

C. Méthodes statistiques

1. estimateur de variance minimale

1.1. idée générale et hypothèses

Soient les fonctions f et p considérées comme des processus stochastiques. On cherche à trouver la fonction f , au sens de l'estimateur de variance minimale, en tenant compte le plus possible des propriétés géométriques du système d'enregistrement pour factoriser le système d'équations à inverser.

1.2. principe de la méthode

Il s'agit de calculer en estimée \hat{f} de l'objet qui minimise la moyenne du carré de l'erreur d'estimation, soit :

$$\hat{f} = \min_{\bar{f}} E \left[(f - \bar{f})^t (f - \bar{f}) \right] \quad (1)$$

connaissant les moments statistiques d'ordre 1 et 2 sur f et le bruit, soit :

$$P_0 = E \left[(f - f_0) (f - f_0)^t \right] \text{ matrice de covariance de l'objet,}$$

$$W = E \left[(bb^t) \right] \text{ matrice de covariance du bruit,}$$

$$f_0 = E[f] \text{ valeur moyenne de } f.$$

En cherchant la solution de (1) sous la forme $\hat{f} = f_0 + H(p - Xf_0)$, on trouve pour H l'expression suivante :

$$H = P_0 X^t (X P_0 X^t + W)^{-1} \quad (2)$$

La matrice $(X P_0 X^t + W)$, qui représente la matrice de covariance des données, est décomposée en blocs indépendants, pour réduire l'inversion, compte tenu des propriétés géométriques de l'enregistrement.

En général P_0 est choisie comme une matrice diagonale et le plus souvent multiple de l'identité. Le bruit est considéré comme un bruit blanc gaussien non corrélé soit : $W = \sigma^2 I$, σ pouvant être déduit d'après le nombre moyen de photons reçus, ou estimé directement sur les données. En restauration d'images, on peut montrer une équivalence entre la solution donnée par (2) et celle obtenue par filtrage de Wiener.

1.3. description sommaire de l'algorithme

Dans le cas d'une géométrie à faisceau divergent à deux dimensions où les directions sont régulièrement espacées sur 360° , les données sont réarrangées de façon à ce que le vecteur données soit ordonné par cellules de détecteur et non plus par direction de projection : toutes les mesures lues dans une même cellule du détecteur à différents angles sont regroupées dans un nouveau

vecteur de données $q = \Psi p$, où Ψ est la matrice de réarrangement. La matrice de covariance des mesures est composée d'un tableau de $N' \times N'$ blocs circulants de $M \times M$ éléments, qui peuvent donc être inversés par des méthodes de Fourier.

On peut montrer que (1) peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{f} = f_0 + P_0 P^t \Psi^t F^t \Lambda^{-1} F (q - \Psi X f_0) \quad (3)$$

où F est la matrice de transformée de Fourier discrète, Λ est une matrice qui peut se stocker sous la forme de M sous-matrices de dimensions $N' \times N'$ qui peuvent être précalculées ainsi que leurs inverses.

Dans le cas d'une géométrie conique à trois dimensions, où la source tourne sur un cercle, on peut séparer f en trois régions indépendantes du point de vue des mesures : le plan du mouvement de la source (le problème se ramène alors au cas à deux dimensions), la région au dessus du plan des sources et la région en dessous. On peut pour chacune de ces régions factoriser la matrice en blocs faiblement corrélés et appliquer des méthodes d'inversion particulières.

Cette même méthode peut être appliquée dans le cas où la géométrie comprend deux ou trois sources disposées aléatoirement, en considérant les différents plans contenant deux sources.

1.4. caractéristiques de la méthode

C'est en fait une méthode d'inversion directe de la matrice de projection, l'aspect statistique se réduit pour des raisons de simplification de calcul à ajouter une matrice de covariance du bruit très simple dans sa forme.

1.5. implantation

Cette méthode a été appliquée pour la tomographie X :

– en deux dimensions pour un faisceau divergent,

– en trois dimensions :

- pour une source X décrivant un mouvement circulaire,
- pour deux ou trois sources placées irrégulièrement.

1.6. remarques complémentaires

Pour pouvoir simplifier la matrice, il est nécessaire que les matrices de covariance de l'objet et du bruit gardent les mêmes propriétés de symétrie que la géométrie d'enregistrement, ce qui limite la qualité et le nombre d'informations a priori qui peuvent être prises en compte.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.L. Wood, M. Morf, « A Fast Implementation of a Minimum Variance Estimator for Computerized Tomography Image Reconstruction », *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-28, n°2, 1981, pp. 56-68.
- [2] S.L. Woods, « Efficient MVE Image Reconstruction for Arbitrary Measurement Geometries », *Proc. ICASSP IEEE*, 1982, pp. 1158-1161.

2. estimation bayésienne avec a priori a maximum d'entropie

2.1. idée générale et hypothèses

Il s'agit d'une approche probabiliste bayésienne dans laquelle les lois de probabilités *a priori* $p(\mathbf{f})$ et *conditionnelle* $p(\mathbf{p}|\mathbf{f})$ sont attribuées en utilisant le principe du maximum d'entropie (ME). La solution choisie est obtenue selon le critère MAP. Le principe du ME est utilisé seulement pour la traduction des connaissances a priori sur \mathbf{f} et sur \mathbf{b} en lois de probabilité. Le principe du ME peut se résumer ainsi : soit x une variable continue et supposons que l'on souhaite traduire une information de la forme : $E\{\Phi_k(x)\} = d_k, k = 1, \dots, K$, par une loi de probabilité $p(x)$. Laquelle choisir parmi une infinité de lois $p(x)$ qui satisfont ces contraintes ?

La réponse fournie par le principe de ME est de choisir la loi $p(x)$ qui a l'entropie S maximale, ou :

$$S = - \int p(x) \log p(x) dx$$

La solution s'écrit :

$$p(x) = \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_k(x) \right),$$

où les $\{\lambda_k, k = 1, \dots, K\}$ sont des multiplicateurs de Lagrange qui sont calculés à partir de $\{d_k, k = 1, \dots, K\}$.

2.2. principe de la méthode

Le principe de cette approche peut être présenté à travers l'exemple générique suivant :

- Modèle discret :

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{f} + \mathbf{b}$$

- *a priori* sur le bruit de mesure :

$$\begin{cases} E\{\mathbf{b}\} = 0 \\ E\{\mathbf{b}\mathbf{b}^t\} = \mathbf{W} = \text{diag}[\sigma_1^2, \dots, \sigma_M^2] \end{cases}$$

$ME \rightarrow p(\mathbf{p}|\mathbf{f}) \propto \exp\{-Q(\mathbf{f})\}$ avec $Q(\mathbf{f}) = [\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{f}]^t \mathbf{W}^{-1} [\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{f}]$

- *a priori* sur l'image \mathbf{f}

$$\begin{cases} E\{S(\mathbf{f})\} = s \\ E\{H(\mathbf{f})\} = h \end{cases} \quad \text{avec } S(\mathbf{f}) = \sum_{n=1}^N s(f_j) \text{ et } H(\mathbf{f}) = \sum_{n=1}^N H(f_j)$$

$$ME \rightarrow p(\mathbf{f}) \propto \exp\{-\lambda_1 H(\mathbf{f}) - \lambda_2 S(\mathbf{f})\}$$

En principe, les fonctionnelles S et H peuvent être quelconques, mais si on exige une propriété d'invariance par changement

d'échelle pour $p(\mathbf{f})$, alors les seuls choix possibles pour ces deux fonctionnelles sont :

$$\{S(\mathbf{f}), H(\mathbf{f})\} = \{(f^{r_1}, f^{r_2}), (f^{r_1}, \ln f), (f^{r_1}, f^{r_1}, \ln f), (\ln f, \ln^2 f)\}$$

où r_1 et r_2 sont des exposants réels.

- Règle de Bayes :

$$p(\mathbf{f}|\mathbf{p}) \propto \exp\{-Q(\mathbf{f}) - \lambda_1 H(\mathbf{f}) - \lambda_2 S(\mathbf{f})\}$$

- Règle de décision MAP :

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} \{p(\mathbf{f}|\mathbf{p})\} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{J(\mathbf{f}) = Q(\mathbf{f}) + \lambda_1 H(\mathbf{f}) + \lambda_2 S(\mathbf{f})\}$$

2.3. description sommaire de l'algorithme

La minimisation de ce critère se fait à l'aide d'un algorithme de gradient conjugué, ce qui nécessite le calcul du gradient du critère $J(\mathbf{f})$:

$$\nabla J(\mathbf{f}) = \nabla Q(\mathbf{f}) + \lambda_1 \nabla H(\mathbf{f}) + \lambda_2 \nabla S(\mathbf{f})$$

Notons en particulier que le calcul de $Q(\mathbf{f})$ et de son gradient $\nabla Q(\mathbf{f}) = 2\mathbf{R}^t \mathbf{W}[\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{f}]$ nécessite à chaque itération une opération de *Projection* : $\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{f}$ et une opération de *Rétroprojection* : $\mathbf{R}^t[\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{f}]$. Le coût de calcul, à chaque itération, est donc essentiellement équivalent au coût de calcul d'une opération de projection et d'une opération de rétroprojection.

2.4. caractéristiques de la méthode

L'approche est très générale. Il y a, bien sûr, un lien entre cette approche et celle de la régularisation classique ainsi qu'entre l'approche du maximum d'entropie classique et celle du maximum d'entropie en moyenne.

2.5. implantation

Cette méthode est effectivement implantée dans les applications suivantes :

- Restauration d'image avec ou sans données manquantes
- Reconstruction d'image en rayons X et en PET en 2-D
- Synthèse de Fourier en 2-D, rencontrée en imagerie microonde, imagerie ultrasonore et IRM (Imagerie par Résonance Magnétique).

2.6. remarques complémentaires

L'extension à 3-D de cette méthode ne pose pas de difficulté théorique. Cependant son coût de calcul peut la limiter en pratique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Mohammad-Djafari, J. Idier, « Maximum Entropy Prior Laws of Images and Estimation of their Parameters », *Proc. of 10th Int. MaxEnt Workshop*, Laramie, Wyoming, published in *Maximum-Entropy and Bayesian Methods*, T.W. Grandy ed., 1990.
- [2] A. Mohammad-Djafari, « Maximum d'entropie et problèmes inverses en imagerie », *Traitement du signal*, vol. 11, 1994, pp. 87-116.

3. algorithme de recuit simulé en 3D

3.1. idée générale et hypothèses

Il s'agit d'une méthode d'optimisation généralisée (technique de Monte Carlo) issue de la mécanique statistique, utilisée pour la première fois pour l'optimisation de problèmes combinatoires en 1983 et pour la reconstruction en tomographie en 1984. Elle présente l'avantage de permettre de converger vers un minimum global.

3.2. principe de la méthode

On cherche la fonction f qui minimise une fonction coût du type :

$$\hat{f} = \min [E(f) = (1 - w)\|p - Xf\| + w\|f - \bar{f}\|]$$

où w est un coefficient de pondération réel, Xf représente les projections estimées, f le volume 3D cherché et \bar{f} la moyenne des niveaux de gris sur un voisinage.

3.3. description sommaire de l'algorithme

- On part d'une solution \hat{f}_0 et d'une température initiale T_0 .
- On modifie le niveau de gris d'un voxel (x, y, z) de \hat{f} d'une quantité g appelée *grain*, ce qui induit une variation ΔE de la fonction coût. Si $\Delta E < 0$, on accepte cette modification sans condition, sinon on l'accepte avec une probabilité égale à $p = \exp(-\Delta E/kT)$ où k est la constante de Boltzman et T une température.
- Après avoir balayé plusieurs fois \hat{f} , l'algorithme atteint un état d'équilibre d'énergie E_T .
- La convergence globale s'obtient en faisant décroître, pas à pas, la température T jusqu'à zéro, en s'assurant que l'état d'équilibre est atteint pour chaque valeur de T .

3.4. caractéristiques de la méthode

Inconvénients

- La méthode est coûteuse en temps de calcul, car la convergence est lente.

- Les paramètres à régler de façon heuristique sont nombreux : T_0 (elle est choisie en pratique, de manière à fournir une probabilité $p(\Delta E)$ d'environ 0,4 au départ), loi de décroissance et pas de discrétisation de T , nombre d'itérations ou critère d'équilibre pour chaque valeur de T , loi de décroissance et pas de discrétisation de g , critère d'arrêt, nombre total d'itérations, valeur de w (valeur à adapter en fonction du bruit lié au données et du lissage désiré).

Avantages

- Cette méthode permet la résolution de problèmes :
 - sans solution analytique
 - mal conditionnés
 - non linéaires
- Elle converge théoriquement vers le minimum global, pour une loi de décroissance de T de la forme $T_n = C/\log(n+1)$.
- Elle est robuste au bruit, très souple d'emploi.
- La géométrie d'acquisition est quelconque, à faible nombre de vues.
- Elle permet une prise en compte aisée de contraintes (positivité, support) et de connaissance a priori (continuité de l'objet 3D reconstruit).

3.5. implantation

Cette méthode a été implantée en reconstruction 3D à partir d'un très faible nombre de vues (3 à 10). La reconstruction est peu affectée par un bruit aléatoire additif (poissonien) sur les projections (de l'ordre de 10% de la dynamique).

3.6. remarques complémentaires

Le recuit simulé calculé pour $T = T_0 = 0$, correspond à une méthode de gradient.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M.P. Vecchi, « Optimization by Simulated Annealing », *Science*, vol. 220, n°4598, 1983, pp. 671-680.
- [2] M. El Alaoui, I.E. Magnin, M. Amiel, « Simulated Annealing Image Reconstruction for an X-ray Coded Source Tomograph », *SPIE Mathematical Imaging*, July, San Diego, vol. 1563, 1991, pp. 21-26.
- [3] K.J. Kearfott, S.E. Hill, « Simulated Annealing Image Reconstruction Method for a Pinhole Aperture Single Photon Emission Computed Tomograph (SPECT) », *IEEE Trans. on Medical Imaging*, vol. 9, n°2, 1990, pp. 128-143.

4. reconstruction avec prise en compte d'un modèle d'objet utilisant des champs Markoviens

4.1. idée générale et hypothèses

En raison de contraintes liées à la nature ou à la géométrie des objets, il arrive que l'on ne dispose que d'un nombre limité de projections ou d'acquisitions très bruitées. En revanche, on dispose souvent d'informations a priori permettant de régulariser la reconstruction. Nous proposons une méthode de reconstruction d'objets composés de quelques classes (matériaux) bien contrastées intégrant une information sur la nature physique des différents matériaux et sur leur distribution géométrique au moyen d'une modélisation markovienne.

4.2. principe de la méthode

La méthode est basée sur une description de l'objet par deux champs : f , le champ des densités et λ , le champ des labels caractérisant les classes. Elle repose sur une démarche bayésienne comportant trois étapes :

Modélisation de la formation des projections : $P(p/f, \lambda)$. Elle traduit le phénomène de formation des projections (Xf) et modélise le bruit lié à l'acquisition (bruit photonique, bruit de mesure).

Modélisation a priori : $P(f, \lambda)$. Elle traduit les informations dont on dispose sur l'objet à reconstruire. Dans notre cas, nous la définissons par ses probabilités conditionnelles locales :

- la loi de $(f_i/f_j, j \neq i, \lambda)$ est gaussienne d'interaction limitée aux sites voisins et de même label, elle permet de régulariser dans chaque zone tout en conservant les frontières.
- la loi de $(\lambda_i/\lambda_j, j \neq i)$ est un modèle de plages colorées de Besag [4], qui permet de traduire une information sur la régularité des plages et sur leur distribution géométrique.

Distribution a posteriori : $P(f, \lambda/p)$, obtenue par la règle de Bayes. A partir de cette distribution, on définit un estimateur de la reconstruction : soit le MAP, maximisant la probabilité a posteriori $P(f, \lambda/p)$, soit le MPM correspondant à la configuration maximisant en chaque site la marginale a posteriori $P(f_i, \lambda_i/p)$, soit le « Posterior Mean » réalisant la moyenne de la distribution a posteriori. Le caractère non linéaire de la distribution a posteriori nécessite la mise en œuvre d'algorithmes stochastiques (recuit simulé, échantillonneur de Gibbs). Pour des raisons de temps de calcul, nous avons choisi une maximisation sous-optimal, basée sur l'utilisation de l'ICM (Iterated Conditional Modes) [4], version déterministe du recuit simulé.

4.3. description sommaire de l'algorithme

L'algorithme alterne des phases de reconstruction et mise à jour des classes.

Reconstruction : durant cette étape, les classes sont supposées fixées. Suivant le nombre de projections dont on dispose, on peut effectuer soit une reconstruction analytique [3], soit une reconstruction algébrique [1][2]. La régularisation dans la reconstruction tient compte des classes et ne dégrade pas les frontières entre celles-ci.

Mise à jour des classes : on suppose cette fois le champ de densité fixé et on détermine la distribution des classes la plus probable conditionnellement au champ de densité (maximisation en λ de $P(f/\lambda)P(\lambda)$). En utilisant l'ICM, ceci se traduit en chaque site par la minimisation de :

$$\frac{1}{2\sigma\mu_{\lambda_i}} \left\{ (f_i - \mu_{\lambda_i})^2 - 2\gamma\mu_{\lambda_i} (f_i - \mu_{\lambda_i}) \right\} + \sum_{j \in V_i, l_j = l_i} (f_j - \mu_{\lambda_i}) + \sum_{j \in v_i} \beta_{\lambda_i, \lambda_j}$$

où V_i est le voisinage du site i , μ, σ, γ représentent les caractéristiques du champ gaussien dans une classe particulière, et $\beta_{\lambda_i, \lambda_j}$ représente le coût de la juxtaposition de sites de labels i et j . La reconstruction finale est obtenue après un petit nombre d'itérations (inférieur à 5) de ce schéma reconstruction — mise à jour.

4.4. caractéristiques de la méthode

Cette méthode s'adapte à un très grand nombre de configurations. Le modèle algébrique de formation des projections (Xf) permet de traiter un grand nombre de géométries d'acquisition, et $P(p/f)$ divers types de bruit. Par un choix adéquat du modèle, on peut traduire un grand nombre d'informations sur la distribution des classes. En raison de la prise en compte des discontinuités, cette méthode conduit à des algorithmes non linéaires nécessitant des temps de calcul importants. Ainsi, elle est surtout utilisée dans des cas où l'on ne dispose que d'un nombre limité de projections, ou d'acquisitions à très faible rapport signal à bruit.

4.5. implantation

Dans le domaine industriel, la méthode a été utilisée en radiographie éclair pour la reconstruction à partir de huit projections d'objets en cours de déformation [1] et pour la localisation de défauts dans des conduites [2]. Dans le domaine médical, elle a été appliquée en reconstruction tridimensionnelle de zones contrastées (os / tissus mous) [3]. Dans tous ces cas, la méthode a conduit à des améliorations sensibles de la restitution des interfaces et des contrastes entre les différentes classes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.M. Dinten, « Tomographie à partir d'un nombre limité de projections, régularisation par des champs markoviens », *Thèse de doctorat*, Université Paris XI, 1990.
- [2] C. Klifa, « Reconstruction 3D de défauts à partir d'un nombre restreint de projections », *Thèse de doctorat* de l'ENST, 1991.
- [3] S. Delagenière, « Utilisation d'un modèle d'objet en reconstruction d'image tridimensionnelle : application à l'imagerie médicale », *Thèse de doctorat* de l'INPG, 1993.
- [4] J. Besag, « On the Statistical Analysis of Dirty Pictures », *Journal of the Royal Statistical Society*, B-48, 1986, pp. 259-302.

5. méthode adaptative de reconstruction tomographique préservant les discontinuités

5.1. idée générale et hypothèses

Le problème de tomographie SPECT est modélisé par le système linéaire : $\mathbf{p} = \mathbf{X}\mathbf{f} + \mathbf{n}$. C'est un problème inverse mal posé. La régularisation est obtenue par modélisation de l'image à reconstruire utilisant les champs Markoviens avec prise en compte des discontinuités [3]. L'image est obtenue en minimisant le critère :

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{X}\mathbf{f}\|^2 + \sum_{i,j} \varphi((D_x \mathbf{f})_{i,j}) + \sum_{i,j} \varphi((D_y \mathbf{f})_{i,j}) \quad (1)$$

où D est l'opérateur gradient et φ une fonction de régularisation.

5.2. principe de la méthode

La fonction φ de régularisation préserve les discontinuités si :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi'(u)}{2u} = M, \quad 0 < M < +\infty$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(u)}{2u} = 0 \quad (2)$$

La fonction $\varphi'(u)/2u$ est continue strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ avec $u = (D_x \mathbf{f})_{i,j}$; $b = (bx)_{i,j}$ (resp. $v = (D_y \mathbf{f})_{i,j}$; $b = (by)_{i,j}$).

L'idée fondamentale consiste à introduire une variable auxiliaire b de la dimension de l'image [1]. Le critère $J(\mathbf{f})$ est remplacé par un critère augmenté $J(\mathbf{f}, \mathbf{b})$ à minimiser sur les variables \mathbf{f} et \mathbf{b} . Le nouveau critère est quadratique en \mathbf{f} à \mathbf{b} fixé et convexe en \mathbf{b} à \mathbf{f} fixé. Si $\varphi(\sqrt{u})$ est strictement concave alors $\forall \Psi$ telle que $\varphi(u) = \min_b (bu^2 + \Psi(b))$.

5.3. description sommaire de l'algorithme

L'algorithme est une suite de minimisations alternées par rapport à \mathbf{f} et à \mathbf{b} en partant d'une solution initiale qui peut être $f^0 = 0$. L'expression du minimum en \mathbf{b} à \mathbf{f} fixé est :

$$\mathbf{b} = \frac{\varphi'(u)}{2u} \quad (3)$$

et le minimum en \mathbf{f} à \mathbf{b} fixé est obtenu en résolvant l'équation linéaire :

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \Delta_{pond}^{n+1} \mathbf{f} = \mathbf{X}^T \mathbf{p} \quad (4)$$

$$\Delta_{pond}^{n+1} = D_x^t \Lambda_x^{n+1} D_x + D_y^t \Lambda_y^{n+1} D_y$$

$$\text{où } \Lambda_x^{n+1} = \text{diag} \left[(b_x^{n+1})_{i,j} \right] \text{ et } \Lambda_y^{n+1} = \text{diag} \left[(b_y^{n+1})_{i,j} \right]$$

est un laplacien pondéré.

5.4. caractéristiques de la méthode

La minimisation du critère J , convexe ou non convexe, est obtenue par une suite de minimisations alternées. Cet algorithme s'effectue en minimisant, à chaque étape, une suite de fonctionnelles quadratiques. La résolution du système linéaire à chaque étape peut se faire par une méthode de gradient conjugué, par Gauss Seidel ou ART. Les fonctions de régularisation peuvent être convexes ou non convexes.

5.5. implantation

– L'algorithme a été testé sur station de travail Dec, pour de la tomographie d'émission. L'algorithme a été testé en tomographie 2D, à partir de 64 projections de 64 pixels, pour reconstruire des images 64×64 .

– L'algorithme est robuste au bruit, et rapide car déterministe.

– Les performances obtenues sur des données simulées et des données réelles ont été comparées avec les résultats de la méthode de rétroprojection filtrée, couramment utilisée en milieu médical, ainsi qu'avec l'algorithme EM (Expectation Maximisation).

5.6. remarques complémentaires

L'extension à la tomographie 3D ne pose pas de problème théorique, elle est actuellement en cours sur la tomographie 3D d'émission conique SPECT. Un autre algorithme de minimisation semi quadratique à également été proposé [2].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Charbonnier, G. Aubert, L. Blanc-Féraud, M. Barlaud, « Two Deterministic Half Quadratic Regularization Algorithm for Computed Imaging », *JCIP*, Austin, Nov., vol. II, 1994, pp. 168-172.
- [2] G. Aubert, M. Barlaud, L. Blanc-Féraud, P. Charbonnier, « A Deterministic Algorithm for Edge-Preserving Computed Imaging using Legendre Transform », *ICPR*, Jerusalem, Sept., vol. III, 1994, pp. 188-191.
- [3] D. Geman, G. Reynolds, « Constrained Restoration and the Recovery of Discontinuity », *IEEE Trans. PAMI*, vol. 14, n°3, 1992, pp. 367-383.

6. estimation d'objets simples ou multiples à partir de projections incomplètes et bruitées

6.1. idée générale et hypothèses

On considère l'objet comme formé d'un certain nombre d'empilements de sections 2D le long d'un même squelette. Dans la fiche, on considérera que l'objet est formé d'un ensemble d'empilements d'ellipses selon z , dont on cherche à évaluer les paramètres à chaque altitude. Le bruit est supposé gaussien et non corrélé.

6.2. principe de la méthode

La fonction objet est décomposée en un nombre J d'objets cylindriques f_j sur un fond continu a priori connu, soit :

$$f(x, y; z) = f_b(x, y; z) + \sum_{j=1}^J f_j(x, y; z) \quad (1)$$

f_b représente le fond continu et f_j est de la forme :

$$f_j(x, y; z) = d_j f_0(x - x_{c,j}(z), y - y_{c,j}(z); \gamma_j(z)) \quad (2)$$

où f_0 est égal à 1 à l'intérieur d'une ellipse centrée en $\{x_{c,j}(z), y_{c,j}(z)\}$, et de paramètres $\gamma_j(z)$, qui sont l'orientation et la longueur des axes de l'ellipse, d_j est un paramètre de contraste. Le vecteur d'état $\mathbf{X}_j(z)$ regroupe l'ensemble des paramètres $\{x_{c,j}(z), y_{c,j}(z), d_j, \gamma_j(z), z_{l,j}, L_j\}$ caractérisant chaque objet, et on suppose que ce vecteur suit un modèle d'évolution de Markov par rapport à la coordonnée z , soit :

$$\mathbf{X}_j(z+1) = \mathbf{A} \mathbf{X}_j(z) + \mathbf{B} \mathbf{w}_j(z) \quad (3)$$

où

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{X}_j(z_{l,j})\} &= \mathbf{X}_0 \\ cov\{\mathbf{X}_j(z_{l,j})\} &= \mathbf{\Pi}_0 \end{aligned}$$

où $\mathbf{w}_j(z)$ est un bruit blanc gaussien de variance unité, $z_{l,j}$ et L_j représentent respectivement la coordonnée de départ et la longueur selon z de l'objet j .

Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} et les paramètres initiaux \mathbf{X}_0 et $\mathbf{\Pi}_0$ sont déterminés en fonction d'informations a priori, ou estimés à partir d'un certain nombre d'objets-tests. Le problème consiste à trouver, étant donné un jeu de projections bruitées et le modèle d'évolution (3), le nombre J et les vecteurs \mathbf{X}_j optimaux à chaque z . Cet optimum est défini dans le cas d'un objet constitué d'un seul cylindre comme celui qui minimise la valeur moyenne de l'erreur quadratique, et est calculé à l'aide d'un filtrage de Kalman

agissant récursivement sur z et sur la fréquence de Fourier radiale [1]. Dans le cas d'un objet multiple, la solution optimale est définie comme une solution MAP (Maximum A Posteriori) d'un estimateur bayésien, et est trouvée à l'aide d'un algorithme sous optimal.

6.3. description sommaire de l'algorithme

Dans le cas d'un objet multiple, l'algorithme comprend quatre étapes :

i) la recherche des primitives (ou sections) des différents cylindres à chaque z à partir des projections 1D, c'est-à-dire retrouver la position et les paramètres des différentes formes f_0 par une méthode de maximum de vraisemblance,

ii) la construction à partir des primitives de l'ensemble des combinaisons d'objets élémentaires possibles, et la sélection de ces objets selon un critère de vraisemblance par rapport à des hypothèses de continuité,

iii) la recherche de la combinaison optimum d'objets élémentaires selon un critère de maximum de vraisemblance,

iiii) la dernière étape peut être définie comme un lissage des primitives, qui permet de trouver les paramètres optimaux \mathbf{X}_j de la séquence d'objets choisis par une méthode de moindres carrés, à partir de l'ensemble des données.

6.4. caractéristiques de la méthode

C'est une méthode très robuste, qui peut donner de très bons résultats dans un environnement très bruité, et à partir d'un nombre faible de projections, car le problème se réduit à la détermination d'un petit nombre de paramètres.

6.5. implantation

L'algorithme a été implanté dans le cas d'une géométrie parallèle, comportant quatre projections régulièrement espacées dans un angle de 135° . Le domaine d'application est la reconstruction de vaisseaux sanguins.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. Bresler, A. Macovski, « 3D Reconstruction from Projections with Incomplete and Noisy Data by Object Estimation », *IEEE ASSP*, vol. 35, n°8, août, 1987, pp. 1139–1152.
- [2] Y. Bresler, J.A. Fessler, A. Macovski, « A Bayesian Approach to Reconstruction from Incomplete Projections of a Multiple Object 3D Domain », *IEEE Trans. PAMI*, vol. 11, n°8, 1989, pp. 840–858.

7. reconstruction 3D des vaisseaux à partir de deux angiogrammes par une approche markovienne

7.1. idée générale et hypothèses

On reconstruit le profil 3D de vaisseaux, coupe par coupe, à partir de deux angiographies numériques acquises sous des incidences perpendiculaires. En supposant que le mélange sang-produit de contraste soit homogène, l'objet à reconstruire peut être considéré comme binaire. On suppose également que l'axe de rotation des vues est parallèle à l'axe moyen des vaisseaux, ce qui permet d'établir une correspondance entre les deux vues. La méthode comporte deux étapes :

- 1) construction d'une solution initiale simple par empilement d'ellipses,
- 2) à partir de la solution initiale, reconstruction des sections coupe par coupe par minimisation d'une fonction coût comprenant un terme d'attache aux données et des informations a priori sur l'objet. La minimisation de cette fonction est réalisée par un algorithme de recuit simulé.

7.2. principe de la méthode

Le problème de la reconstruction à partir de deux projections étant indéterminé, il doit être régularisé par l'introduction de connaissances a priori. Dans notre approche, ces connaissances sont introduites à deux niveaux : d'une part en obtenant une première estimation du contour à partir des connaissances géométriques et densitométriques des vaisseaux sains, d'autre part en introduisant dans la fonction coût des a priori de régularité de la structure dans la coupe, et un a priori de régularité entre coupes adjacentes.

La solution initiale est construite en approchant les vaisseaux par des cylindres constitués d'un empilement d'ellipses orientables, estimées par moindres carrés sur les profils densitométriques.

Pour chaque section du vaisseau, on définit ensuite une fonction coût déduite d'une formulation bayésienne, dont l'a priori est donné par une modélisation markovienne de la structure binaire. Cette fonction, notée W_{z_q} pour un section se trouvant au niveau z_q , comprend trois termes : un terme traduisant la fidélité aux données, un terme de compacité de la section (modèle d'Ising), et un terme de ressemblance inter-coupes, soit :

$$W_{z_q} = \lambda_1 \sum_{j=1}^2 \sum_i [\hat{p}_{\theta_j}(x'_i, z_q) - p_{\theta_j}(x'_i, z_q)]^2 + \lambda_2 \sum_i \sum_{\text{voisins } 1} \delta [f(x_i, y_i, z_q) - f(x_1, y_1, z_q)] + \lambda_3 \sum_i [f(x_i, y_i, z_q) - f(x_i, y_i, z_{q-1})]^2$$

où $p_{\theta_j}(x'_i, z_q)$ est la projection acquise, et $\hat{p}_{\theta_j}(x'_i, z_{q-1})$ est la projection reconstruite à partir de la section estimée, $f(x_i, y_i, z_q)$ est l'intensité du pixel $[x_i, y_i]$ de la coupe binaire au niveau z_q .

7.3. description de l'algorithme

Pour chaque plan de coupe z_q :

- construction d'une solution initiale elliptique par minimisation moindres carrés sur les profils angiographiques,
- partant de cette configuration de coupe, minimisation de W_{z_q} par un algorithme de recuit simulé modifié de façon à accélérer la convergence vers la configuration optimale. Ces modifications sont :
 - a) la température initiale de recuit est adaptée à chaque image en fonction de l'écart aux données de la configuration initiale,
 - b) seuls les pixels périphériques de la section sont examinés, car les lésions vasculaires se forment sur les parois.

7.4. caractéristiques de la méthode

La recherche des paramètres du modèle d'énergie est heuristique, et les coefficients de régularisation du modèle d'énergie λ_2 et λ_3 décroissent au cours du recuit, pour autoriser l'apparition de sections très irrégulières.

7.5. implantation et domaine d'application

L'algorithme a été implanté sur micro-Vax 4000. Le temps de reconstruction par coupe varie entre 2 et 10 secondes. La méthode a été testée sur des images de synthèse simulant des bifurcations et des sténoses complexes, sur des radiographies de fantôme ainsi que sur des angiogrammes réels. Pour l'instant, la méthode n'a été appliquée qu'aux vaisseaux périphériques (bifurcations aortique et iliaque). La conformité de la méthode, évaluée selon un critère de distance euclidienne entre les contours de la section réelle et ceux de la section obtenue par reconstruction est $> 99\%$ pour les lésions concentriques et régulières, $> 98\%$ dans les sections de la bifurcation, et entre 92 et 98% pour les lésions irrégulières. Nous envisageons d'étendre l'algorithme : 1) à des structures plus complexes, en particulier aux artères coronaires, 2) en effectuant une reconstruction réellement 3D avec un modèle d'Ising 3D pour la régularisation, 3) en utilisant d'autre part une formulation spline pour les contours des vaisseaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Pellot, « Reconstruction tridimensionnelle des bifurcations vasculaires à partir de deux projections en angiographie numérisée », *Thèse de doctorat*, Paris XI, 1991.
- [2] C. Pellot, A. Herment, M. Sigelle, P. Horain, H. Maitre, P. Peronneau, « 3D Reconstruction of Vascular Structures from Two X-Ray Angiograms using an Adapted Simulated Annealing Algorithm », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 13, n°1, 1994, pp. 48–60.
- [3] H. Hanéishi, T. Masuda, N. Ohyama, T. Honda, « Three-Dimensional Blood Vessel Reconstruction by Simulated Annealing », *Optics Letters*, vol. 14, n°20, 1989, pp. 1095–1097.