Si l'on considère par exemple le paquet de quatre maximums mis en évidence sur la figure 7, les différents temps de propagation des maximums d'énergie sont : 99,648 s, 99,665 s, 99,699 s et 99,716 s. La position centrale de l'antenne est $z_R = 300$ m. Le temps de propagation moyen t_M , que l'on calcule en pratique par la moyenne arithmétique des quatre temps de propagation, vaut alors $t_M = 99,682$ s. En utilisant l'équation (61), nous obtenons $z_s = 100,0$ m, qui très exactement la profondeur de la source utilisée pour cette simulation. Le résultat obtenu sur cette simulation est donc très satisfaisant.

En fait, par un calcul d'incertitude effectué sur les relations (61) et (62), on peut montrer que la connaissance des temps de propagation des maximums d'énergie à la milliseconde près permet d'estimer de façon générale la profondeur de l'instrument à 1% près, à condition de connaître précisément la profondeur d'un des deux instruments (émetteur ou antenne). Attention, on considère ici que les nombres d'onde verticaux $k_{z, m}$ sont approximativement constants de la surface à la profondeur des instruments. Une variation importante suivant la profondeur de ces nombres d'onde donnera une incertitude supérieure à 1%, mais qui ne peut être chiffrée dans le cas général. Notons également que l'utilisation d'une antenne de réception n'est pas indispensable pour effectuer un tel traitement : un unique capteur à la réception suffit, à condition de pouvoir identifier les temps d'arrivée d'un paquet. Cette méthode peut également s'appliquer aux signaux réfléchis sur le sol.

Nous avons validé ce traitement sur des données expérimentales obtenues lors de la campagne CONVHIV de 1991 en mer Méditerranée. Lors de cette expérimentation, la profondeur de l'émetteur était de 150 m et les différents récepteurs étaient situés à l'aplomb de cinq stations distantes de 6 à 30 km de la source. La profondeur des récepteurs variait suivant les stations de 50 m

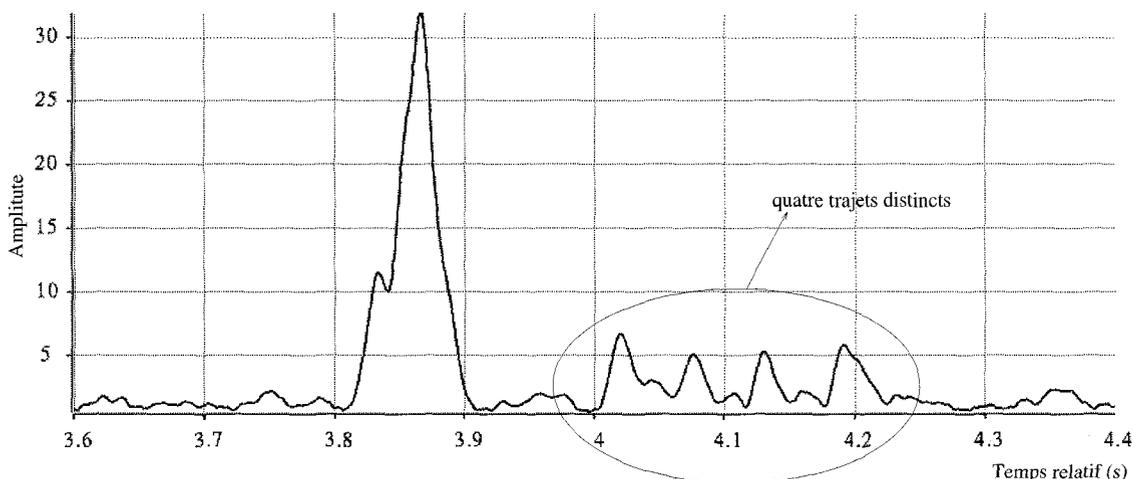


Figure 15. – Signal reçu à 300 m de profondeur par la station située à 20 km.

Tableau 1. – Profondeurs des récepteurs mesurées et estimées.

Station	Profondeur du récepteur (m)	Temps relatifs mesurés (s)				Profondeur estimée (m)	Erreur relative (%)
20 km	200	4,129	4,186	4,206	4,265	201,7	0,85
	300	4,020	4,076	4,131	4,191	292,2	2,6
	400	0,775	0,831	0,919	0,978	379,6	5,1
35 km	250	1,909	1,963	2,004	2,078	246,1	1,6
	350	3,212	3,277	3,358	3,432	324,8	7,2
	500	2,999	3,059	3,204	3,269	498,0	0,4

à 500 m, avec plusieurs récepteurs par station. La source émettait un signal BPSK centré à la fréquence 400 Hz, de largeur de bande 200 Hz. Seuls les enregistrements des deux dernières stations situées à 20 et 35 km de la source ont laissé apparaître des paquets de quatre maximums très nettement marqués. La figure 15 représente l'un de ces enregistrements : les quatre maximums correspondent à des trajets réfléchis sur le sol. Nous avons cherché à retrouver les profondeurs des récepteurs par des mesures de temps de trajet des signaux, en supposant connue la profondeur de la source. Les mesures et les résultats sont donnés dans le tableau 1.

Les valeurs données dans la deuxième colonne du tableau 1 sont les profondeurs des récepteurs mesurées lors de l'expérimentation. Malheureusement, les erreurs de mesures n'ont pu être chiffrées pendant la campagne. Les quatre temps de propagation relatifs mesurés correspondent de gauche à droite à $t(-1, -1)$, $t(-1, 1)$, $t(1, -1)$ et $t(1, 1)$. La profondeur estimée dans l'avant dernière colonne est obtenue en utilisant la relation (62) avec $z_s = 150$ m et $\Delta T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = T - t(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, où T est la moyenne des quatre temps $t(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. L'erreur relative entre la profondeur mesurée et estimée est donnée dans la dernière colonne. Cette erreur ne dépasse pas 7,2% sur les six mesures effectuées et est en moyenne inférieure à 3%. Bien que l'on ne connaisse pas l'incertitude sur la profondeur réelle des instruments, ces résultats

tendent à confirmer la très bonne précision de l'estimation des profondeurs relatives des instruments par une simple mesure des temps de trajet.

Cette estimation peut être utilisée dans plusieurs domaines. Pour des études de localisation de source, la connaissance de la profondeur du récepteur permet de retrouver la profondeur de la source. En tomographie acoustique océanique, la position de la source est connue. L'estimation de la profondeur du récepteur peut s'utiliser pour des antennes synthétiques. Dans ce cas la mesure expérimentale de la profondeur du récepteur mobile est très approximative car le récepteur ne remonte jamais verticalement à vitesse constante. La méthode proposée dans ce paragraphe pourrait corriger les erreurs d'estimation de la profondeur du récepteur tout au long de sa remontée.

5. conclusions et perspectives

Nous avons présenté divers aspects de la propagation dans un guide d'ondes par la théorie des modes. Les deux points principaux de cet article sont :

- la prise en compte de la dépendance en z du temps de propagation dans un guide d'ondes hétérogène suivant la profondeur et,
- la reconstruction de la relation liant la vitesse de groupe horizontale à la vitesse de phase (horizontale), qui dans l'approximation W.K.B. est indépendante de la fréquence et qui ne dépend que des propriétés physiques du milieu de propagation.

La reconstruction de la courbe *vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase* s'obtient avec une bonne précision, en utilisant une antenne verticale à la réception et par un traitement classique par formation de voies. Le traitement nécessite une bonne résolution des signaux reçus, c'est-à-dire une grande antenne (50 voire 100 m ou plus) et un signal d'émission large bande. La distance de propagation doit être également importante, supérieure à 50 km.

La principale application d'un tel traitement est la reconstruction directe du profil de célérité du milieu. Nous avons proposé dans cet article un algorithme d'inversion utilisable directement sur des données expérimentales. Nous avons vu en particulier que cette inversion ne nécessite aucune information *a priori* sur le profil de célérité. Cet algorithme a pu être testé sur différents types de données, avec une très bonne reconstruction du profil de célérité en simulation et une reconstruction satisfaisante dans le cas de données expérimentales (l'antenne de réception était malheureusement trop courte pour pouvoir utiliser convenablement l'algorithme). Le principal avantage de cette méthode d'inversion est de s'affranchir de la phase d'identification des différents trajets obtenus sur le ou les récepteurs et qui est le point le plus délicat dans les méthodes d'inversion classiques effectuées sur les temps de retard.

La deuxième application proposée concerne l'estimation des profondeurs relatives des instruments tomographiques. Nous avons vu que les écarts temporels entre les quatre trajets d'un même paquet sont proportionnels à la somme ou la différence des profondeurs des instruments. L'estimation de la profondeur relative de la source ou du récepteur a donné des résultats très satisfaisants, tant sur des données simulées qu'expérimentales.

Actuellement, nous mettons en place une méthode d'inversion utilisant à la fois la reconstruction de la relation *vitesse de groupe horizontale - vitesse de phase* et des fonctions empiriques orthogonales (décomposition modale des perturbations de la célérité autour d'un profil de célérité moyen) afin de paramétrer le profil de célérité du milieu. Cette méthode, utilisant de l'information *a priori*, devrait permettre de traiter les cas d'inversion difficiles tels que les profils de célérité de type atlantique présentant deux chenaux de propagation ou bien de pallier au problème d'une antenne de réception trop courte (problème que nous avons rencontré en traitant les signaux de l'expérimentation THETIS II).

Remerciements

Pour cette étude, nous avons utilisé les signaux enregistrés lors des expérimentations THETIS I et THETIS II (Programme MAST, en

collaboration avec l'IFREMER, l'université de Kiel, et FORTH). Nous remercions également le Centre Militaire d'Océanographie de nous avoir fourni les enregistrements de l'antenne verticale située au large de Cap Ferrat.

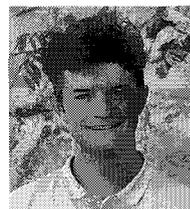
BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. Munk, C. Wunsch, "Ocean acoustic tomography : a scheme for large scale monitoring", *Deep Sea Res.*, Vol 26, 1979, p. 123-161.
- [2] W. Munk, P. Worcester, C. Wunsch, "Ocean acoustic tomography", Cambridge university press, Cambridge, 1995.
- [3] P. Le Bras, "Analysis of the channel time response from modal filtering and array beamforming : application to ocean tomography", *Ocean*, Vol II, Brest 1994, p. 646-650.
- [4] G.B. Whitham, "Linear and non linear waves", John Wiley & Sons, New York 1974.
- [5] L. Schiff, "Quantum mechanics", Mc Graw-Hill, New York, 1955.
- [6] C. Clay, H. Medwin, "Acoustical oceanography", John Wiley & Sons, 1977.
- [7] I. Tolstoy, C. Clay, "Ocean acoustics", Mc Graw-Hill, New York 1966.
- [8] M. Guthrie, "The connection between normal modes and rays in underwater acoustics", *J. of Sound and Vibration*, Vol 32, #2, 1974, p. 289-293.
- [9] M. Guthrie, C. Tindle "Ray effects in the normal mode approach to underwater acoustics", *J. of Sound and Vibration*, Vol 47, #3, 1976, p. 403-413.
- [10] C. Tindle, M. Guthrie "Rays as interfering modes in underwater acoustics", *J. of Sound and Vibration*, Vol 34, #2, 1974, p. 291-295.
- [11] F. Jensen, W. Kuperman, M. Porter, H. Schmidt, "Computational Ocean Acoustics", Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [12] A. Kamel, L. Felsen, "On the ray equivalent of a group of modes", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol 71, #6, Juin 1982, p. 1445-1452.
- [13] W. Munk, C. Wunsch, "Ocean acoustic tomography : rays and modes.", *Rev. Geophys. Space Phys.*, Vol 21, 1983, p. 777-793.

Manuscrit reçu le 29 Juillet 1996

L' AUTEUR

Patrick PIGNOT



Né en 1969 à Belfort, Patrick PIGNOT est ingénieur de l'École Nationale Supérieure de Physique de Grenoble et titulaire du DEA Signal-Image-Parole de l'Institut National Polytechnique de Grenoble depuis 1993. Il est actuellement en dernière année de thèse au Centre d'Étude des PHénomènes Aléatoires et Géophysiques de Grenoble. Il consacre ses recherches à la résolution du problème inverse et aux problèmes de traitement d'antenne pour la Tomographie Acoustique Océanique.