

Fusion de données

Coopération optimale de capteurs frustes

Optimal Cooperation of Low-Level Sensors

par Ch. OLIVIER*

STSIE, Fort d'Issy
18, rue du Docteur Zamenhof, 92131 Issy-les-Moulineaux
Tél. (1) 41 46 34 96. Fax (1) 41 46 33 07
Email : olivier@etca.fr

Résumé

La connaissance initiale sur un paramètre à identifier est une loi de probabilité *a priori* sur un espace d'état Ω . Cette loi est mise à jour récursivement en fonction de résultats d'observation parallèles, chaque observation étant une détection binaire de la présence du paramètre dans un sous-ensemble spécifique de Ω avec des fausses alarmes. Le problème abordé ici est celui de la configuration optimale de ces sous-ensembles d'observation dans un contexte de théorie de l'information. Il est montré que le problème théorique est équivalent à un calcul de capacité de canal si la forme des sous-ensembles d'observation n'est pas contrainte, et la configuration théorique optimale déterminée. On s'intéresse ensuite à l'utilisation et à la mise en œuvre pratique d'une telle approche.

Mots clés : Modèles bayésiens, conception optimale d'expériences, contrôle adaptatif de capteurs, théorie de l'information.

Abstract

The initial knowledge about some parameter to be identified is a prior probability distribution over some state space Ω . This distribution is recursively updated through parallel observation results, each observation being a binary detection of the parameter in a specific subset of Ω with false alarms. Here is addressed the optimal design of these observation subsets via an information theoretic approach. It is shown that the theoretical problem is equivalent to a channel capacity computation, if no constraints hold on the subsets shapes, and the theoretical optimal design is found. Some clues are given on the practical use and implementation of such an approach.

Key words : Bayesian estimation, statistical design of experiments, adaptive sensor control, information theory.

1. Introduction

La mise en configuration optimale de capteurs en fusion de données est généralement abordée soit sous l'angle de la définition d'une configuration *a priori*, consistant à choisir et à paramétrer un capteur approprié pour une application donnée, la configuration de ce capteur restant fixe pendant toute l'expérience, soit sur le contrôle adaptatif de paramètres instantanés de capteurs en vue de la réalisation d'une tâche spécifique, telle que le passage en mode poursuite pour un radar par exemple [16].

Le contrôle adaptatif est d'autre part un domaine extrêmement étudié sur un plan international, mais qui consiste essentiellement à mettre au point des contrôleurs en boucle fermée capables de stabiliser des systèmes dynamiques soumis à un certain nombre de perturbations de leur modèle initial [7].

* Recherche effectuée sous contrat de la Direction des Recherches, Etudes et Techniques, France.

Notre approche présente se démarque assez radicalement de ces deux domaines, puisque nous nous proposons d'optimiser le processus d'acquisition et de prise en compte d'information sur une scène par l'intermédiaire d'une affectation optimale de secteurs d'observation spécifiques à chacun des capteurs. Cette information peut ensuite être utilisée à des fins de contrôle. Les idées sous-jacentes sont en fait proches de celles utilisées en conception optimale d'expériences [5], le degré de liberté portant non pas sur la modification des paramètres de détection des capteurs, mais sur les « zones » de l'espace qui leur sont attribuées. Le principal objectif du contrôle des capteurs est par conséquent ici l'optimisation d'un processus de filtrage bayésien d'une densité de probabilité par le biais du découpage approprié de l'espace d'état en secteurs d'observation. Cette densité de probabilité (d.d.p.), mise à jour récursivement au moyen des observations sectorielles parallèles de chaque capteur, représente la connaissance que l'on a à un instant donné sur l'état du système observé, qui peut être la position de cet objet, dans un contexte de détection et de localisation, la fréquence d'une source dans un contexte acoustique, ou même une notion beaucoup plus abstraite de type symbolique, le formalisme présenté étant relativement général.

Cette densité de probabilité permet de construire des estimateurs du paramètre d'intérêt, par exemple l'espérance conditionnelle ou le maximum a posteriori.

En examinant les capteurs utilisés dans les applications robotiques, il est d'autre part remarquable de constater que ces capteurs ne fournissent la plupart du temps que des informations partielles et bruitées concernant certains sous-ensembles spécifiques de l'espace d'état Ω , par exemple certains secteurs géométriques si Ω est un horizon (typiquement une image ou un sonar) ou bien certaines bandes de fréquence si Ω est un domaine fréquentiel (radar). L'ensemble de l'espace n'est donc pas observable à chaque instant par chaque capteur (considérer le cas d'une caméra petit champ par exemple), et il devrait donc exister une manière optimale de sélectionner séquentiellement quelles parties de l'espace observer. Les capteurs servant de modèles ici observent donc une région donnée de l'espace d'état (par exemple un secteur angulaire donné de la scène), et sont à réponses binaires, c'est-à-dire très frustes. Ce modèle pourrait convenir pour un capteur de type sonar ou un système d'imagerie petit champ couplé à un traitement d'image très élémentaire. Le vocable générique de « fenêtre d'observation » qui va précisément dénoter dans la suite l'ensemble des paramètres ajustables que nous souhaitons contrôler, est dû à X. Merlo [9]. Sur ce type de capteur, il s'agit donc essentiellement de contrôler les contours des zones observées.

Notons que le problème spécifique de recherche d'objet par vision a été abordé par Ballard, Brown, Rimey et Wixson de l'Université de Rochester [19], mais ils travaillent à taille de champ d'observation constant.

Notre deuxième axe d'intérêt est l'utilisation conjuguée de ces capteurs élémentaires, dans le but d'évaluer le gain d'information lié à leur coopération [4] [10], cette coopération étant elle-même optimisée. Ce problème, qui relève du domaine de la détection distribuée, reste très différent des travaux menés sur ce thème [15] [14] [2] [13] [17]. Nous modélisons en effet d'emblée chaque capteur par un canal binaire dissymétrique dont les probabilités de détection et de fausse alarme sont fixées : il n'y a pas d'optimisation sous-jacente de seuils comme dans l'approche décisionnelle initiale de Tenney et Sandell [15] de minimisation du risque bayésien centralisé, et pas de compression d'information entre les capteurs et le filtre bayésien central [18]. Il n'y a pas de décision binaire centrale prise par un décideur en dernier ressort [13] même si l'objectif premier est d'optimiser la forme de la densité de probabilité en vue d'une décision de type localisation la plus probable ou moyenne du paramètre recherché. Enfin, et il s'agit là probablement de la différence la plus notable avec le reste des travaux sur le sujet, les capteurs n'observent précisément pas tous la même chose. Il s'agit donc d'un problème d'observation distribuée à information centralisée.

La principale différence avec le papier initial sur le sujet [11] est le fait que les secteurs d'observation des différents capteurs ne sont plus contraints de former une partition de l'espace et peuvent donc en particulier avoir des intersections non vides. Ceci permet d'obtenir une solution sous forme analytique, pour

un critère particulier, du problème d'optimisation sous-jacent. Le critère est l'espérance de la quantité d'information de la densité de probabilité a posteriori ou encore l'espérance de l'incrément de quantité d'information entre la loi a priori et la loi a posteriori, les deux étant équivalents. La définition de la quantité d'information d'une densité de probabilité est précisée ci-dessous.

Nous parlerons indifféremment par la suite d'"espace d'état" et d'"espace d'observation". L'espace d'état est l'ensemble Ω des configurations possibles pour le paramètre d'intérêt. L'espace d'observation correspond à la projection de l'espace d'état observable par les capteurs. En réalité, cette distinction n'a que peu d'importance dans un premier temps, étant donné que la seule relation dont nous allons nous servir est la probabilité conditionnelle entre état et observation. Nous supposons donc au départ qu'il existe une loi conditionnelle d'observation pour chaque capteur $p(\cdot | x)$, pour tout $x \in \Omega$, donc pour toute vraie valeur du paramètre, ce qui signifie implicitement que les conditions d'observabilité sont identiques en tout point de l'espace d'état.

Le papier est organisé de la manière suivante : après quelques notations, nous proposons un formalisme probabiliste et écrivons le problème d'optimisation en termes généraux. Nous nous concentrons dans la section suivante sur un critère d'optimalité de type quantité d'information, et exhibons un système nécessaire et suffisant de contraintes caractérisant l'allocation optimale des secteurs de recherche aux capteurs. Une équivalence est proposée avec un problème de capacité de canal, cette notion étant empruntée à la problématique de la théorie de l'information, ainsi qu'une interprétation intuitive de la configuration optimale. Nous discutons enfin de la faisabilité et de la calculabilité de cette configuration optimale dans les cas réels, compte-tenu des contraintes sur les capteurs qui peuvent être par exemple géométriques. Des simulations comparent enfin les performances de l'approche proposée en termes de recherche dynamique d'objet, vis-à-vis de techniques plus classiques.

2. Enoncé du problème

2.1. NOTATIONS

Les notations utilisées vont être les suivantes : un objet -plus généralement, une caractéristique- x se trouve dans un espace Ω et la connaissance a priori dont on dispose sur x est une densité de probabilité $p(x)$, $x \in \Omega$.

\mathcal{P}_Ω désigne un N -tuple de sous-ensembles ω_i de Ω , soit $\mathcal{P}_\Omega = \{\omega_i\}$, $i = 1, \dots, N$.

On définit à partir de ces ω_i toutes les intersections faisant intervenir une fois et une seule chaque ω_i ou son complémentaire. Ces intersections sont donc des ensembles S_d de la forme

$$S_d = \omega_1^{d_1} \cap \omega_2^{d_2} \cap \dots \cap \omega_N^{d_N}$$

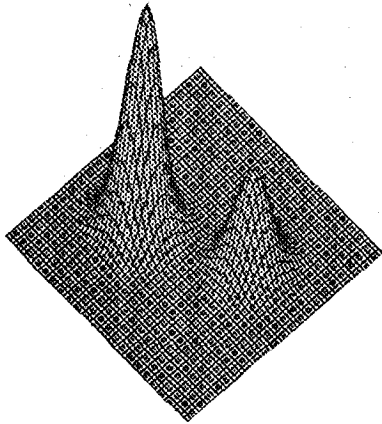


Figure 1. – Un exemple de loi a priori p sur un Ω bidimensionnel.

où $d = \{d_i\}, i = 1, \dots, N$ est un N -tuple de nombres dans $\{0, 1\}^N$ caractérisant S_d (il faudrait en toute rigueur les noter $d_i(S_d)$), la notation ω_i^1 désignant ω_i et ω_i^0 désignant le complémentaire de ω_i , qui est noté également $\bar{\omega}_i$. Il y a 2^N ensembles de ce type indexés par la lettre d (qui correspond donc à un mot de N bits comme nous venons de le voir) et forment une partition de Ω : \sum_d désigne la sommation sur tous les 2^N N -tuples

de ce type. Nous pouvons noter les intersections S_d forment une partition de Ω :

$$\begin{cases} \bigcup_d S_d = \Omega \\ S_d \cap S_k = \emptyset \text{ si } d \neq k \end{cases}$$

Une observation faite par le capteur i est notée z_i . Les capteurs i étant binaires, $z_i \in \{0, 1\}$. On désigne un N -tuple $(z_1, \dots, z_N) \in \{0, 1\}^N$ par z :

\sum_z désigne la sommation sur tous les 2^N N -tuples de ce type.

Soit un N -tuple z correspondant à un N -tuple de résultats d'observation et une intersection S_d . Pour ce couple (z, d) , la probabilité conditionnelle d'obtenir le résultat z sachant que x appartient à l'intersection S_d , soit $p(z | x \in S_d)$ est notée u_{zd} et $p(S_d)$ désigne la probabilité que x appartienne à S_d , soit $p(x \in S_d) = \int_{S_d} p(x) dx$.

Notons que $p(z) = \sum_d u_{zd} p(S_d)$.

p_{ω_i} désigne la probabilité $p(x \in \omega_i) = \int_{\omega_i} p(x) dx$.

Tous les logarithmes sont en base e dans la suite, sachant que $\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$, et tous les résultats seront multipliés par un facteur $\frac{1}{\log 2}$ en fin de calcul. Enfin, $If(\cdot)$ est la fonction définie par $If(u) = u \log u + (1 - u) \log(1 - u) \forall u \in]0, 1[$.

La quantité d'information d'une densité de probabilité $p(\cdot)$ est notée $I(p(\cdot))$ et se définit comme l'opposé de l'entropie différentielle :

$$I(p(\cdot)) = \int_{\Omega} p(x) \log p(x) dx.$$

$\delta_{i,l}$ est l'indice de Kronecker, égal à 1 si $i = l$, 0 sinon.

S_{2^N} désigne le simplexe de tous les vecteurs de probabilité a priori possibles sur la partition des intersections S_d , soit

$$S_{2^N} = \{ \{p_d\} \mid \sum_d p_d = 1, p_d \geq 0 \}.$$

Les démonstrations de résultats n'apparaissant pas dans le texte principal sont consignées dans l'annexe.

2.2. LE MODÈLE

Nous supposons que l'objet (ou le paramètre) présent dans Ω est observé dans différents sous-ensembles $\omega_i, i = 1, \dots, N$ de Ω par des capteurs binaires $C_i, i = 1, \dots, N$ modélisés comme des canaux binaires asymétriques caractérisés par des probabilités de transition stationnaires.

Le capteur C_i "balaye" donc ω_i , cherchant la caractéristique x dans ce sous-ensemble ω_i , sachant que la probabilité a priori qu'il y soit est p_{ω_i} , et avec des probabilités de détection, $p(z_i = 1 | x \in \omega_i) = \alpha_i \in [0, 1]$ et de fausse alarme $p(z_i = 1 | x \notin \omega_i) = 1 - \beta_i \in [0, 1]$.

Ces hypothèses sont synthétisées dans le tableau suivant :

$p(z_i x)$	$x \in \omega_i$	$x \notin \omega_i$
$z_i = 1$	α_i	$1 - \beta_i$
$z_i = 0$	$1 - \alpha_i$	β_i

Les coefficients (α_i, β_i) sont supposés indépendants de ω_i . Ceci suppose de manière sous-jacente donc, comme il a été mentionné dans l'introduction, que les conditions d'observabilité sont uniformes en tout point de l'espace pour un capteur donné. Ceci explique également a posteriori pourquoi le critère d'allocation optimale ne porte que sur le 2^N -tuple de valeurs $p(S_d)$ des probabilités

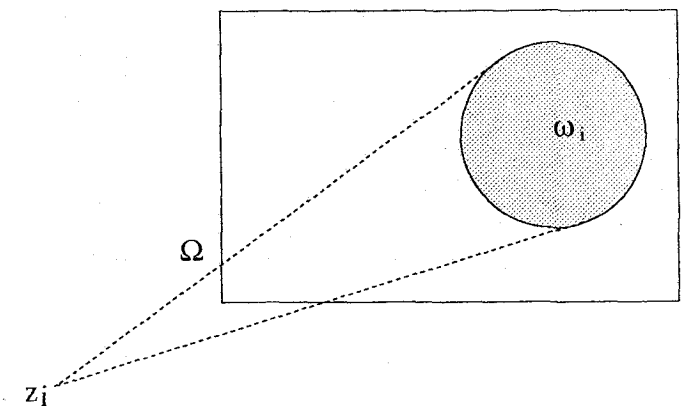


Figure 2. – Fenêtre d'observation pour un capteur binaire.

intégrées sur les différentes intersections S_d , indépendamment de la localisation dans l'espace des sous-ensembles ω_i concernés. La prise en compte de conditions d'observabilité différenciées, pour tenir compte de "zones d'ombre" non observables par exemple, supposerait que les fonctions $p(z_i | x)$ dépendent d'un paramètre autre que la simple appartenance de x au sous-ensemble ω_i , et complexifierait de manière notable l'analyse du problème. En pratique, les contraintes viennent davantage de la géométrie propre des sous-ensembles ω_i qu'autorisent les capteurs utilisés. On ne peut, dans les cas réels, décider de donner une frontière quelconque à ces ω_i comme nous le verrons à l'avant-dernier paragraphe de cet article.

L'observation z_i faite dans ω_i est intégrée par la formule de Bayes et la densité de probabilité *a posteriori* vaut

$$p(x | z_i) = \frac{p(z_i | x)p(x)}{p(z_i)},$$

avec

$$p(z_i) = \int_{\Omega} p(z_i | x)p(x)dx.$$

En généralisant les équations ci-dessus au cas de N informations binaires simultanées formant un vecteur $z = (z_1, \dots, z_N)$, on obtient la loi conditionnelle après observation :

$$p(x | z) = \frac{p(z | x)p(x)}{p(z)}, \quad (1)$$

L'objectif est par conséquent d'optimiser certaines caractéristiques de la loi $p(\cdot | z_1^k)$ obtenue après intégration récursive de k informations vectorielles z^1, \dots, z^k , cette loi permettant par exemple de calculer à l'instant t_k un estimateur de x donné par

$$\hat{x} = \int_{\Omega} xp(x | z_1^k)dx.$$

Si x est supposé appartenir à une intersection particulière de sous-ensembles

$$S_d = \omega_1^{d_1} \cap \omega_2^{d_2} \cap \dots \cap \omega_N^{d_N},$$

le premier terme $p(z | x \in S_d)$ s'écrit

$$\begin{aligned} p(z_1, \dots, z_N | x \in S_d) &= \prod_{l=1}^N p(z_l | x \in \omega_l^{d_l}) \\ &= \prod_{l=1}^N \left(\alpha_l^{\delta_{d_l,1} \delta_{z_l,1}} (1 - \alpha_l)^{\delta_{d_l,1} \delta_{z_l,0}} \beta_l^{\delta_{d_l,0} \delta_{z_l,0}} (1 - \beta_l)^{\delta_{d_l,0} \delta_{z_l,1}} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

l'hypothèse étant que toutes les observations z_l sont *conditionnellement indépendants*, i.e., indépendants sachant que x appartient à S_d , une hypothèse classique dans ce type de problème [18], et qui correspond en fait à des défaillances de capteurs indépendantes les unes des autres.

Le problème du découpage optimal de Ω consiste à déterminer à l'instant t_k un jeu \mathcal{P}_{Ω}^* de sous-ensembles $\{\omega_i^*\}, i = 1, \dots, N$

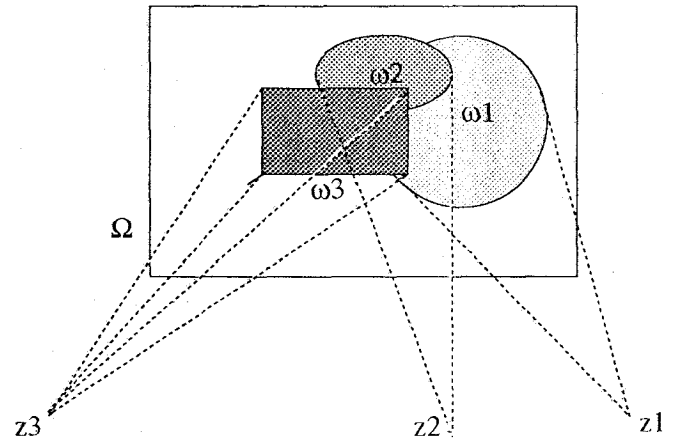


Figure 3. - Le problème multi-capteur générique.

qui optimise l'espérance d'un critère C sur toutes les réalisations possibles des résultats d'observation z , soit

$$\{\omega_i^*\} = \arg \max_{\mathcal{P}_{\Omega}} \sum_z p(z)C(p(\cdot | z)). \quad (3)$$

Le critère C n'est pas imposé au départ mais il est censé traduire en termes quantitatifs le degré d'information contenu dans une loi de probabilité. C'est une optimisation à court-terme puisque l'horizon d'intérêt est le prochain instant dans ce modèle qui est écrit implicitement en temps discret (chaque instant discrétisé correspondant à l'intégration d'un N -tuple z). L'optimisation porte donc à la fois sur les probabilités d'occurrence des réalisations z (qui elles-mêmes ne dépendent que des probabilités des intersections S_d d'après l'équation (2)) et d'autre part sur les coûts associés aux 2^N lois de probabilité *a posteriori* possibles $p(\cdot | z)$. Le problème à long terme équivalent serait

$$\max E(C(p_T(\cdot | z^T))) \quad (4)$$

où $p_T(\cdot)$ est la densité de probabilité conditionnelle à un instant T éloigné dans le futur, l'espérance portant sur toutes les réalisations z^T de séquences de N -tuples z jusqu'à l'instant T .

Dans les deux cas, et dans la configuration la plus générale, l'optimisation porte sur le découpage de sous-ensembles ω_i . Si ces sous-ensembles sont choisis sans contraintes, il est nécessaire de discrétiser l'ensemble de l'espace d'état en cases élémentaires et de calculer l'espérance ci-dessus a priori pour toutes les allocations de cases possibles pour les N capteurs. L'espace d'état (c'est-à-dire de toutes les configurations initiales possibles à considérer *a priori*) devient alors l'espace des d.d.p. discrétisées sur Ω , et l'espace de contrôle l'ensemble des allocations de cases à la puissance N . Dans le cas d'une optimisation à long terme, le contrôle des allocations est séquentiel et non découplable en temps, ceci requiert la programmation dynamique stochastique [1] sur un espace de densités de probabilité discrétisées.

Nous allons voir par la suite que cette recherche de la configuration optimale peut être guidée par un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes qui caractérisent les allocations optimales

théoriques, dans le cas où le critère C est la quantité d'information (dont la définition vient d'être donnée plus haut). Nous verrons d'autre part au paragraphe consacré aux algorithmes que la complexité de l'optimisation se réduit d'elle-même compte-tenu des contraintes sur les secteurs d'observation correspondant à des capteurs réalistes.

3. Maximisation de la quantité d'information.

3.1. EXPRESSION DU CRITÈRE

La quantité d'information d'une densité de probabilité est une mesure de son ordre (étant l'opposée de l'entropie de cette même loi) par extrapolation de l'expression $\sum_i p_i \log p_i$ dans le cas discret. L'un de ses inconvénients étant qu'elle n'est pas facile à relier à des quantités concrètes (métriques) de la densité de probabilité sous-jacente telles que le moment d'ordre 2 (variance), sauf dans des cas très spécifiques (gaussien par exemple). Il est d'ailleurs possible de montrer que les deux quantités ne sont pas reliées dans le cas général [10].

Dans notre formalisme, l'utilisation de cette quantité comme critère de performance met en lumière des résultats intuitifs. Nous choisissons donc $C(p(\cdot)) = I(p(\cdot))$. L'optimisation de l'espérance de la quantité d'information de la loi *a posteriori* est équivalente à celle de l'espérance de l'incrément de cette même quantité entre la loi *a priori* et la loi *a posteriori*.

Si le résultat d'observation est z , cet incrément $\Delta I(z)$ entre la loi *a priori* et la loi *a posteriori* $p(\cdot | z)$ vaut, pour un ensemble de $\{\omega_i\}$ donnés :

$$\Delta I(p(\cdot | z)) = \int_{\Omega} p(x | z) \log p(x | z) dx - \int_{\Omega} p(x) \log p(x) dx. \quad (5)$$

Son espérance est alors :

Lemme 1

$$\begin{aligned} E_z(\Delta I(p(\cdot | z))) &= \sum_d p(S_d) \left(\sum_z u_{zd} \log u_{zd} \right) \\ &\quad - \sum_z \left(\sum_d u_{zd} p(S_d) \right) \log \left(\sum_d u_{zd} p(S_d) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

De plus, puisque les observations dans chaque sous-ensemble sont conditionnellement indépendantes, la première somme sur z au second membre, portant sur 2^N termes, peut s'écrire :

Lemme 2

$$\begin{aligned} \forall S_d = \omega_1^{d_1} \cap \omega_2^{d_2} \cap \dots \cap \omega_N^{d_N}, \\ \sum_z u_{zd} \log u_{zd} = \sum_{i|d_i=1} I_f(\alpha_i) + \sum_{i|d_i=0} I_f(\beta_i). \end{aligned} \quad (7)$$

Cette quantité va être notée $I_f(S_d)$. Nous pouvons alors montrer que l'espérance de l'incrément cherchée vaut

$$\begin{aligned} E_z(\Delta I(p(\cdot | z))) &= \sum_d p(S_d) I_f(S_d) \\ &\quad - \sum_z \left(\sum_d u_{zd} p(S_d) \right) \log \left(\sum_d u_{zd} p(S_d) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

3.2. ALLOCATION OPTIMALE

Nous constatons que cette espérance ne dépend des ω_i qu'au travers des 2^N probabilités $\{p(S_d)\}$, nous la notons donc $\Delta I(\mathbf{p}_S)$. Le problème d'optimisation \mathcal{P}_1 s'écrit alors de la manière suivante

$$\max_{\{p(S_d)\} \in S_{2^N}} \Delta I(\mathbf{p}_S), \quad (9)$$

cette dernière quantité étant donnée par l'expression (8). Pour résoudre complètement le problème \mathcal{P}_1 , nous allons chercher une propriété d'additivité de cette espérance qui permette d'une certaine manière de découpler l'optimisation.

Nous allons utiliser les deux lemmes suivants :

Lemme 3 Soit (X, Y, Z) un triplet de variables aléatoires telles que Y et Z soient indépendantes conditionnellement en X . Alors, si $p(\cdot | A)$ désigne la loi de X conditionnée par la variable aléatoire A , et pour toute loi initiale $p_0(\cdot)$ sur X ,

$$E_{Y,Z}(\Delta I(p(\cdot | Y, Z))) \leq E_Y(\Delta I(p(\cdot | Y))) + E_Z(\Delta I(p(\cdot | Z))). \quad (10)$$

Ceci montre que la fonction que nous cherchons à optimiser est *sous-additive* par rapport aux capteurs si les observations de ceux-ci sont conditionnellement indépendantes.

Nous montrons à présent que cette fonction est additive dans notre contexte dans un cas très spécifique de loi *a priori* :

Lemme 4 Soit Δ_i l'espérance de l'incrément d'information sur la loi de X si le capteur C_i opère seul. L'égalité suivante

$$\Delta I(\mathbf{p}_S) = \sum_{i=1}^N \Delta_i$$

est alors vraie s'il existe des fonctions $\rho_i(\cdot)$ telles que :

$$\forall S_d = \omega_1^{d_1} \cap \omega_2^{d_2} \cap \dots \cap \omega_N^{d_N}, \quad p(S_d) = \prod_{i=1}^N \rho_i(d_i) \quad (11)$$

En d'autres termes, les contributions informationnelles des capteurs s'ajoutent strictement à condition que le découpage des ω_i

soit tel que les intersections aient des probabilités sous forme produit (en d'autres termes, la probabilité de chaque intersection doit être égale au produit des sous-ensembles -ou des complémentaires de ces sous-ensembles- qu'elle met en œuvre).

Le lemme 3 nous permet d'écrire, en utilisant une propriété du maximum, que

$$\max_{\{p(S_d)\} \in S_{2^N}} \Delta I(\mathbf{p}_S) \leq \sum_{i=1}^N \max_{\omega_i} \Delta_i(p_{\omega_i}), \quad (12)$$

où les ω_i mentionnés au second membre sont bien sûr ceux permettant de construire les intersections S_d au premier membre.

La combinaison des deux lemmes précédents montre que le maximum global du problème \mathcal{P}_1 est atteint pour une forme produit de type (11) où chaque sous-ensemble ω_i optimise individuellement la contribution du capteur C_i .

Il s'agit désormais donc de déterminer un ensemble de $\{\omega_i\}$ qui soient individuellement optimaux et qui vérifient en même temps les conditions de coopération optimale (11). Ces conditions de coopération optimale impliquent l'optimalité individuelle de chaque ω_i par addition sur toutes les intersections S_d contenant ω_i comme nous allons le voir ci-dessous.

Nous verrons d'autre part par la suite qu'il n'y a pas de résultat systématique d'existence d'une famille $\{\omega_i\}$ satisfaisant l'ensemble des contraintes d'optimalité collective.

Nous commençons donc par l'optimisation individuelle de chaque ω_i .

3.3. LE CAS MONO-CAPTEUR

Supposons qu'un seul capteur opère dans un sous-ensemble ω , le sous-ensemble complémentaire $\bar{\omega}$ n'étant pas observé [12]. Soient (α, β) sont les coefficients caractéristiques et p_ω la probabilité $p_0(x \in \omega)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} p_z &= p(z = 1) \\ &= p(z = 1 \mid x \in \omega)p_\omega + p(z = 1 \mid x \notin \omega)(1 - p_\omega) \\ &= (\alpha + \beta - 1)p_\omega + (1 - \beta). \end{aligned} \quad (13)$$

Il est facile de voir que l'espérance de l'incrément d'information vaut [11] :

$$\Delta I(p_\omega) = (If(\alpha) - If(\beta))p_\omega + If(\beta) - If(p_z). \quad (14)$$

Nous nous plaçons dans le cas où $\alpha + \beta \neq 1$. Le cas $\alpha + \beta = 1$ correspond à $\Delta I(p_\omega) = 0$, pour lequel aucun des résultats d'observation possibles $z = 0$ ou $z = 1$ ne modifie la densité de probabilité initiale (le résultat d'observation est indifférent). La maximisation de cette expression en p_ω sur $[0, 1]$ donne [11] :

Proposition 1 $\Delta I(p_\omega)$ admet un maximum unique sur $]0, 1[$ donné par

$$p_\omega^* = \frac{(\alpha - 1)e^{\phi_1} + \alpha e^{\phi_0}}{(\alpha + \beta - 1)(e^{\phi_1} + e^{\phi_0})} \quad (15)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{\alpha + \beta - 1} (\beta If(\alpha) + (\alpha - 1)If(\beta)); \\ \phi_0 &= \frac{1}{\alpha + \beta - 1} ((\beta - 1)If(\alpha) + \alpha If(\beta)). \end{aligned}$$

La valeur maximum ΔI^* vaut

$$\Delta I^* = \log(e^{\phi_1} + e^{\phi_0}). \quad (16)$$

3.4. LE CAS MULTI-CAPTEUR

Les résultats des deux paragraphes précédents permettent d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 1 L'allocation optimale pour les capteurs C_1, \dots, C_N résolvant le problème (9) est donnée par

$$p^*(S_d) = \frac{\prod_{i=1}^N \left((\alpha_i - 1)e^{\phi_1^i} + \alpha_i e^{\phi_0^i} \right)^{d_i(S_d)} \left(\beta_i e^{\phi_1^i} + (\beta_i - 1)e^{\phi_0^i} \right)^{1-d_i(S_d)}}{\prod_{i=1}^N (\alpha_i + \beta_i - 1)(e^{\phi_1^i} + e^{\phi_0^i})} \quad (17)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_1^i &= \frac{1}{\alpha_i + \beta_i - 1} (\beta_i If(\alpha_i) + (\alpha_i - 1)If(\beta_i)); \\ \phi_0^i &= \frac{1}{\alpha_i + \beta_i - 1} ((\beta_i - 1)If(\alpha_i) + \alpha_i If(\beta_i)). \end{aligned}$$

L'espérance de l'incrément de quantité d'information vaut alors

$$\Delta I^* = \sum_{i=1}^N \log(e^{\phi_1^i} + e^{\phi_0^i}) \quad (18)$$

Le découpage théorique optimal en secteurs d'observation devrait permettre d'additionner les contributions individuelles de chaque capteur en termes d'information. L'interprétation est que, quels que soient les résultats d'observation des autres capteurs, chaque capteur participe à une décomposition dyadique de l'espace d'état en 2^N portions de probabilités fixées. Un capteur additionnel de caractéristiques $(\alpha_{N+1}, \beta_{N+1})$ devra observer dans un secteur ω_{N+1} tel que pour toute intersection S_d formée avec les N sous-ensembles courants,

$$p(S_d \cap \omega_{N+1}) = \rho(\alpha_{N+1}, \beta_{N+1})p(S_d), \quad (19)$$

avec

$$\rho(\alpha_{N+1}, \beta_{N+1}) = \frac{(\alpha_{N+1} - 1)e^{\phi_1^{N+1}} + \alpha_{N+1}e^{\phi_0^{N+1}}}{(\alpha_{N+1} + \beta_{N+1} - 1)(e^{\phi_1^{N+1}} + e^{\phi_0^{N+1}})}. \quad (20)$$

La figure ci-dessous montre une solution possible dans un contexte monodimensionnel, sans contrainte sur les limites géométriques des secteurs d'observation, la loi *a priori* étant uniforme. Les facteurs ρ indiquent les rapports des probabilités des deux intervalles situés aux deux extrêmes des lignes en pointillés qui les sous-tendent. Si la loi *a priori* n'était pas uniforme, il suffirait de déformer localement l'échelle horizontale relativement à la densité de probabilité locale pour obtenir le même résultat.

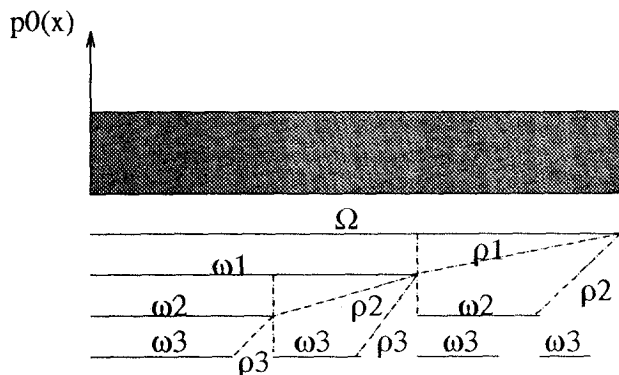


Figure 4. – Une solution théorique possible (loi p_0 uniforme).

4. Interprétation

4.1. CANAL ÉQUIVALENT

Mettons en correspondance chaque intersection possible $S_d = \omega_1^{d_1} \cap \omega_2^{d_2} \dots \cap \omega_N^{d_N}$ avec un mot de N bits $d_1 d_2, \dots, d_N$, et gardons la représentation $z = z_1 z_2 \dots z_N$ pour le vecteur d'observation comme étant un mot de N bits codé sur $\{0, 1\}^N$. Nous obtenons donc deux alphabets d'entrée (les S_d) et de sortie (les z) aux deux extrémités d'un canal caractérisé par des probabilités de transition stationnaires $p(z | S)$ (figures ci-dessous).

Le calcul d'optimisation fait ci-dessus est alors un calcul de capacité de canal équivalent ([3]), c'est-à-dire la maximisation

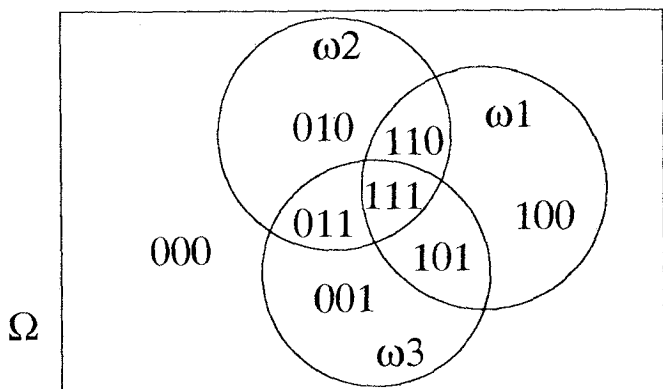


Figure 5. – Codage binaire des entrées.

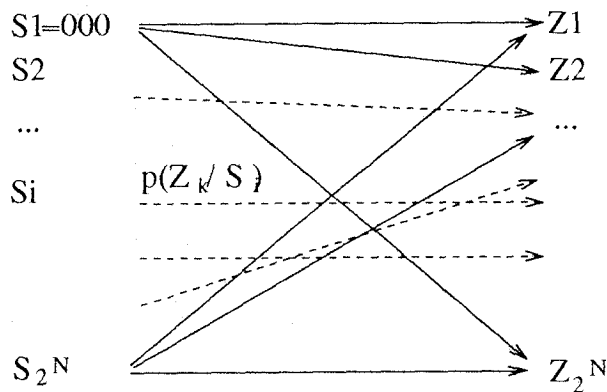


Figure 6. – Canal équivalent.

de l'information mutuelle entre les symboles d'entrée et de sortie S and z , soit

$$\max_{\{\pi_d = p(S_d), d=1, \dots, 2^N\}} I(S | z) - I(S)$$

sur les probabilités de l'alphabet d'entrée que sont les S_d . Ce problème est *convexe* en les $\{\pi_d\}$ et la forme produit trouvée (théorème 3.4.) résulte de la séparabilité du canal, elle-même due au fait que toutes les observations sont conditionnellement indépendantes.

En guise de conclusion provisoire, la mise en configuration optimale d'un parc de capteurs binaires est un problème *convexe* si l'allocation est faite en termes de probabilités d'intersections quelconques de secteurs d'observation. Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sont un ensemble de $2^N - 1$ contraintes (la dernière contrainte se déduisant des autres car $\sum_d p(S_d) = 1$) sur les probabilités des intersections, qui se traduisent par des équations implicites de la forme :

$$\int_{\omega_1^{d_1} \cap \omega_2^{d_2} \dots \cap \omega_N^{d_N}} p(x) dx = \prod_{i=1}^N \int_{\omega_i^{d_i}} p(x) dx \quad (21)$$

sur les ω_i .

En pratique, les secteurs d'observation (que ce soit le champ d'une caméra ou la bande de fréquence d'un radar) obéissent à des contraintes spécifiques à chaque type de capteurs (connexité en particulier), qui ne permettent pas de satisfaire toutes les contraintes demandées et conduisent à considérer ce résultat comme une borne supérieure à l'efficacité informationnelle d'un parc de capteurs frustes réels.

5. Applications

Le résultat précédent peut être compris comme une parallélisation des tâches d'observation partielles qui serait aussi efficace qu'une utilisation séquentielle des différents observateurs. Le coût associé à cette parallélisation est celui du calcul des sous-ensembles

$\{\omega_i\}$ proches d'une configuration de coopération optimale. En termes de paramètres de configuration réels, le problème de reconfiguration optimale n'est plus convexe. En pratique, l'existence d'une configuration satisfaisant les équations du théorème précédent n'est pas assurée, puisqu'elle dépend à la fois de la densité de probabilité sous-jacente et des contraintes sur les secteurs d'observation des capteurs. L'on peut être conduit à privilégier une configuration exhibée rapidement en termes de calcul, si son gain informatif n'est pas trop loin de l'optimum théorique connu, par une procédure de type "branch and bound" par exemple.

5.1. OPTIMISATION SOUS CONTRAINTE DE CONFIGURATIONS

Etant donné une loi *a priori* $p_0(\cdot)$ et un lot de capteurs configurables présentant certaines contraintes, nous souhaiterions calculer une configuration dont les performances ne sont pas trop éloignées de (18).

5.1.1. Cas monodimensionnel

Plaçons-nous dans le cas monodimensionnel par exemple, Supposons que Ω est l'intervalle $[0, 1]$, et que chaque secteur ω_i est nécessairement un intervalle connexe $[a_i, b_i]$ de $[0, 1]$. Dans ce cas, il est facile de comprendre (figure 7) que la configuration optimale n'est pas accessible pour $N \geq 3$.

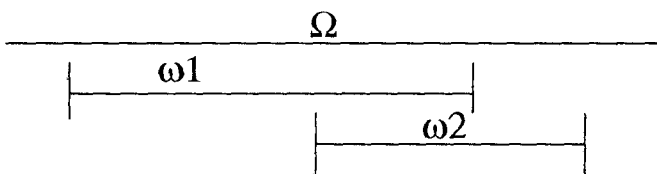


Figure 7. – Positionnement d'intervalles connexes, cas monodimensionnel.

Le critère de quantité d'information peut néanmoins toujours être pris comme guide pour le choix dynamique d'un partitionnement. Le résultat théorique est alors une borne supérieure sur toute stratégie combinée d'utilisation des capteurs. Nous savons en fait que pour une partition probabiliste $p(S_d)$ donnée, la performance moyenne est

$$\begin{aligned}
 & E_z(\Delta I(p(\cdot | z))) \\
 &= \sum_{d=1}^{2^N} p(S_d) I(S_d) \\
 &= \sum_z \left(\sum_{d=1}^{2^N} u_{zd} p(S_d) \right) \log \left(\sum_{d=1}^{2^N} u_{zd} p(S_d) \right). \quad (22)
 \end{aligned}$$

D'autre part, nous pouvons relier la partition probabiliste $p(S_d)$ à la densité de probabilité initiale $p_0(\cdot)$ et aux intervalles $[a_i, b_i]$:

Lemme 5 $\forall S_d = \omega_1^{d_1} \cap \omega_2^{d_2} \dots \cap \omega_N^{d_N}$,

$$\begin{aligned}
 S_d &= [\max_{i|d_i=1} a_i, \min\{\min_{i|d_i=1} b_i, \min_{j|d_j=0} a_j\}] \\
 \cup & [\max\{\max_{i|d_i=1} a_i, \max_{j|d_j=0} b_j\}, \min_{i|d_i=1} b_i]. \quad (23)
 \end{aligned}$$

En notant $P_0(\cdot)$ la fonction de partition de $p_0(\cdot)$, définie par

$$P_0(x) = \int_0^x dp_0(u),$$

on exprime alors $p(S_d)$ comme une fonction des $\{P_0(a_i), P_0(b_i)\}$, et l'on optimise l'information à court-terme par l'injection de (23) dans (22), soit

$$\min_{\{a_i, b_i\}} E_z(\Delta I(p(\cdot | z))). \quad (24)$$

Cette seconde formulation appelle plusieurs remarques : le premier inconvénient réside dans le fait que $\Delta I(p(\cdot | z))$ n'est pas une fonction convexe des paramètres géométriques $\{a_i, b_i\}$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas d'un seul capteur avec une densité de probabilité quelconque et de construire deux intervalles d'égale probabilité en partant respectivement de 0 et de 1. Il existe une infinité de solutions, ce qui nous a amené dans [11] à considérer plusieurs autres critères d'optimisation. Le second inconvénient est dans l'optimalité à court-terme. Le résultat théorique obtenu ci-dessus découpait les différents pas de temps car l'incrément d'information maximal obtenu était indépendant de la loi initiale $p(\cdot)$. Il suffisait donc, pour optimiser à long terme, d'optimiser à court terme. Si nous prenons en compte les contraintes sur les capteurs, l'accroissement d'information maximal devient essentiellement fonction de la densité de probabilité courante sur Ω . Certaines densités ne permettront, compte-tenu de la géométrie des capteurs, qu'un accroissement égal à une petite fraction du gain théorique. Il y a donc une interaction complexe entre la géométrie des capteurs et la densité de probabilité courante qui justifierait probablement une étude en soi.

L'optimisation à long terme devient donc essentiellement un problème de programmation dynamique stochastique avec un facteur de branchement qui risque d'être énorme. L'approche désormais raisonnable semble donc de chercher des heuristiques de manière à approcher la configuration optimale par le biais d'algorithmes relativement simples.

5.1.2. Cas bidimensionnel

Dans la lignée de ce qui vient d'être dit, nous proposons un algorithme de calcul et de positionnement de deux fenêtres d'observation rectangulaires sur une matrice de pixels bidimensionnelle, dans le but de localiser un objet dont la position a été initialement tirée en suivant la loi de probabilité initiale p_0 .

Le premier secteur d'observation ω_1 est un rectangle dont le coin supérieur gauche $(0, 0)$ coïncide avec le coin supérieur gauche de la matrice Ω . Une tirage à pile ou face est effectué qui détermine si une ligne ou une colonne est ajoutée aux pixels déjà inclus dans

le secteur et ce tant que la probabilité cumulée sur l'ensemble des pixels ne dépasse pas $p_{\omega_1}^*$. Un rectangle est ainsi déterminé avec comme coin inférieur droit (x_1, y_1) . Un tirage à pile ou face est alors effectué en partant de ce point pour sélectionner une ligne ou une colonne incluses dans ω_1 , en se dirigeant vers $(0, 0)$, jusqu'à ce que le recouvrement atteigne la valeur optimale $p_{\omega_1}^* p_{\omega_2}^*$. Un rectangle est alors obtenu ayant comme diagonale $(x_{12}, y_{12}) - (x_1, y_1)$. Ce rectangle est alors étendu itérativement en suivant le même procédé de pile ou face jusqu'à ce que sa probabilité cumulée atteigne la valeur optimale $p_{\omega_2}^*$, le rectangle ω_2 ainsi construit admet pour diagonale $(x_{12}, y_{12}) - (x_2, y_2)$ (cf. figure 8). Le tirage aléatoire a pour but de "randomiser" l'algorithme pour éviter d'utiliser toujours les mêmes rectangles si les densités de probabilité sont trop concentrées.

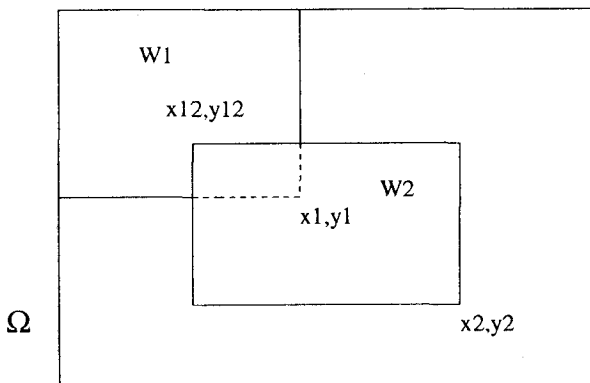


Figure 8. – Ajustement de deux secteurs rectangulaires à information sous-optimale.

Cet algorithme n'est pas généralisable à un ensemble quelconque de capteurs mais peut donner quelques idées sur la manière de faire coopérer plusieurs caméras dans un contexte de surveillance de scène [10]. Si l'on rajoute une caméra par exemple, le nombre de contraintes probabilistes sur les rectangles passe de 3 à 7 (ce nombre valant $2^N - 1$). L'idée de décomposition dyadique de l'espace Ω suggérerait de chercher un troisième secteur rectangulaire ayant une intersection non nulle avec les deux premiers ainsi qu'avec l'intersection des deux premiers, en partant d'un point situé dans le rectangle défini par la diagonale $(x_{12}, y_{12}) - (x_1, y_1)$.

Une étude additionnelle de sensibilité du delta d'information serait en fait nécessaire pour étudier quelles contraintes relâcher en premier dans un cas surcontraint comme celui-ci.

5.2. RÉSULTATS DE SIMULATION

Considérons le cas d'un rectangle $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. La loi a priori est choisie uniforme et Ω est discrétisé sur 25×25 pixels. La vraie valeur de x est tirée selon la loi uniforme au début de chaque simulation. Deux détecteurs sont utilisés avec pour caractéristiques $(\alpha_1 = 0.78, \beta_1 = 0.75)$ et $(\alpha_2 = 0.65, \beta_2 = 0.75)$. Deux stratégies sont comparées. La stratégie

\mathcal{P}_1 se base sur le calcul de deux fenêtres rectangulaires au moyen de l'algorithme présenté ci-dessus. La seconde stratégie, \mathcal{P}_2 , est basée sur l'observation de rectangles centrés autour des deux premiers maxima courant de la densité de probabilité de taille $(2W_i + 1) \times (2W_i + 1)$, W_i étant un paramètre ajustable mais restant fixe pour une série de simulations données.

Les théories de recherche d'objet montrent que l'observation du maximum de la densité de probabilité permet de minimiser le temps de recherche ou les coûts décomptés du type de ceux considérés par Gittins [6] si le taux de fausse alarme est nul. Il est donc raisonnable de conserver cette stratégie même dans le cas d'un taux de fausse alarme strictement positif. Cette stratégie est ici randomisée autour des maxima (signifiant qu'une variable aléatoire est tirée pour positionner le centre de la fenêtre dans un voisinage du maximum) pour éviter une « fixation », c'est-à-dire un positionnement constant de fenêtres sans augmentation d'information (ceci étant dû au fait que ces fenêtres sont de taille constante) après quelques itérations.

Le coût considéré ici est :

$$C = \frac{1}{K+1} \sum_{k=0}^K (\sigma_x^2(p_k(\cdot)) + \sigma_y^2(p_k(\cdot)))$$

où $p_k(\cdot)$ est la densité de probabilité à l'itération k , et $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$ correspond à la trace de la matrice de covariance. Nous nous attendons naturellement à ce que cette trace devienne petite au fur et à mesure que la vraie valeur du paramètre x est identifiée.

Le tableau ci-dessous montre le résultat des différentes stratégies, sur 20 simulations de $K = 15$ itérations. La valeur de 15 a été retenue pour se concentrer sur le début du processus de localisation sans rencontrer les problèmes de résolution dûs au pas de discrétisation spatiale fini.

	P_1	$P_2(W_i = 5)$
Coût moyen	7.1	9.0

Figure 9. – Résultats de simulation (1).

Voici une deuxième série de résultats avec $(\alpha_1 = 0.78, \beta_1 = 0.62)$ et $(\alpha_2 = 0.65, \beta_2 = 0.58)$, avec 20 simulations sur 25 itérations cette fois-ci.

	P_1	$P_2(W_i = 5)$
Coût moyen	10.0	12.0
Ecart type	1.6	2.5

Figure 10. – Résultats de simulation (2).

Les stratégies à information maximale semblent légèrement plus performantes que les stratégies de recherche de maxima, en tous cas pour ces valeurs des paramètres de détection et de fausse alarme. Les temps de calcul ont été observés, montrant que sous XMath¹, les temps de recherche de fenêtres sous P_1 étaient de l'ordre de 20% supérieurs à ceux obtenus pour P_2 .

1. Xmath est un produit de Integrated Systems Incorporated, Santa Clara, California, USA.

La figure suivante montre un exemple de loi conditionnelle à la 15^{ème} itération, la loi initiale étant uniforme, et la position réelle de l'objet étant (19, 20).

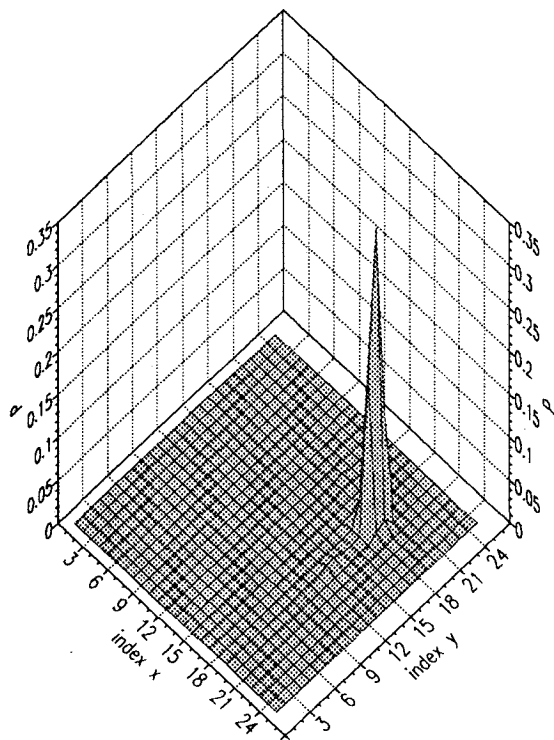


Figure 11. – Densité de probabilité après 15 itérations, stratégie P_1 .

6. Conclusion

Nous avons introduit ici la notion de partitionnement probabiliste montrant que, étant donné un ensemble de N détecteurs élémentaires conditionnellement indépendants, il existe un découpage de l'espace d'état en N secteurs d'observation ω_i maximisant l'espérance de la quantité d'information *a posteriori*. Le découpage est obtenu par la résolution d'un problème convexe dans un simplexe de probabilités de dimension 2^N . Il existe en particulier une configuration théorique de secteurs d'observation qui permet une augmentation moyenne de la quantité d'information *constante*, contrairement au résultat de décroissance des utilités sur des observations indépendantes et équidistribuées [10]. Un parallèle est donc fait par ce biais entre théorie d'information et contrôle actif de capteurs.

Ce type de résultat peut être utilisé dans un but de localisation d'un objet dans une scène en temps minimal si le système a la possibilité de partager le travail de recherche entre plusieurs capteurs à imagerie par exemple. Les stratégies de découpage, qui peuvent se révéler difficiles à mettre en œuvre compte-tenu de contraintes sur les capteurs, sont à rapprocher des recherches d'extrema par

dichotomie dans le cas déterministe, et peuvent être efficaces, même sur le plan de leur complexité algorithmique, dans des versions heuristiques sous-optimales. Le critère d'optimisation n'est alors plus convexe en les paramètres de configuration des capteurs (par exemple dans le cas de la surveillance d'une scène par un ensemble de caméras à champs variables). Le résultat théorique peut alors être vu comme une borne supérieure sur les performances accessibles et le calcul de la configuration réelle utilisée se base alors sur un compromis entre temps de calcul et espérance de gain de quantité d'information relativement à l'optimum.

7. Remerciements

L'auteur souhaiterait remercier le professeur Thomopoulos, de l'Université de Pennsylvanie, M. Christophe Coutelle du Laboratoire Système de Perception, MMrs. Claude Barrouil, Patrick Fabiani et le Docteur Roger Mampey, du CERT/DERA, et les lecteurs anonymes du premier manuscrit pour leurs remarques et commentaires judicieux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.P. Bertsekas, *Dynamic programming : deterministic and stochastic models*. Prentice-Hall, 1986.
- [2] M.P. Boyer and B. Picinbono, Détection répartie et quantification, In *Proceedings of the GRETSI*, 1989.
- [3] T.M. Cover and J.A. Thomas, *Elements of Information Theory*. Wiley Series in Telecommunications, 1991.
- [4] O. Dessoude, *Perception control in hostile environments : Automatic resource allocation for a multi-sensor system*. PhD thesis, Paris-XI University (in french), 1993.
- [5] V.V. Fedorov, *Theory of optimal experiments*. Academic Press, 1972.
- [6] J.C. Gittins, *Multi-armed bandit allocation indices*. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.
- [7] P.R. Kumar and P.P. Varaiya, *Stochastic systems : estimation, identification and adaptive control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1986.
- [8] R.C. Luo and M.G. Kay, Multisensor integration and fusion in intelligent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 19-5 :901-931, 1989.
- [9] X. Merlo, *Probabilistic techniques applied to perception integration and control for robots decisional systems*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Lorraine (in french), 1988.
- [10] C. Olivier, *Data acquisition and processing policies for robot control in unstructured worlds*. PhD thesis, Paris-XI University (in french), 1993.
- [11] C. Olivier, Optimal state space partitioning. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 24, 1994.
- [12] C. Olivier and O. Dessoude, A distributed approach for hybrid system filtering using sensor cooperation. In *Proceedings of the European control Conference*, pages 32-37. Hermès, Paris, 1991.
- [13] G. Polychronopoulos and J. N. Tsitsiklis, Explicit solutions for some simple decentralized detection problems. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1315-1320, 1989.

- [14] A.R. Reibman and L.W. Nolte, Optimal detection and performance of distributed sensor systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-23 :24-30, 1987.
- [15] R.R. Tenney and N.R. Sandell, Detection with distributed sensors. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-17 :501-510, 1981.
- [16] S. Thomopoulos, Opération de contrôle adaptatif. In *GRECO Fusion de Données*, Novembre 1993.
- [17] S.C.A. Thomopoulos and N. Okello, Distributed detection with consulting sensors and communication cost. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-37 :1398-1405, 1992.
- [18] D.J. Warren and P.K. Willett, Optimal decentralized detection for conditionally independent sensors. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1326-1329, 1989.
- [19] L.E. Wixson, *Exploiting world structure to efficiently search for objects*. Technical report 434, University of Rochester, Computer Science Department, 1992.

Appendix

Démonstration du lemme 1 : En utilisant la formule de Bayes, nous pouvons écrire, pour un vecteur d'observation donné z :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} p(x | z) \log p(x | z) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{p(z | x)p(x)}{p(z)} \log \frac{p(z | x)p(x)}{p(z)} dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{p(z | x)p(x)}{p(z)} (\log p(z | x) + \log p(x) - \log p(z)) dx. \end{aligned}$$

Calculons les trois termes extraits ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{p(z | x)p(x)}{p(z)} \log p(z | x) dx \\ &= \sum_d \int_{S_d} \frac{p(z | x)p(x)}{p(z)} \log p(z | x) dx \\ &= \sum_d \int_{S_d} \frac{u_{zd}p(x)}{p(z)} \log u_{zd} dx \\ &= \sum_d \frac{u_{zd}p(S_d)}{p(z)} \log u_{zd}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{p(z | x)p(x)}{p(z)} \log p(x) dx &= \sum_d \int_{S_d} \frac{p(z | x)p(x)}{p(z)} \log p(x) dx \\ &= \sum_d \frac{u_{zd}}{p(z)} I_{S_d}(p(\cdot)). \end{aligned}$$

où I_{S_d} est défini par $I_{S_d} = \int_{S_d} p(x) \log p(x) dx$. Et, finalement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{p(z | x)p(x)}{p(z)} \log p(z) dx \\ = \frac{\log p(z)}{p(z)} \int_{\Omega} p(z | x)p(x) dx = \log p(z). \end{aligned}$$

Le regroupement des résultats ci-dessus conduit à

$$\begin{aligned} \Delta I(z) &= \sum_d \frac{u_{zd}p(S_d)}{p(z)} \log u_{zd} \\ &+ \sum_d \frac{u_{zd}}{p(z)} I_{S_d}(p(\cdot)) - \log p(z) - I(p(\cdot)). \end{aligned}$$

L'espérance de l'incrément de quantité d'information est alors donnée par

$$\begin{aligned} E_z \Delta I(z) &= \sum_z p(z) \Delta I(z) \\ &= \sum_z \sum_{S_d} u_{zd} p(S_d) \log u_{zd} \\ &+ \sum_z \sum_{S_d} u_{zd} I_{S_d}(p(\cdot)) \\ &- \sum_z p(z) (\log p(z) - I(p(\cdot))). \end{aligned}$$

En observant que

$$\begin{cases} \sum_z u_{zd} &= 1; \\ \sum_d I_{S_d}(p(\cdot)) &= I(p(\cdot)), \end{cases}$$

nous obtenons le résultat. ♠

Démonstration du lemme 2 : Si x appartient à S_d (événement conditionnant), alors z est un vecteur de bits indépendants (z_1, \dots, z_N) . Comme ils sont conditionnellement indépendants, la quantité d'information de leur loi produit, précisément $\sum_z u_{zd} \log u_{zd}$, est égale à la somme des quantités d'information des marginales [3]. Mais chaque z_i est une variable de Bernouilli avec probabilités α_i si $d_i(S_d) = 1$ et $1 - \beta_i$ si $d_i(S_d) = 0$, d'où le résultat. ♠

Démonstration du lemme 3 : La démonstration du premier lemme permet de voir que

$$\begin{aligned} E_Y(\Delta I(p(\cdot | Y))) \\ = \int_Y \int_X \log \left(\frac{p(Y | X)}{p(Y)} \right) p(Y | X) p(X) dX dY. \end{aligned}$$

Exprimons alors la différence

$$\begin{aligned} D(X, Y, Z) &= E_{Y,Z}(\Delta I(p(\cdot | Y, Z))) \\ &- (E_Y(\Delta I(p(\cdot | Y, Z))) + E_Z(\Delta I(p(\cdot | Z)))). \end{aligned}$$

Elle est égale à

$$\begin{aligned} D(X, Y, Z) &= \int_{Y,Z} \int_X \log \left(\frac{p(Y, Z | X)}{p(Y, Z)} \frac{p(Y)}{p(Y | X)} \frac{p(Z)}{p(Z | X)} \right) \\ & p(Y, Z | X) p(X) dX d(Y, Z). \end{aligned}$$

Comme Y et Z sont indépendants conditionnellement en X , ceci se simplifie pour donner

$$\begin{aligned} D(X, Y, Z) &= \int_{Y,Z} \int_X \log \frac{p(Y)p(Z)}{p(Y,Z)} p(Y, Z | X) p(X) dX d(Y, Z) \\ &= \int_{Y,Z} \log \frac{p(Y)p(Z)}{p(Y,Z)} p(Y, Z) d(Y, Z) \\ &= -I(Y, Z), \end{aligned}$$

où $I(Y, Z)$ dénote l'information mutuelle entre les variables aléatoires Y et Z . L'inégalité de Jensen sur les fonctions convexes fournit alors un résultat standard en théorie de l'information, à savoir que $I(Y, Z) \geq 0$ (voir par exemple [3]).

Nous avons prouvé que $D(X, Y, Z) \leq 0$. ♠

Démonstration du lemme 4 : Revenons à l'expression (8) qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} E_z(\Delta I(p(\cdot | z))) &= \sum_d p(S_d) If(S_d) - \sum_z p(z) \log p(z). \end{aligned}$$

Cette expression se compose de deux termes, et nous allons montrer par récurrence que chaque terme est sommable si

$$\forall S_d, p(S_d) = \prod_{i=1}^N \rho_i(d_i).$$

La sommabilité est vraie pour $N = 1$. Notons S_d^N une intersection de N sous-ensembles et S_d^{N+1} une intersection de $N + 1$ sous-ensembles, z^{N+1} un vecteur de $N + 1$ observations. Supposons que l'hypothèse de récurrence soit vraie pour N , et que nous ajoutons un capteur conditionnellement indépendant C_{N+1} qui observe un sous-ensemble ω_{N+1} tel que

$$\forall S_d^N, p(S_d^N \cap \omega_{N+1}^{d_{N+1}}) = \rho(d_{N+1}) p(S_d^N).$$

Remarquons tout d'abord que, puisque tous les capteurs sont conditionnellement indépendants

$$If(S_d^{N+1}) = \sum_{z^{N+1}} u_{zd} \log u_{zd} = If(S_d^N) + If(\rho(d_{N+1})).$$

Nous avons ensuite (en donnant explicitement les domaines des indices sur les sommes de manière à bien exhiber le mécanisme) :

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^{2^{N+1}} p(S_d^{N+1}) If(S_d^{N+1}) &= \sum_{d=1}^{2^{N+1}} p(S_d^{N+1}) If(S_d^N) \\ &\quad + \sum_{d=1}^{2^{N+1}} p(S_d^{N+1}) If(\rho(d_{N+1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{d=1}^{2^N} p(S_d^N) If(S_d^N) \\ &\quad + \sum_{d_{N+1}=0,1} p(\omega_{N+1}^{d_{N+1}}) If(\rho(d_{N+1})), \end{aligned}$$

de telle sorte que la première partie reste sommable à l'étape $N + 1$.

Concernant le second terme, observons que

$$\begin{aligned} p(z^{N+1}) &= \sum_{d=1}^{2^{N+1}} u_{zd} p(S_d^{N+1}) \\ &= \sum_{d=1}^{2^{N+1}} p(z^N | S_d^N) p(z_{N+1} | \omega_{N+1}^{d_{N+1}}) p(S_d^N \cap \omega_{N+1}^{d_{N+1}}). \end{aligned}$$

Mais, par hypothèse,

$$p(S_d^N \cap \omega_{N+1}^{d_{N+1}}) = \rho(d_{N+1}) p(S_d^N)$$

si bien que

$$\begin{aligned} p(z^{N+1}) &= \sum_{d=1}^{2^{N+1}} p(z^N | S_d^N) p(z_{N+1} | \omega_{N+1}^{d_{N+1}}) \rho(d_{N+1}) p(S_d^N) \\ &= \sum_{d_{N+1}=0,1} \left(\sum_{d=1}^{2^N} p(z^N | S_d^N) p(S_d^N) \right) \\ &\quad p(z_{N+1} | \omega_{N+1}^{d_{N+1}}) \rho(d_{N+1}) \\ &= p(z^N) p(z_{N+1}), \end{aligned}$$

de telle sorte que la seconde partie reste sommable à l'étape $N + 1$.

Ceci conclut la démonstration. ♠

Manuscrit reçu le 6 septembre 1994.

L'AUTEUR

C. OLIVIER



Christian Olivier est diplômé de l'Ecole Polytechnique (1984), et de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (1986). Il a obtenu un D.E.A. de Mathématiques Appliquées de l'Université de Toulouse (1986) et un Doctorat d'Automatique et de Robotique de l'Université Paris XI, Centre d'Orsay (1993). Il a dirigé l'équipe de Robotique et Fusion Multi-Capteur de l'ETCA, Arcueil, entre 1989 et 1994, et a été chercheur invité à l'Université de Californie, Berkeley, en 1991-1992. Ses intérêts portent sur l'automatique stochastique, la théorie de l'information, la conception optimale d'expériences en recherche opérationnelle et les modèles microéconomiques.