

Filtres récursifs pour l'estimation du gradient et la détection de contours par interpolation spline

Recursive Filters for Gradient Estimation and Contour Extraction Using B-Spline Interpolation

par Alain CHEHIKIAN

Laboratoire de Traitement d'Image et Reconnaissance de Formes
INPG-UJF – 46, avenue Félix Viallet
F-38031 Grenoble cedex

résumé et mots clés

Cet article concerne le calcul du gradient d'un signal discrétisé, en vue de détecter des contours. Une solution élégante à ce problème est apportée par l'interpolation de la fonction discrétisée par une spline cubique. Cependant, lorsque le signal est riche en fronts abrupts, cette opération doit être précédée d'un lissage, sous peine d'obtenir une dérivée présentant des extrema multiples. Nous proposerons une classe de filtres de lissage et nous déduirons le filtre dérivateur correspondant. Nous montrerons, en calculant les critères de Canny, que eu égard à ces critères, le filtre dérivateur d'ordre 1 donne d'aussi bons résultats pour un coût de calcul minimal, que les filtres d'ordre plus élevé. Nous montrerons que dans le cas 1D, les filtres dérivateurs de Shen-Castan et de Deriche font partie de cette classe de filtres. Nous montrerons que dans le cas 2D, l'opérateur de Deriche se comporte comme notre opérateur d'ordre 2, pour autant que le facteur d'échelle α soit petit, et donc que l'effet de lissage soit important. Nous nous intéresserons à la recherche des maxima du gradient. Nous proposerons deux opérateurs permettant d'obtenir l'un : un sur-échantillonnage du gradient, l'autre : un échantillonnage décalé du gradient. A partir des images de gradient délivrées par ces opérateurs, la recherche du maximum devient une opération triviale. Elle est en outre robuste aux erreurs d'arrondi. Nous illustrerons sur quelques images typiques les contours obtenus à partir de ces opérateurs.

B-Splines, Gradient, Contours.

abstract and key words

This paper addresses the problem of calculating the gradient of a discrete signal with the goal of detecting contour. Interpolating such a function by a cubic spline is indeed a good solution. However, when step contours are present in the signal, such an interpolation should be associated with a smoothing operation, to avoid multiple maximas of the gradient shape. We propose a class of smoothing filters, from which we deduce a class of derivative filters. We will show, computing Canny's criteria, that according to them, the first order filter provides results as good as those of higher order, while having a lower computation cost. We will show that in the 1D case, the Shen-Castan's and Deriche's derivative filters belong to this class of filter. We will show that in the 2D case Deriche's operator acts as our second order operator, provided that the scale parameter α be small, meaning that the smoothing effect is important. Then we will address the problem of searching the maxima of the gradient. We will propose two operators. One which provides an over-sampled gradient image. The other provides a gradient image of the same size of the original, but resampled on intermediate points. Such gradient images make easier and more robust to rounding error the search of maxima. We will then illustrate on some typical images the results we obtain from the proposed operators.

B-Spline, Gradient, Contours.

1. introduction

C'est un lieu commun de dire qu'une des tâches principales à exécuter, lors d'une segmentation d'image selon une approche frontière, concerne la détection de contour. Les algorithmes utilisés passent par l'intermédiaire obligé du calcul du gradient ou du laplacien d'une fonction discrétisée et par conséquent non dérivable. Si quelques auteurs se sont préoccupés de l'interpolation d'une telle fonction par une surface [1][2][3], beaucoup d'auteurs se sont surtout attachés aux problèmes induits par la présence de bruit, et ont cherché à améliorer le calcul des dérivées par un lissage préalable de l'image. Un exemple typique de cette démarche est celle de Canny[4]. Il considère un modèle continu du contour : l'échelon de Heavyside, perturbé par un bruit gaussien également continu. En maximisant des rapports signal-à-bruit, il déduit les caractéristiques d'un filtre optimal pour le calcul du gradient, à réponse impulsionnelle finie. Le filtre discret est ensuite obtenu par échantillonnage. Deriche [5] reprend la démarche de Canny mais relaxe la contrainte sur la réponse impulsionnelle finie. Il déduit, de même que celui-ci, un filtre continu optimal dont les performances, sont notablement supérieures. Le filtre discret est également obtenu par échantillonnage.

Plus récemment, M. Unser *et al* [6][7] ont apporté une contribution importante au problème soulevé par le calcul des dérivées d'une fonction discrétisée. Ils montrent que lorsque la discrétisation est effectuée sur une maille régulière, l'approximation de la fonction par une spline continue devient une opération abordable au plan du coût de calcul. Leur approche est d'autant plus intéressante que, s'agissant du calcul des dérivées aux points d'échantillonnage, la connaissance des coefficients de spline est suffisante. Ceux-ci sont déterminés, à partir des échantillons de la fonction, par un filtrage récursif dont le coût de calcul reste très modéré pour autant que le degré de la spline reste limité. Cependant, l'approximation d'un signal discret par une spline continue introduit toujours une erreur. En particulier, la spline d'interpolation ainsi que ses dérivées présentent un comportement oscillatoire amorti en présence de transitions brutales dans le signal discret. Ce comportement, également observable dans les splines lissantes proposées par Unser *et al* est évidemment inacceptable en détection de contour. C'est ce problème qui sera abordé dans cet article.

Cet article sera organisé comme suit. Nous rappellerons en section 2, quelques résultats essentiels concernant les transformations spline, repris de l'article de Unser. Nous nous intéresserons en section 3, au calcul de la dérivée en présence d'un échelon discrétisé. Nous montrerons qu'alors, la dérivée estimée à partir d'une spline cubique d'interpolation présente des extrema multiples, et est donc inexploitable pour la détection de contours. Nous montrerons que la solution évidente à ce problème réside dans un lissage réalisé au moyen d'un filtre récursif d'ordre n . Nous montrerons, en nous référant aux critères de Canny, que d'augmenter l'ordre du filtre ne conduit pas à un gain appréciable eu égard à

ces critères. Dans la section 4, nous traiterons de l'extension au cas 2D. Nous expliciterons les équations aux différences permettant le calcul des composantes du gradient, après lissage par le filtre d'ordre 1. Nous mettrons en évidence le coût de calcul réduit de cet algorithme. Nous comparerons en section 5 les opérateurs d'ordre 1 et d'ordre 2 proposés avec, respectivement, les opérateurs discrets de Shen-Castan et de Deriche. Nous montrerons que sous certaines conditions concernant le paramètre de lissage, l'opérateur de Deriche se comporte en fait comme l'opérateur spline d'ordre 2 que nous proposons. Nous montrerons que si le filtre dérivateur de Shen-Castan et le filtre dérivateur d'ordre 1 proposé sont identiques, les filtres de lissage diffèrent. Nous nous intéresserons dans la section 6, à la détection de contours c'est-à-dire à la recherche des maxima du gradient. Le maximum du gradient n'étant pas localisé sur un point d'échantillonnage, nous montrerons l'intérêt de considérer un sur-échantillonnage d'ordre 2 de la spline et nous proposerons un opérateur spécifique permettant d'obtenir une image du gradient interpolée. Nous proposerons également un opérateur permettant d'obtenir une image du gradient de même dimension que l'image d'origine, mais dont les points d'échantillonnage sont les points intermédiaires de l'échantillonnage initial. Cet opérateur a un coût de calcul notablement moindre que le précédent. Sur ces images de gradient, la recherche du maximum devient une opération triviale. Enfin, en section 7, nous illustrerons sur quelques images type, les résultats obtenus en détection de contour grâce à ces deux opérateurs. Le second opérateur permettant d'obtenir une carte de contours de même dimension que l'image initiale, nous comparerons les résultats obtenus à ceux obtenus par les opérateurs de Shen-Castan et de Deriche.

2. transformation spline et dérivation d'un signal discret

En Traitement d'Image, les techniques de segmentation par contour font appel de manière intensive au calcul du gradient et du laplacien. Ces opérateurs n'étant pas définis pour un signal discret, on utilise des opérateurs de différence finie qui trouvent leur justification dans le cadre d'un développement en série de Taylor. L'approximation ainsi réalisée peut convenir si les dérivées d'ordre supérieur peuvent être négligées, ce qui n'est pas réaliste dans le voisinage d'un contour. Le passage par une interpolation spline peut lever cette difficulté. Cette opération est d'autant plus intéressante que dans le cas d'un signal échantillonné de manière régulière, la transformation spline se traduit par un filtrage peu coûteux en temps de calcul. Nous rappelons ici les résultats essentiels établis par M. Unser *et al* [6][7]. Le lecteur trouvera dans ces articles les démonstrations et autres développements.

Une spline polynomiale continue, notée $g_1^n(x)$, est une fonction continue de L_2 (de carré intégrable), de classe C^{n-1} (continûment dérivables jusqu'à l'ordre $n - 1$), polynomiale de degré n par morceaux dans $[k, k + 1]$, ($k \in Z$), si n est impair, dans $[k - 0.5, k + 0.5]$, ($k \in Z$) si n est pair. Dans cette notation l'exposant fait référence au degré du polynôme, l'indice fait référence à l'espacement des points de raccordement de chaque polynôme. Dans ce qui suit, cet espacement sera toujours 1, et par souci de simplicité nous omettrons l'indice.

Une telle fonction s'exprime au moyen de la suite des coefficients de spline $y(k)$, ($y \in l^2$), et des fonctions B-Splines continues $\beta^n(k)$ par la relation :

$$g^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k) \cdot \beta^n(x - k), \quad (x \in R) \quad (1)$$

où

$$\beta^n(x) = \beta^{n-1} * \beta^0 = \underbrace{\beta^0(x) * \beta^0(x) \dots * \beta^0(x)}_{n+1 \text{ fois}} \quad (2)$$

et

$$\beta^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

En échantillonnant la spline continue aux points $x = k$, on montre que la relation (1) s'écrit :

$$g^n(k) = y(k) * \beta^n(k) = y(k) * b^n(k) \quad (4)$$

où $b^n(k)$ est la suite discrète obtenue par échantillonnage de $\beta^n(x)$.

La relation (4) permet le calcul des coefficients de la spline continue à partir de la suite des échantillons $g^n(k)$ connaissant la suite $b^n(k)$. En considérant la transformée en z :

$$g^n(k) \xrightarrow{z} g^n(z) = y(z) \cdot B^n(z) \quad (5)$$

se traduit par :

$$y(k) \xrightarrow{z} y(z) = g^n(z) \cdot (B^n(z))^{-1} \quad (6)$$

Les relations (5) et (6) définissent une transformation réversible. Les coefficients $y(k)$ s'obtiennent par la transformation directe (6), où $(B^n(z))^{-1}$ représente le filtre spline direct. Réciproquement, la transformation spline inverse, relation (5), conduit à partir des coefficients $y(k)$, à la connaissance des échantillons $g^n(k)$ de la spline continue $g^n(x)$. $B^n(z)$ représente le filtre spline inverse. Appliquées à un signal $s(x)$ continu et de carré intégrable, connu par une suite d'échantillons $s(k)$, ces relations garantissent que la spline continue associée $g^n(x)$ de coefficients $y(k)$:

$$y(k) \xrightarrow{z} y(z) = s(z) \cdot (B^n(z))^{-1}$$

obéit à :

$$g^n(k) = s(k)$$

La seule condition à respecter étant que les filtres direct et inverse soient stables.

Les coefficients des B-Splines discrètes sont calculées au moyen des formules récursives :

$$b^n(k) = \frac{\left(\frac{n+1}{2} + k\right) \cdot c^{n-1}(k) + \left(\frac{n+1}{2} - k\right) \cdot c^{n-1}(k-1)}{n} \quad (7)$$

$$c^n(k) = \frac{\left(\frac{n+2}{2} + k\right) \cdot b^{n-1}(k+1) + \left(\frac{n}{2} - k\right) \cdot b^{n-1}(k)}{n} \quad (8)$$

avec les conditions initiales :

$$b^0(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad c^0(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et où, $c^n(k)$ est la B-Spline discrète décalée :

$$c^n(k) = \beta^n\left(k + \frac{1}{2}\right) \quad (9)$$

Nous donnons, tableau I (extrait de [6]), les transformées en z des filtres splines inverses jusqu'à l'ordre 3 pour la spline symétrique, et jusqu'à l'ordre 2 pour la spline décalée, car elles nous intéressent plus particulièrement dans la suite de cet article :

Tableau 1.

n	$B^n(z)$	$C^n(z)$
0	1	1
1	1	$\frac{1+z}{2}$
2	$\frac{z+6+z^{-1}}{8}$	$\frac{1+z}{2}$
3	$\frac{z+4+z^{-1}}{6}$	

On constate que les filtres splines inverses, représentés dans ce tableau, sont à réponse impulsionnelle finie, et par conséquent, les filtres splines directs sont des filtres récursifs à réponse impulsionnelle infinie. Ces filtres sont stables car leur pôles sont situés en dehors du cercle unité.

Un intérêt essentiel de la transformation spline en Traitement Numérique du Signal et des Images est qu'elle résout le problème de la dérivation d'un signal discrétisé en proposant la dérivation de la fonction spline d'interpolation. En Traitement d'Image où on est habituellement intéressé par les dérivées premières et secondes, l'interpolation par une spline cubique apporte une solution intéressante car peu coûteuse en calculs.

On montre que quel que soit le degré de la spline :

$$\left. \frac{\partial g^n(x)}{\partial x} \right|_{x=k} = [y(k) - y(k-1)] * c^{n-1}(k) \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial^2 g^n(x)}{\partial x^2} \right|_{x=k} = [y(k+1) - 2 \cdot y(k) + y(k-1)] * b^{n-2}(k) \quad (11)$$

Ces relations s'interprètent de la façon suivante : les coefficients de spline des dérivées première et seconde de la spline d'interpolation sont respectivement :

$$[y(k) - y(k - 1)] \text{ et } [y(k + 1) - 2 \cdot y(k) + y(k - 1)]$$

Ces coefficients permettent de calculer la spline continue dérivée au moyen de la relation fondamentale (1). Du fait de la dérivation, la B-spline intervenant dans cette relation est celle d'ordre $n - 1$ ou $n - 2$ selon l'ordre de la dérivation. Le retour au cas discret est régi par la relation (4) dont les relations (10) et (11) ne sont que des adaptations.

Dans le cas d'une interpolation par une spline cubique, ces relations deviennent :

$$\left. \frac{\partial g^3(x)}{\partial x} \right|_{x=k} = \frac{1}{2} \cdot [y(k + 1) - y(k - 1)] \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial^2 g^3(x)}{\partial x^2} \right|_{x=k} = [y(k + 1) - 2 \cdot y(k) + y(k - 1)] \quad (13)$$

On retrouve les opérateurs de différence finie habituellement utilisés, appliqués cependant aux coefficients de spline et non au signal discrétisé.

3. calcul du gradient d'un signal de type échelon au moyen d'une spline cubique

On s'intéresse dans ce qui suit au calcul de la dérivée première d'un signal mono-dimensionnel en utilisant la transformation spline cubique. Compte tenu de ce qui a été dit précédemment, le calcul de la dérivée s'obtient par le calcul préalable des coefficients de spline d'interpolation du signal discret, suivi par le calcul de la dérivée aux points d'échantillonnage par application d'un opérateur de différence finie. Il est important de souligner que le résultat de cette opération est la dérivée de la spline et non de la fonction continue dont on ne connaît que des échantillons. Ces deux fonctions diffèrent par un terme d'erreur qui peut être important si le signal présente des fronts abrupts. C'est le cas des contours modélisés par un échelon tels qu'on les considère habituellement en Traitement d'image.

Soit $s(k)$ un échelon discrétisé :

$$s(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On notera que sur un échelon discrétisé, la position exacte du front est perdue : sanction immédiate du non-respect du théorème d'échantillonnage.

Soit $g(x)$ la spline cubique d'interpolation de $s(k)$. La dérivée aux points d'échantillonnage est donnée par :

$$\begin{aligned} g'(k) \xleftrightarrow{z} g'(z) &= s(z) \cdot \frac{z - z^{-1}}{2} \cdot (B^3(z))^{-1} \\ &= s(z) \cdot \frac{z - z^{-1}}{2} \cdot \frac{6}{z + 4 + z^{-1}} \end{aligned} \quad (14)$$

Cette expression peut s'écrire :

$$g'(k) \xleftrightarrow{z} g'(z) = s(z) \cdot \frac{z - z^{-1}}{2} \cdot \left[\frac{1 + a}{1 + az} \cdot \frac{1 + a}{1 + az^{-1}} \right];$$

$$a = 2 - \sqrt{3}$$

ou encore

$$\begin{aligned} g'(k) \xleftrightarrow{z} g'(z) \\ = s(z) \cdot \frac{z - z^{-1}}{2} \cdot \left[\frac{1}{1 + az} + \frac{1}{1 + az^{-1}} - 1 \right] \cdot \frac{1 + a}{1 - a} \end{aligned} \quad (15)$$

Les deux formulations permettent le calcul de $g'(k)$ au moyen de deux filtres récursifs l'un causal et l'autre anti-causal. La dernière formulation permet le calcul aisé de la réponse à l'échelon discrétisé. On obtient :

$$g'(k) = \frac{1 + a}{2} \cdot (g'_-(k) + g'_+(k))$$

avec :

$$\begin{aligned} g'_-(k) &= (-a)^{-(k-1)} & k < 0 \\ g'_+(k) &= (-a)^k & k \geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

On constate que la dérivée ainsi calculée présente des extrema multiples alternativement positifs et négatifs mais dont l'amplitude décroît très rapidement. L'existence de ces extrema est dû à l'erreur d'interpolation dont le spectre s'étend vers les hautes fréquences, ainsi que le montre la figure 1(a) qui représente la spline cubique d'interpolation de l'échelon discrétisé ainsi que la dérivée de celle-ci. Un même comportement, quoique atténué, peut être observé lorsque l'interpolation est réalisée au moyen des splines lissantes proposées par Unser et *al.*

Une solution évidente à ce problème réside dans le filtrage passe-bas du signal. La réponse à l'échelon discrétisé suggère le filtre $F(z)$:

$$F(z) = B^3(z) \cdot f(z) = \frac{z + 4 + z^{-1}}{6} \cdot \left[\frac{1 + b}{1 + bz} \cdot \frac{1 + b}{1 + bz^{-1}} \right] \quad (17)$$

car alors, la réponse à l'échelon filtré s'exprime par les mêmes relations que celles exprimées en (16), mais où le paramètre libre b prend la place du paramètre fixe a . En choisissant :

$$-1 < b < 0,$$

soit :

$$b = -e^{-\alpha} \quad \text{où } \alpha > 0$$

on assure à la fois que le filtre récursif $f(z)$ est stable, et que la réponse à l'échelon ne présente qu'un seul maximum, par ailleurs

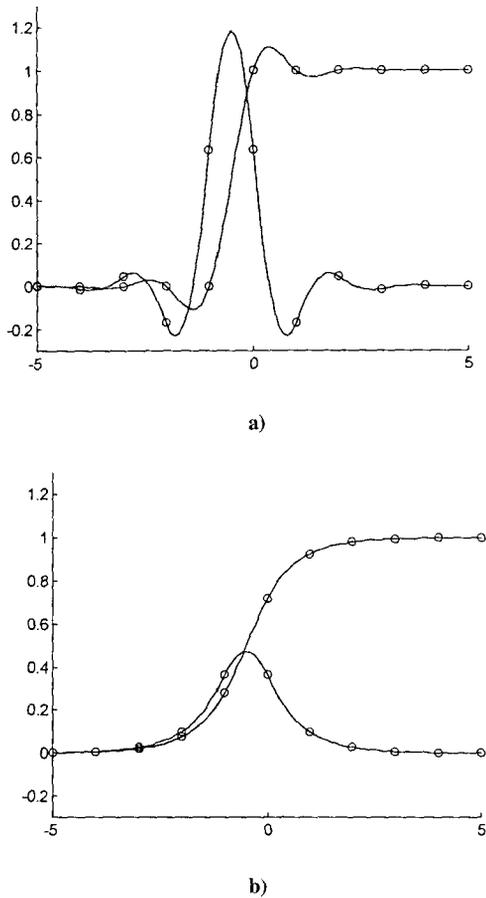


Figure 1. – Spline continue d’interpolation de l’échelon discrétisé et sa dérivée. Les points d’échantillonnage sont représentés par des °. En (a) : échelon non filtré. En (b) : échelon filtré, $b = -a = -0.268$.

positif. La figure 1(b) représente la spline d’interpolation de l’échelon ainsi filtré, ainsi que sa dérivée. On notera que la spline dérivée continue présente un seul maximum à $x = -0.5$, tandis que la spline échantillonnée présente un maximum en plateau à $k = -1$ et à $k = 0$.

L’estimation du gradient est alors donnée par l’équation :

$$\hat{g}'(k) \xleftrightarrow{z} \hat{g}'(z) = s(z) \cdot \frac{z - z^{-1}}{2} \cdot f(z) = s(z) \cdot H(z)$$

où

$$H(z) = \frac{z - z^{-1}}{2} \cdot f(z) = \frac{z - z^{-1}}{2} \cdot \left[\frac{1+b}{1+bz} \cdot \frac{1+b}{1+bz^{-1}} \right] \quad (18)$$

$H(z)$ ainsi défini intègre l’opération de lissage du signal, la transformation spline directe, le calcul des coefficients de la spline dérivée, et la transformation spline inverse qui donne les valeurs de la dérivée aux points d’échantillonnage.

Ordre du filtre de lissage

La réponse en fréquence du filtre de lissage est donnée par :

$$F(\omega) = \frac{4 + 2 \cdot \cos(\omega)}{6} \cdot \frac{(1+b)^2}{(1+b^2) + 2 \cdot b \cdot \cos(\omega)}$$

Elle est composée de deux fonctions de transfert unimodales et dont les réponses impulsionnelles sont également unimodales. En itérant chacun des filtres correspondants, on n’introduira pas de maximum supplémentaire dans l’estimation du gradient.

On peut donc, en particulier, généraliser les filtres de lissage et d’estimation du gradient sous la forme :

$$F_n(z) = \frac{z + 4 + z^{-1}}{6} \cdot f_n(z) = \frac{z + 4 + z^{-1}}{6} \cdot \left[\frac{1+b}{1+bz} \cdot \frac{1+b}{1+bz^{-1}} \right]^n \quad (19)$$

$$H_n(z) = \frac{z - z^{-1}}{2} \cdot f_n(z) = \frac{z - z^{-1}}{2} \cdot \left[\frac{1+b}{1+bz} \cdot \frac{1+b}{1+bz^{-1}} \right]^n \quad (20)$$

Il est alors intéressant de voir si un filtrage d’ordre $n > 1$ présente, toutes choses égales par ailleurs, un intérêt manifeste par rapport à un filtrage d’ordre 1 qui nécessitera moins de calcul.

Nous sommes donc intéressé à comparer les résultats obtenus à partir des filtres d’ordre 1 et 2, en choisissant pour chacun de ces filtres les paramètres α_1 et α_2 assurant un lissage comparable. Pour cela, nous considérons dans l’espace fréquentiel, le point (ω_n, γ_n) : où

$$\gamma_n = \frac{f_n(0, b_2) + f_n(\pi, b_2)}{2},$$

et ω_n est solution de l’équation :

$$f_n(\omega_n, b_2) = \gamma_n, \quad \text{avec } b_2 = -e^{-\alpha_2}.$$

En résolvant l’équation :

$$f_1(\omega_n, b_1) = \gamma_n, \quad \text{avec } b_1 = -e^{-\alpha_1},$$

on définit une relation $\alpha_1(\alpha_2)$ qui assure des propriétés de lissage comparables aux filtres d’ordre 1 et n . Cette relation est évidemment non-linéaire. Cependant, pour $n = 2$, un calcul numérique montre que la relation $\alpha_1(\alpha_2)$ peut être raisonnablement approximée par une relation linéaire qui en facilite l’usage.

$$\alpha_1 \cong 0.784\alpha_2 - 0.121 \quad (21)$$

La figure 2 représente les réponses en fréquences des filtres de lissage $F_1(\omega)$ et $F_2(\omega)$ pour $\alpha_2 = 1, 1.5, 2$, α_1 prenant les valeurs définies par la relation (21).

On représente de même en figure 3, la réponse en fréquence des filtres 2D d’estimation du gradient. La figure 3(a) représente le filtre d’ordre 1, la figure 3(b) représente le filtre d’ordre 2. Les paramètres α_1 et α_2 sont liés par la relation (21), et $\alpha_2 = 2$.

On représente alors, sur la figure 4, la dérivée de la spline continue d’interpolation de l’échelon discret filtré par le filtre d’ordre 1 (traits pleins) et 2 (traits pointillés). Dans la figure 4(a), le paramètre $\alpha_2 = 2$, α_1 est obtenu par la relation (21). Dans la figure 4(b), le paramètre $\alpha_2 = 1$.

On constate sur ces figures que les réponses obtenues par les filtres de lissage du 1^{er} et du 2^{ème} ordre sont quasi parfaitement superposables lorsque l’effet de lissage est faible. Des différences

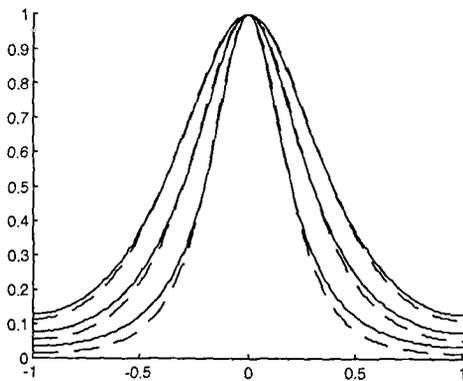
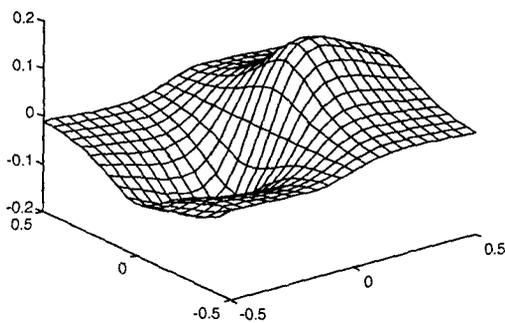
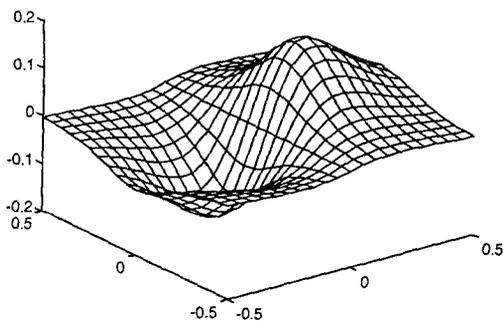


Figure 2. - Réponse en fréquence des filtres de lissage d'ordre 1 (traits pleins) et d'ordre 2 (traits interrompus). De l'intérieur vers l'extérieur : $\alpha_2 = 1, 1.5, 2$.



a)



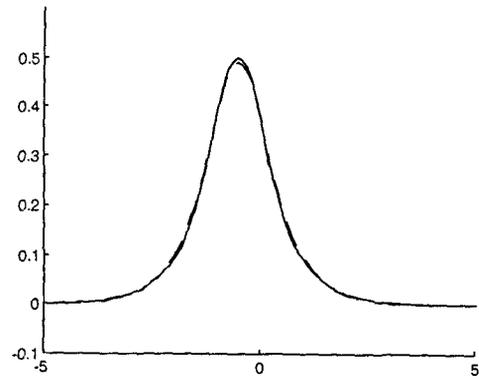
b)

Figure 3. - Réponse en fréquence des filtres 2D. (a) Filtre du 1^{er} ordre. (b) Filtre du 2^{ème} ordre.

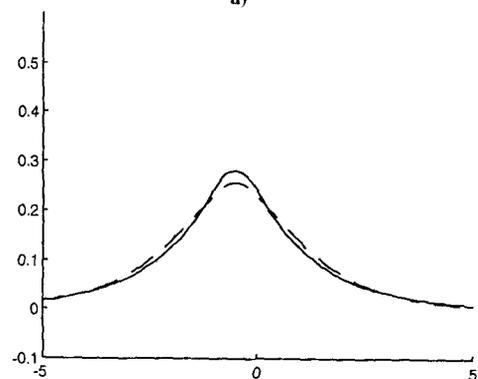
apparaissent lorsque l'effet de lissage devient plus important, le filtre de lissage d'ordre 1 donnant, dans ce cas, une réponse plus étroite.

Estimation des critères de Canny

La relation (18) définit un filtre d'estimation du gradient d'un signal discrétisé à partir de la réponse à un échelon et sans faire d'hypothèse sur la nature et la puissance du bruit perturbant ce signal. En Traitement d'Image, les filtres de Canny et de Deriche étant très employés, il est intéressant de situer le filtre que nous



a)



b)

Figure 4. - Dérivée de la spline continue d'interpolation de l'échelon discret filtré.

(a) : $\alpha_2 = 2, \alpha_1 = 1.45$. (b) : $\alpha_2 = 2, \alpha_1 = 0.66$.

proposons par rapport à ceux-ci. Canny [4] et ultérieurement Deriche [5] ont utilisé les mêmes critères pour définir leur filtres. Ils considèrent un échelon continu perturbé par un bruit gaussien et cherchent à maximiser les trois critères :

$$\Sigma = \frac{\left| \int_{-W}^0 f(x) dx \right|}{\left[\int_{-W}^W f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Lambda = \frac{|f'(0)|}{\left[\int_{-W}^W f'^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$x_{\max} = kW = 2\pi \left[\frac{\int_{-W}^W f'^2(x) dx}{\int_{-W}^W f''^2(x) dx} \right]^{\frac{1}{2}}$$

où $f(x)$ est la réponse impulsionnelle du filtre continu estimateur du gradient.

Canny privilégie un filtre à réponse impulsionnelle finie de largeur W . Deriche considère un filtre récursif à réponse impulsionnelle infinie (alors $W = \infty$). Pour tous deux, le meilleur filtre est celui qui maximise le produit $\Sigma \cdot \Lambda$ sous la contrainte que k soit maximum.

Un avantage non négligeable de l'interpolation spline réside dans le fait qu'on peut, bien qu'il s'agisse de filtres discrets, estimer les critères de Canny qui ne s'appliquent qu'à un filtre continu. Soit $i(k)$ l'impulsion discrète :

$$i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$i'(k) \xleftrightarrow{z} i'(z) = i(z) \cdot H(z)$$

représente les coefficients de la dérivée de la spline cubique d'interpolation de $i(k)$. La spline continue correspondante est la réponse impulsionnelle $f(x)$ permettant le calcul des critères de Canny.

La figure 5 représente $f(x)$ ainsi définie, quadratique par morceaux quelque soit l'ordre n du filtre $H(Z)$ ainsi que sa dérivée première (linéaire par morceaux).

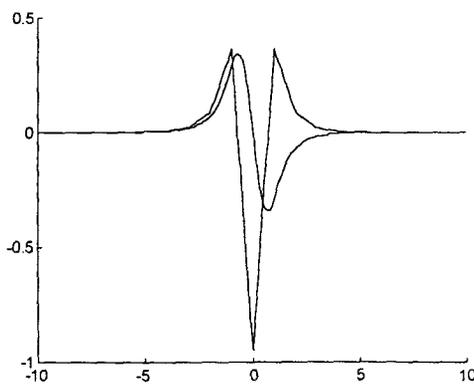


Figure 5. – Réponse impulsionnelle du filtre dérivateur et sa dérivée.

On peut alors calculer les critères de Canny par des méthodes numériques simples (intégration par la méthode des trapèzes). La figure 6 représente l'évolution des critères Σ , Λ , et $\Sigma\Lambda$ pour les filtres de lissage d'ordre 1 et 2, en fonction de α_2 pris comme référence. Les paramètres α_1 et α_2 , relatifs à chacun des filtres, respectent la relation (21).

On constate sur la figure 6 que le filtre d'ordre 2 procure un meilleur rapport signal-à-bruit Σ , d'autant plus grand que α est petit, c'est-à-dire que le lissage est fort. Par contre, son critère de bonne localisation Λ est inférieur à celui du filtre d'ordre 1. De plus, ce critère se dégrade rapidement lorsque l'effet de lissage croît. Il en résulte que si le produit $\Lambda\Sigma$ est parfaitement comparable pour les deux filtres à effet de lissage faible, le filtre d'ordre 1 affiche de meilleures caractéristiques à effet de lissage fort.

Si les critères de Canny sont bien significatifs de la qualité d'un filtre estimateur d'un gradient, nous pouvons donc en conclure qu'à effet de lissage comparable et faible, le filtre d'ordre 2 ne présente aucun avantage sur le filtre d'ordre 1. A fort lissage, le filtre d'ordre 1, par son produit $\Lambda\Sigma$ plus élevé, s'avère meilleur que le filtre d'ordre 2.

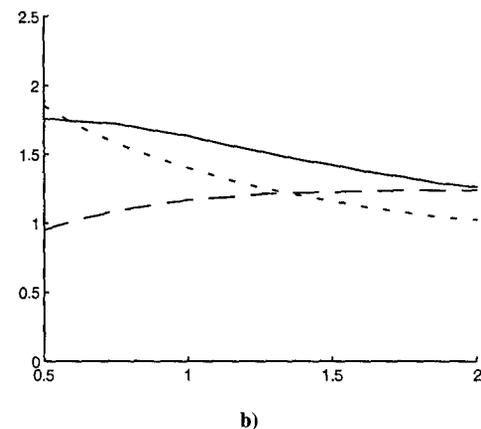
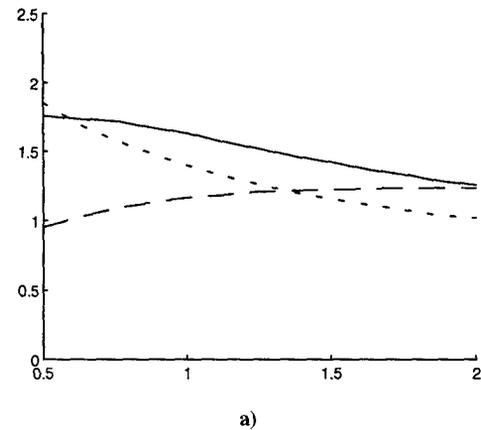


Figure 6. – Evolution des critères de Canny en fonction de α_2 . (a) : Filtre d'ordre 1. (b) Filtre d'ordre 2. En pointillé : Σ . En traits interrompus Λ . En traits pleins $\Sigma\Lambda$.

4. estimation du gradient dans une image

Nous considérons dans ce qui suit les filtres de lissage et de dérivation d'ordre 1. L'extension au cas bi-dimensionnel est immédiate. Chaque dérivée dans chaque direction se calcule comme dans le cas mono-dimensionnel. Cependant le filtre de lissage doit être appliqué dans les deux directions. Il résulte :

$$\hat{g}'_{x1}(z_1, z_2) = s(z_1, z_2) \cdot H(z_1) \cdot F(z_2)$$

$$\hat{g}'_{x2}(z_1, z_2) = s(z_1, z_2) \cdot F(z_1) \cdot H(z_2) \quad (22)$$

Pour optimiser l'implémentation des filtres il est préférable d'écrire ces expressions sous la forme :

$$\hat{g}'_{x1}(z_1, z_2) = s(z_1, z_2) \cdot f(z_1) \cdot f(z_2) \cdot B^3(z_2) \cdot \frac{z_1 - z_1^{-1}}{2}$$

$$\hat{g}'_{x_2}(z_1, z_2) = s(z_1, z_2) \cdot f(z_1) \cdot f(z_2) \cdot B^3(z_1) \cdot \frac{z_2 - z_2^{-1}}{2} \quad (23)$$

où

$$f(z) = \frac{1+b}{1+bz^{-1}} \cdot \frac{1+b}{1+bz} \quad (24)$$

En faisant apparaître un terme commun dans les expressions des dérivées partielles, on optimise le coût de calcul. En outre, les filtres $f(z)$ ont une structure simple, mettant en œuvre, soit la somme de deux filtres causaux et anti-causaux, soit le produit de tels filtres. En choisissant cette dernière solution, le calcul des composantes du gradient est réalisée par :

• *transformation spline lissée :*

$$\begin{aligned} i_1(x_1, x_2) &= s(x_1, x_2) - b \cdot i_1(x_1 - 1, x_2) \\ & \quad x_1 : 0 \rightarrow N, x_2 : 0 \rightarrow M \\ i_2(x_1, x_2) &= i_1(x_1, x_2) - b \cdot i_2(x_1 + 1, x_2) \\ & \quad x_1 : 0 \leftarrow N, x_2 : 0 \rightarrow M \\ i_1(x_1, x_2) &= i_2(x_1, x_2) - b \cdot i_1(x_1, x_2 - 1) \\ & \quad x_2 : 0 \rightarrow M, x_1 : 0 \rightarrow N \\ i_2(x_1, x_2) &= i_1(x_1, x_2) - b \cdot i_2(x_1, x_2 + 1) \\ & \quad x_2 : 0 \leftarrow M, x_1 : 0 \rightarrow N \end{aligned}$$

• *calcul du gradient dans les directions x_1 et x_2 :*

$$\begin{aligned} i_3(x_1, x_2) &= i_2(x_1, x_2 - 1) + 4 \cdot i_2(x_1, x_2) + i_2(x_1, x_2 + 1) \\ & \quad x_1 : 0 \rightarrow N, x_2 : 0 \rightarrow M \\ \hat{g}'_{x_1} &= k \cdot (i_3(x_1 + 1, x_2) - i_3(x_1 - 1, x_2)) \\ & \quad x_1 : 0 \rightarrow N, x_2 : 0 \rightarrow M \\ i_3(x_1, x_2) &= i_2(x_1 - 1, x_2) + 4 \cdot i_2(x_1, x_2) + i_2(x_1 + 1, x_2) \\ & \quad x_1 : 0 \rightarrow N, x_2 : 0 \rightarrow M \\ \hat{g}'_{x_2} &= k \cdot (i_3(x_1, x_2 + 1) - i_3(x_1, x_2 - 1)) \\ & \quad x_1 : 0 \rightarrow N, x_2 : 0 \rightarrow M \end{aligned}$$

$$\text{avec : } k = \frac{(1+b)^4}{12} = \frac{(1+e^{-\alpha})^4}{12}$$

Cette implémentation permet d'obtenir les deux composantes du gradient avec un coût de calcul de 10 additions et 8 multiplications par pixel.

5. comparaison avec les opérateurs de Shen-Castan et Deriche

Dans le cas 1D, le filtre dérivateur $H_n(z)$ que nous proposons présente des analogies certaines avec le filtre dérivateur de Shen

et Castan (cas $n = 1$) ainsi qu'avec le filtre dérivateur de Deriche sous sa forme habituellement utilisée où $\omega = 0$ (cas $n = 2$). Il est intéressant de voir si ces analogies persistent lorsqu'on considère le cas 2D. Pour pouvoir aisément comparer les filtres utilisés par chacun des opérateurs, nous re-écrivons leur transformée en z sous forme de produits.

Opérateur de Shen et Castan :

Tout comme Canny et Deriche, Shen et Castan [8] modélisent le contour 1D par un échelon continu perturbé par un bruit blanc de moyenne nulle. Leur démarche vise à rechercher le filtre de lissage optimal qui maximise la puissance de la dérivée du signal filtré et minimise la puissance du bruit à la fois dans le signal filtré et dans sa dérivée. C'est donc le filtre de lissage qui est défini en premier, le filtre dérivateur s'en déduit par dérivation. Le passage au cas discret est obtenu ensuite par échantillonnage.

Le calcul de la composante du gradient dans la direction x_1 s'obtient par :

$$\hat{g}'_{x_1}(z_1, z_2) = s(z_1, z_2) \cdot H_S(z_1) \cdot F_S(z_2)$$

où

$$H_S(z) = \frac{1+b}{1+bz^{-1}} - \frac{1+b}{1+bz} \quad (25)$$

$$F_S(z) = \frac{1+b}{1+bz^{-1}} \cdot \frac{1+b}{1+bz}; \quad b = -e^{-\alpha} \quad (26)$$

Les expressions correspondantes après re-écriture sont données dans le tableau II.

Opérateur de Deriche :

Deriche considère un filtre de dérivation qui optimise les critères définis par Canny. C'est donc le filtre de dérivation qui est défini en premier, le filtre de lissage s'obtient par intégration du précédent. Le passage au cas discret est obtenu par échantillonnage.

Le calcul de la composante du gradient dans la direction x_1 s'obtient par :

$$\hat{g}'_{x_1}(z_1, z_2) = s(z_1, z_2) \cdot H_D(z_1) \cdot F_D(z_2)$$

$$H_D(z) = (1+b)^2 \left[\frac{z}{1+2bz+b^2z^2} - \frac{z^{-1}}{1+2bz^{-1}+b^2z^{-2}} \right] \quad (27)$$

$$F_D(z) = \frac{(1+b)^2}{1-2\alpha b - b^2}$$

$$\left[\frac{a_1 z + a_2 z^2}{1+2bz+b^2z^2} + \frac{1+a_3 z^{-1}}{1+2bz^{-1}+b^2z^{-2}} \right] \quad (28)$$

où : $b = -e^{-\alpha}$; $a_1 = -b(\alpha + 1)$; $a_2 = -b^2$; $a_3 = -b(\alpha - 1)$.

Les expressions correspondantes après re-écriture sont données dans le tableau II.

Les coefficients c_1 et c_2 apparaissant dans le filtre de lissage de Deriche sont donnés par :

$$c_1 = \frac{(1-4\alpha b^2 - b^4)}{(1+b)^2(1-2\alpha b - b^2)}, \quad c_2 = \frac{-b(\alpha - 1 + (\alpha + 1)b^2)}{(1+b)^2(1-2\alpha b - b^2)} \quad (29)$$

Tableau 2.

Opérateur	Filtre de lissage	Filtre de dérivation
Shen-Castan	$(1+b)^2 \cdot \frac{1}{(1+bz)(1+bz^{-1})}$	$-b(1-b) \cdot \frac{z-z^{-1}}{(1+bz)(1+bz^{-1})}$
Proposé, $n=1$	$(1+b)^2 \cdot \frac{\frac{z^{-1}}{6} + \frac{4}{6} + \frac{z}{6}}{(1+bz)(1+bz^{-1})}$	$\frac{(1+b)^2}{2} \cdot \frac{z-z^{-1}}{(1+bz)(1+bz^{-1})}$
Deriche	$(1+b)^4 \cdot \frac{c_2 z^{-1} + c_1 + c_2 z}{(1+bz)^2(1+bz^{-1})^2}$	$(1+b)^3(1-b) \cdot \frac{z-z^{-1}}{(1+bz)^2(1+bz^{-1})^2}$
Proposé, $n=2$	$(1+b)^4 \cdot \frac{\frac{z^{-1}}{6} + \frac{4}{6} + \frac{z}{6}}{(1+bz)^2(1+bz^{-1})^2}$	$\frac{(1+bz)^4}{2} \cdot \frac{z-z^{-1}}{(1+bz)^2(1+bz^{-1})^2}$

Opérateur proposé :

Contrairement aux cas précédents, le filtre de lissage et le filtre de dérivation sont obtenus dans le cas discret. Pour faciliter la comparaison, on rappelle dans le tableau II les expressions des transformées en z des filtres de lissage et de dérivation, dans les cas $n=1$ et $n=2$. (Equations (17), (18), (19) et (20)).

On constate sur le tableau page suivante :

- Concernant les filtres de dérivation. Il y a identité, à un coefficient de normalisation près, entre le filtre de Shen-Castan et le filtre d'ordre 1 proposé, de même qu'entre le filtre de Deriche et le filtre d'ordre 2 proposé. Au vu de cette remarque on peut penser que les opérateurs discrets de Shen-Castan et Deriche procèdent à une approximation par une spline cubique du signal filtré, et dont la dérivée aux points d'échantillonnage fournit l'estimation du gradient.

- Concernant les filtres de lissage. Le filtre de Shen-Castan et le filtre d'ordre 1 proposé diffèrent par le filtre RIF qui assure la transformation spline inverse dans la direction x_2 . L'absence de ce filtre RIF dans le filtre de lissage de Shen-Castan conduit à une accentuation des fréquences hautes dans la direction orthogonale à celle de la composante du gradient que l'on calcule. Le filtre de Deriche et le filtre d'ordre 2 proposé ont par contre une forme analogue. Il est intéressant de noter que c_1 et c_2 tendent respectivement vers $4/6$ et $1/6$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$. Le tableau III explicite quelques valeurs de ces coefficients ainsi que les écarts relatifs par rapport à leur valeur asymptotique pour des valeurs de α allant de 0.1 (très fort effet de lissage) à 1.5 (valeur plus couramment utilisée avec l'opérateur de Deriche).

Tableau 3.

α	c_1	écart	c_2	écart
0.1	0.6669	0.045%	0.1666	-
1	0.6886	3.3%	0.1557	6.6%
1.5	0.7149	7.2%	0.1425	14.5%

On constate donc que, dès que le paramètre α est inférieur à 1, l'opérateur de Deriche se comporte bien comme l'opérateur d'ordre 2 que nous proposons. Cette conclusion nous paraît d'autant plus remarquable que l'approche de Deriche et notre approche sont fondamentalement différentes.

Cependant, l'opérateur de Deriche (ainsi que celui de Shen-Castan) ne fournit une estimation du gradient qu'aux points d'échantillonnage. Avec ces opérateurs, il n'est pas possible de réaliser une interpolation sur des points intermédiaires qui, nous le verrons dans la section suivante, facilite et rend plus robuste la détection des contours.

6. opérateurs de détection de contours

La détection de contour à partir du gradient de l'image est généralement réalisée par recherche des maxima locaux dans la direction du vecteur gradient. Comme nous pouvons le constater sur la figure 1, en présence d'un échelon discret le gradient estimé aux points d'échantillonnage présente un plateau de largeur deux pixels. Ceci sera également vrai pour tout modèle de contour admettant un centre de symétrie en $x = -0.5$, et pour tout filtre estimateur du gradient antisymétrique. Il faut alors choisir de placer le contour soit en $x = 0$, soit en $x = -1$. C'est ainsi qu'habituellement, on admet qu'un pixel de l'image est un pixel de contour, si le gradient en ce pixel est supérieur au gradient de son voisin dans la direction du vecteur gradient, et s'il est supérieur ou égal au gradient du voisin dans la direction opposée. Cette procédure peut conduire à détecter de faux pixels de contour (gradient en marche d'escalier). Elle est peu robuste au bruit de l'image d'une part, aux erreurs d'arrondi dans l'estimation du gradient, d'autre part. C'est ainsi qu'on observe fréquemment un déplacement plus ou moins aléatoire des pixels de contour par rapport au contour idéal et ceci même sur une image synthétique rigoureusement non bruitée.

L'estimation du gradient au moyen de l'interpolation spline que nous proposons permet de résoudre ce problème de manière élégante. En effet, connaissant les coefficients de la spline continue d'interpolation, il est extrêmement aisé de connaître le gradient non seulement aux points d'échantillonnage, mais également aux points intermédiaires. En particulier, un sur-échantillonnage d'ordre 2 est très facilement réalisable. Un tel sur-échantillonnage conduit à une image du gradient de dimension double par rapport à l'image d'origine. Dans cette image, les pixels de coordonnées toutes deux paires correspondent aux pixels de l'image, les autres correspondent à une arête entre pixels voisins si une seule des coordonnées est impaire, à un sommet si les deux sont impaires. Dans une telle image du gradient, la recherche des maxima est simplifiée à l'extrême : le gradient est maximum s'il est supérieur au gradient de ses deux voisins dans la direction du vecteur gradient et dans la direction opposée. Cette opération est généralement très peu sensible aux erreurs d'arrondi et au bruit de l'image, dans la mesure où le maximum recherché est un maximum vrai.

Nous proposons dans ce qui suit deux opérateurs permettant de connaître le gradient aux points intermédiaires des points d'échantillonnage. Le premier de ces opérateurs fournit par interpolation de la spline continue dérivée, une image de taille $2N \times 2M$ du gradient. Le second, entraînant un coût de calcul notablement moindre, fournit une image de taille $N \times M$ du gradient, les points de cette image correspondant aux seuls points intermédiaires des points d'échantillonnage.

Gradient interpolé à l'ordre 2.

Rappelons tout d'abord la méthode permettant d'obtenir une interpolation d'ordre $m = 2$ d'un signal discret au moyen d'une approximation par une spline de degré n . Le lecteur trouvera dans [6], les équations générales dont nous donnons une adaptation.

Soit $s(k)$ le signal discret. Les coefficients de spline $y(k)$ s'obtiennent par :

$$y(k) \xleftrightarrow{z} y(z) = s(z) \cdot (B^n(z))^{-1}$$

On définit $y(k') = y(k) \uparrow_2$ le sur-échantillonnage d'ordre 2 correspondant :

$$y(k') = \begin{cases} y(k) & \text{si } k' = 2k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le signal sur-échantillonné s'obtient par :

$$s(k') \xleftrightarrow{z} s(z') = y(z') \cdot B_2^n(z')$$

où $B_2^n(z)$ est le filtre spline inverse sur-échantillonné.

La dérivée sur-échantillonnée s'obtient par :

$$s'(k') \xleftrightarrow{z} s'(z') = y(z') \cdot (1 - z'^{-1}) \cdot C_2^{n-1}(z')$$

où $C_2^{n-1}(z)$ est le filtre spline inverse décalé sur-échantillonné.

Appliquées à notre opérateur d'estimation du gradient, relations (23), ces équations deviennent :

$$\hat{g}'_{x1}(z'_1, z'_2) = K \cdot [s(z_1, z_2) \cdot f(z_1) \cdot f(z_2)] \uparrow_2 \cdot B_2^3(z'_2) \cdot (1 - z'_1) \cdot C_2^2(z'_1) \quad (30)$$

où

$$B_2^3(z) = \frac{z^{-3} + 8z^{-2} + 23z^{-1} + 32 + 23z + 8z^2 + z^3}{48}$$

$$B_2^3(z) = \frac{z^{-1} + 4 + z}{6} \cdot \frac{z^{-2} + 4z^{-1} + 6 + 4z + z^2}{8} \quad (31)$$

$$(1 - z^{-1}) \cdot C_2^2(z) = \frac{-z^{-3} - 4z^{-2} - 5z^{-1} + 5z + 4z^2 + z^3}{8}$$

$$(1 - z^{-1}) \cdot C_2^2(z) = \frac{z - z^{-1}}{2} \cdot \frac{z^{-2} + 4z^{-1} + 6 + 4z + z^2}{4} \quad (32)$$

où

$$K = \frac{4 \cdot (1 - b)}{(3 - b) \cdot (1 + b)}, \quad (33)$$

est un coefficient de normalisation qui assure que la réponse maximale à un échelon d'amplitude unité est 1.

La complexité de calcul qui en résulte n'est qu'apparente car ces filtres sont appliqués aux coefficients de spline sur-échantillonnés dont trois sur quatre sont nuls. En outre, les relations (31) et (32) faisant apparaître un terme commun, il est possible de réduire la complexité du calcul. Néanmoins ces filtres sont appliqués à des « images » de taille $2N \times 2M$. Le calcul des deux composantes du gradient se traduit par un coût de calcul de $37 \cdot N \cdot M$ additions et $19 \cdot N \cdot M$ multiplications. Après détection des maxima du gradient la carte de contour obtenue est également de taille $2N \times 2M$. Une telle résolution n'étant pas toujours utile, et le coût de calcul étant élevé, nous proposons un algorithme permettant d'obtenir le gradient aux points d'échantillonnage décalés de $(-0.5, -0.5)$ par rapport à la grille initiale.

Gradient décalé.

Le gradient décalé que nous proposons ici revient formellement à re-échantillonner le gradient sur-échantillonné précédent, en ne conservant que les points de coordonnées toutes deux impaires. L'algorithme que nous décrivons limite les calculs au strict nécessaire pour obtenir ces points.

Le gradient décalé est obtenu par :

$$\hat{g}'_{x1}(z_1, z_2) = k \cdot s(z_1, z_2) \cdot f(z_1) \cdot f(z_2) \cdot B_2^{3*}(z_2) \cdot (1 - z_1) \cdot C_2^{2*}(z_1) \quad (34)$$

où

$$B_2^{3*}(z) = \frac{z^{-1} + 23 + 23z + z^2}{48} \quad (35)$$

$$(1 - z^{-1}) \cdot C_2^{2*}(z) = \frac{-z^{-1} - 5 + 5z + z^2}{8} \quad (36)$$

L'application de cet algorithme conduit à l'opérateur d'estimation du gradient comprenant un filtre de lissage et un filtre de dérivation définis par :

$$F^*(z) = \frac{z^{-1} + 23 + 23z - z^2}{48} \cdot \left[\frac{1 + b}{1 + bz^{-1}} \cdot \frac{1 + b}{1 + bz} \right] \quad (37)$$

$$H^*(z) = k \cdot \frac{z^{-1} - 5 + 5z + z^2}{6} \cdot \left[\frac{1+b}{1+bz^{-1}} \cdot \frac{1+b}{1+bz} \right] \quad (38)$$

L'intérêt de cet algorithme est de conduire à une carte du gradient de même dimension que l'image d'origine tout en rendant la détection des contours plus robuste et ce, moyennant un surcoût de calcul très modéré : $14 \cdot N \cdot M$ additions et $9 \cdot N \cdot M$ multiplications par pixel.

Dans la section suivante, nous illustrons ces algorithmes par quelques résultats expérimentaux.

7. résultats expérimentaux

Nous avons choisi d'illustrer nos algorithmes de détection de contour sur quatre images types de 256×256 pixels. La première, Objet, est une image synthétique riche en jonctions. Les trois autres sont des images naturelles issues de la base d'images du GDR-PRC ISIS : Bureau, La Cornouaille, et Bagues. Elles représentent respectivement une scène d'intérieur, une scène d'extérieur et une image industrielle. Ces images sont riches en contours et spécialement en contours parallèles voisins. Elles sont représentées à la figure 7.

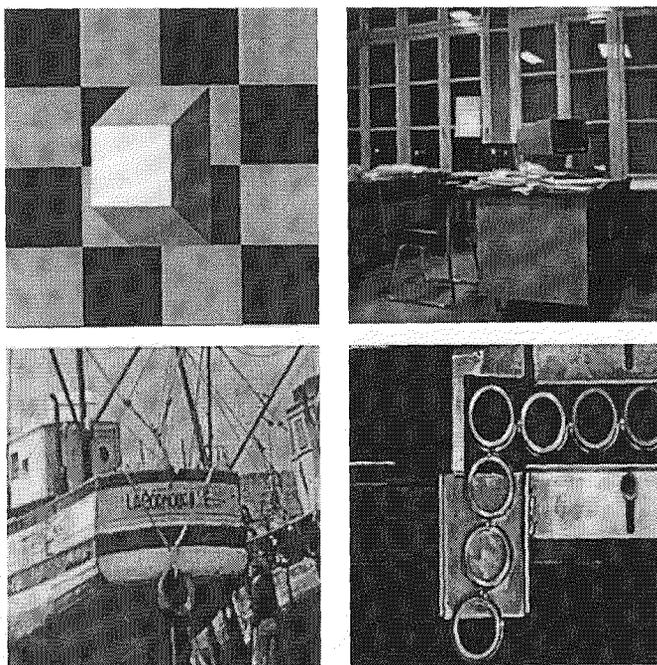


Figure 7.

Nous illustrons en premier notre opérateur d'extraction de contours par recherche du maximum du gradient interpolé à l'ordre 2 (équations (30) à (33)). Nous représentons dans la figure 8 les

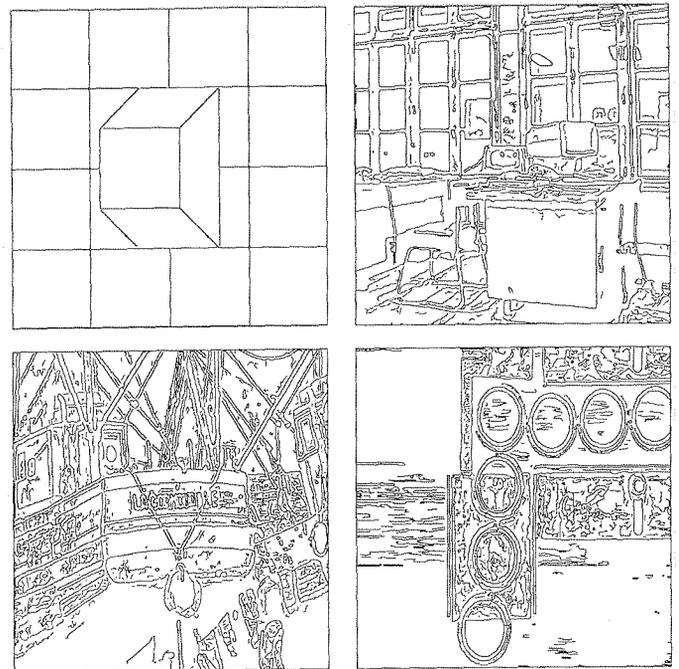


Figure 8. – Cartes des contours interpolés des images de la figure 7. ($\alpha_1 = 2.2$) Les cartes réelles sont de 512×512 pixels.

cartes de contours de 512×512 pixels, obtenues avec $\alpha_1 = 2.2$, correspondant à un lissage faible.

La figure 9 représente les mêmes cartes de contours obtenues avec $\alpha_1 = 0.663$, correspondant à un lissage fort. Pour mémoire, ces valeurs du paramètre d'échelle assurent un lissage comparable à

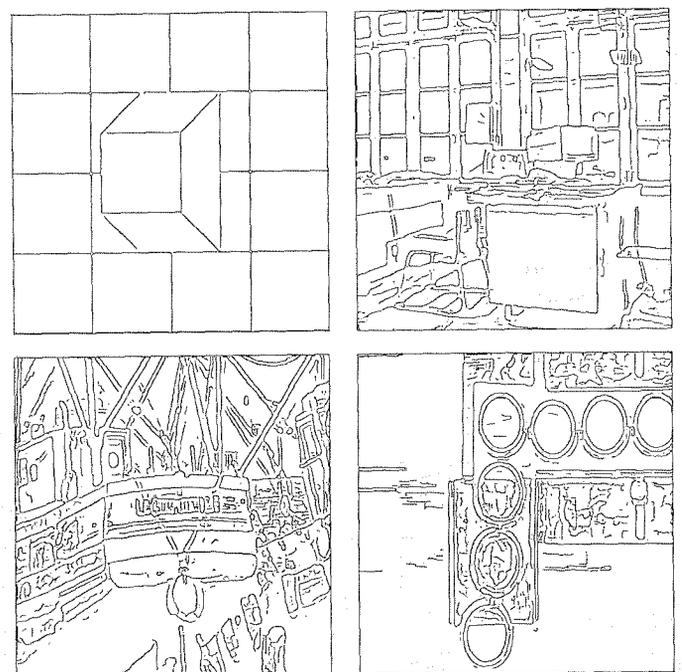


Figure 9. – Cartes des contours interpolés des images de la figure 7. ($\alpha_1 = 0.663$) Les cartes réelles sont de 512×512 pixels.

Filtres récurrents

celui du filtre de Deriche avec α respectivement égal à 3 et 1. Dans les deux cas on a opéré un seuillage avec hystérésis avec un seuil bas égal à 4 et un seuil haut égal à 8.

Nous illustrons ensuite notre opérateur d'extraction de contours par recherche du maximum du gradient décalé (équations (37) à (38)). La carte de contours obtenue étant de même dimension que l'image d'origine, il nous est possible de comparer notre carte de contours avec celles obtenues grâce aux opérateurs de Shen-Castan et Deriche. Pour que la comparaison soit la plus objective possible, les coefficients d'échelle sont choisis pour donner le même effet de lissage : pour l'opérateur de Deriche $\alpha_2 = 1$, pour l'opérateur de Shen-Castan et le notre $\alpha_1 = 0.663$ (cf. Relation (21)). Pour les opérateurs de Shen-Castan et Deriche, la recherche du maximum du gradient tolère un maximum en plateau, le point de contour sélectionné est dans ce cas, celui dans la direction du vecteur gradient. Pour notre opérateur, le gradient est maximum s'il est strictement supérieur au gradient de ses deux voisins. Enfin les cartes de contours présentées sont celles obtenues après seuillage avec hystérésis dans les mêmes conditions que précédemment.

Les figures 10(a) à 10(d) représentent les résultats obtenus sur ces quatre images. Sur ces figures, l'image originale est en haut et à gauche, les contours de Deriche sont en haut et à droite, les contours de Shen-Castan en bas et à gauche, les contours obtenus par notre opérateur sont en bas et à droite. En ce qui concerne les images naturelles, il est difficile de dire quel est l'opérateur donnant les meilleurs résultats. En règle générale, les cartes de contours délivrées par notre opérateur sont un peu moins bruitées que celles délivrées par l'opérateur de Shen-Castan. Selon les images, elles peuvent être plus ou moins denses que les cartes

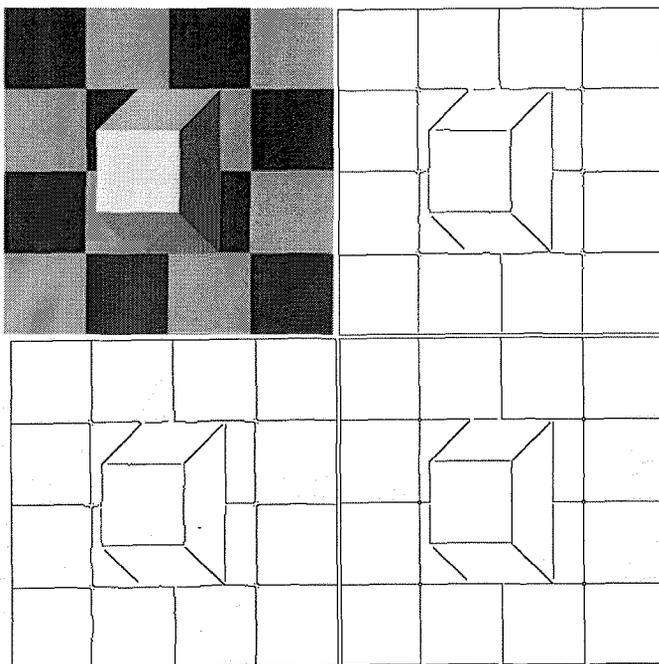


Figure 10(a).

de contours délivrées par l'opérateur de Deriche. On peut se demander si ce constat n'aurait pas été inversé en changeant les seuils de détection. Plus significatif est l'examen des cartes de contours obtenues à partir de l'image Objet. Avec les opérateurs de Deriche et Shen-Castan, les contours sont alternativement déplacés le long d'une ligne ou d'une colonne (contours du damier), on observe de plus un déplacement aléatoire des points de contour par rapport à la ligne idéale, à proximité d'une jonction.

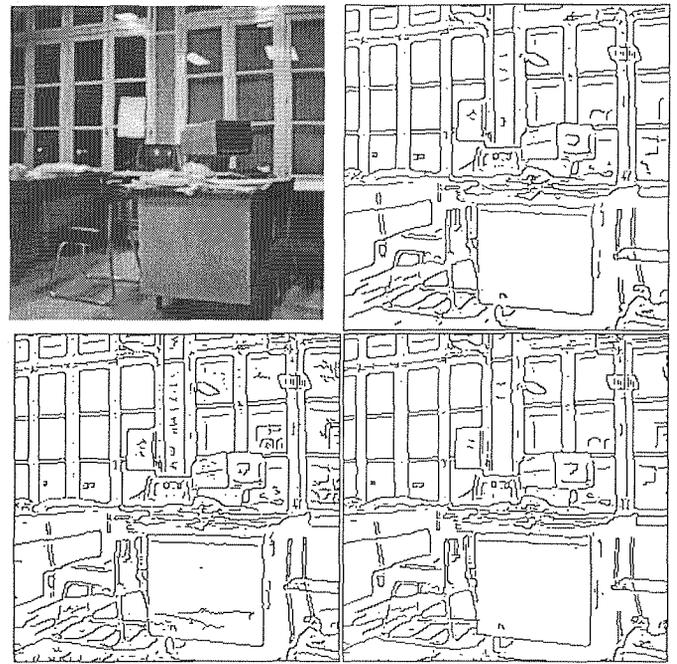


Figure 10(b).

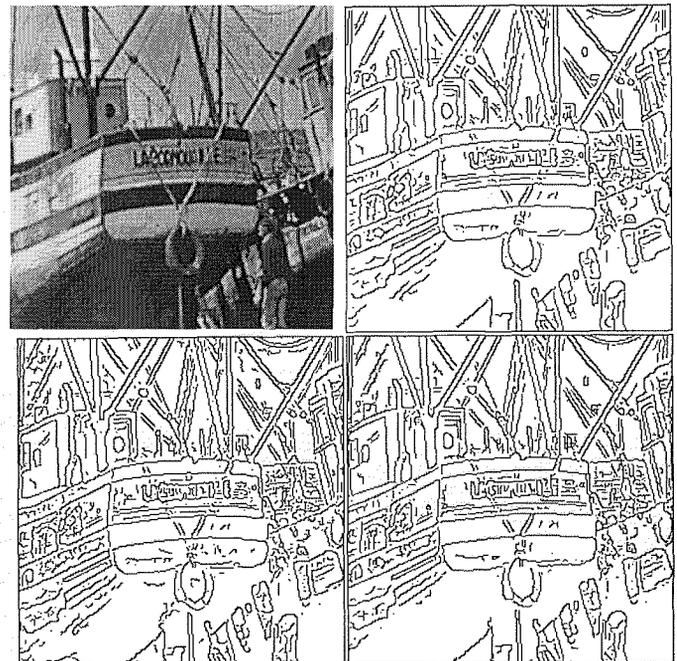


Figure 10(c).

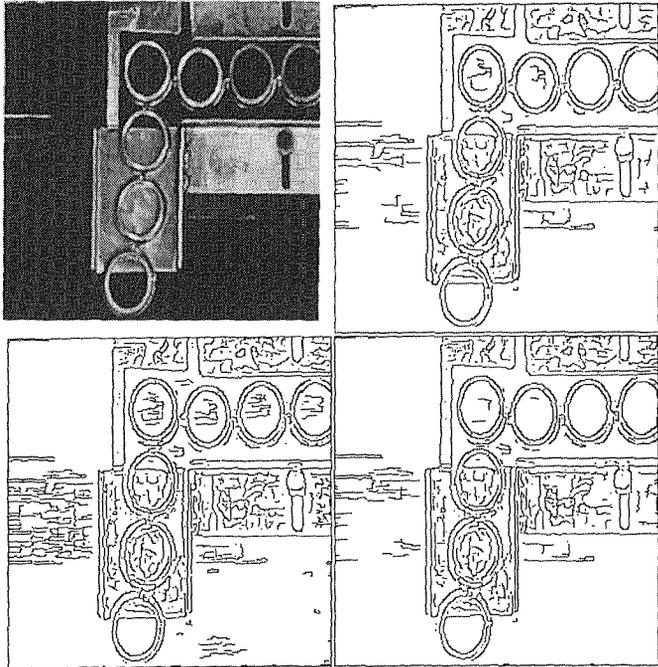


Figure 10(d).

Ceci est dû au fait que le gradient présente un plateau en présence d'un contour idéal, et qu'il faut faire un choix entre deux pixels de même gradient. Quel que soit le choix fait, les erreurs d'arrondi vont perturber le contour. Avec l'opérateur proposé ce problème ne se pose pas, les contours sont parfaitement positionnés.

8. conclusion

Nous sommes intéressés dans cet article au problème soulevé par le calcul du gradient d'une fonction discrétisée, en vue de détecter des contours. Une solution élégante à ce problème est apportée par l'interpolation de la fonction discrétisée par une spline continue. En traitement d'images, le coût de calcul d'un algorithme est un critère important de sélection. L'interpolation par une spline cubique s'avère donc un outil particulièrement intéressant sur ce plan, et ce, grâce aux résultats apportés par Unser *et al.*

Cependant, toute interpolation crée une erreur, à moins que la fonction à interpoler soit elle-même une spline du même degré. Ainsi, le calcul de la dérivée d'un signal présentant un front abrupt donne un résultat inexploitable pour la détection de contour. Nous avons proposé, pour remédier à ce problème, une classe de filtres de lissage construits à partir d'un filtre récursif d'ordre 1 convolué n fois avec lui-même pour donner un filtre récursif d'ordre n . Nous avons montré par estimation des critères de Canny, qu'augmenter l'ordre du filtre n'apportait pas un gain considérable eu égard à ces critères (cf. figure 6).

La démarche que nous avons suivie est fondamentalement différente de celles qu'ont suivi Shen-Castan d'une part, Deriche d'autre part. Ces auteurs partent d'un modèle continu du contour perturbé par un bruit gaussien, ils définissent un filtre continu optimal pour l'estimation du gradient. Ils procèdent ensuite par échantillonnage pour définir le filtre discret correspondant. Notre démarche vise au contraire, partant d'un modèle discret du contour, à lui associer une fonction continue dont la dérivée est l'estimation cherchée du gradient. A noter qu'à aucun moment nous n'avons considéré la perturbation par un bruit aléatoire. Nous nous sommes fixé comme unique critère pour l'estimation du gradient, celui d'un maximum unique en présence d'un échelon discret. Il est remarquable que ces deux démarches aboutissent à des opérateurs discrets de formes très voisines. Ceci est particulièrement vrai pour l'opérateur de Deriche qui tend asymptotiquement vers notre opérateur d'ordre 2, lorsque le paramètre de d'échelle α devient petit. Quant à l'opérateur de Shen-Castan, il présente une analogie parfaite avec notre opérateur de dérivation dans le cas 1D. Cependant dans le cas 2D, ce constat n'est plus valable dans la mesure où dans le filtre de lissage, il manque le terme correspondant à la transformation spline inverse. L'introduire revient alors à considérer l'opérateur d'ordre 1 que nous avons défini.

Un avantage important de l'opérateur que nous proposons réside dans le fait qu'on peut interpoler très simplement le gradient pour produire une carte de contours de taille double de l'image d'origine. En procédant ainsi, la recherche des maxima locaux du gradient est rendue plus robuste, en particulier par rapport aux erreurs d'arrondi. Dans une telle carte de contour, les pixels dont les deux coordonnées sont paires correspondent aux pixels de l'image d'origine. Un point de contour dont une coordonnée est impaire, s'interprète comme une arête située entre deux pixels. Un point de contour dont les deux coordonnées sont impaires, s'interprète comme un sommet entre deux pixels. Cette représentation des points de contour permet de distinguer les pixels d'image qui forment les régions et les pixels de contours qui en constituent les frontières.

Cet opérateur ayant malgré tout un coût de calcul relativement élevé, nous avons proposé une version sous-échantillonnée du gradient interpolé précédent, qui ne conserve que les points de coordonnées toutes deux impaires, mais dont le coût de calcul est réduit.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. Torre, T.A. Poggio, « On edge detection », *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, PAMI-8, 1986, pp. 147-163.
- [2] M. Hueckel, « A local visual operator which recognizes edges and lines », *J. Ass. Comput. Mach.*, 20, 1973, pp. 634-647.
- [3] R.M. Haralick, « Digital step edges from zero crossing of second directional derivatives », *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, PAMI-6, 1984, pp. 58-68.
- [4] J.F. Canny, « A computational approach to edge detection », *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, PAMI-8, 1986, pp. 679-697.
- [5] R. Deriche, « Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector », *Int. Journ. of Comput. Vision.*, 1, 1987, pp. 167-187.

Filtres récursifs

- [6] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden, « B-Spline signal processing : part I – Theory », *IEEE trans. On sign. Process.*, 41, 1993, pp. 821–833.
- [7] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden, « B-Spline signal processing : part II – Efficient design and applications », *IEEE trans. On sign. Process.*, 41, 1993, pp. 834–848.
- [8] S. Castan, J. Zhao, J. Shen, « Optimal filter for edge detection methods and results », ECCV 90, *Lecture Notes in Computer Science.*, O. Faugeras ed., Springer Verlag, 1990, pp. 13–17.

Manuscrit reçu le 22 Juillet 1995.

L' AUTEUR

Alain CHEHIKIAN

Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, Directeur du Laboratoire de Traitement d'Image et Reconnaissance de Formes de l'Institut National Polytechnique de Grenoble de 1980 à 1994. Domaines d'intérêt : Segmentation, Description d'images, Adéquation Algorithme-Architecture.