

Traitements optimaux pour l'imagerie radar à ouverture synthétique

Optimal Processings Design For Synthetic Aperture Radar

par I. LAKKIS, S. EL ASSAD, J. SAILLARD

Laboratoire Systèmes et Signaux
Hautes Fréquences, IRESTE
La chantrerie CP 3003
F-44087 Nantes Cedex 03

Résumé

Le radar à visée latérale et à ouverture synthétique est un système d'imagerie micro-onde capable de produire des images de très haute résolution des terrains, et ceci à partir d'un traitement approprié des signaux reçus par une antenne de faible dimension.

Dans cet article, nous présentons la formulation exacte du signal reçu, ainsi que les traitements associés afin de former l'image. On met en évidence l'équivalence entre la méthode de la sommation cohérente et le filtrage adapté bidimensionnel en azimut.

La qualité de l'image ainsi formée est déterminée par celle de la fonction d'ambiguïté. Cette dernière est analysée et optimisée pour deux critères de performance. Pour un récepteur filtre adapté (récepteur optimal au sens meilleur rapport signal sur bruit), la forme d'onde optimale est une onde FM non linéaire dont la fonction d'ambiguïté est de type Taylor. La fonction de pondération optimale en azimut est liée à celle de Taylor par une transformée de Fourier. Pour un récepteur filtre de Wiener (récepteur optimal au sens des moindres carrés) la forme d'onde optimale est la première fonction sphéroïdale.

Afin de mesurer simultanément les quatre termes de la matrice de rétrodiffusion d'une cible, l'émission de deux ondes optimales orthogonales est discutée. Les termes résolutions, rapport signal sur bruit ainsi qu'ambiguïtés sont spécifiés.

Mots clés : Radar à Ouverture Synthétique (ROS), Sommation Cohérente, Forme d'Onde Optimale, Fonction d'Ambiguïté, Ondes Orthogonales.

Abstract

Synthetic aperture radar (SAR) is a microwave imagery system capable of producing high resolution images by processing properly data collected by a relatively small antenna.

In this paper, the bi-dimensionnal received signal, using spatial coordinates, is formulated. The image is reconstructed by a two-dimensionnal filtering operation. We propose a straightforward derivation for the coherent summation method (or back-projection of range responses) and the 2-D azimuth matched filtering. The image quality is determined by that of the ambiguity function. This latter is analyzed and optimized for two performance criteria. First, for a matched filter receiver (maximal signal-to-noise ratio receiver), the optimal waveform is shown to be a non linear FM pulse which autocorrelation function is a Taylor. The optimal azimuth weighting function is related to that of Taylor by a Fourier transform. Second, for a Wiener filter (least mean-squares receiver), we show that the optimal waveform is the first prolate spheroidal function. The single-hit measurement of the scattering matrix by mean of two optimal orthogonal waves is discussed. Resolutions, SNR as well as ambiguities, are specified.

Key words : Synthetic Aperture Radar (SAR), Coherent Summation, Optimal Waveform, Ambiguity Function, Orthogonal Waves.

1. Introduction

Le radar à visée latérale et à ouverture synthétique est un système cohérent permettant d'obtenir des images de très haute résolution par un traitement adéquat des signaux reçus. La haute résolution en distance (site) est le résultat de la méthode traditionnelle de compression d'impulsions, alors que celle en azimut est obtenue par la formation artificielle d'une longueur synthétique très grande par rapport à la dimension réelle de l'antenne en azimut (la synthèse d'ouverture).

Dans le paragraphe 2, le signal bidimensionnel (2-D) reçu est formulé pour mettre en évidence les traitements à effectuer afin de reconstruire l'image.

Le signal reçu est séquentiellement corrélé avec le filtre adapté monodimensionnel en site (compression en site) et avec le filtre adapté bidimensionnel en azimut. Ce dernier filtrage 2-D est équivalent au traitement par la méthode de la sommation cohérente des images monodimensionnelles obtenues après le traitement en distance (rétroprojection sphéroïdale).

En écrivant maintenant que

$$t = kT_r + \tau = kT_r + \frac{2\rho}{c} \quad (4)$$

et remplaçant dans (3), la réponse 2-D à une cible ponctuelle, après démodulation sera

$$h[\rho - r, Y_k - y, r] = G_s(r) G_a(Y_k - y) \cdot u[(\rho - r) + r - R(r, Y_k - y)] \cdot e^{-j \frac{4\pi}{\lambda_0} R(r, Y_k - y)} \quad (5)$$

Dans cette équation λ_0 est la longueur d'onde, $Y_k = kVT_r$ est la position spatiale en azimut du radar au point d'émission de la $k^{\text{ème}}$ impulsion et $u(\rho) = u_0(2\rho/c)$. L'Eq.(5) peut être vue comme étant la version discrète de la forme suivante

$$h[\rho - r, Y - y, r] = G_s(r) G_a(Y - y) \cdot u[(\rho - r) + r - R(r, Y - y)] \cdot e^{-j \frac{4\pi}{\lambda_0} R(r, Y - y)} \quad (6)$$

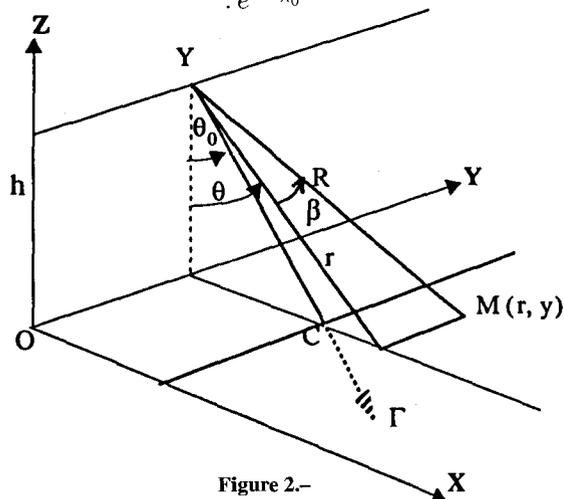


Figure 2.-

échantillonnée aux intervalles kVT_r . Cette dernière représentation est valable si T_r satisfait la condition de Nyquist-Shannon en azimut ($VT_r \leq D_y/2$ où D_y est la longueur d'antenne dans la direction azimutale). La relation (6) peut s'écrire facilement comme suit

$$h[\rho - r, Y - y, r] = h_a[\rho - r, Y - y, r] \otimes h_r[\rho] \quad (7)$$

(\otimes désigne une convolution) et h_a est la réponse impulsionnelle en azimut donnée par

$$h_a[\rho - r, Y - y, r] = G_s(r) G_a(Y - y) \cdot \delta[(\rho - r) + r - R(r, Y - y)] \cdot e^{-j \frac{4\pi}{\lambda_0} R(r, Y - y)} \quad (8)$$

qui représente le signal reçu pour une impulsion dirac (pas de dispersion en site) et h_r est la réponse impulsionnelle en site tenant compte de la dispersion en distance et est donnée par

$$h_r(\rho) = u(\rho) \quad (9)$$

Le signal reçu d'une cible étendue est obtenue par intégration de la quantité $h[\rho - r, Y - y, r] I(r, y) dr dy$ sur toute la surface illuminée et prend la forme suivante :

$$s(\rho, Y) = \iint h[\rho - r, Y - y, r] I(r, y) dr dy \quad (10)$$

Ainsi, le signal 2-D reçu n'est autre que la densité de réflectivité du terrain filtré bidimensionnellement par un filtre dépendant de la distance.

2.2. Reconstruction de l'image

Supposons que le signal reçu soit stocké dans un tableau 2-D site-azimut (Fig.3).

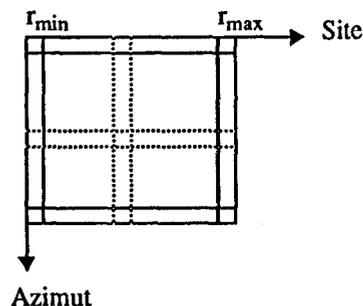


Figure 3.-

Pour reconstruire l'image, on utilise un récepteur filtre adapté qui maximise le rapport signal sur bruit comme est défini par l'Eq.(50). Le signal reçu est premièrement corrélé avec la fonction de référence en site $\bar{h}_r(-\rho)$ sur toutes les lignes (où \bar{h}_r désigne le conjugué de h_r).

La sortie de ce récepteur filtre adapté s'écrit

$$s_r(\rho, Y) = s(\rho, Y) \otimes \bar{h}_r(-\rho) \int \int \{h_a[\rho - r, Y - y, r] \otimes A_r(\rho)\} \cdot I(r, y) dr dy \quad (11)$$

où $A_r(\rho)$ est la fonction d'autocorrélation de $u(\rho)$.

La corrélation 2-D de $s_r(\rho, y)$ avec la fonction de référence azimutale $\bar{h}_a[-\rho, -y, r]$ nous donne l'image estimée du terrain

$$\begin{aligned} \tilde{I}(r, y) &= s_r(\rho, y) \otimes \bar{h}_a[-\rho, -y, r] |_{\rho=r} \\ &= \int \int \bar{h}_a[u, v, r] s_r[r + u, y + v] dudv \quad (12) \end{aligned}$$

Notons que dans la littérature, plusieurs techniques sont proposées pour évaluer cette intégrale [11], [14], et [15].

Utilisant la relation (8) dans l'Eq.(12), on obtient

$$\tilde{I}(r, y) = \int s_r [R(r, Y - y), Y] G_s(r) \cdot G_a(Y - y) e^{j \frac{4\pi}{\lambda_0} R(r, Y - y)} dY \quad (13)$$

cette relation montre que l'image est reconstruite par la sommation cohérente ou rétroprojection sphéroïdale des images monodimensionnelles s_r obtenues après la compression en site.

Dans le cas d'un SAR embarqué sur avion, et dans les conditions de champ lointain, les approximations suivantes

$$R(r, Y - y) = \sqrt{r^2 + (Y - y)^2} \approx r + \frac{(Y - y)^2}{2r} \quad (14)$$

et

$$s_r [R(r, Y - y), Y] \approx s_r [r, Y] \quad (15)$$

sont valables, et par suite, la relation (13) prend la forme d'une corrélation avec le filtre azimutal 1-D invariant. Alors l'image est reconstruite par de simples transformées de Fourier sur les lignes et sur les colonnes du tableau des données de la Fig.3.

$$\tilde{I}(r, y) = G_s(r) e^{j \frac{4\pi}{\lambda_0} r} \int s_r [r, Y] G_a(Y - y) \cdot e^{j \frac{4\pi}{\lambda_0} \frac{(Y - y)^2}{2r}} dY \quad (16)$$

3. Synthèse de la forme d'onde optimale utilisant un récepteur filtre adapté

Le signal 2-D reçu d'une cible ponctuelle et traité par le récepteur filtre 2-D adapté définit la fonction d'ambiguïté du système SAR. On va supposer par la suite que le gain d'antenne est rectangulaire dans les deux directions. Notons que cette hypothèse n'est pas simplificatrice puisqu'un gabarit quelconque du gain peut être introduit facilement comme on va le voir.

La fonction d'ambiguïté s'écrit ainsi comme suit

$$\chi_{r,y}(\rho, Y) = h[\rho - r, Y - y, r] \otimes \bar{h}[-\rho, -Y, r] \quad (17)$$

soit encore

$$\chi_{r,y}(\rho, Y) = \int A_r[(\rho - r) + (R(r, \beta) - R(r, Y - y + \beta))] \cdot e^{j \frac{4\pi}{\lambda_0} [R(r, \beta) - R(r, Y - y + \beta)]} d\beta \quad (18)$$

où $A_r(\rho)$ est la fonction d'autocorrélation de la modulation complexe de l'impulsion de base, aussi appelée fonction d'ambiguïté en site

$$A_r(\rho) = u(\rho) \otimes \bar{u}(-\rho) \quad (19)$$

La résolution obtenue en azimut pour les SAR conventionnels est connue comme étant la moitié de la longueur réelle d'antenne dans la direction azimutale. Par suite, on peut supposer que la quantité $(R(r, \beta) - R(r, Y - y + \beta))$ qui apparaît dans la fonction d'ambiguïté en site est nulle. Dans ce cas, la relation (18) sera

$$\chi_{r,y}(\rho, Y) = A_r(\rho - r) \int e^{j \frac{4\pi}{\lambda_0} [R(r, \beta) - R(r, Y - y + \beta)]} d\beta \quad (20)$$

Le terme intégral de la relation ci-dessus, contient l'information azimutale, il sera appelé fonction d'ambiguïté en azimut notée $A_a(Y - y)$.

$$A_a(Y - y) = \int e^{j \frac{4\pi}{\lambda_0} [R(r, \beta) - R(r, Y - y + \beta)]} d\beta \quad (21)$$

Par conséquent, l'Eq.(20) peut être écrite sous la forme compacte suivante

$$\chi_{r,y}(\rho, Y) = A_r(\rho - r) A_a(Y - y) \quad (22)$$

qui est simplement le produit de deux fonctions d'ambiguïtés.

3.1. FONCTION D'AMBIGUÏTÉ EN SITE

Les SAR classiques utilisent comme impulsion de base un signal FM linéaire. La haute résolution temporelle (ou en distance) ainsi réalisée est égale approximativement à l'inverse de la largeur de bande émise B. La fonction d'autocorrélation de ce signal présente l'inconvénient d'obtenir des lobes secondaires de très haut niveau (à 13.26 db). Ce qui implique des limitations sérieuses sur les performances de la résolution, et une pondération (dans le domaine temporel ou fréquentiel) est souvent nécessaire. Cette dernière technique n'est pas souvent souhaitable, elle réduit le niveau des lobes secondaires mais au prix d'une certaine perte dans la résolution et dans le rapport signal sur bruit. Ainsi, il est d'un grand intérêt de chercher une forme d'onde optimale faisant un meilleur compromis entre la largeur du lobe principal et le niveau des lobes secondaires.

La fonction d'autocorrélation optimale caractérisée par un faible niveau des lobes secondaires avec une dégradation (augmentation) minimale de la largeur du lobe principal est la fonction d'autocorrélation de Dolph-Tchebycheff donnée par [4]

$$A_r(\tau) = \frac{ch[\pi \sqrt{C^2 - (B\tau)^2}]}{ch(\pi C)} \quad (23)$$

où C est liée au niveau désiré des lobes secondaires R(db), par la relation suivante

$$C = \frac{1}{\pi} \text{Log}[R + \sqrt{R^2 - 1}] \quad (24)$$

Cette fonction d'autocorrélation d'amplitude maximale unitaire (au point $\tau = 0$), a tous ses lobes secondaires de même niveau R , et elle s'annule aux points

$$x_n = \pm \sqrt{C^2 + (n - 0,5)^2} \quad (25)$$

La largeur du lobe principal à -3db est donnée par

$$\beta_0 = \frac{2}{\pi B} \left[(\operatorname{argsh} R)^2 - (\operatorname{argsh} \frac{R}{\sqrt{2}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

$A_r(\tau)$ possède une énergie infinie et donc, ne peut pas être réalisable, mais, heureusement, peut être approchée.

Une bonne approximation de cette fonction est donnée par Taylor [4] dont le niveau des lobes secondaires est conservée pour les \bar{n} premiers, et atténués régulièrement pour les autres

$$A_r(\tau) = \frac{\sin \pi B \tau}{\pi B \tau} \prod_{n=1}^{\bar{n}-1} \frac{1 - (\frac{B\tau}{x_n})^2}{1 - (\frac{B\tau}{n})^2} \quad (27)$$

où x_n sont les zéros donnés par

$$x_n = \begin{cases} \pm \sigma \sqrt{C^2 + (n - 0,5)^2} & 1 \leq n \leq \bar{n} \\ \pm n & \bar{n} < n < \infty \end{cases} \quad (28)$$

Le paramètre σ , défini par la relation suivante

$$\sigma = \frac{\bar{n}}{\sqrt{C^2 + (\bar{n} - 0,5)^2}} \quad (29)$$

représente le facteur d'élargissement du lobe principal. La largeur du lobe principal à -3db de la fonction d'autocorrélation de Taylor (β) est liée à celle de Dolph-Tchebycheff par la relation suivante

$$\beta = \sigma \beta_0 \quad (30)$$

Maintenant le problème est de déterminer la forme d'onde du signal à émettre dont la fonction d'autocorrélation est la fonction Taylor donnée par l'Eq.(27). L'utilisation de la méthode de la phase stationnaire (Annexe B) nous permet de synthétiser deux types de signaux.

3.1.1. Forme d'onde optimale à enveloppe rectangulaire

Un premier type de signaux est celui d'une onde FM non linéaire à enveloppe rectangulaire ayant la forme suivante

$$u(\tau) = \operatorname{Rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) e^{j\Phi(\tau)} \quad (31)$$

$$\operatorname{Rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq \tau \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (32)$$

Le problème se résume à la recherche de la modulation de phase $\Phi(\tau)$ ou de la fréquence instantanée $f(\tau)$ du signal $u(\tau)$.

Soient $U(v)$ et $\Gamma(v)$ les transformées de Fourier du $u(\tau)$ et $A_r(\tau)$ respectivement.

La relation (75) de l'Annexe A nous permet d'écrire

$$\Gamma(v) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\bar{n}-1} F_m \cos\left(2\pi m \frac{v}{B}\right) \quad (33)$$

et en appliquant la relation (80) de l'Annexe B, on obtient la variation du temps en fonction de la fréquence

$$\tau_n = v_n + \sum_{m=1}^{\bar{n}-1} \frac{F_m}{m\pi} \sin\left(2\pi m \frac{v_n}{B}\right) \quad (34)$$

avec $\tau_n = \tau/T \in [-0.5, 0.5]$ et $v_n = f/B \in [-0, 5, 0, 5]$. La fonction $\tau_n(v_n)$ étant croissante, elle est donc inversible.

Pour trouver la variation de la fréquence en fonction du temps, on va écrire v_n au moyen de son développement en série de Fourier par rapport à la variable temps τ_n .

$$v_n = \tau_n + \sum_{m=1}^M C_m \sin(2\pi m \tau_n) \quad (35)$$

On montre [1], que les coefficients C_m peuvent être calculés à partir de l'intégrale suivante :

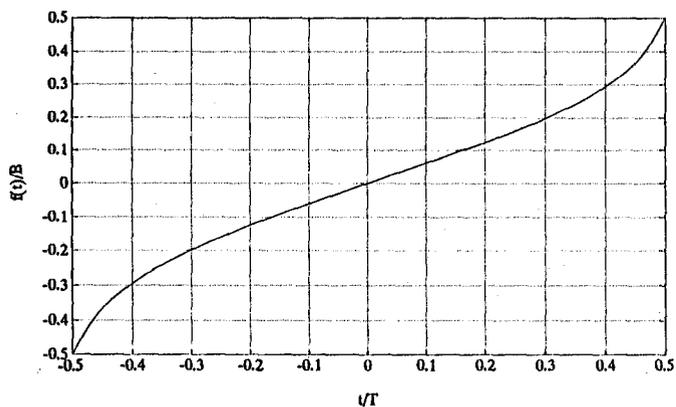
$$C_m = \frac{2}{m\pi} \int_0^{1/2} \cos[2\pi m \tau_n(v_n)] dv_n \quad (36)$$

En résumé, pour un niveau désiré R des lobes secondaires et un nombre \bar{n} des premiers lobes secondaires de même niveau, C est calculé à partir de la relation (24), σ à partir de la relation (29), les zéros x_n de la fonction de Taylor à partir de la relation (28), les coefficients F_m à partir de la relation (74), le tableau de valeurs $\tau_n(v_n)$ est formé à partir de la relation (34), les coefficients C_m à partir de la relation (36), et finalement $v_n(\tau_n)$ est donné par la relation (35).

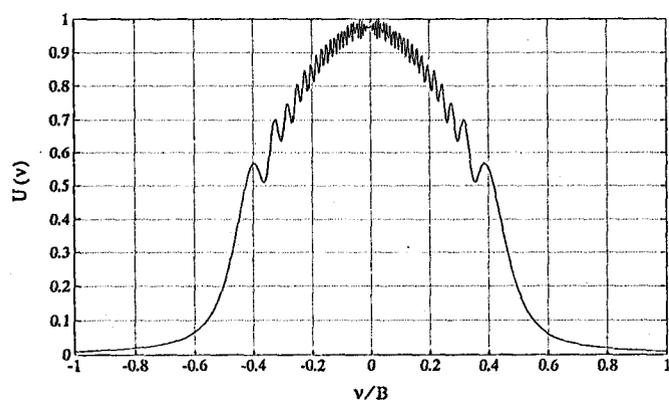
La phase $\Phi(\tau)$ de l'onde optimale $u(\tau)$ s'écrit

$$\Phi(\tau) = 2\pi B T \left[\left(\frac{\tau}{T}\right)^2 + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^M \frac{C_m}{m} (1 - \cos 2\pi m \frac{\tau}{T}) \right] \quad (37)$$

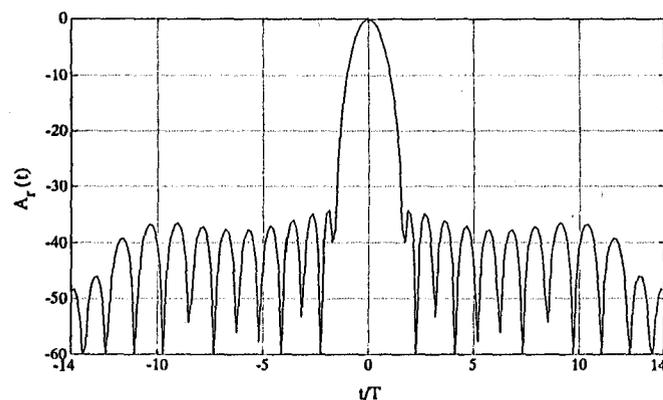
Utilisant l'algorithme proposé ci-dessus, la fréquence instantanée, la transformée de Fourier ainsi que la fonction d'autocorrélation (fonction d'ambiguïté en site) correspondante à la forme d'onde optimale à 35 db sont illustrées sur la Fig.4. Les coefficients C_m calculés à partir de la relation (36) sont donnés par le Tableau 1.



a) Variation de la fréquence instantanée



b) La transformée de Fourier du signal



c) La fonction d'autocorrélation en db

Figure 4.- Une onde FM linéaire optimale à -35 db

3.1.2. Forme d'onde optimale à variation linéaire de la fréquence

Un autre type de signaux est celui d'un signal FM linéaire donné par

$$u(t) = a(t) e^{j\pi \frac{B}{T} t^2} \quad (38)$$

Le problème est de déterminer l'enveloppe du signal $a(t)$. Utilisant le résultat du problème 1 de l'appendice B, l'enveloppe

optimale s'écrit comme suit

$$a(t) = \sqrt{\frac{B}{T} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\bar{n}-1} F_m \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) \right]} \quad (39)$$

Notons que les coefficients F_m peuvent être calculés facilement à partir de la relation (74).

Table 1.

F_m	C_m
-0.101772	0.330426
0.032761	-0.013730
-0.015794	0.001127
0.008990	0.003286
-0.005590	-0.004779
0.003662	0.005024
-0.002474	-0.004636
0.001704	0.003899
-0.001170	-0.002970
0.000808	0.001956
-0.000548	-0.000940

La Fig.5 illustre quelques résultats obtenus de $a(t)$ pour différentes valeurs de R (db). Les valeurs des coefficients F_m correspondants au cas $R = -35$ db sont donnés par le tableau 1.

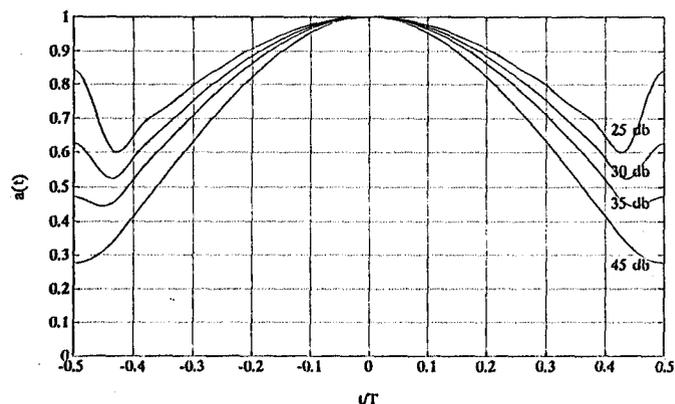


Figure 5.- Enveloppe optimale pour R (db) = 25,30,35 et 45

3.2. FONCTION D'AMBIGUITÉ EN AZIMUT

La fonction d'ambiguïté en azimut de l'Eq.(21), tenant compte du gain de l'antenne dans cette direction, se réécrit comme suit

$$A_a(Y - y) = \int G_a(\beta) e^{j\frac{4\pi}{\lambda_0} R(r,\beta)} \cdot G_a(Y - y + \beta) \cdot e^{-j\frac{4\pi}{\lambda_0} R(r,Y-y+\beta)} d(\beta) \quad (40)$$

On reconnaît dans cette expression la fonction d'autocorrélation de la modulation en azimut donnée par

$$z(y) = G_a(y) e^{-j \frac{4\pi}{\lambda_0} R(r,y)} \quad -L/2 \leq y \leq L/2 \quad (41)$$

Dans le cas où on suppose que le gain de l'antenne est rectangulaire, on peut approximer $A_a(Y-y)$ par la fonction sinus cardinal suivante [1]

$$A_a(Y-y) = \frac{\sin \frac{2\pi}{D_y}(Y-y)}{\frac{2\pi}{D_y}(Y-y)} \quad (42)$$

De nouveau, le même problème des lobes secondaires est présent. Pour résoudre ce dernier, on cherche la fonction de pondération optimale $d(Y)$. Le filtre équivalent en azimut prend dans ce cas la forme suivante

$$\bar{h}_a = (-\rho, -Y, r) \otimes d(Y) \quad (43)$$

A la sortie de ce filtre, on désire avoir la fonction d'autocorrélation de Taylor $A_{Tay}(Y)$ (voir Eq.(27)).

$$A_a(Y) \otimes d(Y) = A_{Tay}(Y) \quad (44)$$

La transformée de Fourier de $z(y)$ est calculée par la méthode de la phase stationnaire, son amplitude est donnée par

$$|Z(v)| = G_a \left(\frac{\frac{\lambda_0 v}{2} r}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0 v}{2})^2}} \right) \sqrt{\frac{\lambda_0 r}{2}} \left[1 - \left(\frac{\lambda_0 v}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{4}} \quad (45)$$

D'autre part, la transformée de Fourier de la fonction d'ambiguïté optimale en azimut $A_a(y)$ s'écrit

$$\Gamma(v) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\bar{n}-1} F_m \cos(2\pi m \frac{v}{B}) \quad (46)$$

avec B donné par

$$B = \frac{2L}{\lambda_0 \sqrt{r^2 + (\frac{L}{2})^2}} = \frac{4\theta_y}{\lambda_0 \sqrt{4 + \theta_y^2}} \quad (47)$$

où θ_y est l'ouverture à mi-puissance du faisceau d'antenne ($L = r\theta_y$). Soit $D(v)$ la transformée de Fourier de $d(Y)$. L'Eq.(44) montre que le module au carré du spectre $Z(v)$ multiplié par le filtre de pondération $D(v)$ est égal à $\Gamma(v)$ qui est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de Taylor. D'où

$$D(v) = \frac{2r}{\lambda_0} G_a^{-2} \left(\frac{\frac{\lambda_0 v}{2} r}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0 v}{2})^2}} \right) \left[1 - \left(\frac{\lambda_0 v}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \Gamma(v) \quad (48)$$

Pour un gain rectangulaire de l'antenne, la forme de $D(v)$ pour différentes valeurs de $R(db)$ est illustrée sur la Fig.6.

En utilisant une forme d'onde optimale $u(\tau)$ à $R = -35db$ ainsi qu'une fonction de pondération en azimut $d(y)$ optimale à $-35db$,

la fonction d'ambiguïté résultante est illustrée par la Fig.7. Cette fonction est à comparer avec la fonction d'ambiguïté classique de la Fig.8.

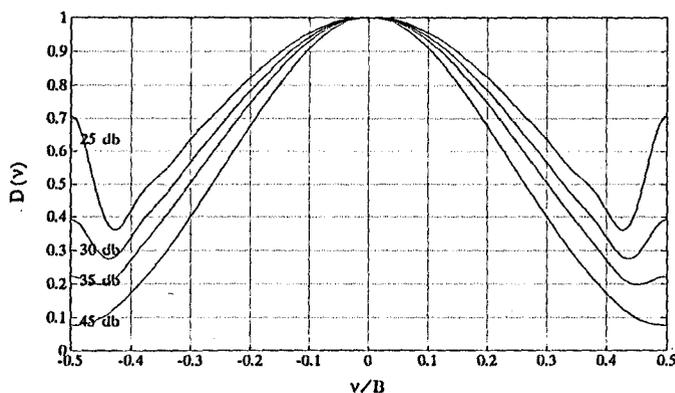


Figure 6.- Fonction de pondération optimale en azimut pour $R(db) = 25, 30, 35$ et 45

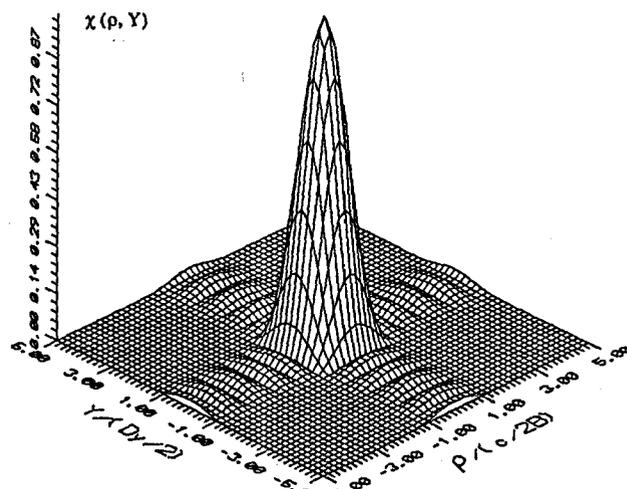


Figure 7.- Fonction d'ambiguïté optimale à $-35db$

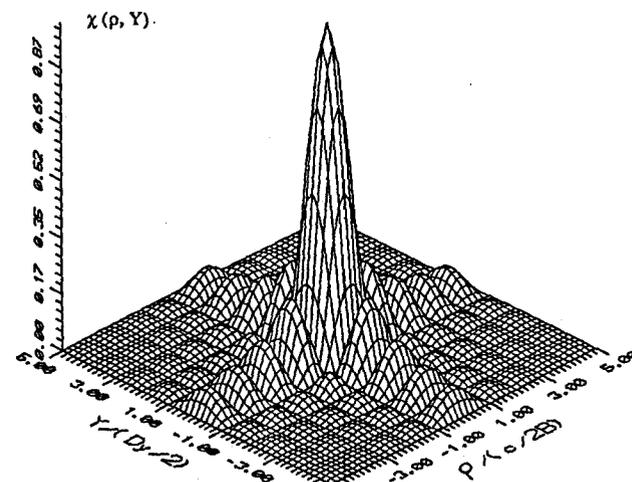


Figure 8.- Fonction d'ambiguïté classique

4. Forme d'onde optimale utilisant un filtre de Wiener

Dans ce paragraphe, seul le traitement en site est abordé. Pour une cible étendue monodimensionnelle dans la direction de site, le signal reçu peut être vu comme étant la convolution entre le signal émis et une fonction $p(t)$ décrivant la cible ($p(t)$ est le produit de la densité de réflectivité complexe de la cible par le terme de phase $\exp(-4\pi t/\lambda_0)$). Notons que t étant l'équivalent en temps de la distance radar-cible ponctuelle.

$$s_R(t) = u(t) \otimes p(t) \quad (49)$$

Le récepteur filtre adapté en site est le récepteur optimal maximisant le rapport signal sur bruit donné par

$$SNR_{max} = \frac{E}{N_0} \quad (50)$$

où E est l'énergie du signal et N_0 la densité spectrale de puissance du bruit blanc. La résolution temporelle atteinte est alors $1/B$.

En absence de bruit, il est évident qu'une image parfaite de la cible est possible. Cette image est obtenue au moyen du filtre idéal en site donné par

$$H_r^{idéal}(v) = \frac{1}{U(v)} \quad (51)$$

alors la résolution obtenue est Lr/Ns où Lr est la dimension de la cible en distance et Ns est le nombre d'échantillons pris sur le signal reçu.

Pour ce récepteur idéal, la forme d'onde optimale est celle limitée dans le temps à l'intervalle $[-T/2, T/2]$ et à concentration maximale d'énergie dans l'intervalle $[-B/2, B/2]$ dans le domaine fréquentiel.

Soit le signal gaussien donné par

$$u(t) = \text{Rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-\frac{\pi}{4}(Bt)^2} \quad (52)$$

Sa transformée de Fourier est (valable pour $B \geq 4/T$ puisque dans ce cas toute l'énergie du signal gaussien est pratiquement concentrée dans l'intervalle $[-T/2, T/2]$) approximativement

$$U(v) = \frac{2}{B} e^{-4\pi\left(\frac{v}{B}\right)^2} \quad (53)$$

$u(t)$ est proche de la solution optimale pour le cas particulier où $B = 4/T$. Notons par ailleurs que le signal FM linéaire et le signal FM non linéaire de Taylor sont aussi proches de la solution optimale.

La solution exacte à notre problème est la première fonction sphéroïdale donnée en annexe C. Seule une approximation de cette solution est possible car l'équation intégrale (82) ne peut être

résolue que numériquement. Ceci revient à dire que la transformée de Fourier du signal est supposée périodique de période Δv (qui approxime l'infini) et plus Δv est grande, meilleure est l'approximation. Cette solution sous optimale est donnée par l'équation suivante [5],[10];

$$u(t) = \sum_{n=-M}^M D_n \frac{\sin \pi(\Delta vt - n)}{\pi(\Delta vt - n)} \quad -T/2 < t < T/2 \quad (54)$$

Sa transformée de Fourier est approximativement

$$U(v) = \sum_{n=-M}^M D_n e^{j2\pi n \frac{v}{\Delta v}} \quad v \in \left[-\frac{\Delta v}{2}, \frac{\Delta v}{2}\right] \quad (55)$$

Les coefficients D_n sont déterminés en résolvant numériquement les valeurs et les vecteurs propres de la matrice de Toeplitz correspondant à l'Eq.(86).

Notons enfin que l'ordre du polynôme trigonométrique de l'Eq.(55) est donné par l'équation suivante

$$M = \frac{T\Delta v}{2} \quad (56)$$

qui dépend du choix de la valeur de Δv .

Fig. 9 et 10 illustrent une famille des solutions calculée pour $\Delta v = 10B$ et pour différentes valeurs de BT .

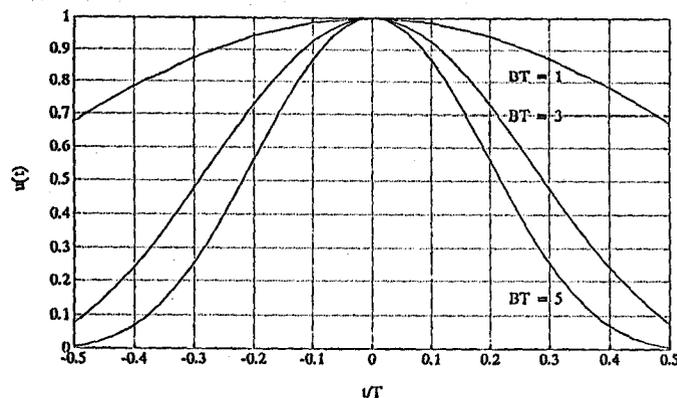


Figure 9.- Forme d'onde optimale pour un récepteur filtre de Wiener.
Bt = 1,3 et 5.

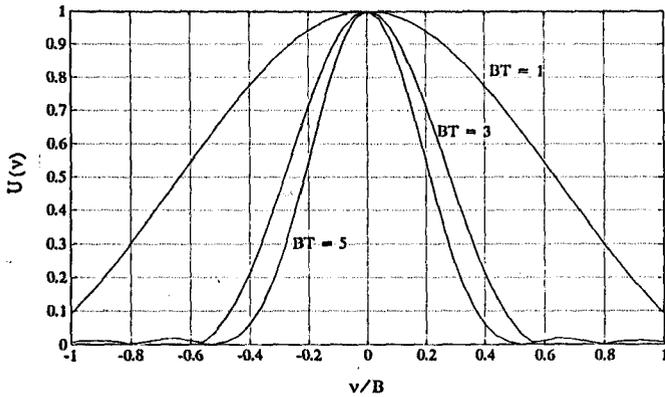


Figure 10.- Transformée de Fourier de $u(t)$

En présence d'un bruit blanc gaussien $n(t)$ non corrélé avec le signal utile $s_R(t)$ ($s(t) = s_R(t) + n(t)$), le récepteur filtre de Wiener, défini comme étant le récepteur optimal au sens des moindres carrés, effectuant un compromis entre résolution et réjection du bruit est donné par

$$H_r^{Wiener}(v) = \frac{|S_R(v)|^2}{|S_R(v)|^2 + N_0} \frac{1}{U(v)} \quad (57)$$

où $S_R(v)$ est la transformée de Fourier du signal utile. Pour déterminer ce filtre, on doit estimer N_0 . Ceci est possible en remarquant que $|S(v)|^2$ (la densité spectrale de $s(t)$) est la somme d'une fonction à bande limitée (presque nulle à l'extérieur de l'intervalle $[-B/2, B/2]$) et de la densité spectrale N_0 du bruit. Ainsi, à l'extérieur de l'intervalle $[-B/2, B/2]$ seule la contribution du bruit existe alors N_0 peut être estimé.

Ainsi, $H_r^{Wiener}(v)$ va approximer le filtre idéal là où le bruit est négligeable, et va être nul là où le bruit est dominant. Si $N_0 \gg |S_R(v)|^2$, alors

$$H_r^{Wiener}(v) = \frac{\bar{U}(v)}{N_0} |P(v)|^2 \quad (58)$$

représente le filtre adapté à une cible ponctuelle, ($P(v)$ étant la transformée de Fourier de $p(t)$). L'erreur quadratique moyenne commise sur l'estimation $\hat{p}(t)$ de $p(t)$ est donnée par

$$e = \int \frac{|P(v)|^2 N_0}{|U(v)|^2 |P(v)|^2 + N_0} dv \quad (59)$$

et le rapport signal sur bruit est

$$SNR^{Wiener} = \frac{|\int G(v)U(v)dv|^2}{N_0 \int |G(v)|^2 dv} \quad (60)$$

où

$$G(v) = \frac{|U(v)|^2}{|U(v)|^2 + N_0} \quad (61)$$

Notons que si $U(v)$ est concentré dans l'intervalle $[-B/2, B/2]$, le rapport signal sur bruit du filtre de Wiener va être très proche de celui du filtre adapté.

5. Ambiguïtés

Le SAR possède un problème d'ambiguïté inhérent à son principe. Des ambiguïtés en site apparaissent aux intervalles $\Delta R = cT_r/2$. Afin d'éviter cette situation, le faisceau du radar doit être aussi étroit que possible afin que les distances ambiguës ne soient pas illuminées. Ceci peut être exprimé par

$$T_r > \frac{2L_r}{c} \quad (62)$$

où L_r est l'étendue de la cible en site.

Les ambiguïtés en azimut peuvent être interprétées différemment. Du point de vue fonction d'ambiguïté azimutale, celle donnée par l'Eq.(40) présente en réalité la forme de $\sin Nx / \sin x$ et non pas d'un $\sin x$, et ceci est dû au fait que l'intégrale de l'Eq.(21) est en réalité une somme sur les différentes impulsions. Pour résoudre ce problème, on doit éviter tous les autres pics excepté le pic central ceci n'est possible que si

$$T_r \leq \frac{D_y}{2V} \quad (63)$$

Le problème d'ambiguïté peut en fait se poser comme suit.

Si on désire obtenir la meilleure image de la cible (atténuation importante des lobes secondaires et cellules de résolutions aussi faible que possible), il faut que la cible se trouve à l'intérieur de la zone nette du pic central.

Si on désire imager des cibles d'envergure importante, on doit supprimer les ambiguïtés. Ceci est possible en utilisant un train d'impulsions codées (codage de phase) ayant une fonction d'ambiguïté en pointe (thumbtack). Dans ce cas, on a une image correcte de la cible seulement au-dessus d'un certain piédestal dont le volume est égal à celui des ambiguïtés supprimées (conservation de l'énergie).

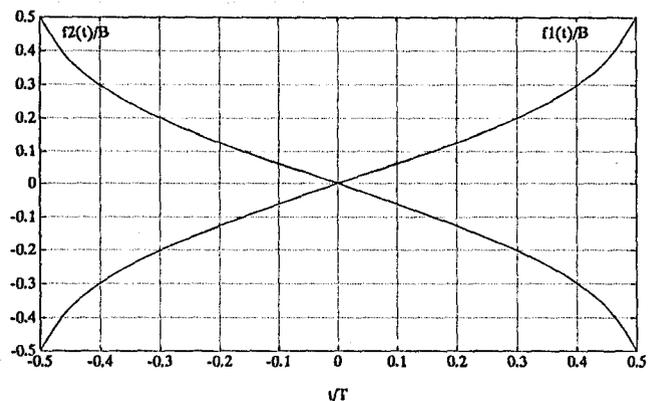


Figure 11.- Les fréquences instantanées des ondes orthogonales

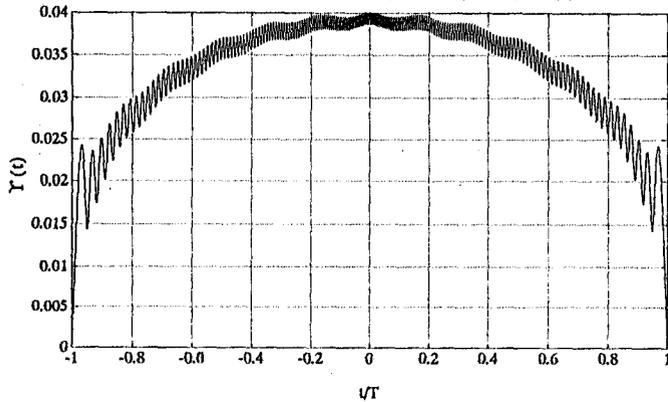


Figure 12.- La fonction de cross-corrélation

6. Orthogonalité

La mesure simultanée des quatre termes de la matrice de rétrodiffusion d'une cible est basée sur la transmission de deux ondes orthogonales sur deux canaux de polarisation orthogonaux [2]. Soient $u_1(t)$ et $u_2(t)$ leurs enveloppes complexes, admettant l'utilisation des récepteurs filtres adaptés, alors l'orthogonalité et l'optimalité peuvent être exprimés par

$$u_i(t) \otimes \bar{u}_i(-t) = A_{Tay}(t) \quad i = 1, 2 \quad (64)$$

$$u_1(t) \otimes \bar{u}_2(-t) = 0 \quad (65)$$

où $A_{Tay}(t)$ est la fonction d'autocorrélation optimale de Taylor. Si on désire émettre la même bande pour les deux ondes autour de la même porteuse, alors la meilleure approximation de l'orthogonalité est obtenue en utilisant deux formes d'ondes de Taylor ayant des pentes opposées, c'est à dire

$$u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{Rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{j\Phi(t)} \quad (66)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{Rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j\Phi(t)} \quad (67)$$

où le facteur $1/\sqrt{T}$ est introduit afin de normaliser l'énergie du signal émis. Notons que $\Phi(t)$ est donnée par l'Eq.(37). La fonction de cross-corrélation peut être écrite comme suit

$$\Gamma(t) = \frac{1}{T} \int \text{Rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) e^{j\Phi(\tau)} \text{Rect}\left(\frac{\tau-t}{T}\right) e^{j\Phi(\tau-t)} d\tau \quad (68)$$

cette fonction présente un maximum à l'origine et il est donné par

$$\Gamma(0) = \frac{1}{T} \int \text{Rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{2j\Phi(t)} dt \quad (69)$$

Utilisant la méthode de la phase stationnaire, le module de $\Gamma(0)$ peut être approximé par

$$|\Gamma(0)| = \frac{1}{\sqrt{4BT \left(1 + \sum_{m=1}^M \pi m C_m\right)}} \quad (70)$$

La somme $\sum \pi m C_m$ dépend du niveau $R(\text{db})$ des lobes secondaires désiré. La Table 2 résume quelques valeurs typiques pour différentes valeurs de $R(\text{db})$. Ainsi, si on désire avoir une fonction de cross-corrélation à -35 db , il faut (tableau 2) que le produit largeur de bande-durée du signal émis (BT) soit de l'ordre de 833. La Fig.11 illustre la forme des ondes optimales et la figure 12 la fonction de cross-corrélation pour $BT = 500$.

Une deuxième technique qui peut être utilisée pour les ondes optimales d'un récepteur filtre adapté aussi bien que pour un récepteur filtre de Wiener est d'émettre la même onde optimale sur deux fréquences porteuses différentes décalées. Notons que le décalage entre ces deux porteuses doit être supérieur à B .

Table 2.

$R(\text{db})$	25	30	35	40
$1 + \sum_{m=1}^M \pi m C_m$	0.75	0.68	0.60	0.53

7. Conclusion

Dans cet article, l'expression exacte du signal SAR est présentée ainsi que les traitements optimaux à faire sur ce signal afin de former l'image. D'autre part, la théorie et la synthèse des formes d'ondes optimales du système SAR sont étudiées. Ce problème est complètement résolu pour deux types de récepteurs. L'orthogonalité de deux ondes optimales ainsi que le problème d'ambiguïté sont discutés. Les résultats obtenus en simulation numérique confirment l'exactitude de différents algorithmes de calculs mis en œuvre dans cette étude.

Annexe A

Soit $\Gamma(v)$ la transformée de Fourier de $A_r(\tau)$. $\Gamma(v) = 0$ pour $|v| > B/2$. Ainsi, on peut écrire

$$A_r(\tau) = \int_{-B/2}^{B/2} \Gamma(v) e^{-j2\pi v\tau} dv \quad (71)$$

D'autre part, $\Gamma(v)$ peut s'écrire comme suit

$$\Gamma(v) = \sum F_m e^{j2\pi m \frac{v}{B}} \quad (72)$$

en remplaçant (72) dans la relation (71), on trouve

$$A_r(\tau) = \sum F_m \frac{\sin \pi(B\tau - m)}{\pi(B\tau - m)} \quad (73)$$

il en résulte que

$$F_m = F_{-m} = A\left(\frac{m}{B}\right) \quad (74)$$

or d'après l'équation (27)

$$F_m = F_{-m} = \frac{[(\bar{n}-1)!]^2}{(\bar{n}-1+m)!(\bar{n}-1-m)!} \prod_{n=1}^{\bar{n}-1} \left[1 - \left(\frac{m}{x_n}\right)^2\right] \quad (75)$$

pour $m = 1, 2, \dots, \bar{n} - 1$

et

$$F_m = F_{-m} = \begin{cases} 1 & \text{pour } m = 0 \\ 0 & \text{pour } (|m| \geq \bar{n}) \end{cases}$$

et l'Eq.(72) peut être réécrite comme suit

$$\Gamma(v) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\bar{n}-1} F_m \cos(2\pi m \frac{v}{B}) \quad (76)$$

Notons que cette fonction de Taylor diffère de celle de Dolph-Tchebycheff d'abord par la largeur du lobe principal à -3 db, $\beta = \sigma\beta_0$ (Fig.13), ensuite par les positions des zéros de la fonction. Remarquons plus \bar{n} est grande, meilleure est l'approximation.

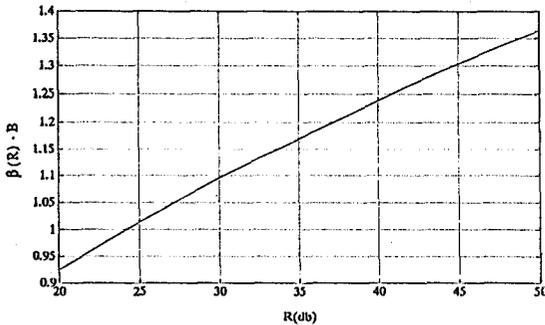


Figure 13.- Variation de la largeur de bande en fonction de R(db), n=11.

Annexe B

MÉTHODE DE LA PHASE STATIONNAIRE

Dans cette annexe, on va expliquer la méthode de la phase stationnaire pour la synthèse des signaux FM

$$u(t) = a(t) e^{j\Phi(t)} \quad (77)$$

de durée T, quand la fonction d'autocorrélation A(t) est spécifiée.

problème 1.[5]

Le signal à synthétiser est un signal FM linéaire

$$u(t) = a(t) e^{j\beta t^2} \quad (78)$$

et le problème est de déterminer la modulation d'amplitude $a(t)$. Soit $\Gamma(v)$ la transformée de Fourier de A(t), alors la solution est donnée par [5]

$$a(t) = \sqrt{\frac{B}{\pi}} \Gamma\left(\frac{\beta t}{\pi}\right) \quad (79)$$

problème 2.

La modulation d'amplitude $a(t)$ est supposée spécifiée, et le problème est de déterminer la modulation de phase $\Phi(t)$.

Soit $f(t)$ la fréquence instantanée de $u(t)$, donnée par

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = 2\pi f(t) \quad (80)$$

La méthode de la phase stationnaire nous permet d'écrire

$$\int_{-\infty}^t |a(\tau)|^2 dt = \int_{-\infty}^f \Gamma(v) dv \quad (81)$$

Résolvant cette équation pour f , on obtient une fréquence $f(t)$ monotone croissante, dont l'intégrale donne $\Phi(t)$.

Annexe C

LES FONCTIONS SPHÉROÏDALES

C.1. Les fonctions sphéroïdales continues

Soit $y(t)$ une fonction de durée T et d'énergie E, Y(v) sa transformée de Fourier, et α le facteur d'énergie contenu dans un intervalle de longueur B dans le domaine fréquentiel.

$$\alpha = \frac{1}{E} \int_{-B/2}^{B/2} |Y(v)|^2 dv \quad (82)$$

La solution du problème de maximisation de α quand $y(t)$ parcourt l'ensemble des fonctions de durée T est l'une des fonctions sphéroïdales définie ci-dessous. Les fonctions sphéroïdales sont solutions de l'équation intégrale suivante

$$\int_{-B/2}^{B/2} \Phi(\eta) \frac{\sin \pi T(v - \eta)}{\pi T(v - \eta)} d\eta = \lambda \Phi(v) \quad (83)$$

Cette équation a des solutions tout simplement pour certaines valeurs λ_n de λ et tel que

$$1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n \rightarrow 0 \quad (84)$$

et pour chaque λ_n il correspond une seule fonction $\Phi_n(v)$.

La valeur maximale de α est λ_0 et ce maximum est atteint si Y(v) est égale à la fonction propre correspondante $\Phi_0(v)$.

Notons enfin que les solutions de l'Eq.(82) dépendent seulement du paramètre

$$c = \frac{\pi}{2} BT \quad (85)$$

Fig.14 illustre la variation de λ_0 en fonction de c .

C.2. Les fonctions sphéroïdales discrètes

Dans ce cas, $Y(v)$ prend la forme suivante

$$Y(v) = \sum_{n=-M}^M Y_n e^{j2\pi n \frac{v}{\Delta v}} \quad (86)$$

c'est une fonction périodique de période Δv . La version discrète de l'Eq.(82) donne un système d'équations dont la solution détermine les coefficients Y_n .

$$\sum_{n=-M}^M \frac{\sin \pi \frac{B}{\Delta v} (n-k)}{\pi \frac{B}{\Delta v} (n-k)} Y_n = \lambda_0 Y_k \quad |n| \leq M \quad (87)$$

Notons que ce système a $2M + 1$ valeurs propres

$$1 > \lambda_0 > \dots > \lambda_{2M} > 0 \quad (88)$$

La valeur maximale de α est λ_0 et la solution à notre problème est la fonction propre correspondante $Y_0(v)$ déterminée par les coefficients Y_k^0 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Saillard and I. Lakkis, "Étude d'une Instrumentation Polarimétrique", Contrat CELAR/IRESTE, Jan. 1992.
- [2] D. Giuli, L. Facheris, M. Fossi, and A. Rossetini, "Simultaneous Scattering Matrix Measurement Through Signal Coding", IEEE Int. Radar. Conf., Virginia, pp. 258-262, Virginia, May 1990.
- [3] A.W. Rihaczek, Principles of High-Resolution Radar. New-York : McGraw-Hill, 1969.
- [4] T.T. Taylor, "Design of Line Source Antennas for Narrow Beamwidth and Low Side Lobes", IRE Trans., vol. AP-3, pp. 16-28, January, 1955.
- [5] A. Papoulis, Signal Analysis. New-York : McGraw-Hill, 1984.

- [6] R.O. Harger, "An Optimum Design of Ambiguity Function, Antenna Pattern, and Signal for Side-Looking Radars", IEEE Trans, on Military Electronics, vol. MIL-9, pp. 264-278, July-October 1965.
- [7] J.R. Klauder, A.C. Price, S. Darlington, and W.J. Albersheim, "The theory and design of chirp signals", Bell Sys. Tech. J., vol. 39, pp. 745-808, July 1960.
- [8] W.M. Brown, "Synthetic Aperture Radar", IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. AES-3, pp. 217-229, March 1967.
- [9] M.I. Skolnik, Introduction to Radar Systems, 2nd ed. New-York : McGraw-Hill, 1980.
- [10] D. Slepian and H.O. Pollack, "Prolate spheroidal wave function, Fourier analysis and uncertainly-I", Bell Sys. Tech. J., vol. 40, pp. 43-63, January 1961.
- [11] D.A. Ausherman, A. Kozma, J.L. Walker, H.M. Jones, and E.C. Poggio, "Developments in radar imaging", IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. ASE-20, pp. 363-400, July 1984.
- [12] C. Elachi, Spaceborne Radar Remote Sensing : Applications and Techniques, New-York Press, 1988.
- [13] K. Tomiyasu, "Tutorial review of synthetic-aperture radar (SAR) with applications to imaging of the ocean surface", Proc. IEEE, vol. 66, pp. 563-583, May 1978.
- [14] C. Wu, K. Liu, and M. Jin, "Modeling and a correlation algorithm for spaceborne SAR signals", IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. AES-18, pp. 563-574, Sept. 1982.
- [15] D.C. Munson and R.L. Visentin, "A Signal Processing View of Strip-Mapping Synthetic Aperture Radar", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 37, pp. 2131-2147, Dec. 1989.
- [16] M. Darricau, Physique et théorie du radar. Sodipec, 1981.

Manuscrit reçu le 16 juillet 1992.

LES AUTEURS

Ismael Lakkis prépare une thèse au laboratoire Systèmes et Signaux Hautes Fréquences sur : Étude Comparative de Diverses Méthodes d'Imagerie Radar.

Safwan El Assad est Maître de Conférences à l'Université de Nantes et effectue ses travaux au laboratoire Systèmes et Signaux Hautes Fréquences, à l'IRESTE, sur le thème : Imagerie Radar - Télédétection - Analyse d'Images.

Joseph Saillard est professeur à l'Université de Nantes et dirige le laboratoire Systèmes et Signaux Hautes Fréquences à l'IRESTE. Ses principaux thèmes de recherche sont la Polarimétrie Radar et les Antennes Adaptatives, tant sur le plan expérimental que théorique.