

Étude et simulation des lois de probabilité des sorties de modèles paramétriques.

Study and Simulation of Parametric Model Output Probability Laws.

par Jean-Yves TOURNERET, Bernard LACAZE

ENSEEIH7 / GAPSE

2, rue Camichel – F-31071 Toulouse cedex

Résumé

Une combinaison linéaire finie de variables aléatoires indépendantes de même loi non gaussienne ne peut être gaussienne. Dans le cas d'une combinaison linéaire infinie, il est d'usage de conclure à la normalité par application systématique du théorème de la limite centrale. La sortie des filtres Autorégressifs (AR) ou Autorégressifs à Moyenne Ajustée (ARMA) s'exprime sous la forme d'une somme infinie d'échantillons de l'entrée du modèle. Nous étudions dans cet article la loi de la sortie de ces filtres et plus particulièrement leur « proximité » avec la loi gaussienne.

Mots clés : Modélisation paramétrique, Non gaussien, Cumulants, Fonctions caractéristiques, Théorèmes de la limite centrale.

Abstract

A finite linear combination of Independent Identically Distributed (i.i.d) non Gaussian variables cannot be Gaussian. In the case of an infinite linear combination, the Gaussian assumption is often considered by applying the limit central theorem. The output of ARMA (possibly AR) filters is an infinite sum of independent input samples. The aim of this paper is to study the output law of these filters and more precisely its « tendency » to the Gaussian law.

Key words : Parametric Modelling, Non Gaussian, Cumulants, Characteristic functions, Central limit theorem.

1. Introduction

On peut déduire d'un résultat dû à Cramér [1, p. 243] que la sortie d'un filtre linéaire ne peut être gaussienne que si l'entrée l'est aussi. La condition suffisante est connue de tous (conservation de la normalité dans toute opération linéaire) mais la condition nécessaire peut surprendre ceux qui invoquent le théorème de la limite centrale pour conclure au caractère gaussien de la sortie. Ils oublient cependant que, comme on le voit sur sa démonstration, le théorème de la limite centrale est un résultat asymptotique nécessitant une normalisation adéquate qui n'est pas réalisée par filtrage. L'objectif de cet article est d'étudier la loi de la sortie des filtres paramétriques Autorégressifs (AR) ou Autorégressifs à Moyenne Ajustée (ARMA) en fonction de la loi d'entrée de ces filtres. Il est intéressant de déterminer la nature de cette loi de sortie pour tous les types d'entrée, et en particulier, de déterminer si cette loi est « proche » ou « éloignée » d'une loi gaussienne. Nous étudions en détail le cas de filtres AR et donnons quelques éléments pour les filtres ARMA.

Dans un premier temps, nous considérons le cas d'entrées binaires. Ce cas particulier est très intéressant : d'une part, il permet la modélisation des signaux utilisés dans les systèmes de télécommunications [2] [3] et d'autre part, il fait référence aux nombreux travaux effectués dans le domaine des produits infinis de convolution de lois de Bernouilli [1, pp. 55-68]. Il existe, pour ce type d'entrée, deux classes de lois continues en sortie : les lois singulières et les lois absolument continues. Nous montrons alors que ces lois de sortie peuvent être fortement non-gaussiennes ou au contraire très proches d'une loi normale en fonction de la position des pôles du filtre dans le cercle unité.

Cette propriété peut être généralisée au cas d'entrées à support borné ou non borné. Ceci fait l'objet de la deuxième et troisième partie de cet article.

La dernière partie est consacrée à l'étude des filtres ARMA. Nous montrons, à l'aide d'un contre-exemple, que la sortie de ces filtres ne tend plus obligatoirement comme dans le cas précédent vers la loi normale lorsque les pôles se rapprochent du cercle unité.

Ces résultats permettent d'expliquer les mauvaises performances des méthodes d'identification aux ordres supérieurs des systèmes

à phase non minimale [4] [5] [6], lorsque les pôles de ces systèmes se rapprochent du cercle unité. En effet, de nombreuses simulations ont montré qu'il y a non seulement convergence (en loi) de la loi de sortie des filtres AR vers la loi normale mais aussi convergence des cumulants vers ceux de la loi normale. On ne peut alors utiliser les techniques conventionnelles d'identification basées sur les statistiques d'ordre supérieur.

2. Théorie générale

Considérons un filtre AR d'ordre p défini par ses paramètres notés $\{a_k\}_{k=1,\dots,p}$ dont l'entrée $v(n)$ est constituée d'échantillons indépendants. La sortie $y(n)$ de ce filtre AR est alors définie par l'équation :

$$\sum_{k=0}^p a_k y(n-k) = v(n) \quad (a_0 = 1) \quad (1)$$

Nous nous limitons dans cette étude aux filtres causaux dont les pôles sont situés à l'intérieur du cercle unité bien que la plupart des travaux proposés puissent s'étendre aux filtres non causaux. Dans ces conditions, en notant $\phi_y(u)$ et $\phi_v(u)$ les fonctions caractéristiques respectives de $y(n)$ et de $v(n)$ et $F_y(x)$, $F_v(x)$ leurs fonctions de répartition, on a :

$$\phi_y(u) = \prod_{k=0}^{+\infty} \phi_v(h_k u) \Leftrightarrow F_y(x) = \prod_{k=0}^{+\infty} * F_v\left(\frac{x}{h_k}\right) \quad (2)$$

$\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ étant la réponse impulsionnelle du filtre et $\prod_{k=0}^{+\infty} *$ symbolisant un produit infini de convolutions. On en déduit, à l'aide d'un théorème dû à Cramer [1, p. 243], le résultat suivant :

Une condition nécessaire et suffisante pour que la sortie d'un filtre AR soit gaussienne est que l'entrée de ce filtre soit gaussienne.

Le but de cet article est d'étudier la forme des lois de la sortie de ces filtres en fonction de la loi de l'entrée et plus précisément de déterminer les cas où ces lois sont « proches » d'une loi gaussienne.

3. Entrée binaire

Dans le cas d'une entrée binaire équiprobable constituée d'échantillons indépendants prenant les valeurs $+1$ et -1 , l'équation (2) devient :

$$\phi_y(t) = \prod_{k=0}^{+\infty} \cos(h_k t) \Leftrightarrow F_y(x) = \prod_{k=0}^{+\infty} * B\left(\frac{x}{h_k}\right) \quad (3)$$

$B(x)$ étant la fonction de répartition d'une loi de Bernoulli :

$$\begin{aligned} B(x) &= 0 & x < -1 \\ B(x) &= \frac{1}{2} & x \in [-1, +1] \\ B(x) &= 1 & x > 1 \end{aligned}$$

La loi de probabilité de la sortie d'un filtre AR excité par un bruit blanc binaire est donc un produit infini de convolutions de lois de Bernoulli. Ces produits infinis ont été étudiés en détail par Lukacs [1, pp. 55-68] et, en particulier, on montre qu'ils sont soit purement singuliers, soit purement absolument continus.

3.1. CAS PARTICULIER DU FILTRE AR D'ORDRE 1

Le cas particulier de l'ordre 1 est intéressant car il permet de donner les formes exactes des lois de sortie du filtre AR [8]. Dans ce cas, les coefficients de la réponse impulsionnelle vérifient :

$$h_n = (-a_1)^n \quad (4)$$

D'après Lukacs [1, pp. 66-67], nous avons les résultats suivants pour diverses valeurs du paramètre a_1 :

$$0 < |a_1| < 0.5 \quad F_y(x) \text{ est purement singulière}$$

ce qui signifie qu'il existe un ensemble de mesure (de Lebesgue) nulle N tel que $\int_N dF_s(x) = 1$. $F_y(x)$ est alors continue et de dérivée nulle presque partout.

$$0.5 \leq |a_1| < 1 \quad F_y(x) \text{ est absolument continue}$$

$$(\text{uniforme pour } |a_1| = 0.5)$$

Nous nous proposons dans cette partie d'estimer la densité de probabilité du signal $y'(n) = [y(n) - m_y]/\sigma_y$ (m_y et σ_y^2 étant la moyenne et la variance de la sortie du filtre), dans les deux cas $0 < |a_1| < 0.5$ et $0.5 \leq |a_1| < 1$, et de la comparer avec celle de la loi normale. Il est préférable de centrer et de réduire les variables aléatoires $y(n)$ avant d'estimer leur loi. En effet, par exemple dans ce cas particulier de l'ordre 1, la variance de l'entrée (notée σ_v^2) et de la sortie du filtre sont liées par la relation :

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{1 - a_1^2} \sigma_v^2$$

Lorsque le paramètre a_1 tend vers 1, la variance de la sortie du filtre tend vers l'infini et il est alors difficile de comparer la loi de $y(n)$ avec la loi normale dont tous les moments sont finis.

Nous avons alors estimé la densité de probabilité du signal $y'(n)$ notée $f_y(x)$ à l'aide des deux méthodes suivantes :

1. **Méthode directe** : la densité de probabilité est estimée à l'aide d'un histogramme. On génère un signal AR avec un nombre de points $N = 10000$ et l'histogramme est réalisé avec $N_c = 200$ classes de largeur égale. Ces conditions de simulation restent identiques pour tous les histogrammes proposés dans cet article.

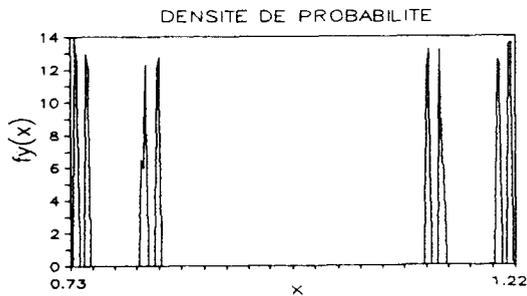


Fig 1.a : $a_1 = 0.2$ (directe)

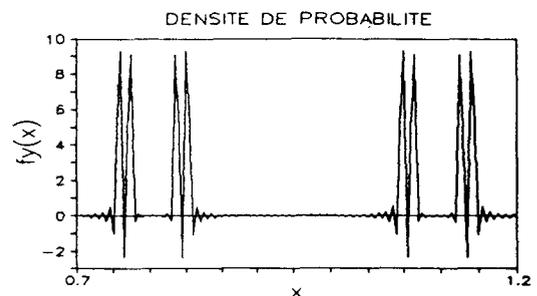


Fig 1.b : $a_1 = 0.2$ (inverse)

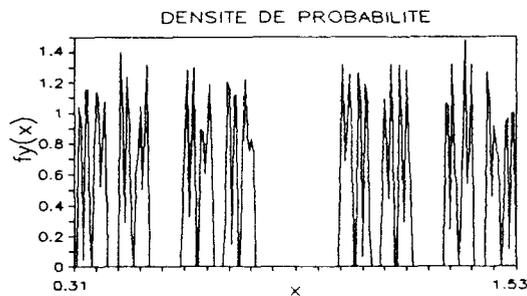


Fig 2.a : $a_1 = 0.4$ (directe)

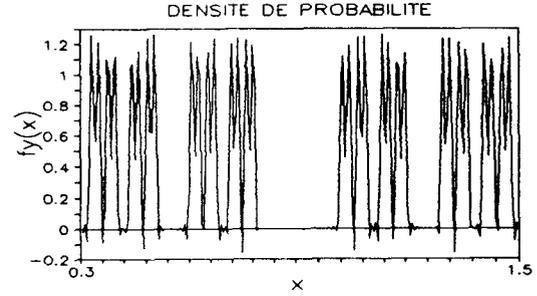


Fig 2.b : $a_1 = 0.4$ (inverse)

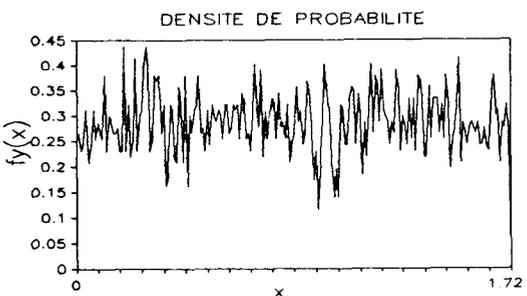


Fig 3.a : $a_1 = 0.5$ (directe)

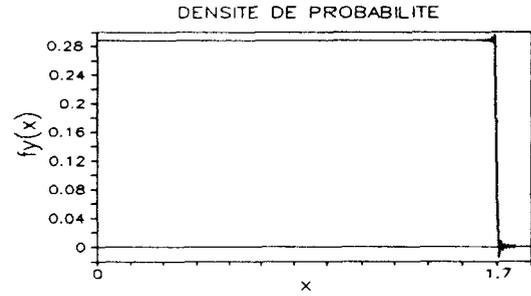


Fig 3.b : $a_1 = 0.5$ (inverse)

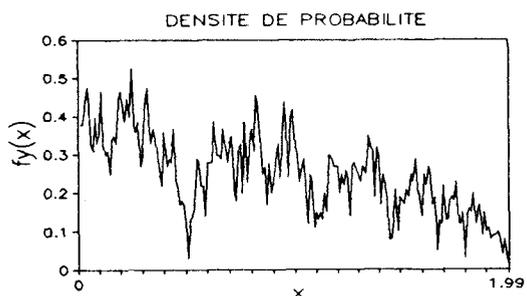


Fig 4.a : $a_1 = 0.6$ (directe)

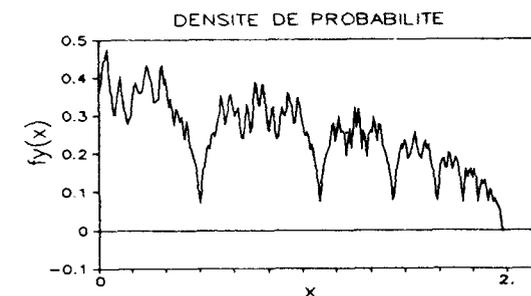


Fig 4.b : $a_1 = 0.6$ (inverse)

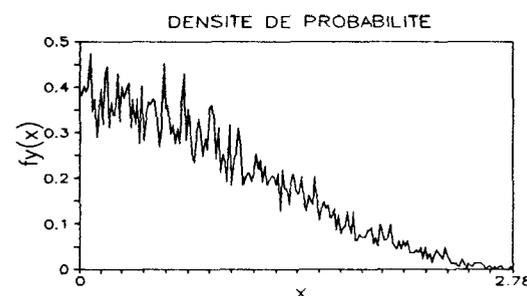


Fig 5.a : $a_1 = 0.8$ (directe)

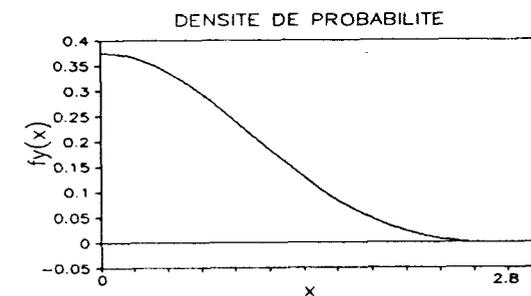


Fig 5.b : $a_1 = 0.8$ (inverse)

Figures 1 à 5. – Comparaison des lois de $y'(n)$ obtenues par les méthodes directe et inverse pour différentes valeurs du paramètre a_1 .

2. **Méthode inverse** : la densité de probabilité est estimée par calcul de la fonction caractéristique de $y'(n)$ à l'aide de l'expression (3) (avec troncature du produit infini) puis transformée de Fourier inverse.

Les figures 1 à 5 illustrent les résultats obtenus à l'aide de ces deux méthodes (seule la partie correspondant aux abscisses positives est représentée). Pour les cas $|a_1| = 0.5$ et $|a_1| > 0.5$, on obtient des résultats que l'on peut interpréter très aisément. Par contre, le cas $|a_1| < 0.5$ demande quelques développements. La loi de sortie du filtre est alors purement singulière, ce qui signifie que la fonction de répartition prend ses accroissements sur un ensemble de mesure nulle. Dans ce cas, la densité de probabilité est infinie sur cet ensemble et nulle ailleurs. L'histogramme est alors constitué de motifs isolés sur des intervalles qui dépendent du pas utilisé. Plus le pas est petit, plus le nombre de motifs est important. D'autre part, si on isole un intervalle, on peut reproduire l'histogramme complet, ce qui fait soupçonner l'existence d'une structure « fractale ». Démontrer l'existence de cette structure fractale est un problème difficile qui peut être résolu en calculant la dimension fractale de $y'(n)$ [13]. Nous nous limitons dans cette étude à montrer que l'histogramme de $y'(n)$ pour différentes échelles est la répétition d'un même motif. Dans le cas d'un filtre AR d'ordre 1 de paramètre 0.2, on obtient par exemple les figures 6 et 7

Dans le cas particulier du filtre AR d'ordre 1 de paramètre $|a_1| < 0.5$, nous proposons dans l'annexe une méthode permettant de vérifier le caractère singulier de la loi de sortie du filtre en montrant que l'ensemble des valeurs prises par $y'(n)$ est un ensemble de mesure nulle. À l'aide de considérations sur le support des histogrammes, les courbes des figures 6 et 7 permettent de confirmer le caractère singulier de la loi de $y'(n)$.

Ces exemples montrent que la sortie d'un filtre AR possède des lois très différentes en fonction des valeurs du paramètre a_1 . Lorsque le paramètre a_1 se rapproche de 1 et que l'on a pris le soin de centrer et de réduire $y(n)$, la loi de sortie du filtre AR se rapproche d'une gaussienne. Afin de préciser cette tendance, on introduit une distance entre lois de probabilité permettant de mesurer l'écart entre la loi de $y(n)$ et la loi normale. Il existe dans la littérature un grand nombre de distances utilisées en traitement du signal [9]. La plus simple à mettre en œuvre, qui est l'une des plus utilisées en statistique, est la distance de Kolmogorov :

$$d(f_y(x), p(x)) = \sup_{k=1, \dots, N} |\hat{F}_y(k) - F(k)|$$

$\hat{F}_y(x)$ étant la fonction de répartition associée à la loi de probabilité de la sortie du filtre $f_y(x)$, estimée à partir de l'histogramme de N points de la sortie du filtre, et $F(x)$ étant la fonction de répartition de la loi normale. Nous avons choisi un nombre de points N

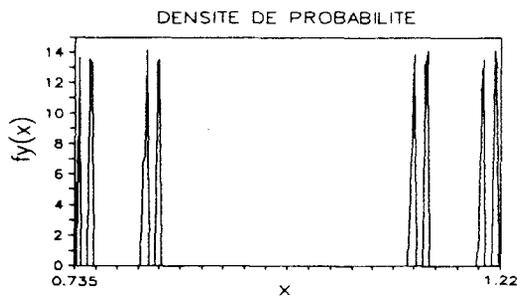


Fig 6.a : $a_1 = 0.2$ (directe)
 $1.224 \leq x \leq 1.225$

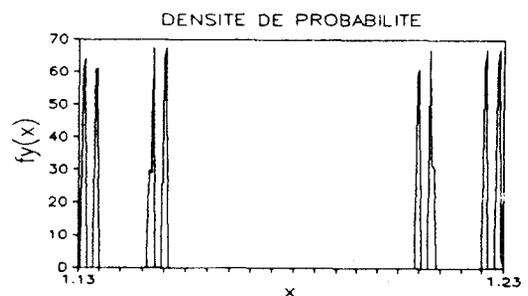


Fig 6.b : $a_1 = 0.2$ (directe)
 $1.223 \leq x \leq 1.225$

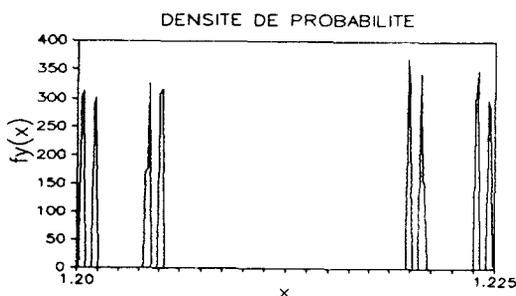


Fig 7.a : $a_1 = 0.2$ (directe)
 $1.224 \leq x \leq 1.225$

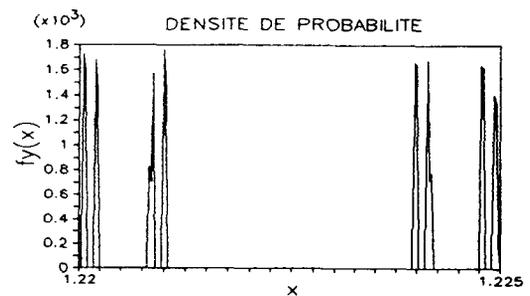


Fig 7.b : $a_1 = 0.2$ (directe)
 $1.223 \leq x \leq 1.225$

Figures 6 à 7. – Histogrammes de $y'(n)$ pour $a_1 = 0.2$ sur différents intervalles.

suffisamment élevé ($N = 10000$) pour que la fonction de répartition estimée soit suffisamment proche de la fonction de répartition exacte de la sortie du filtre (le nombre de points N a été choisi de façon à ce que la distance introduite ci-dessus reste constante à 1% près lorsque N augmente). À l'aide des tables de Kolmogorov [10, pp. 466-467], on peut déterminer un seuil à partir duquel on peut utiliser la loi normale pour les calculs conventionnels (moments, cumulants, ...). On obtient alors les résultats suivants :

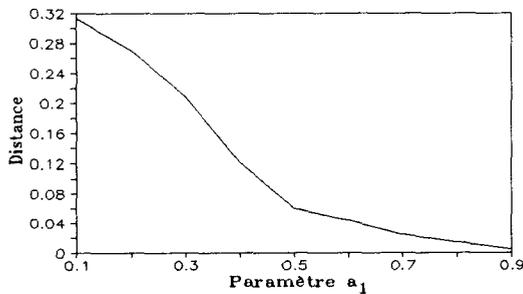


Figure 8. – Evolution de la distance entre la loi de la sortie du filtre AR et la loi normale suivant les valeurs du paramètre a_1 .

Comme on peut le constater, la distance entre la loi de la sortie du filtre AR et la loi normale diminue lorsque le paramètre a_1 se rapproche de l'unité. Dans ce cas particulier, l'unique pôle du filtre est un pôle réel égal à -1 , ce qui confirme les résultats énoncés précédemment.

3.2. CAS DES ORDRES SUPÉRIEURS

Pour des filtres AR d'ordre supérieur à 1, la loi de probabilité de la sortie est purement singulière ou purement absolument continue comme dans le cas des filtres d'ordre 1. Elle peut être estimée mais il n'existe pas, à notre connaissance, de résultat théorique permettant de déterminer la nature de la loi en fonction de la valeur des paramètres AR. Par ailleurs, il est difficile de démontrer expérimentalement le caractère singulier ou absolument continu d'une loi de probabilité. On peut simplement supposer que cette loi est singulière lorsque son support est suffisamment faible mais ce n'est évidemment pas une preuve. Nous proposons dans ce qui suit deux exemples illustrant ces propos :

1er cas : Loi singulière

Nous avons choisi deux pôles complexes (et leurs conjugués) de module inférieur à 0.5 :

$$|p_1| = |p_2| = 0.3, \quad \phi_1 = \frac{\pi}{5}, \quad \phi_2 = -\frac{\pi}{5}$$

$$|p_3| = |p_4| = 0.1, \quad \phi_3 = \frac{2\pi}{5}, \quad \phi_4 = -\frac{2\pi}{5}$$

$|p_i|$ et ϕ_i correspondant respectivement au module et à l'argument du i ème pôle.

Nous avons alors obtenu les paramètres de modélisation suivants :

$$a_0 = 1, \quad a_1 \approx -0.55, \quad a_2 \approx 0.13, \quad a_3 \approx -1.04e-2, \quad a_4 \approx 9e-4$$

La mesure du support de la loi de probabilité de la sortie du filtre est suffisamment faible pour supposer qu'elle est purement singulière.

2ème cas : Loi absolument continue

On peut penser que, dans beaucoup d'applications pratiques, les signaux étudiés possèdent une loi absolument continue. Nous avons considéré un système de communication par satellite QPSK [2] [3]. Le filtre d'émission d'un tel système peut s'identifier à un filtre AR dont l'entrée est constituée d'échantillons indépendants prenant les valeurs $+1$ et -1 . Nous avons alors effectué une modélisation AR à l'ordre 5 de la réponse impulsionnelle du filtre d'émission de ce système de communication (choisi comme étant un filtre de Butterworth). Nous avons alors obtenu les paramètres AR suivants :

$$a_1 = 1, \quad a_2 \approx -0.82, \quad a_3 \approx 0.79, \quad a_4 \approx -0.32, \quad a_5 \approx 7.5e-2$$

Les pôles correspondant à ces paramètres AR sont deux pôles complexes conjugués de modules $|p_1| = |p_2| \approx 0.39$ et $|p_3| = |p_4| \approx 0.70$. Une mesure du support de la loi de la sortie du filtre permet de supposer qu'elle est absolument continue.

Afin d'étudier l'évolution de la loi de sortie des filtres AR lorsque les pôles se rapprochent du cercle unité, nous avons modifié les deux filtres précédents en augmentant le module de la paire de pôles la plus éloignée du cercle unité. Nous obtenons alors les histogrammes des figures 9 et 10.

De la même façon que pour l'ordre 1, dès que l'un des pôles se rapproche du cercle unité, la loi de sortie du filtre AR se rapproche d'une gaussienne. Afin d'étudier l'écart entre la loi de la sortie du filtre et la loi gaussienne, nous avons calculé la distance de Kolmogorov entre ces deux processus lorsque les pôles p_3 et p_4 se rapprochent du cercle unité. On obtient les figures 11 et 12.

Comme précédemment, la distance entre la loi de la sortie du filtre AR et la loi normale diminue lorsque les pôles se rapprochent du cercle unité. Cependant, on peut être surpris du fait que la distance ne soit pas strictement décroissante lorsque le module des pôles augmente. On peut donner l'explication suivante : la distance de Kolmogorov permet de quantifier la ressemblance entre la loi de la sortie du filtre AR et la loi normale. Lorsque la loi du filtre est fortement non gaussienne (par exemple figures 9.a et 9.b), la distance de Kolmogorov est très élevée et elle n'est plus significative. Cette distance n'a de sens que lorsque les pôles du filtre sont suffisamment proches du cercle unité pour que la loi de la sortie du filtre ne soit pas trop éloignée d'une gaussienne. Dans ces conditions, c'est-à-dire approximativement pour des pôles p_3 et p_4 de module supérieur à 0.6, la distance de Kolmogorov est décroissante ce qui signifie que la loi de sortie du filtre AR se rapproche de la loi normale.

1er cas : Loi singulière

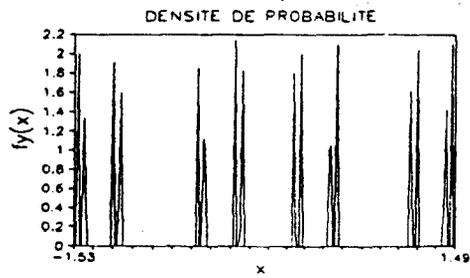


Fig 9.a : $|p_1| = |p_2| = 0.3$
 $|p_3| = |p_4| = 0.1$
 (paramètres d'origine)

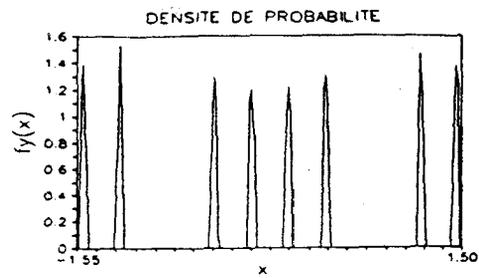


Fig 9.b : $|p_1| = |p_2| = 0.3$
 $|p_3| = |p_4| = 0.25$

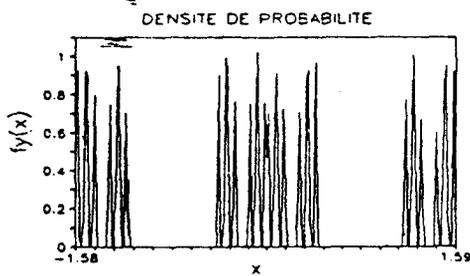


Fig 9.c : $|p_1| = |p_2| = 0.3$
 $|p_3| = |p_4| = 0.4$

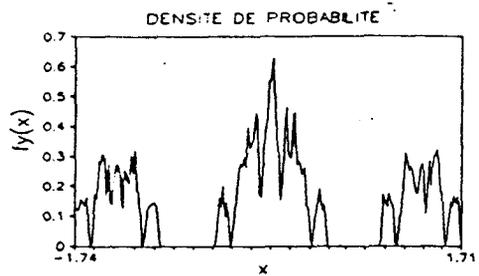


Fig 9.d : $|p_1| = |p_2| = 0.3$
 $|p_3| = |p_4| = 0.55$

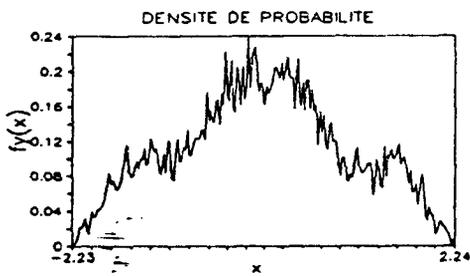


Fig 9.e : $|p_1| = |p_2| = 0.3$
 $|p_3| = |p_4| = 0.75$

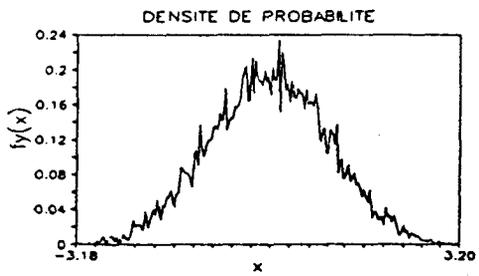


Fig 9.f : $|p_1| = |p_2| = 0.3$
 $|p_3| = |p_4| = 0.9$

Figures 9a à 9f. – Estimation de la loi de probabilité d'un signal de loi singulière (par histogramme) et évolution de cette loi lorsque les pôles se rapprochent du cercle unité.

2ème cas : Loi absolument continue

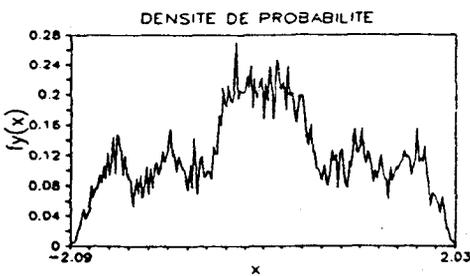


Fig 10.a : $|p_1| = |p_2| = 0.70$
 $|p_3| = |p_4| = 0.39$
 (paramètres d'origine)

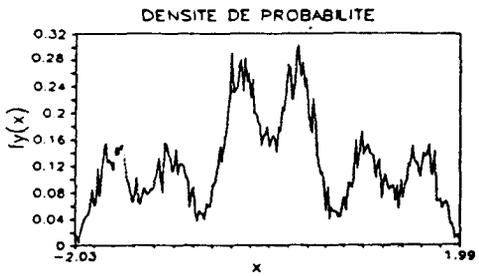


Fig 10.b : $|p_1| = |p_2| = 0.70$
 $|p_3| = |p_4| = 0.5$

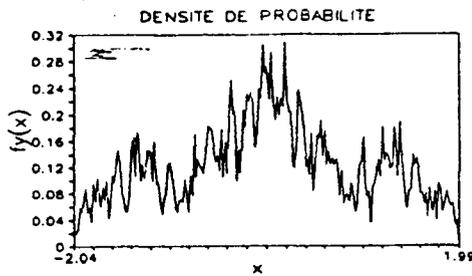


Fig 10.c : $|p_1| = |p_2| = 0.70$
 $|p_3| = |p_4| = 0.6$

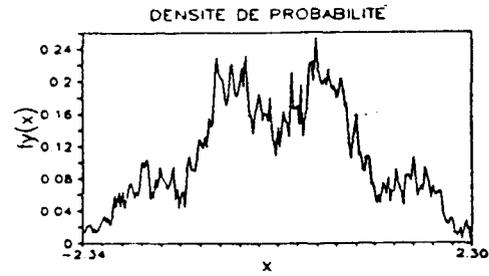


Fig 10.d : $|p_1| = |p_2| = 0.70$
 $|p_3| = |p_4| = 0.7$

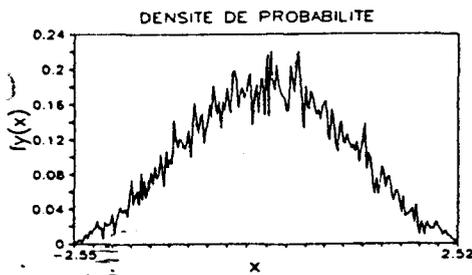


Fig 10.e : $|p_1| = |p_2| = 0.70$
 $|p_3| = |p_4| = 0.8$

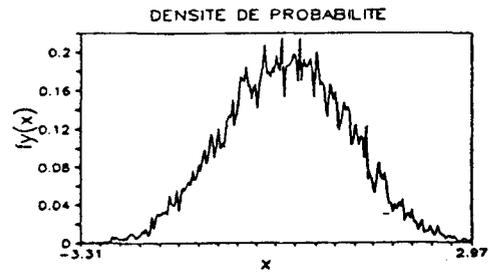


Fig 10.f : $|p_1| = |p_2| = 0.70$
 $|p_3| = |p_4| = 0.9$

Figures 10a à 10f. – Estimation de la densité d'un signal de loi absolument continue et évolution de cette densité lorsque les pôles se rapprochent du cercle unité.

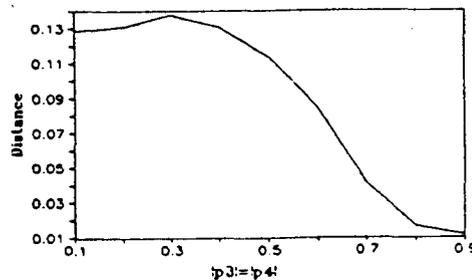


Fig 11 : loi singulière

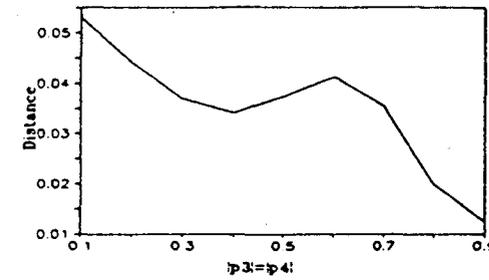


Fig 12 : loi absolument continu

Figures 11 et 12. – Evolution de la distance entre la loi de la sortie du filtre AR et la loi normale lorsque le module des pôles p_3 et p_4 se rapproche de l'unité.

À travers ces deux exemples, nous avons illustré la tendance de la loi de sortie du filtre AR vers la loi normale, lorsque l'un des pôles se rapproche du cercle unité. Ces exemples ne constituent en aucun cas une preuve théorique. Toutefois, nous n'avons pas trouvé de contre-exemple de ce comportement qui semble bien général dans le cas de filtres AR à entrée binaire.

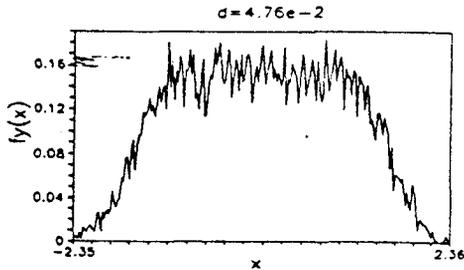
4. Entrée à support borné

La sortie $y(n)$ d'un filtre AR d'ordre p excité par une entrée blanche à support borné est également à support borné, ce qui lui

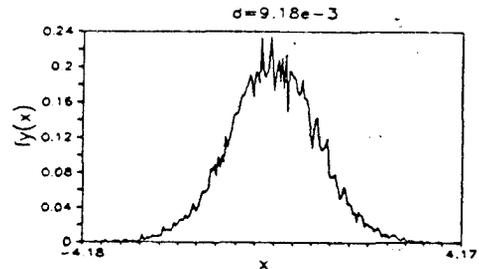
interdit le caractère gaussien. Comme pour le cas d'une entrée binaire, dès que l'un des pôles du filtre AR se rapproche du cercle unité, la loi de sa sortie centrée réduite se rapproche d'une gaussienne. Les résultats de simulation des figures 13 et 14 illustrent cette propriété.

Lorsque le dernier paramètre AR augmente, les pôles du filtre se rapprochent du cercle unité et, comme précédemment, la loi de la sortie du filtre tend vers la loi normale. Nous avons indiqué au dessus de chaque courbe la distance entre la loi de la sortie du filtre et la loi normale qui précise cette tendance.

Loi de la sortie du filtre AR d'ordre 3 pour une entrée uniforme sur l'intervalle [0;1]



*Fig 13.a : a1=0.1, a2=0.2, a3=0.3
|p1|=|p2|=0.71 p3=0.6*



*Fig 13.b : a1=0.1, a2=0.2, a3=0.9
|p1|=|p2|=0.98 p3=0.93*

Loi de la sortie du filtre AR d'ordre 3 pour une entrée binomiale B(n,p) avec n = 10 et p = 0.1

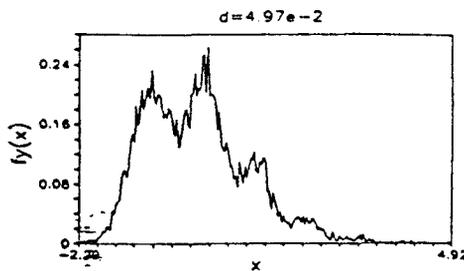


Fig 14.a : a1=0.1, a2=0.2, a3=0.3

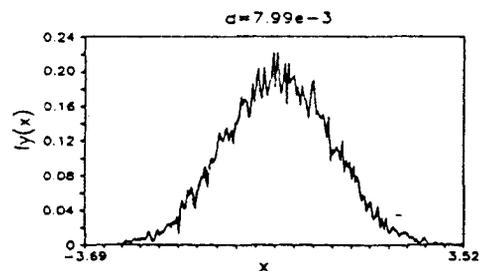


Fig 14.b : a1=0.1, a2=0.2, a3=0.9

Figures 13 et 14. – Comparaison des densités de probabilité des y(n) obtenues par simulation pour différentes valeurs des paramètres AR et pour différentes lois d'entrée.

5. Entrée à support non borné

Nous avons vu précédemment que la sortie d'un filtre AR ne peut être gaussienne que si l'entrée est également gaussienne. Dans un premier temps, nous présentons une autre démonstration élémentaire de cette propriété dans le cas où tous les moments de la loi de l'entrée du filtre sont finis [12]. Afin de simplifier certains développements, nous étudions le cas où l'entrée $v(n)$ est de moyenne nulle. La sortie est alors également de moyenne nulle et donc, si elle suit une loi normale, la détermination principale du logarithme de sa fonction caractéristique $\phi_y(u)$ doit vérifier :

$$Ln[\phi_y(u)] = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} \quad (5)$$

Dans le cas où l'entrée possède un moment d'ordre M fini, la seconde fonction caractéristique de la sortie $Ln \phi_y(u)$ possède un développement limité de la forme :

$$Ln[\phi_y(u)] = \sum_{m=2}^M (i)^m \frac{\gamma_m}{m!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^m \right) u^m + o(u^M) \quad (6)$$

γ_m étant le cumulatif d'ordre m de la variable aléatoire $v(n)$. Une condition nécessaire pour que la loi de probabilité de la sortie du filtre AR soit gaussienne est que tous les coefficients de u^m avec $m \geq 3$ soient nuls c'est-à-dire que l'on ait :

$$m = 3, 4, \dots \quad \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^m \right) \gamma_m = 0 \quad (7)$$

La quantité $\sum_{k=0}^{+\infty} h_k^m$ étant non nulle pour tout entier naturel m [11], il faut nécessairement que les cumulants de l'entrée soient nuls pour que la loi de la sortie du filtre AR soit gaussienne. Une loi n'est en général pas entièrement déterminée par la donnée de ses moments. Cette remarque constitue le problème des moments de Stieltjes [7, p. 291]. Néanmoins, on peut montrer qu'une loi dont tous les cumulants sont nuls est nécessairement une loi gaussienne ce qui permet d'achever la démonstration. À l'aide de simulations réalisées pour une entrée possédant une loi de Poisson ou une loi exponentielle, on obtient des résultats analogues au cas d'une entrée à support borné. Dès que l'un des pôles du filtre AR s'approche du cercle unité, la loi de sortie du filtre se rapproche d'une gaussienne (figures 15 et 16).

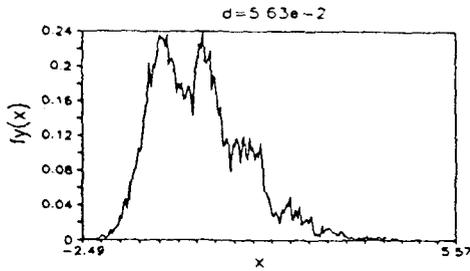


Fig 15.a : $a_1=0.1$
 $a_2=0.2, a_3=0.3$

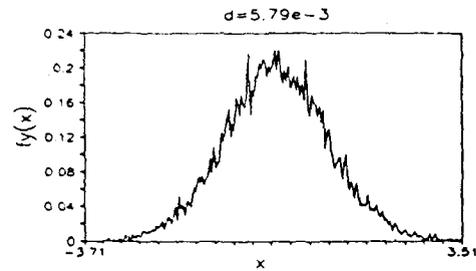


Fig 15.b : $a_1=0.1$
 $a_2=0.2, a_3=0.9$

Figures 15a et 15b. – Loi de la sortie d'un filtre AR d'ordre 3 pour une entrée possédant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

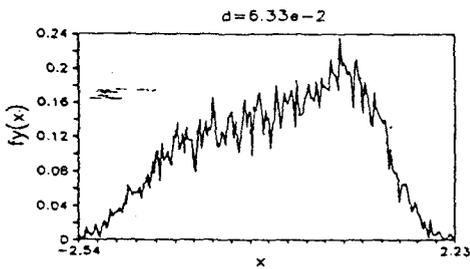


Fig 16.a : $a_1=0.1$
 $a_2=0.2, a_3=0.3$

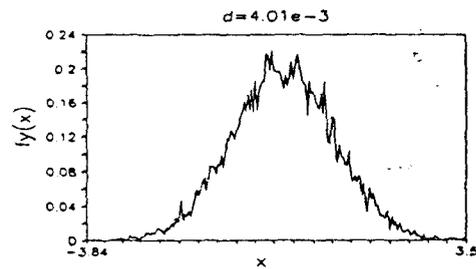


Fig 16.b : $a_1=0.1$
 $a_2=0.2, a_3=0.9$

Figures 16a et 16b. – Loi de la sortie du filtre AR d'ordre 3 pour une entrée possédant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

Comme précédemment, nous avons indiqué au-dessus de chaque courbe la distance entre la loi de la sortie du filtre et la loi normale.

6. Filtres ARMA à entrées non gaussiennes

Soit un filtre ARMA d'ordres p et q , défini par ses paramètres a_k et b_k , excité par un bruit blanc $v(n)$ à moyenne nulle. On note $y(n)$ la sortie de ce filtre qui est alors défini par l'équation récursive suivante :

$$\sum_{k=0}^p a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^q b_k v(n-k) \quad (8)$$

avec $a_0 = 1, a_p \neq 0, b_0 \neq 0, b_q \neq 0$

Comme pour le cas d'un filtre AR, les fonctions caractéristiques de l'entrée et de la sortie d'un filtre ARMA vérifient l'équation (2). On en déduit alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la sortie d'un filtre ARMA soit gaussienne est que l'entrée de ce filtre soit gaussienne. Le but de cette partie est de montrer que loi de probabilité de la sortie des filtres ARMA ne tend pas toujours vers une gaussienne lorsque les pôles du filtre se rapprochent du cercle unité. Pour cela, nous étudions le cas d'un

filtre ARMA(1, q) avec une entrée binaire qui constitue un très bon contre-exemple. On a alors :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q-1} h_k v(n-k) + f(a_1, b_1, \dots, b_q) \sum_{k=q}^{+\infty} (-a_1)^k v(n-k)$$

$$\text{avec } f(a_1, b_1, \dots, b_q) = 1 - \frac{b_1}{a_1} + \dots + (-1)^q \left[\frac{b_q}{(a_1)^q} \right]$$

la sortie du filtre ARMA $y(n)$ peut dans ce cas être considérée comme la somme des deux variables aléatoires

$$y_1(n) = \sum_{k=0}^{q-1} h_k v(n-k)$$

et

$$y_2(n) = (-a_1)^q f(a_1, b_1, \dots, b_q) \sum_{k=0}^{+\infty} (-a_1)^k v(n-q-k)$$

D'après les résultats précédents (§ 3.1), dans le cas d'une entrée binaire, la variable aléatoire $y_2(n)$ est singulière pour $|a_1| < 0.5$ et absolument continue pour $|a_1| \geq 0.5$. Par ailleurs, la variable aléatoire $y_1(n)$ est discrète indépendante de $y_2(n)$. La loi de $y(n)$

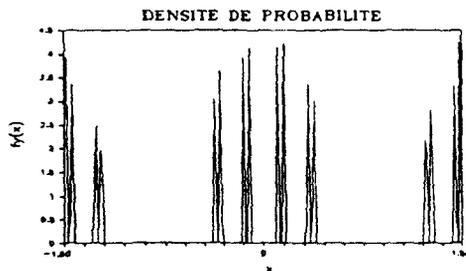


Fig 17.a : $a_1 = 0.2$

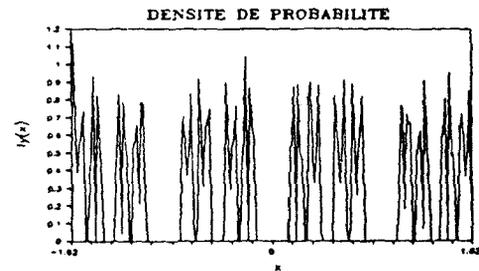


Fig 17.b : $a_1 = 0.4$

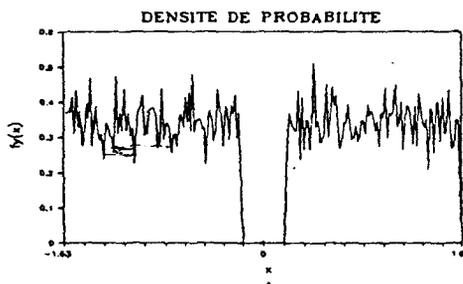


Fig 17.c : $a_1 = 0.5$

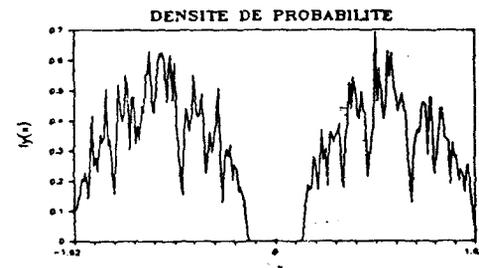


Fig 17.d : $a_1 = 0.6$

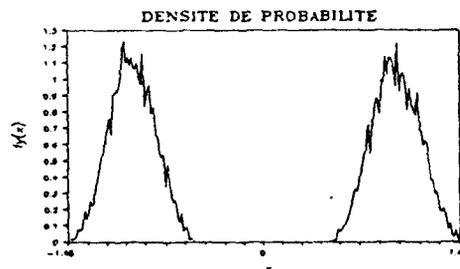


Fig 17.e : $a_1 = 0.8$

Figures 17a à 17e. – Comparaison des lois de la sortie d'un ARMA(1,1) de paramètres $a_0 = 1, a_1 \neq 0, b_1 = 0.9$ pour différentes valeurs du paramètre a_1 .

est alors le produit de convolution des lois de $y_1(n)$ et de $y_2(n)$ et donc elle ne tend plus vers la loi normale lorsque les pôles du filtre se rapprochent du cercle unité. Nous présentons alors les résultats de simulation obtenus pour un filtre ARMA(1, 1). Dans ce cas, la loi de $y(n)$ est le produit de convolution de celle de $y_2(n)$ et de $B(x) = \frac{1}{2}[\delta(x+1) + \delta(x-1)]$. Si $F_y(x)$ et $F_{y_2}(x)$ désignent respectivement les lois de $y(n)$ et de $y_2(n)$, on a alors :

$$y(x) = \frac{1}{2}[F_{y_2}(x-1) + F_{y_2}(x+1)]$$

Les fonctions de répartition $F_y(x)$ et $F_{y_2}(x)$ sont donc de même nature. Pour $0 < |a_1| < 0.5$, $F_y(x)$ est donc singulière et pour $0.5 \leq |a_1| < 1$, $F_y(x)$ est absolument continue. Les résultats de simulation des figures 17 présentent l'évolution de la loi de sortie d'un filtre ARMA(1, 1) lorsque le paramètre a_1 se rapproche de 1 c'est-à-dire lorsque le pôle du filtre se rapproche du cercle unité.

Comme on peut le voir sur les figures 17, la loi de sortie des filtres ARMA peut être très différente d'une loi gaussienne lorsque les pôles du filtre se rapprochent du cercle unité.

7. Conclusion

L'étude des lois de probabilité des sorties des filtres AR pour différentes classes d'entrées permet d'arriver aux conclusions suivantes :

- Dans le cas d'entrées non gaussiennes, la loi de la sortie d'un filtre AR, bien qu'étant non gaussienne, se rapproche d'une loi normale dès que l'un des pôles du filtre se rapproche du cercle unité. L'utilisation des tests conventionnels (Kolmogorov, Chi2,

...) ne permet alors pas de distinguer la loi de la sortie du filtre AR de la loi gaussienne la plus proche.

• À l'aide de contre-exemples, nous avons montré que ce résultat ne peut se généraliser aux filtres ARMA.

On sait bien que la convergence en loi n'est pas équivalente à la convergence des moments [7, chap. 9]. Dans le cas particulier des filtres AR, de nombreuses simulations permettent de supposer que, non seulement, il y a convergence de la loi de la sortie de tels filtres vers la loi normale, mais aussi convergence des cumulants d'ordre supérieur correspondants vers zéro. On ne peut alors plus utiliser les techniques habituelles d'identification des systèmes à phase non minimale basées sur les statistiques d'ordre supérieur [4], [5], [6].

Cet article donne quelques éléments permettant de déterminer la loi de probabilité de certains modèles AR et ARMA, mais un grand nombre de développements peuvent encore être effectués. En particulier, le cas d'entrées dépendantes qui a été abordé dans [11] demande à être développé.

8. Annexe

A.1. ÉTUDE DU SUPPORT DE LA LOI D'UN MODÈLE AR D'ORDRE 1 DE PARAMÈTRE a_1 DANS LE CAS $|a_1| < 1/2$ POUR UNE ENTRÉE BINAIRE

$v(n)$ et $y(n)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie d'un filtre AR d'ordre 1, de paramètre a_1 , défini par :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-a_1)^k v(n-k)$$

Supposons $v(n) = \epsilon_0$ avec $\epsilon_0 = \pm 1$. On a alors :

$$\frac{-|a_1|}{(1-|a_1|)} \leq y(n) - \epsilon_0 \leq \frac{|a_1|}{(1-|a_1|)}$$

La loi de $y(n)$ a alors un support contenu dans deux intervalles I_0 et I_1 centrés en $+1$ et -1 de largeur $\frac{2|a_1|}{(1-|a_1|)}$.

Supposons $v(n) = \epsilon_0$, $v(n-1) = \epsilon_1$ avec $\epsilon_0 = \pm 1$ et $\epsilon_1 = \pm 1$.

On a alors :

$$y(n) = \epsilon_0 + (-a_1)\epsilon_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-a_1)^k v(n-k)$$

et donc :

$$\frac{-|a_1|^2}{(1-|a_1|)} \leq y(n) - \epsilon_0 - (-a_1)\epsilon_1 \leq \frac{|a_1|^2}{(1-|a_1|)}$$

La loi de $y(n)$ a alors un support contenu dans 2^2 intervalles centrés en $-1 - a_1$, $-1 + a_1$, $1 - a_1$ et $1 + a_1$ de largeur $\frac{2|a_1|^2}{(1-|a_1|)}$.

Par récurrence, on montre alors que, pour tout entier k positif, la loi de $y(n)$ a un support contenu dans 2^k intervalles I_m de largeur $\frac{2|a_1|^k}{(1-|a_1|)}$.

Quelque soit k , le support de $y(n)$ est donc contenu dans un ensemble de mesure :

$$\sum_{m=1}^{2^k} \mu(I_m) = 2^k \left[\frac{2|a_1|^k}{(1-|a_1|)} \right] = 2 \frac{(2|a_1|)^k}{(1-|a_1|)}$$

qui, pour $|a_1| < 0.5$, tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

Pour $|a_1| < 0.5$, on conclut alors que la loi de $y(n)$ est contenue dans un ensemble de mesure nulle ce qui est une des caractéristiques d'une densité de probabilité singulière.

9. Bibliographie

- [1] E. LUKACS, « Characteristic functions », Griffin, 1970.
- [2] J.C. BIC, D. DUPONTEIL, J.C. IMBEAUX, « Éléments de communications numériques », Dunod, 1986.
- [3] M. STEIN, « Les modems pour transmission de données », Masson, 1991.
- [4] J.M. MENDEL, « Tutorial on Higher-order Statistics (Spectra) in Signal Processing and System Theory : Theoretical Results and Some Applications », *Proceedings of the IEEE*, vol. 79, pp. 277-305, March 1991.
- [5] C.L. NIKIAS and M. RAGHUVEER, « Bispectrum estimation : a digital signal processing framework », *Proc. IEEE*, vol. 75, pp. 869-891, 1987.
- [6] G.B. GIANNAKIS, « On estimating Non-Causal Non-Minimum Phase ARMA models of Non-Gaussian Processes », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 38, pp. 478-495, 1990.
- [7] A. RÉNYI, « Calcul des probabilités », Dunod, 1966.
- [8] J.Y. TOURNERET and B. LACAZE, « Statistical study of an AR Filter with a Binary Noise excitation », *Proc. of Int. Conf. on Digital Sig. Proc.*, pp. 121-126, Florence, September 4-6, 1991.
- [9] M. BASSEVILLE, « Distance Measures for Signal Processing and Pattern Recognition », *Signal Processing*, vol. 18, pp. 349-369, 1989.
- [10] G. SAPORTA, « Probabilités. Analyse des données et statistique », Technip, 1990.
- [11] J.Y. TOURNERET, « Contribution à l'étude de modèles ARMA non gaussiens », Thèse de Doctorat de l'INP, Sept. 1993, n° ordre 605.
- [12] J.Y. TOURNERET and B. LACAZE, « Classes de lois de processus AR non gaussiens », *Proc. of GRETSI*, pp. 1-4, Juan-les-Pins, September 16-20, 1991.
- [13] H.E. STANLEY, « Form : an introduction to self-similarity and fractal behavior », *On growth and form*, H.E. Stanley and H. Ostrowsky, Eds. Dordrecht and Boston, Nijhoff, 1986.

LES AUTEURS

Jean-Yves **TOURNERET**



Jean-Yves Tourneret est ingénieur ENSEEIHT (1989) et Docteur de l'Institut National Polytechnique de Toulouse (1992). Maître de conférences à l'ENSEEIHT depuis 1993, ses activités de recherche portent sur les processus Non Gaussiens. Il est membre du GDR 134 en Traitement du Signal et des Images.

Bernard **LCAZE**



Docteur de 3e cycle en Électronique (1966), Docteur en Sciences Mathématiques (1971), Professeur des Universités depuis 1975 à l'INSA de Toulouse. Activités de recherche en théorie du signal et en mécanique statistique des gaz.

Manuscrit reçu le 11 juin 1993.