

Restauration des images multi-échelles par l'algorithme à trous

Multiscale Image Restoration by the À Trous Algorithm

par Albert BIJAOUÏ (1), Jean-Luc STARCK (1, 2, 3), Fionn MURTAGH (4, 5)

(1) Observatoire de la Côte d'Azur, B.P. 229 F-06304 Nice Cedex 4

(2) Cisi-Ingenierie, 1360 route des Dolines 06560 Valbonne

(3) CEA, DSM/DAPNIA, CE-SACLAY, F-91191 Gif-sur-Yvette

(4) ST-ECF, ESO, Karl-Schwarzschild-Str. 2, D-85748 Garching

(5) Affiliated to Astrophys. Div., Space Science Dept., ESA

Résumé

La transformation en ondelettes discrète peut être réalisée par différents algorithmes. Parmi ceux-ci, l'algorithme à trous conduit à une importante redondance de données. Si cette redondance le rend impraticable pour la compression des signaux, elle peut être, au contraire, un atout pour la restauration des images. Dans cet article nous exposerons tout d'abord les fondements de cet algorithme et les divers outils associés (transformation, inversion, visualisation). Nous développerons ensuite une méthode itérative de restauration des images basée sur la notion de coefficients significatifs. La réduction des coefficients conduit à régulariser le problème inverse lié à la déconvolution. Un exemple est donné en se basant sur l'inversion par la méthode de Richardson-Lucy.

Mots clés : Analyse multirésolution, Ondelettes, Restauration d'images.

Abstract

The Discrete Wavelet Transform can be performed by several algorithms. Among them the "À trous" leads to an extensive data redundancy. Thus this algorithm is not useful for data compression, but this redundancy can be a useful asset for image restoration. In this paper, we firstly describe the principles of the algorithm and some connected tools. Then we describe an iterative restoration method based on the significant coefficients. The regularization of the inversion is provided by the restriction of the number of coefficients. An example is given from the regularization of Richardson-Lucy's iterative deconvolution algorithm.

Key words : Multiresolution Analysis, Wavelet Transform, Image Restoration.

1. Introduction

1.1. LA TRANSFORMATION EN ONDELETTES CONTINUE ET L'ANALYSE MULTIRÉSOLUTION

La transformation en ondelettes continue d'une fonction $f(x)$ avec une ondelette $\psi(x)$ est définie par l'expression [26] :

$$\mathcal{W}[f(x)](a, b) = w(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (1)$$

où z^* désigne le complexe conjugué de z , a l'échelle et b la position. Elle est caractérisée par trois propriétés :

• Linéarité : $\mathcal{W}[f_1 + f_2] = \mathcal{W}[f_1] + \mathcal{W}[f_2]$ et $\mathcal{W}[\lambda f] = \lambda \mathcal{W}[f]$;

• Invariance par translation :

$$\mathcal{W}[f(x - x_0)](a, b) = \mathcal{W}[f(x)](a, b - x_0);$$

• Invariance par dilatation : $\mathcal{W}[f(sx)](a, b) = s^{-1} \mathcal{W}[f(x)](sa, sb)$;

Cette dernière propriété la rend particulièrement bien adaptée à l'étude de signaux présentant une grande hiérarchie de structures, comme c'est le cas pour les structures fractales ou multifractales [3]. On dispose d'un microscope mathématique dont l'optique est indépendante de l'origine et du grossissement.

Le passage à la transformation en ondelettes discrète a conduit à de nombreux travaux [27] qui se sont rapidement focalisés sur l'Analyse Multirésolution développée en particulier par Mallat [25]. Cette analyse est basée sur une construction d'une suite emboîtée $\mathcal{V}_0 \supset \mathcal{V}_1 \supset \dots \supset \mathcal{V}_i \supset \dots$ de sous espaces fermés de $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$. Les données initiales $c(0, k)$ sont les produits scalaires de la fonction $f(x)$ avec une fonction d'échelle $\phi(x)$ translatée au point k :

$$c(0, k) = \langle f(x), \phi(x - k) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi(x - k) dx \quad (2)$$

L'échantillonnage ne correspond donc pas à la valeur de $f(x)$ au point k , mais à la valeur de $f(x)$ pondérée avec $\phi(x - k)$. Ceci correspond à une projection dans le sous-espace \mathcal{V}_0 à condition que :

$$\sum_n |\hat{\phi}(\nu + n)|^2 \neq 0 \quad \forall \nu \quad (3)$$

où $\hat{\phi}$ est la transformée de Fourier de ϕ . Si $\phi(x)$ obéit à l'équation de dilatation [30] :

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_n h(n)\phi(x - n) \quad (4)$$

on obtient un emboîtement des sous-espaces engendrés par les produits scalaires de $f(x)$ avec la fonction d'échelle à l'échelle 2, 4, ... Nous avons ainsi :

$$c(i + 1, k) = \langle f(x), \frac{1}{2^i}\phi\left(\frac{x}{2^i} - k\right) \rangle = \sum_n h(n)c(i, 2k + n) \quad (5)$$

Les données sont réduites d'un facteur 2 (décimation) d'une échelle à l'autre dans cette analyse dite *dyadique*. On obtient ainsi une pyramide de signaux de résolution de plus en plus réduite comprenant $2N$ données à partir de N valeurs initiales.

Dans l'Analyse Multirésolution, Mallat introduit les sous-espaces complémentaires des \mathcal{V}_i dans \mathcal{V}_{i-1} , \mathcal{W}_i (on incrémente l'indice i lorsque la résolution décroît). La fonction ondelette est introduite pour construire une base de ce sous-espace. Une représentation complète du signal est obtenue par itération avec $N - 1$ coefficients en ondelettes et un terme lissé. L'algorithme obtenu est donc non-redondant. Les applications principales résultent de la dualité entre les données et la transformée (par exemple pour la synthèse de processus [13]) ou de la réduction du nombre d'éléments significatifs (par exemple pour la compression du signal ou des images [1]).

L'extension à deux dimensions soulève quelques difficultés. Si l'algorithme en quinconce de Feauveau [12] permet d'avoir une vision quasi-isotrope avec une seule ondelette, l'algorithme à variables séparées utilisé par Mallat [25] conduit à une transformation à trois ondelettes difficile à exploiter pour l'analyse des images.

1.2. L'INVARIANCE PAR TRANSLATION

L'obstacle principale de l'utilisation de l'algorithme de Mallat pour l'analyse des images ou pour la restauration réside dans sa non invariance par translation. La transformation en ondelettes continue possède cette propriété. Au niveau discret, on peut considérer l'invariance par translation sur un entier dans l'échantillonnage initial. En raison de la décimation, la transformation en ondelettes discrète résultant de l'analyse multirésolution ne peut être, au sens strict, invariante par translation. Mais on peut généraliser cette notion en examinant s'il est possible par interpolation

sur le tableau échantillonné de retrouver exactement les données. Ceci est parfaitement réalisé dans le cadre de la décomposition de Littlewood-Paley [23], par application des théorèmes d'échantillonnage sur les parties hautes et basses fréquences. Alors la réduction des échantillons provient naturellement de la réduction de la bande de fréquence. Dans le cas général de l'analyse multirésolution, le recouvrement des transformées de Fourier résultant des décimations est compensé dans la transformation inverse, mais le tableau des coefficients en ondelettes $w(i, k)$ à une échelle donnée ne peut être interpolé de manière correcte sans une utilisation des coefficients à toutes les échelles. Il n'y a donc pas invariance par translation. Cet effet est sans importance pour la synthèse d'un signal. Son influence est négligeable pour la compression. Mais les conséquences peuvent être désastreuses pour la détection ou pour la restauration du signal.

En effet, considérons la suite des coefficients $w(i, k)$ à une échelle donnée. Si autour de k_0 nous ne détectons pas de maximum sur cette suite, cela ne prouve pas qu'il n'en existe pas un pour la fonction $w(i, x)$. L'information contenue dans les éléments décimés n'est pas indispensable pour la reconstruction exacte du signal, mais on ne peut pas prétendre analyser correctement le signal à une échelle avec uniquement les échantillons conservés dans l'analyse multirésolution.

1.3. LA SÉPARATION DES ÉCHELLES

Une autre propriété importante pour la déconvolution disparaît également dans l'analyse multirésolution : la séparation entre les échelles. Considérons le filtrage de $f(x)$ avec une fonction $p(x)$:

$$q(x) = (f * p)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)p(x - u)du \quad (6)$$

Dans l'espace de la transformation en ondelettes continue :

$$\mathcal{W}[q(x)](a, b) = \mathcal{W}[f(x)](a, b) * p(b) \quad (7)$$

Autrement dit, l'équation de convolution est valable à chaque échelle. Cette propriété permet donc d'examiner la déconvolution de manière séparée, échelle par échelle. Dans le cas de l'analyse multirésolution nous obtenons :

$$w_q(i, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u)w_f\left(i, k - \frac{u}{2^i}\right)du \quad (8)$$

Comme nous ne pouvons pas définir d'interpolation exacte des coefficients $w_f(i, k)$, il n'existe pas de relation entre les coefficients en ondelettes de la fonction $f(x)$ et $q(x)$ à une échelle donnée. La déconvolution dans le cadre de la multirésolution ne peut se faire sans utiliser globalement l'ensemble des échelles [4]. Plusieurs algorithmes de restauration des images à partir de l'analyse multirésolution ont été présentés. Par exemple, celui de Donoho [11] est basé sur un seuillage des coefficients dans l'espace des ondelettes, pour la suppression du bruit. La déconvolution est effectuée en termes de *vaguelettes*, en appliquant la notion de décomposition en valeurs singulières dans l'espace des ondelettes. Cette technique, formellement très esthétique, est en

général inappropriée au cas de fonctions d'étalement ayant des valeurs nulles ou très faibles en module de la transformée de Fourier. Pour pallier ces difficultés, Roques et al. [28] ont développé un algorithme basé sur la généralisation de contraintes de support à l'espace des ondelettes. La méthode est interactive, donc subjective et inadaptée à la mise en œuvre dans un logiciel d'usage général, ce qui constitue notre objectif. C'est pourquoi nous avons examiné de nouvelles voies basées sur d'autres approches de la transformation en ondelettes discrètes.

1.4. LES DIFFÉRENTS ALGORITHMES DE TRANSFORMATION EN ONDELETTES

D'autres voies sont possibles pour la discrétisation de la transformation en ondelettes [5]. Elles sont redondantes, donc inadaptées à la synthèse de signaux ou à leur compression. Nous allons les examiner rapidement dans le cadre de l'invariance par translation ou la séparation des échelles.

- Discrétisation simple de la transformation en ondelettes continue : si la fonction est correctement échantillonnée, on peut calculer les corrélations de manière discrète. On ne peut décimer sans introduire d'aliasing. La complexité est en N^2 et le nombre de données est en $N \log N$. L'invariance par translation, de même que la séparation des échelles, sont assurées par le théorème de Shannon.

- Utilisation de la Transformation de Fourier Discrète : on effectue les convolutions dans l'espace de Fourier. Les problèmes de bord sont traités par périodisation, mais on pourrait aussi introduire le signal miroir pour réduire les effets de bord. La complexité est en $N \log^2 N$ et le nombre de données est en $N \log N$. L'invariance par translation et la séparation des échelles sont également respectées. Cette voie permet l'utilisation d'ondelettes complexes et de déduire une énergie et une phase à chaque échelle et en chaque point.

- Transformation pyramidale : on calcule la pyramide des signaux à différentes résolutions, comme pour l'analyse multirésolution. Les coefficients en ondelettes sont calculés par convolution discrète, mais on ne décime pas. La complexité est en N et le nombre de données en $2N$. La table des coefficients $w(i, k)$ peut être interpolé, mais le résultat est, en général, sensible à une translation d'un entier. Cette transformation ne respecte donc pas strictement l'invariance par translation et la séparation des échelles, mais est utilisable en analyse des images, surtout pour des images de grandes dimensions [10].

- Transformation pyramidale avec une fonction d'échelle à fréquence de coupure [31] : le passage d'une échelle à l'autre s'accompagne d'une réduction de la bande de fréquence. On décime donc par application du théorème d'échantillonnage et l'invariance par translation et la séparation des échelles sont parfaitement respectées, même sur le tableau décimé. La complexité est en $N \log N$ et le nombre de données est $2N$.

- L'algorithme à trous [20], [29] : on évite de décimer la pyramide des signaux aux différentes résolutions. On obtient ainsi à une échelle donnée un ensemble d'approximations entrelacées, qui permet de calculer les coefficients en ondelettes en effectuant des convolutions discrètes avec un pas entre les points égal à l'échelle, pour tenir compte de l'absence de décimation. La complexité, comme le nombre de données, sont en $N \log N$. L'invariance par translation est assurée par l'absence de décimation. La séparation des échelles s'obtient par l'utilisation du théorème d'échantillonnage, en admettant qu'on part de données correctement échantillonnées.

Parmi toutes les voies développées ci-dessus, l'algorithme à trous nous est apparu en général comme le plus pertinent pour les raisons suivantes :

1. On travaille dans l'espace direct, évitant ainsi les artefacts introduits par la périodisation;
2. Le temps de calcul reste raisonnable;
3. La taille en mémoire est faible;
4. L'algorithme est aisé à programmer;
5. A deux dimensions, on peut obtenir aisément une transformation quasi-isotrope;
6. On peut opérer avec des fonctions d'échelle régulières et compactes;
7. L'algorithme de restauration peut être très simple;
8. La transformée est connue en tout point, ce qui permet d'assurer une détection au pixel près, sans interpolation;
9. On peut suivre l'évolution de la transformée d'une échelle à la suivante;
10. Les propriétés d'invariance par translation et de séparation des échelles sont parfaitement respectées.

Nous allons donc exposer en détail l'algorithme à trous et ses propriétés. Puis, après quelques exemples de visualisation, nous montrerons une application particulière de cet algorithme pour la restauration des images.

2. L'Algorithme à Trous

L'algorithme à trous a été développé par Holschneider *et al.* [20]. Son lien avec l'algorithme de Mallat a été éclairci ultérieurement [29]. Dans le cadre de cette section nous allons préciser les fondements de cet algorithme, en détaillant de manière à ce que le lecteur puisse aisément le mettre en œuvre.

2.1. SUITE D'APPROXIMATIONS

Comme pour l'analyse multirésolution, on suppose que les données échantillonnées $\{c(0, k)\}$ sont les produits scalaires aux

pixels k d'un signal $f(x)$ avec une fonction d'échelle $\phi(x)$ correspondant à un filtre passe-bas.

$$c(0, k) = \langle f(x), \phi(x - k) \rangle \quad (9)$$

Les coefficients permettent de reconstruire un signal $f_0(x)$ par l'expression :

$$f_0(x) = \sum c(0, k) \tilde{\phi}(x - k) \quad (10)$$

où $\tilde{\phi}(x)$ désigne la fonction d'échelle duale de $\phi(x)$ [34]. Nous avons :

$$\hat{\tilde{\phi}}(\nu) = \frac{\hat{\phi}(\nu)}{D(\nu)} \quad (11)$$

où :

$$D(\nu) = \sum_n |\hat{\phi}(\nu + n)|^2 \quad (12)$$

$D(\nu)$ est une fonction 1-périodique qui ne doit pas s'annuler sur $[0, 1]$.

Le passage de $f(x)$ à $f_0(x)$ est une projection dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$. $f_0(x)$ appartient au sous-espace \mathcal{V}_0 de $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ engendré par les fonctions translatées $\tilde{\phi}(x - k)$. Dans l'analyse multirésolution, $f_0(x)$ correspond à l'approximation à l'échelle 1 de la fonction $f(x)$ dans \mathcal{V}_0 . On considère alors la suite des approximations $f_i(x)$ obtenues aux échelles 2, 4, ..., 2^i , ... Si la fonction d'échelle $\phi(x)$ vérifie l'équation de dilatation, la suite d'approximations correspond à une suite de projections dans des sous-espaces emboîtés \mathcal{V}_i de $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ engendrés par les fonctions translatées $\frac{1}{2^i} \tilde{\phi}(\frac{x}{2^i} - k)$. Le pas entre échantillons est 2^i , conduisant à une pyramide d'approximations de la fonction $f(x)$.

Dans l'algorithme à trous, pour éviter la décimation des échantillons dans la suite d'approximations, on va considérer des approximations entrelacées. Par exemple à l'échelle 2, pour l'analyse multirésolution, nous n'obtenons les valeurs de $c(1, k)$ qu'aux indices pairs. Pour avoir les indices impairs, il suffit de translater les coefficients $c(0, k)$ d'un pixel et d'effectuer la même opération. Pour l'échelle 4 on ne doit pas alors tenir compte des points entrelacés, ce qui conduit à avoir un pas de 2 dans les convolutions. A cette échelle on a alors 4 approximations entrelacées. A l'échelle 8, les convolutions s'effectuent avec un pas de 4, et nous avons 8 approximations entrelacées.

L'espace \mathcal{V}_0 est ainsi décomposé de deux manières :

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{W}_1 = \mathcal{V}'_1 \oplus \mathcal{W}'_1$$

où la première décomposition correspond aux nœuds pairs, alors que la seconde est relative aux nœuds impairs.

Le schéma précédent se doit d'être précisé analytiquement. Pour cela nous considérons les coefficients :

$$c(i, k) = \langle f(x), \frac{1}{2^i} \phi(\frac{x - k}{2^i}) \rangle \quad (13)$$

Nous avons :

$$c(i + 1, k) = \langle f(x), \frac{1}{2^{i+1}} \phi(\frac{x - k}{2^{i+1}}) \rangle \quad (14)$$

En utilisant l'équation de dilatation nous obtenons :

$$\frac{1}{2^{i+1}} \phi(\frac{x - k}{2^{i+1}}) = \sum_n h(n) \frac{1}{2^i} \phi(\frac{x - k}{2^i} - n) \quad (15)$$

D'où la récurrence :

$$c(i + 1, k) = \sum_n h(n) c(i, k + n2^i) \quad (16)$$

Cette relation explicite le saut entre les points dans les convolutions ayant donné son nom à l'algorithme, résultant de l'entrelacement des approximations.

2.2. LISSAGES SUCCESSIFS

Dans le cadre de l'analyse multirésolution, la suite des approximations correspond à une suite de projections. Dans le cadre de l'analyse à trous nous disposons à l'échelle 2^i d'autant d'approximations, donc de projections. Mais chacune d'entre elles ne correspond pas au même sous-espace de $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$. Posons :

$$\phi_i(x) = \frac{1}{2^i} \phi(\frac{x}{2^i}) \quad (17)$$

Les coefficients $c(i, k)$ sont les produits scalaires de $f(x)$ avec les translatées de $\phi_i(x)$ aux points k . On est donc amené à introduire la fonction duale de $\phi_i(x)$. Mais cela n'est possible que si :

$$D_i(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(2^i(\nu + n))|^2 \neq 0 \quad (18)$$

Si cette condition est vérifiée, la relation entre $f(x)$ et son approximation à l'échelle i est une opération de projection. Nous avons choisi la fonction $\phi(x)$ de manière à avoir $D(\nu) \neq 0 \forall \nu$, mais $D_i(\nu)$ peut être nul pour d'autres échelles. C'est d'ailleurs le cas pour les fonctions d'échelle considérées ultérieurement. Ainsi, l'algorithme à trous se distingue fortement de l'analyse multirésolution basée sur l'emboîtement des sous-espaces engendrés par la fonction d'échelle aux différentes échelles.

Nous partons donc des coefficients $\{c(0, k)\}$ correspondant à une projection de $f(x)$ dans \mathcal{V}_0 , puis nous obtenons une suite $\{c(i, k)\}$ de coefficients. Les approximations correspondantes $f_i(x)$ restent des éléments de \mathcal{V}_0 , mais l'opérateur entre $f(x)$ et $f_i(x)$ n'est pas un opérateur de projection. On ne peut donc pas introduire la transformation en ondelettes discrète à trous par une décomposition de \mathcal{V}_0 à partir des projections, et des sous-espaces complémentaires \mathcal{W}_i .

La fonction $f_i(x)$ est définie comme l'approximation de la fonction $f(x)$ à l'échelle 2^i par la relation :

$$f_i(x) = \sum_k c(i, k) \tilde{\phi}(x - k) \quad (19)$$

A partir de la récurrence :

$$f_{i+1}(x) = \sum_k \sum_n h(n)c(i, k + n2^i)\tilde{\phi}(x - k) \quad (20)$$

Nous obtenons :

$$f_{i+1}(x) = \sum_n h(n)f_i(x + n2^i) \quad (21)$$

$f_{i+1}(x)$ n'est simplement qu'un simple lissage de $f_i(x)$. Par récurrence $f_i(x)$ est un lissage de $f_0(x)$, projection de $f(x)$ dans \mathcal{V}_0 .

Si $\phi(x - k)$, $k \in \mathcal{Z}$, est une base orthonormée de \mathcal{V}_0 , alors un calcul simple montre que

$$f_0(x) = \sum_k c(0, k)\phi(x - k)$$

entraîne

$$f_i(x) = \sum_k c(0, k)2^{-i}\phi\left(\frac{x - k}{2^i}\right)$$

On constate que :

$$\sum_k 2^{-i}\phi\left(\frac{x - k}{2^i}\right) = 1 \quad \forall x \quad \forall i \geq 0$$

Ainsi f_i réalise un lissage à l'échelle 2^i des données brutes fournies par les $c(0, k)$.

2.3. ONDELETTES ENGENDRÉES PAR LA FONCTION D'ÉCHELLE

Nous allons considérer une fonction ondelette quelconque, c'est-à-dire une fonction de carré intégrable $\psi(x)$ dont la transformée de Fourier vérifie les conditions d'admissibilité usuelles :

$$1 = \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(\nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu} = \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(-\nu)|^2 \frac{d\nu}{\nu}$$

Ces conditions sont réalisées si, par exemple, $\psi(x)$ est une fonction de support borné, de carré intégrable, à valeurs réelles et d'intégrale nulle. La condition numérique de normalisation peut être assurée par la multiplication éventuelle de $\psi(x)$ par une constante positive. Rappelons que notre propos est le calcul rapide de coefficients d'ondelette $w(a, b)$ où $a = 2^i$ et $b = k$, $i \geq 0$, $k \in \mathcal{Z}$.

Toute fonction de $\mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ peut être projetée dans le sous-espace \mathcal{V}_0 engendrée par la fonction d'échelle $\phi(x)$. Soit :

$$\frac{1}{2}\bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_n g(n)\phi(x - n) \quad (22)$$

Les coefficients $g(n)$ sont donc les produits scalaires :

$$g(n) = \left\langle \frac{1}{2}\bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right), \tilde{\phi}(x - n) \right\rangle \quad (23)$$

Les coefficients $g(n)$ résultent du choix de l'ondelette $\psi(x)$ et de la fonction d'échelle choisie. Le facteur 2 n'est pas indispensable mais est introduit dans l'approximation par analogie avec l'expression de la fonction ondelette dans l'analyse multirésolution. Toutes les fonctions ondelettes admissibles, réelles ou complexes, peuvent être ainsi projetées. La qualité de l'approximation $\bar{\psi}(x)$ par rapport à $\psi(x)$ dépend du choix de la fonction d'échelle $\phi(x)$. Le calcul approché des coefficients en ondelette s'effectue avec la projection de $\psi(x)$. L'ondelette considérée est donc $\bar{\psi}(x)$.

Nous avons :

$$w(i + 1, k) = \left\langle f(x), \frac{1}{2^{i+1}}\bar{\psi}\left(\frac{x - k}{2^{i+1}}\right) \right\rangle \quad (24)$$

En utilisant la décomposition de $\bar{\psi}(x)$ sur les $\phi(x - n)$ nous obtenons la récurrence :

$$w(i + 1, k) = \sum_n g(n)c(i, k + n2^i) \quad (25)$$

L'algorithme de transformation en ondelettes est donc très simple et fournit une valeur approchée d'autant plus précise que $\bar{\psi}(x)$ est plus proche de $\psi(x)$. Dans les exemples que nous choisirons, on a $\bar{\psi}(x) = \psi(x)$ et le calcul est donc exact, aux erreurs de quantification près.

2.4. INVERSION

Dans le cadre de l'analyse multirésolution, l'inversion de la transformation est obtenue en introduisant deux filtres conjugués \hat{h} et \hat{g} tels que [7] :

$$\hat{h}(\nu)\hat{h}(\nu) + \hat{g}(\nu)\hat{g}(\nu) = 1 \quad (26)$$

$$\hat{h}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hat{h}(\nu) + \hat{g}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hat{g}(\nu) = 0 \quad (27)$$

La première relation correspond à la restauration correcte des données d'une échelle à l'autre, tandis que la seconde équation provient de la compensation des effets de recouvrement spectral introduit par les décimations.

Comme nous n'avons pas de décimation dans l'algorithme à trous, la seconde relation est inutile, seule la première doit être vérifiée. Nous passons de l'échelle $i + 1$ à l'échelle i avec l'expression :

$$c(i, k) = \sum_n \tilde{h}(n)c(i + 1, k + n2^i) + \tilde{g}(n)w(i + 1, k + n2^i) \quad (28)$$

Soit :

$$c(i, k) = \sum_{n,m} [\tilde{h}(n)h(m) + \tilde{g}(n)g(m)] c(i, k + (m + n)2^i) \quad (29)$$

Cette relation est vérifiée $\forall (i, k)$ si :

$$\sum_n \tilde{h}(n)h(l-n) + \tilde{g}(n)g(l-n) = \delta(l) \quad (30)$$

Dans l'espace de Fourier nous retrouvons donc :

$$\hat{h}(\nu)\hat{\tilde{h}}(\nu) + \hat{g}(\nu)\hat{\tilde{g}}(\nu) = 1 \quad (31)$$

Le choix des filtres h et g est beaucoup plus large que dans le cas de l'analyse multirésolution. En particulier, si h et g sont choisis *a priori*, l'inversion nécessite simplement de connaître un couple \tilde{h} et \tilde{g} satisfaisant cette relation. Du fait de la redondance, on retrouve la liberté de choix dans l'inversion qui existe pour la transformation en ondelettes continue [21].

2.5. CHOIX DE LA FONCTION D'ÉCHELLE

Pour définir complètement l'algorithme, nous devons choisir les filtres h et g .

La fonction d'échelle $\phi(x)$ est complètement définie par le filtre h [25]. Les critères de choix sont moins restrictifs que dans le cas de l'analyse multirésolution :

- **Compacité** : puisqu'on effectue des convolutions, le nombre de coefficients h est forcément fini, et la fonction d'échelle est compacte;
- **Régularité** : c'est une condition essentielle pour éviter dans l'analyse des artefacts liés à l'irrégularité de la fonction d'échelle;
- **Symétrie** : pour éviter des déphasages difficiles à interpréter ultérieurement;
- **Convergence dans l'espace de Fourier** : si on ne peut pas être compact dans cet espace, en raison de la compacité dans l'espace direct, il importe de bien délimiter la bande de fréquence à chaque échelle, en ayant une fonction d'échelle aussi compacte que possible en fréquence.

Ces critères nous ont conduit à utiliser de manière systématique les interpolations B-splines centrées d'ordre $2l - 1$ [34]. Nous avons :

$$\hat{\phi}_{2l-1}(\nu) = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^{2l} \quad (32)$$

Dans le cas le plus simple de l'interpolation linéaire, nous avons $l = 1$, soit :

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ \phi_1(x) &= 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{aligned}$$

Sur la figure 1, nous avons tracé la fonction d'échelle correspondante. Dans ce cas, nous avons la relation :

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\phi(x+1) + \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{4}\phi(x-1) \quad (33)$$

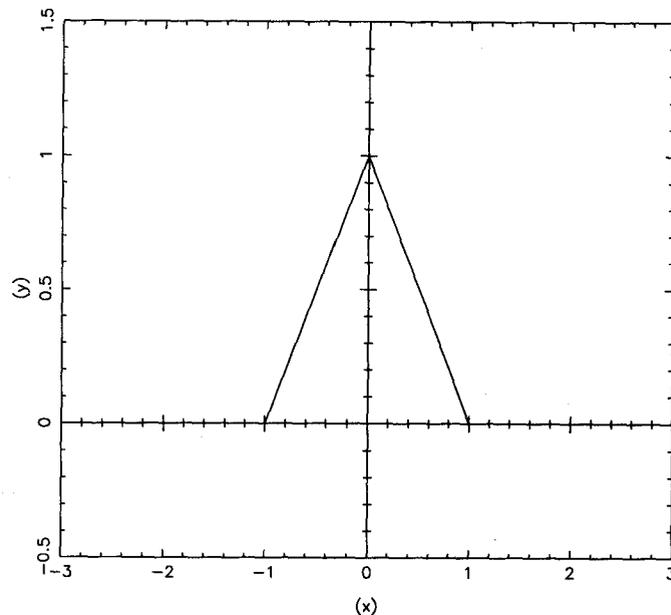


Figure 1. – Fonction d'échelle associée à l'interpolation linéaire

Cette fonction d'échelle est continue, mais non dérivable. Ceci peut être très gênant pour déduire des positions précises d'extrema. On préfère utiliser l'interpolation B-spline de degré 3 correspondant à $l = 2$ (figure 2). h correspond alors au filtre binomial d'ordre 4 :

$$h(0) = \frac{3}{8} h(\pm 1) = \frac{1}{4} h(\pm 2) = \frac{1}{16} h(n) = 0 \text{ si } |n| > 2 \quad (34)$$

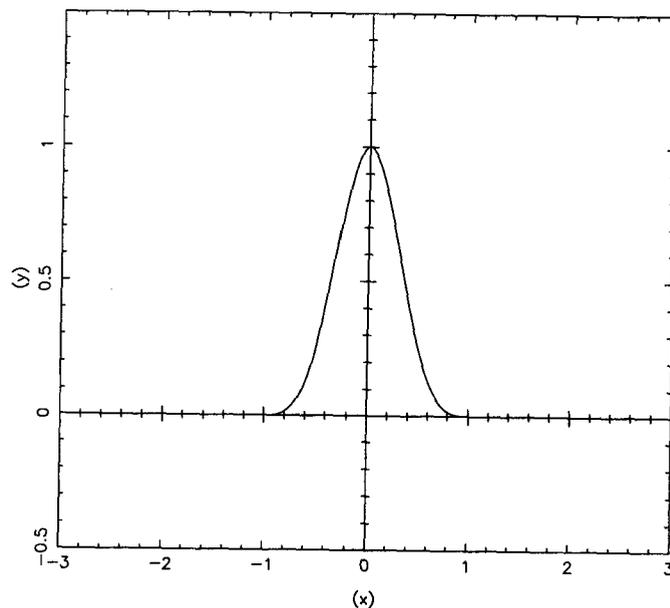


Figure 2. – Fonction d'échelle associée à l'interpolation B-spline cubique

2.6. CHOIX DE LA FONCTION ONDELETTE

En principe la plus grande liberté existe pour le choix du filtre g . On peut reprendre les critères indiqués pour la fonction d'échelle, mais la plupart d'entre eux sont assurés par la décomposition de la fonction ondelette en fonctions d'échelle translatées.

Le choix le plus simple consiste à effectuer la différence entre approximations successives, soit :

$$\hat{g}(\nu) = 1 - \hat{h}(\nu)$$

L'algorithme de calcul se simplifie puisqu'il suffit de faire les différences entre les différents plans de la pyramide de résolution. La reconstruction est également simplifiée puisqu'on peut reconstruire le signal simplement en additionnant les plans en ondelettes avec le dernier plan lissé. Ceci correspond à :

$$\hat{h}(\nu) = \hat{g}(\nu) = 1$$

On vérifie aisément que la relation de reconstruction exacte est satisfaite quel que soit h .

Sur la figure 3 on a représenté la fonction ondelette correspondant à l'interpolation linéaire.

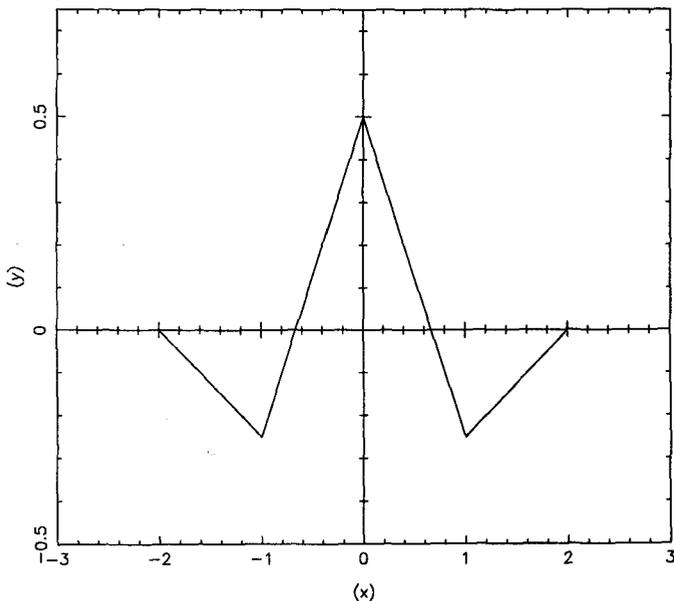


Figure 3. – Ondelette associée à l'interpolation linéaire

On retrouve les discontinuités de dérivée de l'interpolation linéaire. En utilisant l'interpolation B-spline cubique, on obtient une ondelette régulière jusqu'à l'ordre 2 (figure 4).

2.7. ALGORITHME RÉSULTANT

En raison du choix de la fonction ondelette, l'algorithme de la transformation est le suivant :

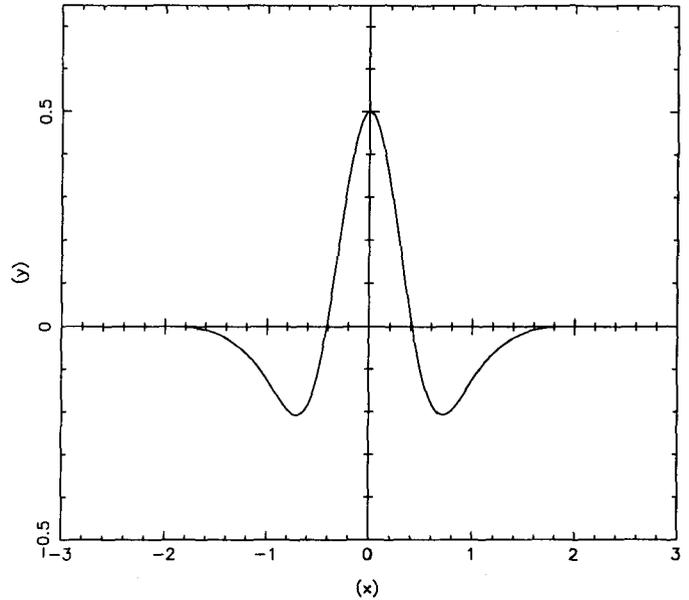


Figure 4. – Ondelette associée à l'interpolation B-spline cubique

1. On initialise i à zéro et on part des données $c(i, k)$.
2. On incrémente i et dans le cas linéaire, par exemple, on effectue la convolution discrète des données $c(i, k)$ par le filtre $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. La distance entre le pixel central et celui adjacent est 2^{i-1} , dans le cas linéaire.
3. La différence entre $c(i, k)$ et $c(i-1, k)$ donne le coefficient d'ondelette $w(i, k)$.
4. si i est égal au nombre N_p d'échelles que l'on désire obtenir, on arrête, sinon retour à 2.

Pour traiter les bords on considère généralement que $c(i, k+N) = c(i, N-k)$ (miroir). Mais d'autres prolongements peuvent être utilisés telles que la périodicité ($c(i, k+N) = c(i, k)$) ou la continuité ($c(i, k+N) = c(i, N)$).

La reconstruction du signal à partir des différences d'ondelettes se fait par simple sommation du dernier plan lissé et des coefficients de chaque échelle :

$$c(0, k) = c(N_p, k) + \sum_{i=1}^{N_p} w(i, k) \quad (35)$$

2.8. EXTENSION À DEUX DIMENSIONS

L'algorithme à trous peut être très facilement étendu à deux dimensions. On considère une fonction d'échelle $\phi_2(x, y)$ telle que :

$$\frac{1}{4}\phi_2\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \sum h(n, m)\phi_2(x-n, y-m) \quad (36)$$

Les données initiales $c(0, k, l)$ sont les produits scalaires la fonction image $f(x, y)$ avec la fonction d'échelle décalée :

$$c(0, k, l) = \langle f(x, y), \phi_2(x - n, y - m) \rangle \quad (37)$$

Ceci correspond à une projection de $f(x, y)$ dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{R}^2)$, à condition que :

$$D(u, v) = \sum_{n, m} |\hat{\phi}_2(u + n, v + m)|^2 \neq 0 \quad \forall u, v \quad (38)$$

La suite des approximations successives de l'image est calculée avec la récurrence :

$$c(i + 1, k, l) = \sum_{n, m} h(n, m) c(i, k + n2^i, l + m2^i) \quad (39)$$

On choisit une fonction ondelette engendrée par la fonction d'échelle, soit :

$$\frac{1}{4} \psi\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = \sum_{n, m} g(n, m) \phi_2(x - n, y - m) \quad (40)$$

La suite des images en ondelettes s'obtient avec la récurrence :

$$w(i + 1, k, l) = \sum_{n, m} g(n, m) c(i, k + n2^i, l + m2^i) \quad (41)$$

Dans la pratique, on choisit une fonction d'échelle à variables séparées :

$$\phi_2(x, y) = \phi(x)\phi(y) \quad (42)$$

Ceci permet d'obtenir la suite des approximations par convolution ligne par ligne et colonne par colonne. L'algorithme est très rapide et nécessite peu de mémoire. On utilise pour $\phi(x)$ les fonctions d'échelle utilisées à une dimension.

On choisit également la fonction ondelette résultant de la différence entre deux approximations successives. L'algorithme est très similaire au cas unidimensionnel.

Il est très intéressant de pouvoir réaliser une analyse aussi isotrope que possible. La fonction d'échelle doit être choisie en conséquence. Il n'existe pas de fonction compacte isotrope satisfaisant l'équation de dilatation à deux dimensions. En outre, la seule fonction isotrope qui est séparable correspond à la gaussienne, qui ne satisfait pas l'équation de dilatation.

En fait la fonction B-spline d'ordre n tend vers une gaussienne lorsque ce degré tend vers l'infini. Si l'écart est assez important pour l'interpolation linéaire, il est faible pour la B-spline cubique. En pratique, l'utilisation de cette fonction d'échelle conduit à une analyse quasi-isotrope, tout en restant compacte et régulière jusqu'à l'ordre 2 inclus. C'est le choix que nous utilisons dans le cadre de notre modèle de vision multi-échelles [6].

On peut concevoir un algorithme à trous $\sqrt{2}$ en se basant sur les fonctions d'échelle utilisée par Feauveau pour l'analyse multirésolution $\sqrt{2}$. L'algorithme est alors un peu plus complexe, sans apporter des atouts significatifs au niveau de l'analyse.

La généralisation à 3 ou plus de dimensions s'effectue toujours par variables séparées.

3. Visualisation

Il y a différentes manières de représenter les données produites par l'algorithme à trous. La plus simple consiste dans la représentation de la transformée en ondelettes comme une série d'images. Chacune d'entre elles peut alors être visualisée indépendamment des autres, en utilisant les outils classiques des logiciels d'imagerie (table des couleurs, histogramme, pointé, coupe, ...). La figure 5 montre l'image de la galaxie NGC2997, et la figure 6 celle de sa transformée sous la forme de trois plans d'ondelettes et du dernier plan lissé. L'addition de ces quatre images redonne exactement l'image de la galaxie. Les trois plans d'ondelettes correspondent à des bandes de fréquence différentes, et les images en ondelettes montrent ainsi des structures de différente taille. Dans la première image, on perçoit surtout le bruit et les étoiles, tandis que dans la dernière, les grandes structures comme les bras de la galaxie apparaissent.

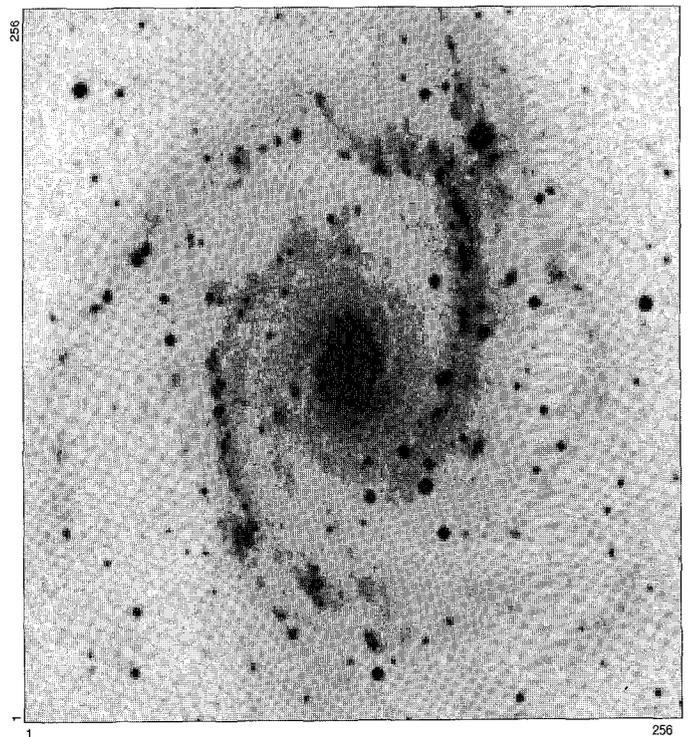


Figure 5. – Image de la galaxie NGC2997

Sur la figure 7, la transformée en ondelettes est représentée sous forme de lignes de niveaux. A chaque échelle, on détermine l'écart type σ_i de la distribution des coefficients en ondelettes, et on trace les lignes de niveaux correspondant à $+3\sigma_i$. Cela correspond aux pics statistiquement significatifs dans l'image. Cette visualisation

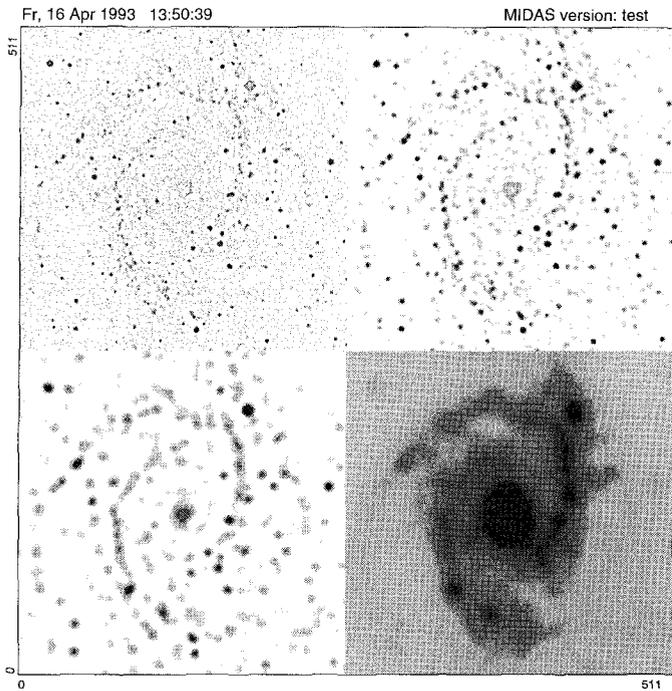


Figure 6. – Transformée en ondelettes de la galaxie. Trois plans d'ondelettes et le dernier plan lissé.

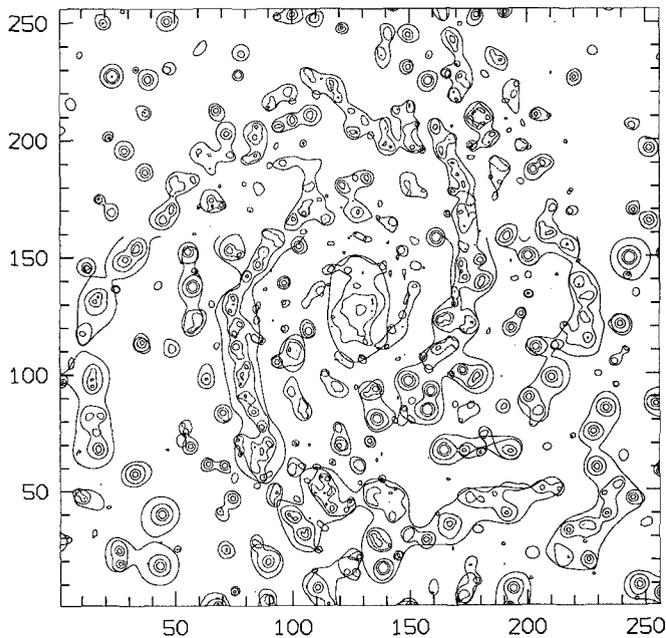


Figure 7. – Isophotes de la transformée en ondelettes de la Galaxie NGC2997

est plus compacte que la précédente, et permet de mettre en valeur les connexions entre les structures à différentes échelles.

Sur la figure 8, les trois plans d'ondelettes et le dernier plan lissé sont superposés, chacun des plans étant représenté en perspective cavalière. Le bruit est ainsi bien mis en évidence sur le premier plan (hautes fréquences), mais on voit néanmoins des structures significatives se détacher. Le traitement par ondelettes permet bien

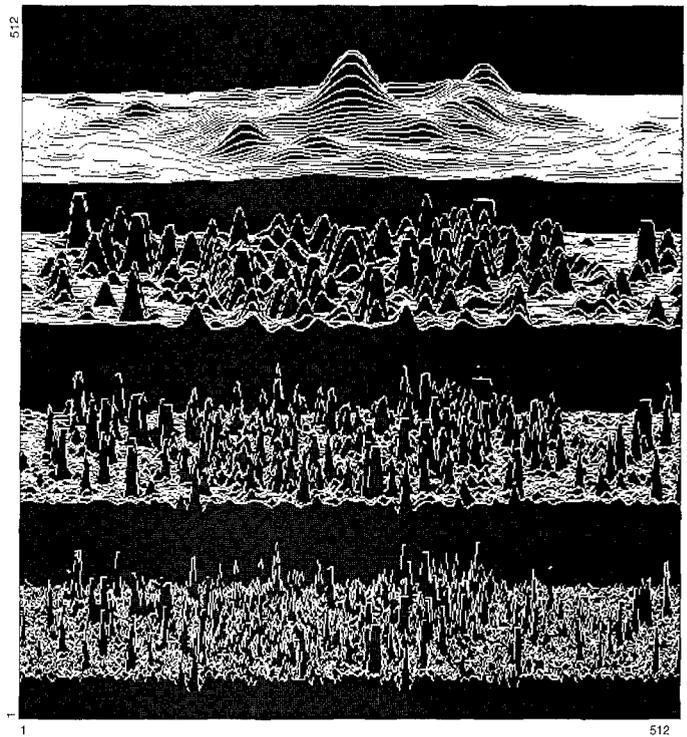


Figure 8. – Perspective cavalière de la transformée en ondelettes de la Galaxie NGC2997

de tenir compte dans chaque bande de fréquence des structures significatives, ce qui est impossible par une analyse purement fréquentielle.

Une image de synthèse peut aussi être créée en binarisant chaque plan aux seuils $+3\sigma_i$ déterminés, en affectant une couleur à chaque échelle, et en superposant l'ensemble des plans. La figure 9 illustre ce procédé.

Tous les programmes permettant d'obtenir ces images (algorithme de transformée en ondelettes, et visualisation) ont été intégrés au logiciel MIDAS [32] distribué par l'ESO (European Southern Observatory, midas@eso.org).

4. Généralités sur la Restauration d'Images

4.1. LA RELATION OBJET-IMAGE

La relation objet-image est généralement écrite :

$$I(x, y) = (O * P)(x, y) + N(x, y) \quad (43)$$

$(O * P)(x, y)$ désigne la produit de convolution de la fonction objet $O(x, y)$ que l'on cherche à restaurer avec la réponse instrumentale (PSF) $P(x, y)$, $I(x, y)$ est l'image fournie par l'instrument de mesure, et $N(x, y)$ un bruit additif. Dans l'espace de Fourier,

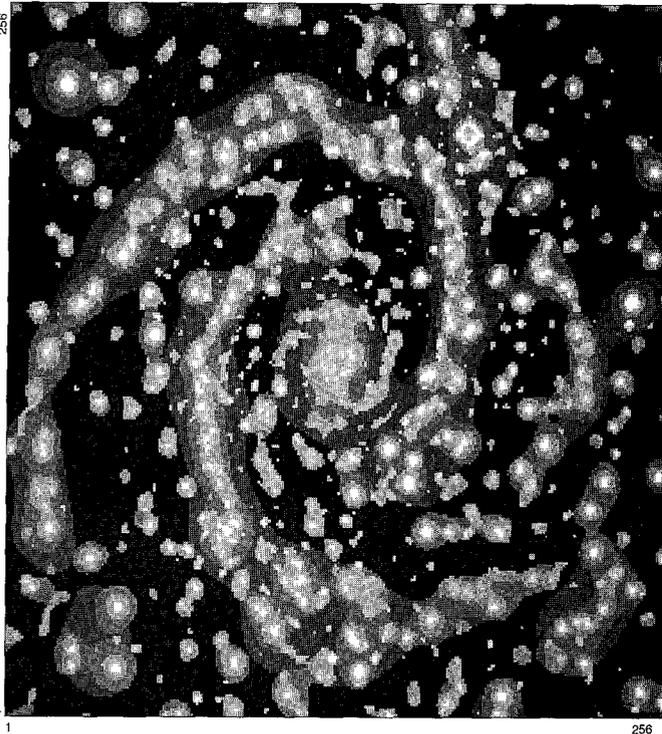


Figure 9. – Image de synthèse de la transformée en ondelettes de la Galaxie NGC2997

nous avons :

$$\hat{I}(u, v) = \hat{O}(u, v)\hat{P}(u, v) + \hat{N}(u, v) \quad (44)$$

On veut déterminer $O(x, y)$ connaissant $I(x, y)$ et $P(x, y)$. Ce problème inverse a conduit à un grand nombre de travaux. Les principales difficultés résident dans l'existence de la fréquence de coupure de la PSF, et dans la présence du bruit (voir par exemple [8]). Il a été ainsi démontré que la déconvolution est un problème inverse appartenant à la classe des problèmes mal-posés [9]. La donnée des observations ne suffit pas pour résoudre le problème, une information *a priori* sur $O(x, y)$ est nécessaire. Cette démarche constitue le fondement de la théorie de la régularisation.

Il existe de nombreuses directions pour contraindre la solution. Notre approche dérive du modèle de vision que nous avons développé à partir de la transformée en ondelettes [6]. L'algorithme de restauration fournit une image qui est ensuite analysée afin d'en extraire tous les éléments structuraux significatifs. Nous cherchons une solution ayant le minimum d'éléments à extraire. Il n'existe pas de fonctionnelle spécifique associée à cette contrainte, mais une approche heuristique, utilisée de manière quasi universelle en Radioastronomie, la méthode CLEAN [19]. Des approches en multirésolution ont été développées par Wakker et Schwartz [36] et par nous-mêmes [31]. Ces approches sont bien adaptées au cas de la Synthèse d'Ouverture, mais sont très lourdes pour des fonctions d'étalement assez régulières. L'approche que nous allons présenter exploite les algorithmes itératifs classiques d'inversion, en y intégrant l'extraction des éléments significatifs.

4.2. LES MÉTHODES ITÉRATIVES DE DÉCONVOLUTION

Les méthodes d'inversion, sans régularisation, ont souvent conduit à des algorithmes itératifs. Initialement, Van Cittert [35] a proposé :

$$O^{(n+1)}(x, y) = O^{(n)}(x, y) + \alpha(I(x, y) - (P * O^{(n)})(x, y)) \quad (45)$$

où α est un paramètre de convergence en général égal à 1. Cet algorithme dérive du développement en série d'un opérateur associé à $P(x, y)$. La distribution de l'objet est itérativement modifiée en ajoutant un terme proportionnel au résidu :

$$R^{(n)}(x, y) = I(x, y) - (P * O^{(n)})(x, y) \quad (46)$$

Cet algorithme diverge en présence de bruit [14].

Avec la méthode du gradient à pas fixe pour laquelle on cherche à minimiser la norme $\|I(x, y) - (P * O)(x, y)\|$, on est conduit à l'iteration suivante [22] :

$$O^{(n+1)}(x, y) = O^{(n)}(x, y) + \alpha P_s(x, y) * [I(x, y) - (P * O^{(n)})(x, y)] \quad (47)$$

avec $P_s(x, y) = P(-x, -y)$. Cette méthode est plus robuste que celle de Van Cittert, mais elle peut également diverger pour un très grand nombre d'itérations. La méthode du gradient conjugué assure une recherche plus rapide de la minimisation de la norme, avec un algorithme un peu plus compliqué.

La méthode de Richardson-Lucy [2][16][24] est dérivée du théorème de Bayes sur les probabilités conditionnelles :

$$O^{(n+1)}(x, y) = O^{(n)}(x, y) \left[\frac{I(x, y)}{I^{(n)}(x, y)} * P_s(x, y) \right] \quad (48)$$

$$I^{(n)}(x, y) = (P * O^{(n)})(x, y) \quad (49)$$

Le flux est conservé, ainsi que la positivité de l'image. Cette méthode est couramment utilisée en imagerie astronomique. Elle a toutefois le désavantage d'amplifier le bruit, ce qui gêne considérablement la détection des objets faibles, et augmente les fausses alarmes.

4.3. LA RÉGULARISATION

Ces méthodes itératives ci-dessus ne sont pas régularisées, d'où leur instabilité en présence de bruit. La régularisation de Tikhonov [33] consiste à minimiser :

$$\|I(x, y) - (P * O)(x, y)\|^2 + \lambda \| (H * O)(x, y) \|^2 \quad (50)$$

où $H(x, y)$ est un filtre passe-haut. L'équation contient deux termes : Le premier, $\|I(x, y) - (P * O)(x, y)\|^2$, exprime la fidélité

par rapport aux données, et le second, $\lambda \| (H * O)(x, y) \|^2$, exprime le degré de douceur dans l'image restaurée. C'est la présence de ce terme qui permet de régulariser le processus itératif. Pour cela il faut trouver la valeur optimale de λ . On peut utiliser des méthodes numériques telles que la Validation Croisée [17] [15]. La méthode est longue, et produit en général des images trop lisses, inadapées à la restauration des contours ou à la recherche de structures compactes.

D'autres contraintes ont été introduites pour régulariser la solution. La méthode du maximum d'entropie est sans doute l'une des plus populaires, mais elle conduit à une fonction souvent trop lisse. Une autre voie consiste à réduire l'espace dans lequel l'objet est défini, par exemple en contraignant la positivité de la solution et en limitant son support. La méthode proposée va exploiter ces contraintes, dans l'espace de la transformée en ondelettes.

Tout en gardant le formalisme des méthodes itératives d'inversion, nous allons utiliser la transformation en ondelettes pour développer une nouvelle approche de la régularisation, en se basant sur la notion de structures significatives. Celle-ci dérive de la distribution due au bruit du coefficient en ondelettes à chaque échelle, que nous précisons dans la section suivante.

4.4. BRUIT DANS LES IMAGES EN ONDELETTES

Comme nous l'avons indiqué (équation 46), $R^{(n)}(x, y)$ est l'erreur à l'itération n d'un algorithme de déconvolution. Si l'approximation $O^{(n)}(x, y)$ est très proche de l'objet $O(x, y)$, $R^{(n)}(x, y)$ doit correspondre au bruit $N(x, y)$. Au lieu d'introduire une contrainte de régularisation du type Tikhonov, ou le Maximum d'Entropie [14], nous allons simplement chercher à examiner si le résidu peut être ou non considéré comme un bruit.

Pour cela nous devons faire une hypothèse sur la nature de ce bruit. Dans le cadre de cet article, nous admettons qu'il s'agit d'un bruit blanc gaussien stationnaire. On en déduit aisément la variance des coefficients en ondelettes $w(i, k, l)$ de l'image $I(x, y)$:

$$V_i = \text{Variance}(w(i, k, l)) = E\left[\int \int N(u, v) \frac{1}{2^{2i}} \psi\left(\frac{u-k}{2^i}, \frac{v-l}{2^i}\right) dudv\right]^2 \quad (51)$$

En utilisant les propriétés d'un bruit blanc :

$$V_i = \frac{\sigma^2}{2^{2i}} \int \int \psi^2(u, v) dudv \quad (52)$$

La variance des coefficients en ondelette décroît d'un facteur 4 d'une échelle à l'autre. Si on peut estimer la variance liée au bruit à l'échelle 1, toutes les autres variances sont ensuite déterminées.

Dans le paragraphe ci-dessus nous avons admis implicitement que les coefficients initiaux $c(0, k, l)$ sont les produits scalaires de la fonction image bruitée avec la fonction d'échelle $\phi(x, y)$. Si les fonctions $\{\phi(x-k, y-l)\}$ ne forment pas une base orthornormée, ceci conduit à créer une corrélation entre les termes

$I(x, y)$. Or généralement on admet que le bruit en $I(x, y)$ est indépendant du bruit au pixel voisin, ce qui est en contradiction avec le calcul précédent. Nous devons donc préciser la loi de variation de V_i en fonction de l'échelle, en admettant que la variance de $I(x, y) = c(0, k, l)$ est constante (σ^2) et que les coefficients $c(0, k, l)$ sont indépendants. Les coefficients en ondelettes $w(1, k, l)$ se déduisent par :

$$w(1, k, l) = \sum_{n,m} g(n, m) c(0, k+n, l+m) \quad (53)$$

Soit :

$$V_1 = \sigma^2 \sum_{n,m} g^2(n, m) \quad (54)$$

Pour l'échelle suivante nous avons :

$$\begin{aligned} w(2, k, l) &= \sum_{n,m} g(n, m) c(1, k+2n, l+2m) \quad (55) \\ &= \sum_{n',m'} g(n, m) h(n', m') \\ &\quad c(0, k+2n+n', l+2m+m') \quad (56) \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$w(2, k, l) = \sum_{n,m} g_2(n, m) c(0, k+n, l+m) \quad (57)$$

où :

$$g_2(n, m) = \sum_{n',m'} g(n', m') h(n-2n', m-2m') \quad (58)$$

La variance V_2 est donc :

$$V_2 = \sigma^2 \sum_{n,m} g_2^2(n, m) \quad (59)$$

Le rapport V_2/V_1 est beaucoup plus petit que le facteur 4 obtenu pour le strict bruit blanc.

On peut généraliser et obtenir ainsi l'expression du coefficient en ondelettes $w(i, k, l)$ en fonction des coefficients initiaux, sous la forme :

$$w(i, k, l) = \sum_{n,m} g_i(n, m) c(0, k+n, l+m) \quad (60)$$

avec la récurrence :

$$g_i(n, m) = \sum_{n',m'} g(n', m') h_{i-1}(n-2^{i-1}n', m-2^{i-1}m') \quad (61)$$

$$h_i(n, m) = \sum_{n',m'} h(n', m') h_{i-1}(n-2^{i-1}n', m-2^{i-1}m') \quad (62)$$

On pose :

$$h_1(n, m) = h(n, m) \quad (63)$$

Les suites $h_i(n, m)$ et $g_i(n, m)$ permettent d'exprimer directement les coefficients lissés et en ondelettes à partir des données initiales. Leurs valeurs conduisent à déterminer la variance V_i à chaque échelle avec l'expression :

$$V_i = \sigma^2 \sum_{n,m} g_i^2(n, m) \quad (64)$$

Au lieu d'estimer V_i avec l'expression ci-dessus, on peut la calculer à partir d'une simulation sur une image de bruit gaussien :

- On simule une image contenant un bruit gaussien d'écart type égal 1;
- On calcule la transformée en ondelettes de cette image;
- On détermine l'écart-type des coefficients $N(i)$ à chaque échelle i .

On obtient ainsi un tableau $N(i)$ décrivant la variation de l'écart-type du bruit en fonction de l'échelle.

On estime $N(1)$ de l'image observée à partir de l'histogramme de la première échelle. A cette échelle, les coefficients d'ondelettes proviennent principalement du bruit. Connaissant le tableau du comportement du bruit en fonction de l'échelle, on en déduit ensuite l'ensemble des $N(i)$.

4.5. LES STRUCTURES SIGNIFICATIVES

Ayant ainsi pu déterminer pour chaque plan la distribution du coefficient $w(i, k, l)$ en raison du bruit, nous pouvons introduire un critère de signification statistique de ce coefficient. Pour cela nous utilisons la méthodologie classique de la théorie de la décision [18]. Soit \mathcal{H}_0 l'hypothèse qu'à l'échelle i l'image est localement constante. La loi de distribution de $w(i, k, l)$ est une loi de Gauss de moyenne nulle et d'écart-type N_i . Nous avons la densité de probabilité :

$$p(w(i, k, l)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}N(i)} e^{-\frac{w(i, k, l)^2}{2N(i)^2}} \quad (65)$$

Le rejet de l'hypothèse \mathcal{H}_0 dépend de la probabilité (pour un coefficient positif) :

$$\begin{aligned} P &= \text{Prob}(W > w(i, k, l)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}N(i)} \int_{w(i, k, l)}^{+\infty} e^{-\frac{W^2}{2N(i)^2}} dW \end{aligned} \quad (66)$$

Si le coefficient est négatif on examine :

$$\begin{aligned} P &= \text{Prob}(W < w(i, k, l)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}N(i)} \int_{-\infty}^{w(i, k, l)} e^{-\frac{W^2}{2N(i)^2}} dW \end{aligned} \quad (67)$$

On se fixe un seuil d'incertitude ϵ . Si $P > \epsilon$, l'hypothèse \mathcal{H}_0 n'est pas exclue, bien que non nulle, la valeur du coefficient peut être

due au bruit. Par contre si $P < \epsilon$, on ne peut considérer qu'à ce seuil d'incertitude la valeur du coefficient soit due uniquement au bruit, l'hypothèse \mathcal{H}_0 doit être rejetée. On dit alors qu'on a détecté un coefficient significatif. C'est cette notion de coefficients significatifs que nous allons exploiter pour la déconvolution.

Compte-tenu de la stationnarité du bruit et de sa nature gaussienne, il suffit de comparer $w(i, k, l)$ par rapport à $kN(i)$, où k est fonction du seuil ϵ . On choisit généralement $k = 3$.

4.6. RÉGULARISATION À PARTIR DES STRUCTURES SIGNIFICATIVES

On va considérer que l'image $I(x, y)$ est correctement échantillonnée, et que nous pouvons traiter le problème de déconvolution sur la grille discrète. Par la suite les (x, y) seront donc des coordonnées entières. En utilisant l'algorithme à trous, $R^{(n)}(x, y)$ peut être défini comme la somme de ses N_p plans d'ondelettes et du plan à très basse résolution :

$$R^{(n)}(x, y) = c^{(n)}(N_p, x, y) + \sum_{i=1}^{N_p} w^{(n)}(i, x, y) \quad (68)$$

Une grande partie des coefficients d'ondelettes du résidu ne sont statistiquement pas significatifs. Si la déconvolution est correcte, $R^{(n)}(x, y)$ correspond au bruit $N(x, y)$. Aucune structure significative ne doit être détectable sur ce résidu à toutes les échelles. On peut alors définir le résidu significatif par :

$$\begin{aligned} \bar{R}^{(n)}(x, y) &= c^{(n)}(N_p, x, y) \\ &+ \sum_{i=1}^{N_p} \Gamma(w^{(n)}(i, x, y), N(i)) w^{(n)}(i, x, y) \end{aligned} \quad (69)$$

où Γ est défini par :

$$\Gamma(a, N(i)) = \begin{cases} 1 & \text{si } |a| \geq 3N(i) \\ 0 & \text{si } |a| < 3N(i) \end{cases} \quad (70)$$

L'algorithme itératif se termine donc lorsque $\bar{R}^{(n)}(x, y) = 0$.

4.7. RÉGULARISATION DE L'ALGORITHME DE VAN CITTERT

L'itération de Van Cittert est :

$$O^{(n+1)}(x, y) = O^{(n)}(x, y) + \alpha R^{(n)}(x, y) \quad (71)$$

avec $R^{(n)}(x, y) = I(x, y) - (P * O^{(n)})(x, y)$. La régularisation par les structures significatives conduit à :

$$O^{(n+1)}(x, y) = O^{(n)}(x, y) + \alpha \bar{R}^{(n)}(x, y) \quad (72)$$

Le principe consiste donc à détecter à chaque échelle, les structures significatives dans le résidu $R^{(n)}(x, y)$, et de les transférer

dans l'objet restauré $O^{(n)}(x, y)$. Le processus se finit quand on ne détecte plus rien. Alors, on a séparé $I(x, y)$ en deux images $\tilde{O}(x, y)$ et $R(x, y)$. \tilde{O} est l'image restaurée qui ne contient pas de bruit, et $R(x, y)$ est le résidu final qui ne contient pas de structure. $R(x, y)$ est en fait notre estimation du bruit $N(x, y)$.

4.8. RÉGULARISATION DE LA METHODE DU GRADIENT À PAS FIXE

L'itération de la méthode du gradient à pas fixe est :

$$O^{(n+1)}(x, y) = O^{(n)}(x, y) + \alpha P(-x, -y) * R^{(n)}(x, y) \quad (73)$$

La régularisation par les structures significatives conduit à :

$$O^{(n+1)}(x, y) = O^{(n)}(x, y) + \alpha P(-x, -y) * \bar{R}^{(n)}(x, y) \quad (74)$$

4.9. RÉGULARISATION DE L'ALGORITHME DE LUCY

Notons $I^{(n)}(x, y) = (P * O^{(n)})(x, y)$, soit $I(x, y) = I^{(n)}(x, y) + R^{(n)}(x, y)$. L'équation de Lucy est :

$$O^{(n+1)}(x, y) = O^{(n)}(x, y) \left[\frac{I^{(n)}(x, y) + R^{(n)}(x, y)}{I^{(n)}(x, y)} * P(-x, -y) \right] \quad (75)$$

La régularisation conduit à :

$$O^{(n+1)}(x, y) = O^{(n)}(x, y) \left[\frac{I^{(n)}(x, y) + \bar{R}^{(n)}(x, y)}{I^{(n)}(x, y)} * P(-x, -y) \right] \quad (76)$$

4.10. CONVERGENCE

L'écart type du résidu diminue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de structures significatives détectées. La convergence peut être estimée à partir de l'écart type du résidu. L'algorithme est arrêté quand :

$$\frac{\sigma_{R^{(n-1)}} - \sigma_{R^{(n)}}}{\sigma_{R^{(n)}}} < \epsilon \quad (77)$$

4.11. EXEMPLE

Sur la figure 10 est représentée une image simulée composée d'étoiles et de galaxies. L'image a été convoluée par une réponse instrumentale et un bruit a été ajouté. Les images du bas montrent les restaurations par la méthode de Lucy et par la méthode de Lucy régularisée. Des techniques de détection automatique d'objets

astronomiques ont ensuite été utilisées sur ces deux images. Les objets trouvés ont pu être alors comparés à ceux existant réellement dans l'image de départ (en haut à gauche). Les résultats de cette étude montrent que :

- La suppression du bruit aide fortement la détection d'objets. Plus d'objets réels ont été détectés avec la méthode de Lucy régularisée.
- La précision des coordonnées des centroides des objets est plus élevée avec la méthode de Lucy régularisée.
- Le rapport signal sur bruit de l'image dégradée est de 3.5 dB, celui de l'image restaurée par la méthode de Lucy est de 10dB, et celui de l'image restaurée par la méthode de Lucy régularisée est de 15.5 dB.

Sur la figure 11 nous avons tracé les variations du coefficient de corrélation entre les plans en ondelettes de l'image initiale et ceux de l'image de travail et restaurée par la méthode de Lucy et la nôtre. Il apparaît clairement que la corrélation à l'échelle 1, c'est-à-dire à la plus haute résolution est bien meilleure avec notre algorithme. Pour les autres échelles, les restaurations ont des performances similaires.

5. Conclusion

Dans cet article nous avons montré comment une méthode de déconvolution peut être régularisée en détectant à chaque échelle les structures significatives. La régularisation ne nécessite aucun autre paramètre que l'écart-type du bruit. Celui ci peut être déterminé de manière automatique ou introduit interactivement. Une simulation a permis de mettre en évidence l'intérêt d'une telle approche : des objets plus faibles ont pu être détectés, le nombre de faux objets détectés a diminué considérablement, et le rapport signal sur bruit est bien meilleur. La qualité visuelle est aussi améliorée, ce qui rend l'image plus agréable à analyser.

La méthode présentée exploite l'invariance par translation de la transformation en ondelettes discrète par l'algorithme à trous. A chaque échelle, on est assuré de la détection des structures significatives, ce qui n'est pas le cas de l'algorithme de Mallat, en raison de la décimation. Elle a permis aussi d'avoir une analyse quasi isotrope. Néanmoins, l'algorithme est basé sur une approche heuristique dérivant d'un modèle de Vision multiéchelle mais à laquelle on n'associe pas une fonctionnelle objectif. La construction d'une telle fonctionnelle permettrait sans doute de mieux affirmer la validité non seulement de cette méthode, mais aussi de toute une classe d'approches du type CLEAN.

Cette application en restauration d'images n'est qu'un exemple des possibilités offertes par cet algorithme. Son exploitation est lié en fait à un modèle de vision multi-échelles avec des incidences sur la détection des structures, la mise en correspondance des images [10] ou la reconstruction des objets [6].

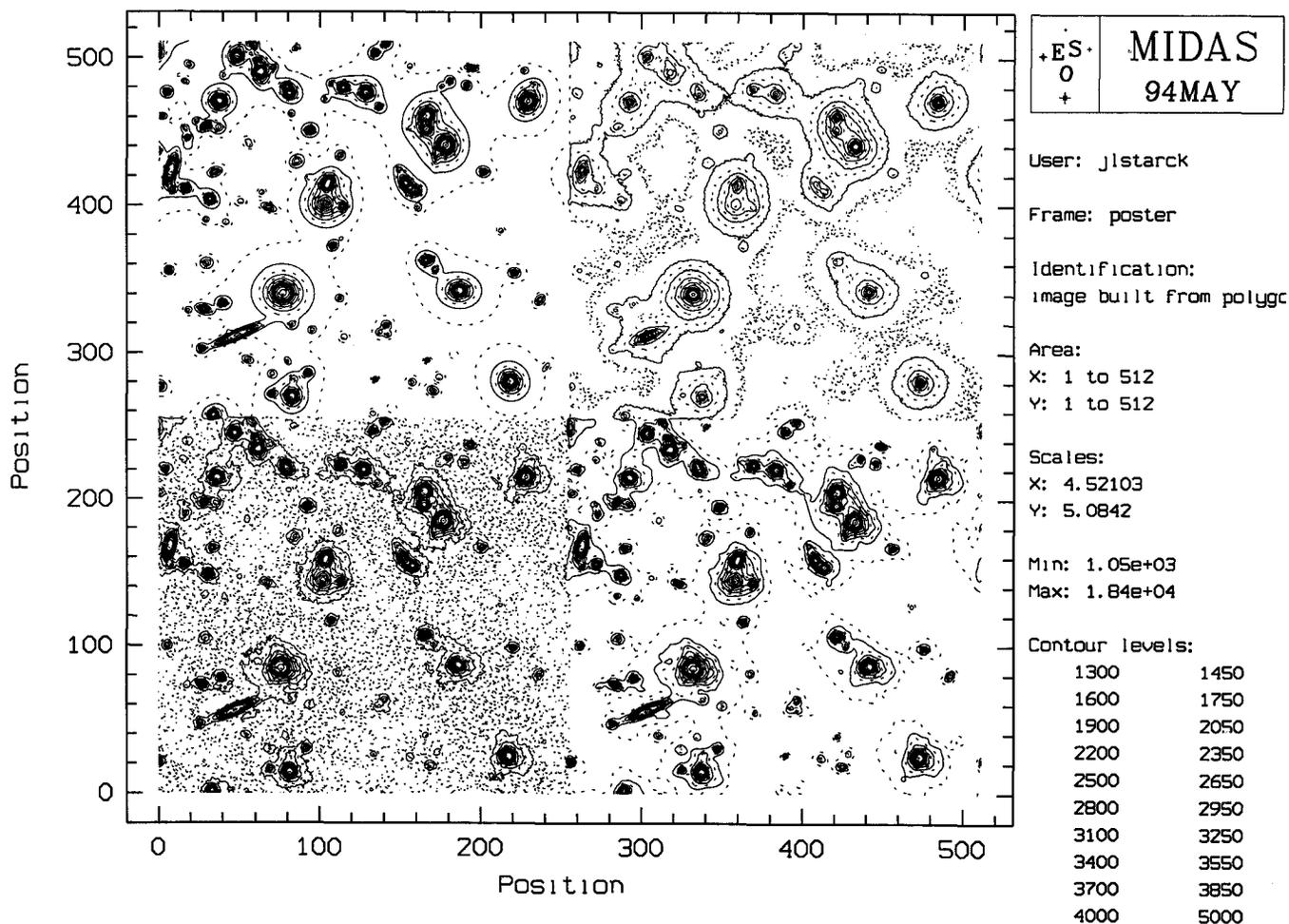


Figure 10. – Isophotes des résultats obtenus dans la simulation. En haut à gauche, image simulée. En haut à droite, convolution de l'image simulée par une réponse instrumentale, et un bruit a été ajouté. En bas, respectivement à gauche et à droite, les images restaurées par la méthode de Lucy et celle basée sur les ondelettes.

Les auteurs remercient Y. Meyer et A. Lannes pour leurs commentaires et leurs nombreuses suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ANTONINI. "Transformée en Ondelettes et Compression Numérique des Images", thèse en Sciences, université de Nice - Sophia Antipolis, 1991.
- [2] H.-M. ADORF. "HST Image Restoration - Recent Developments", in P. Benvenuti and E. Schreier, Eds., *Science with the Hubble Space Telescope*, European Southern Observatory, pp. 227-238, 1992.
- [3] A. ARNÉODO, G. GRASSEAU, M. HOLDSCHNEIDER. "Wavelet transform of multifractals", *Phys. Rev. Letters* **61** pp. 2281-2284, 1988.
- [4] L. BLANC-FÉRAUD, M. BARLAUD, P. CHARBONNIER. "Problèmes inverses et multirésolution", *Wavelet Analysis and Applications* pp.387-398 ed. Y.Meyer et S.Roques Editions Frontières Gif/Yvette, 1993.
- [5] A. BIAOUI. "Algorithmes de la Transformation en Ondelettes. Applications en Astronomie", *Ondelettes et Paquets d'Ondes*, ed. P.J. Lions Cours CEA/EdF/INRIA, 1991.
- [6] A. BIAOUI. "Astronomical Image Inventory by the Wavelet Transform", *Wavelets and Applications*, Ed. Y.Meyer et S. Roques Editions Frontières Gif/Yvette, pp. 551-556, 1993.
- [7] A. COHEN, I. DAUBECHIES, J.C. FEAUVEAU, "Biorthogonal bases of Compactly supported Wavelets", *Comm. Pure Appl. Math.*, **45**, pp. 485-560, 1992.
- [8] T.J. CORNWELL. "Image Restoration", Proc. NATO Advanced Study Institute on Diffraction-Limited Imaging with Very Large Telescopes, pp. 273-292, Cargèse, 1988.
- [9] G. DEMOMENT. "Image Reconstruction and Restoration : Overview of common estimation structures and problems", *IEEE Trans. ASSP*, **37**, pp.2024-2036, 1989.
- [10] J.P. DJAMDJI. "Analyse en Ondelettes et Mise en Correspondance en Télédétection", *Thèse en Sciences* Université de Nice Sophia Antipolis, Décembre 1993.
- [11] D.L. DONOHO. "Wavelet shrinkage and W.V.D. : a 10-minute tour" *Wavelets and Applications*, Ed. Y. Meyer et S. Roques Editions Frontières Gif/Yvette, pp. 109-128, 1993.
- [12] J.C. FEAUVEAU. "Analyse Multirésolution par Ondelettes non Orthogonales et Bancs de Filtres Numériques," Thèse en Sciences de l'université Paris Sud, 1990.
- [13] P. FLANDRIN. *Analyse Temps-Echelle et Processus autosimilaires Wavelet Analysis and Applications* pp.129-138 ed. Y. Meyer et S. Roques Editions Frontières Gif/Yvette 1993.

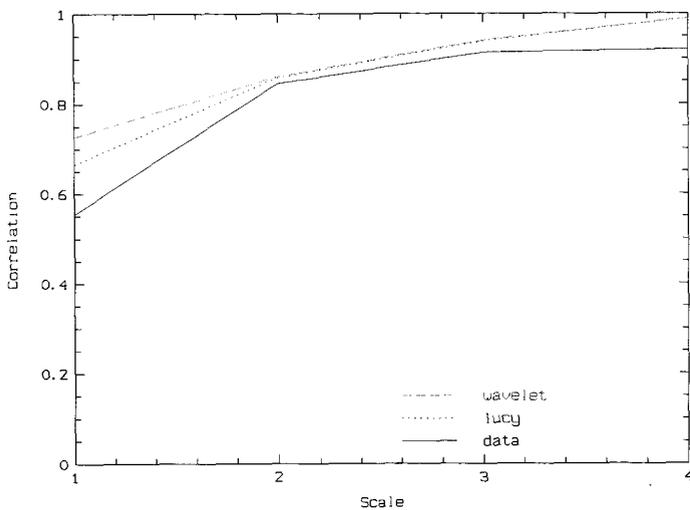


Figure 11. – Critère de qualité multirésolution appliqué aux résultats de la simulation. En trait plein on a tracé la variation avec l'échelle de la corrélation entre les coefficients en ondelettes de l'image initiale et de l'image dégradée. En pointillé, on a tracé les variations de la corrélation entre les coefficients en ondelettes de l'image initiale et de celle obtenue par restauration avec l'algorithme de Lucy. Enfin en tiret, on a représenté les variations de la corrélation entre les coefficients en ondelettes de l'image initiale et de celle restaurée avec la méthode proposée.

- [14] B.R. FRIEDEN. "Image Enhancement and Restoration", *Picture Processing and Digital Filtering* ed. T.S. Huang Springer-Verlag Berlin, pp. 177-249, 1975.
- [15] N.P. GALATSANOS and A.K. KATSAGGELOS. "Methods for Choosing Regularization Parameter and Estimating the Noise in Image Restoration and their Relation", *IEEE Trans. on Image Processing*, July 1992.
- [16] A.K. KATSAGGELOS. Ed. *Digital Image Restoration*, Springer-Verlag, 1991.
- [17] G.H. GOLUB, M. HEATH and G. WAHBA. "Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing good ridge Parameters", *Technometrics* 21 (2), 215-223, 1979.
- [18] W.W. HARMAN. "Principles of the Statistical Theory of Communication", Mac-Graw Hill New York, p. 217, 1963.
- [19] J.A. HÖGBOM. "Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines" *Astron. Astroph.* 15 p. 417 1974.
- [20] M. HOLDSCHNEIDER, R. KRONLAND-MARTINET, J. MORLET, Ph. TCHAMITCHIAN. "A real time algorithm for Signal Analysis with the help of the wavelet transform", in *Wavelets*, pp. 286-297 ed. J.M. Combes *et al.* Springer-Verlag Berlin, 1989.
- [21] M. HOLDSCHNEIDER, Ph. TCHAMITCHIAN, "Régularité locale de la fonction non-différentiable de Riemann", *Ondelettes en 1989*, Ed. P.G. Lemarié Springer Verlag Berlin, pp. 102-124, 1990.
- [22] L. LANDWEBER. "An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind", *Am. J. Math.*, Vol. 73, 615-624, 1951.
- [23] J. LITTLEWOOD, R. PALEY. "Theorems on Fourier series and power series", *Jour. London Math. Soc.*, 6 pp. 230-233, 1931.
- [24] L. B. LUCY. "An Iteration Technique for the Rectification of Observed Distributions", *Astron. Journal*, 79, 745-754, 1974.
- [25] S. MALLAT. "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation," *IEEE Trans on Pattern Anal. and Math. intel.* Vol. 11, 7, 1989.
- [26] J. MORLET, G. ARENS, E. FOURGEAU, D. GIARD. 1982 *Wave Propagation and Sampling Theory I et II Geophysics*, 47 pp 203-236.
- [27] Y. MEYER. *Ondelettes et Algorithmes concurrents* Hermann Paris, 1992.
- [28] S. ROQUES, K. BOUYOUCEF, D. FRAIX-BURNET, A. LANNES. "Vers une déconvolution multirésolution des images du Télescope Spatial de Hubble" *Temps-Fréquence, Ondelettes et Multirésolution* ed. P. Flandrin INSA-Lyon pp. 30.1-30.4 1994.
- [29] M.J. SHENSA. "Discrete Wavelet Transforms : Wedding the à trous and Mallat Algorithms", *Proc. IEEE Trans. Signal Process.*, Vol. 40, 2464-2482, 1992.
- [30] G. STRANG. *Wavelets and Dilation Equations : a brief introduction SIAM Review* 31 pp. 614-627, 1989.
- [31] J.L. STARCK, and A. BIJAOUÏ. "Filtering and Deconvolution by the Wavelet Transform", *Signal Processing*, Vol. 35, pp. 195-211, 1994.
- [32] J.L. STARCK. "The Wavelet Transform", MIDAS Manual, Version NO93.
- [33] A.N. TIKHONOV, and V. Y. ARSENNIN. "Solution of Ill-Posed Problems", Winston, Washington, D.C., 1977.
- [34] M. UNSER, A. ALDROUBI. "Polynomial Splines and Wavelets - A Signal Processing Perspective", *Wavelets : A Tutorial in Theory and Applications* pp. 91-122 ed. C.K. Chui Academic Press New York, 1992.
- [35] P.H. Van CITTERT. *Z. Physik*, Vol. 69, p. 298, 1931.
- [36] B.P. WAKKER, U.J. SCHWARZ. "The Multi-Resolution Clean and its application to the short-spacing problem in interferometry" *Astron. Astroph.* 200 pp. 312-322, 1988.

Manuscrit reçu le 22 mai 1992

LES AUTEURS

Albert BIJAOUÏ

Ancien élève de l'Ecole Polytechnique. Docteur ès sciences physiques de l'Université de Paris 7. Astronome à l'Observatoire de la Côte d'Azur. Spécialisé dans l'analyse des images et des données en astronomie.

Jean-Luc STARCK

DESS Informatique et Sciences de l'Ingénieur. Docteur en Sciences de l'Ingénieur de l'Université de Nice Sophia Antipolis. Ingénieur à la CISI jusqu'en Juin 1994. Ingénieur informaticien au CEA à Saclay depuis.

Fionn MURTAGH

MSc. Trinity College Dublin. Docteur 3e Cycle Université de Paris 6. Habilitation Université Louis-Pasteur de Strasbourg. Senior Scientist spécialiste des logiciels d'analyse des données scientifiques à l'Agence Spatiale Européenne, attaché au Space Telescope-European Coordinating Facility.