

Transformée de Fourier rapide par quart de période

Fast Fourier Transform by Period Quarter

par P. Loosfelt, P. Desplanques et A. Cherradi

Laboratoire de Mesures Automatiques. USTL Lille
59655 Villeneuve d'Ascq cedex

Résumé

Tout signal périodique peut être décomposé en série de Fourier. Cette décomposition est habituellement réalisée par TFD (Transformée de Fourier Discrète). Lorsque le nombre d'harmoniques est limité et que la période du signal est connue, le calcul des coefficients de cette série peut se faire de façon exacte par simples additions ou soustractions d'un nombre restreint de valeurs échantillonnées.

Pour chaque harmonique, quatre échantillons sont prélevés par période de l'harmonique. Le premier avantage est de supprimer tout produit dans les calculs. Le second avantage est d'obtenir des filtres indépendants ne laissant passer que leurs harmoniques propres et quelques harmoniques multiples. En installant un filtre par harmonique, on peut retrouver tous les coefficients.

Chaque filtre nécessite sa propre horloge d'échantillonnage; l'échantillonnage est donc asynchrone pour une batterie de filtres. Quand le nombre d'harmoniques est important, le dispositif d'échantillonnage est délicat à réaliser. En conséquence la FFT par quart de période semble pouvoir se développer dans les traitements logiciels et dans quelques applications matérielles spécifiques.

Mots clés : Transformée de Fourier, FFT, Echantillonnage asynchrone, Quart de période, Filtre-k.

Abstract

Any periodical signal can be decomposed in Fourier series. When the number of harmonics is limited and the signal period is known, the series coefficient calculation can be done exactly by simple additions or subtractions of a limited number of sampled values.

For each harmonic, four samples are taken in each harmonic period. The first advantage is to remove every product in the computation. The second advantage is to obtain independent filters that only let through their harmonic and some multiple harmonics. By setting up one filter per harmonic, it is easy to find any coefficient.

Each filter requires its own sampling clock; so, sampling is asynchronous for a set of filters. When harmonics are numerous, the sampling device is tricky to carry out. FFT by period quarter may be used in software processing and in some specific hardware applications.

Key words : Fourier Transform, FFT, Asynchronous Sampling, Period Quarter, k-Filter.

Introduction

La transformée de Fourier discrète est l'outil de base du traitement numérique du signal. Elle permet de calculer les coefficients de Fourier d'un signal périodique mais nécessite un grand nombre de multiplications.

Le présent article propose un algorithme rapide pour calculer ces coefficients sans multiplication. Dénommé FFT-QP (car un échantillon est prélevé à chaque quart de période de l'harmonique étudié), il est utilisable lorsque la période du signal est connue et que le nombre d'harmoniques est limité.

A chaque harmonique k est associé un "filtre-k" réalisé par Transformée de Fourier Discrète utilisant quatre échantillons par période de l'harmonique k . Le calcul classique de la TFD fournit une somme de coefficients d'harmoniques k et multiples de k . Il est facile d'isoler le coefficient de Fourier cherché.

1. Conventions d'écriture et rappels

Soit un signal périodique $s(t)$, de période $T_1 = \frac{1}{f_1}$.

$$(1) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_1 t}$$

Nous désignons par "filtre-k" le filtre laissant passer uniquement l'harmonique k . Ce filtre serait fourni par un dispositif réalisant parfaitement l'intégrale de Fourier :

$$(2) \quad C_k = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} s(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt$$

L'évaluation de cette intégrale par la méthode des rectangles avec le pas d'échantillonnage $T_e = \frac{T_1}{N}$ conduit, en posant [1, p. 67]

$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, au résultat suivant :

$$(3) \quad C'_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} s(pT_e) W^{kp}$$

La relation entre C_k et C'_k s'obtient en remplaçant $s(pT_e)$ par son expression déduite de (1) :

$$(4) \quad C'_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \sum_{p=0}^{N-1} W^{p(k-n)}$$

La somme sur p est toujours nulle sauf lorsque $n = k + qN$ (q entier relatif), auquel cas elle vaut N . Les coefficients C'_k et C_k sont donc liés par le système d'équations linéaires :

$$(5) \quad C'_k = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} C_{k+qN}$$

Habituellement, dans la Transformée de Fourier Discrète, le nombre d'échantillons N est choisi très grand et un filtre passe-bas (anti-repliement), installé avant le convertisseur analogique-numérique, élimine les harmoniques d'ordres différents de k . On obtient donc directement $C_k = C'_k$.

2. Echantillonnage par quart de période

Il est possible de supprimer les produits inhérents à la TFD, mais il faut alors conserver les harmoniques d'ordre supérieur. C'est ce que fait l'algorithme FFT-QP. Le résultat est une somme des coefficients d'harmoniques multiples.

2A. CALCUL

Pour analyser l'harmonique k , on prélève $4k$ échantillons synchrones par période du fondamental (limite du théorème de Shannon, cf. [3, p. 83]).

Avec $N = 4k$, W^k devient égal à $-j$, et la formule (3) devient :

$$(6) \quad C'_k = \frac{1}{4k} \sum_{p=0}^{4k-1} s(pT_e) (-j)^p$$

Ainsi les produits n'existent plus. Plus précisément, les facteurs des produits sont des sinus ou cosinus d'angles multiples de $\pi/2$. Les coefficients C' sont donc obtenus par simples additions et soustractions, à un facteur près. La formule (6) se développe alors ainsi :

$$(7) \quad C'_k = \frac{1}{4k} [s(0) - s(2T_e) + s(4T_e) - \dots - s((4k-2)T_e)] + j \frac{1}{4k} [s(T_e) - s(3T_e) + s(5T_e) - \dots - s((4k-1)T_e)]$$

La figure 1 illustre cette formule dans le cas où $k = 3$.

$$C'_3 = \frac{1}{12} [s(0) - s(2T_e) + s(4T_e) - s(6T_e) + s(8T_e) - s(10T_e)] + \frac{j}{12} [-s(T_e) + s(3T_e) - s(5T_e) + s(7T_e) - s(9T_e) + s(11T_e)]$$

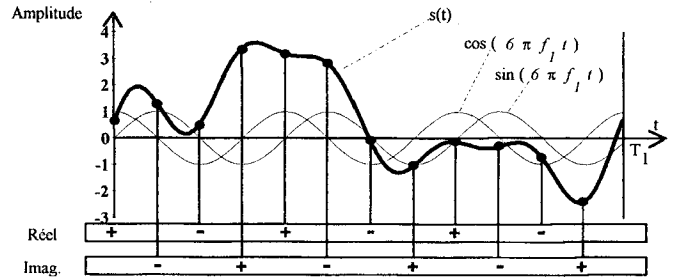


Fig. 1. - Les 12 échantillons du filtre-k, pour $k = 3$.

2B. SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Quand $N = 4k$, l'équation (6) donne :

$$(8) \quad C'_k = C_k + C_{3k}^* + C_{5k} + C_{7k}^* + C_{9k} + C_{11k}^* + C_{13k} + \dots$$

où C_n^* désigne le complexe conjugué de C_n ($C_n^* = C_{-n}$).

Le coefficient C'_k est la somme des coefficients, conjugués ou non, des harmoniques multiples impairs de C_k .

Lorsque le signal étudié contient un nombre connu M d'harmoniques (bande passante Mf_1), la série C'_k est bornée; M filtres- k ($k = 1$ à M) fournissent les M coefficients C'_k , dont on peut tirer les M coefficients C_k .

Par exemple, pour $M = 10$, une batterie de 10 filtres- k fournit les 10 coefficients C'_k , et le système d'équations est donné par la matrice triangulaire supérieure :

$$(9) \quad \begin{bmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \\ C'_4 \\ C'_5 \\ C'_6 \\ C'_7 \\ C'_8 \\ C'_9 \\ C'_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1^* & 0 & 1 & 0 & 1^* & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{bmatrix}$$

avec la convention : $1^* \times C = C^*$.

La résolution de ce système est donnée ci-dessous; entre crochets sont donnés les termes complémentaires pour un signal de 20

harmoniques. Le premier tiers des coefficients est trouvé par sommes et différences, et les deux derniers tiers sont immédiats.

$$\begin{aligned}
 (10) \quad C_1 &= C'_1 - C'_{3^*} - C'_{5^*} - C'_{7^*} & [-C'_{11^*} - C'_{13^*} + C'_{15^*} - C'_{17^*} - C'_{19^*}] \\
 C_2 &= C'_2 - C'_{6^*} - C'_{10^*} & [-C'_{14^*}] \\
 C_3 &= C'_3 - C'_{9^*} & [-C'_{15^*}] \\
 C_4 &= C'_4 & [-C'_{12^*} - C'_{20^*}] \\
 C_5 &= C'_5 & [-C'_{15^*}] \\
 C_6 &= C'_6 & [-C'_{18^*}] \\
 C_7 &= C'_7 \\
 C_8 &= C'_8 \quad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

3. Avantages de la FFT-QP

1. – Lorsque les conditions sont remplies (période et nombre d'harmoniques connus), chaque coefficient est trouvé de façon exacte.
2. – Les traitements numériques sont considérablement réduits par rapport à un algorithme FFT (Fast Fourier Transform) [4, p. 172] comme indiqué dans le tableau 1.

Tableau 1 : Nombres d'opérations selon les techniques de TFD.

	TFD classique	FFT Cooley-Tukey	FFT-QP
Nbre additions réelles	$2N(N+1)$	$N \log_2(N)$	$M(M+2)$
Nbre multiplications réelles	$4N^2$	$2N \log_2(N)$	$2M$

Les $2M$ multiplications réelles de la FFT-QP interviennent en fin de cumuls, pour faire les moyennes. Il faut encore ajouter les quelques additions ou soustractions pour les formules d'inversion (10).

3. – Le nombre d'échantillons est faible et le Convertisseur Analogique Digital (CAD) peut être relativement plus lent que dans les solutions de TFD classiques.

En contrepartie de ces deux derniers avantages, les problèmes de mise en œuvre sont délicats.

4. Les problèmes de mise en œuvre

Pour chaque filtre- k , l'échantillonnage est synchrone ($T_e = T_1/4k$). Pour un ensemble de filtres- k , l'échantillonnage devient asynchrone, plus difficile à mettre en œuvre qu'un échantillonnage synchrone.

Lorsque le calcul de FFT-QP est effectué en temps différé par logiciel, il est facile de s'approcher des instants théoriques d'échantillonnage par interpolation. Par contre lorsque ce calcul doit être effectué en temps réel par circuit spécialisé, il faut disposer de M horloges distinctes, aux fréquences $4kf_1$, avec $1 \leq k \leq M$.

SOLUTION 1 : VCO INTÉGRÉ À CHAQUE FILTRE-K

Il est possible d'équiper chaque filtre- k avec un VCO asservi sur la fréquence $4kf_1$. Cette solution réduit l'intérêt de la FFT-QP par rapport aux FFT classiques.

SOLUTION 2 : HORLOGE PILOTE EXACTE

La solution optimale consiste à fabriquer une horloge pilote de fréquence multiple des fréquences requises par les filtres- k . En particulier cette horloge pilote a une fréquence multiple de f_1 dans un rapport Q . On peut considérer que l'échantillonnage est synchrone, avec une période d'échantillonnage $T_e = T_1/Q$; parmi les Q échantillons virtuels obtenus, seuls certains sont utilisés.

Le rapport Q doit être multiple de quatre fois chaque nombre compris entre 1 et M :

$$(11) \quad Q = 4 \times \text{PPCM}(1, 2, 3, \dots, M-1, M)$$

Comme indiqué dans le tableau 2, établi pour $M = 5, 10, 15$ et 20 , Q croît de telle façon qu'il est physiquement impossible de conserver la règle (11).

Tableau 2 : Echantillonnage de FFT-QP

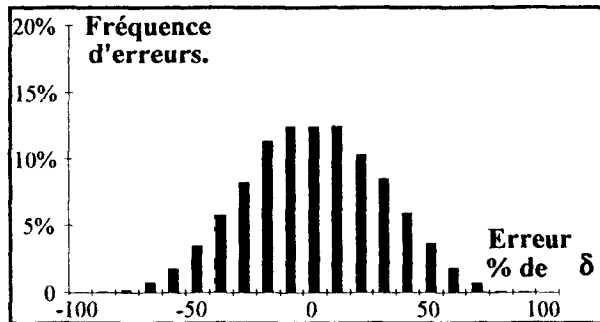
Nombre d'harmoniques :	$M = 5$	$M = 10$	$M = 15$	$M = 20$
Nbre d'échantil. virtuels (Q)	240	10080	1 441 440	931 170 240
Nbre d'échantil. requis	60	220	480	840
Nbre d'échantil. effectifs	40	128	288	512
Intervalle minimum (en T_e)	3	28	1 716	612 612
Durée de conversion à 1 KHz	12,5 μ s	2,78 μ s	1,19 μ s	0,66 μ s

Parmi les Q échantillons virtuels, seuls $2M(M+1)$ échantillons sont requis par les M filtres- k (quatre fois la somme des nombres de 1 à M). De plus, le même échantillon est souvent requis par plusieurs filtres- k , si bien que le nombre d'échantillons effectifs est encore plus faible.

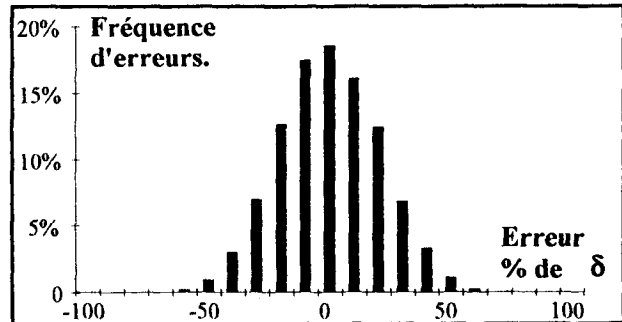
Le délai entre deux échantillons effectifs voisins varie au cours de la période T_1 ; le délai minimum entre les échantillons effectifs les plus rapprochés (intervalle minimum) a été exploré jusque $M = 20$. Ce délai a été chiffré en périodes d'échantillonnage virtuel (T_e), puis évalué pour un signal de référence de fréquence $f_1 = 1$ kHz. Il s'avère que la durée de conversion à imposer au CAD reste modeste, ce qui autorise l'usage de convertisseurs relativement lents.

SOLUTION 3 : HORLOGE PILOTE DÉGRADÉE

Dès que M est élevé, il faut se contenter de l'approximation introduite par des décalages Δt des échantillons dans le temps. Au lieu d'échantillonner à Q points par période, on échantillonne à N points ($N < Q$). Lorsqu'un filtre demande un échantillon, il reçoit la valeur de l'échantillon le plus proche, parmi les N disponibles.



Fonctions à 10 harmoniques.



Fonctions à 20 harmoniques.

Fig. 2 : Histogrammes des fréquences d'erreurs en fonction de leur valeur.

Ce décalage peut entraîner une erreur de mesure non négligeable. Le décalage maximum correspond à une demi période d'échantillonnage :

$$(12) \quad \Delta t_{\max} = |T_1 : 2N|$$

En assimilant le signal $s(t)$ et sa tangente au point d'échantillonnage, on trouve l'erreur relative maximale δ en majorant la dérivée de $s(t)$ et en prenant Δt_{\max} , soit :

$$(13) \quad \delta = \frac{2\pi}{N} \sum_{n=1}^H n|C_n|$$

Par exemple, δ vaut 34% pour une fonction $s(t)$ de 10 harmoniques à enveloppe rectangulaire échantillonnée à 1000 points par période.

Nous avons effectué 10000 simulations (chaque simulation sur une fonction différente) à Δt constant. Les résultats ont été regroupés par tranches et sont présentés sur les histogrammes de la figure 2, où les erreurs, positives ou négatives, sont rapportées en pourcentages de l'erreur maximum δ .

En pratique, les échantillons sont cumulés et les erreurs s'atténuent statistiquement. Toujours est-il que ces erreurs peuvent être importantes et qu'il importe de minimiser les Δt . Cette optimisation passe par un choix judicieux de N .

D'après la relation (12), Δt diminue lorsque N augmente. Par ailleurs, Δt est nul dans tous les filtres- k tels que $N = 4k$, c'est-à-dire lorsque N est sous multiple de Q .

Les deux simulations présentées ci-dessous illustrent l'importance du choix de N .

5. Simulations

Nous avons utilisé un ensemble de 500 fonctions de 10 harmoniques, de modules aléatoirement compris entre 0,5 et 10 et de phases aléatoirement comprises entre -180° et $+180^\circ$.

Une première simulation a été menée avec $N = Q = 10080$; les résultats ont été parfaits. Deux autres simulations ont été menées, l'une avec $N = 1024$, et l'autre avec $N = 840$, sous multiple de $Q(12 \times 840 = 10080)$.

ECHANTILLONNAGE À 1024 POINTS PAR PÉRIODE

Quatre filtres ($k = 1, 2, 4$ et 8) sont parfaits, car 1024 est multiple de $4 \times 1, 4 \times 2, 4 \times 4$ et 4×8 . Les équations (10) altèrent les coefficients C_1 et C_2 . Finalement tous les coefficients sauf deux ($k = 4$ et 8) sont entâchés d'erreur.

Les résultats de cette simulation sont reportés dans le tableau 3.

Tableau 3 : Résultats des simulations avec échantillonnage sur 1024 points.

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{\varepsilon}_m$	0,1	0,2	0,2	0	0,1	0	0	0	0,1	0
$\sigma(\varepsilon_m)$	4,6	3	0,7	0	2,2	1,6	1,9	0	1,4	1
$\text{sup} \varepsilon_m $	32,3	18,4	4,7	0	20,6	9,7	16	0	10	5,6
$\bar{\varepsilon}_\varphi$	0,1	0,1	0	0	0,1	0	0,1	0	0	0
$\sigma(\varepsilon_\varphi)$	3	1,6	0,4	0	1,4	1,2	1	0	0,7	0,7
$\text{sup} \varepsilon_\varphi $	29	10,9	2,6	0	13,2	8,2	8,7	0	4,4	5,2

Légende :

- $\bar{\varepsilon}_m$ = moyenne des erreurs relatives sur les modules (%).
- $\sigma(\varepsilon_m)$ = écarts types des erreurs relatives sur les modules (%).
- $\text{sup}|\varepsilon_m|$ = valeur absolue de l'erreur relative maximum sur les modules (%).
- $\bar{\varepsilon}_\varphi$ = moyenne des erreurs sur les angles (en degrés).
- $\sigma(\varepsilon_\varphi)$ = écart type des erreurs sur les angles (en degrés).
- $\text{sup}|\varepsilon_\varphi|$ = valeur absolue de l'erreur maximum sur les angles (en degrés).

ECHANTILLONNAGE À 840 POINTS PAR PÉRIODE

Sept filtres ($k = 1, 2, 3, 6, 7$ et 10) sont parfaits, car 840 est multiple de $4k$ pour chacune de ces valeurs de k . Les équations

(10) altèrent le coefficient C_3 . Finalement quatre coefficients ($k = 3, 4, 8$ et 9) sont entachés d'erreur.

Les résultats de cette simulation sont reportés dans le tableau 4.

Tableau 4 : Résultats des simulations avec échantillonnage sur 840 points.

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{\varepsilon}_m$	0	0	0,43	0,03	0	0	0	0,02	0	0
$\sigma(\varepsilon_m)$	0	0	0,03	0,52	0	0	0	0,53	0,94	0
$\sup \varepsilon_m $	0	0	0,63	0,75	0	0	0	0,76	5,38	0
$\bar{\varepsilon}_\varphi$	0	0	0	0,41	0	0	0	0,41	0,01	0
$\sigma(\varepsilon_\varphi)$	0	0	0,02	0,3	0	0	0	0,3	0,5	0
$\sup \varepsilon_\varphi $	0	0	0,13	0,86	0	0	0	0,86	3,1	0

REMARQUES

Les mêmes séries de simulation ont été menées sur un échantillonnage à 1024 points avec traitement par interpolation linéaire. Les erreurs sont nettement plus faibles.

Tableau 5 : Résultats des simulations avec interpolation sur 1024 points.

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{\varepsilon}_m$	0	0	0	0	0,01	0,01	0,01	0	0,03	0,03
$\sigma(\varepsilon_m)$	0,02	0,04	0,01	0	0,02	0,02	0,02	0	0,01	0,01
$\sup \varepsilon_m $	0,1	0,33	0,06	0	0,18	0,11	0,14	0	0,1	0,06
$\bar{\varepsilon}_\varphi$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma(\varepsilon_\varphi)$	0,01	0,02	0	0	0,01	0,01	0,01	0	0,01	0
$\sup \varepsilon_\varphi $	0,1	0,13	0,04	0	0,1	0,1	0,08	0	0,03	0,04

Le bruit de quantification apporté par un convertisseur analogique-digital à 8 bits apporte des erreurs de même ordre de grandeur que celles obtenues par interpolation.

La FFT-QP s'applique donc facilement dans les traitements logiciels; dans le cas de solutions matérielles, la FFT-QP est intéressante dans des applications bien cernées, et dans ces cas, la mise en œuvre de l'échantillonnage asynchrone est relativement aisée.

CONCLUSION

La technique de "FFT par quart de période" présentée dans cet article permet de calculer les premiers coefficients des harmoniques d'un signal. Elle est originale sur trois points : le calcul est exact, il s'effectue sans produit et le nombre d'échantillons requis est faible. Son usage nécessite cependant la mise en œuvre d'un échantillonnage délicat. Cette méthode convient donc mieux à un traitement logiciel en temps différé.

La FFT-QP ne peut, en principe, s'appliquer que lorsque deux conditions sont remplies : la période est connue, et le nombre

d'harmoniques est limité. Souvent les signaux étudiés sont mis en forme par un filtre passe-bas en amont. Les filtres électroniques actuels atteignent un niveau de perfection tel que la FFT-QP peut réaliser une analyse d'harmoniques très précise.

A titre indicatif, un circuit monolithique a été conçu sous SOLO 1400. Ce circuit va s'intégrer dans un ensemble déjà testé. En amont, un filtre Caueur passe-bas à bande passante dynamique coupe les harmoniques à partir de la neuvième. Un asservissement unique règle la bande passante du filtre Caueur et fournit la fréquence pilote du circuit FFT-QP. En aval, un processeur recueille, en fin de chaque période, les parties réelles et imaginaires des coefficients C' , calculées par chacun des 8 filtres, en déduit les coefficients C , et donne une signature du son voisé.

La FFT-QP est donc un algorithme nouveau permettant de calculer plus rapidement la transformée de Fourier. Cet algorithme peut trouver des applications dans quelques domaines spécifiques.

Remerciements. Les auteurs remercient vivement les membres du comité de lecture de la revue Traitement du Signal.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BELLANGER. "Traitement numérique du signal. Théorie et pratique", Masson, 4^e édition, 1990.
- [2] J.G. WADE. "Codage et traitement du signal", Masson, 1991.
- [3] J. MAX. "Méthodes et techniques de traitement du signal, et applications aux mesures physiques", 4^e édition, t. 1, Masson, 1989.
- [4] M. KUNT. "Traitement numérique des signaux", 3^e édition, Dunod, 1981.

CURRICULUM VITAE

Philippe LOOSFELT est né près de Lille, le 21 décembre 1943. Il est ingénieur de l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille (EUDIL 1971). Il a soutenu son Doctorat d'Université et son Doctorat d'Etat à Lille, respectivement en 1977 et 1986. Depuis 1971, il est enseignant en Formation Continue. Ses recherches en Traitement du Signal et de l'Image sont orientées vers les interfaces Homme-Machine dans le cadre de l'Enseignement Assisté par Ordinateur.

Pierre DESPLANQUES est ingénieur de l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord (ISEN), docteur ès Sciences physiques et maître ès Mathématiques. Il dirige actuellement le Département Informatique - Mesures - Automatique de l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille (EUDIL) et y enseigne les mathématiques. Ses domaines de recherche sont les polygones orthogonaux et la théorie du signal.

Abdennacer CHERRADI est titulaire du DEA d'Electronique (option micro-electronique - 1990) de l'Université de Lille I. Il prépare actuellement une thèse de doctorat sur le thème de la reconnaissance des sons voisés.

Manuscrit reçu le 22 janvier 1992.

Dernière version le 7 juillet 1993.