

Soustraction de bruit dans un cas non conventionnel : présence de sinusoides de fréquences identiques dans le signal et la référence-bruit

Noise Soustraction With Sinusoidal Inputs



Christine SERVIÈRE

Centre d'Étude des Phénomènes
Aléatoires et Géophysiques
BP 46,
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex

Christine Servièrre a obtenu en 1986 le diplôme d'ingénieur de l'École Nationale Supérieure des Ingénieurs Électriciens de Grenoble. Elle a soutenu en 1989 une thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble sur la comparaison de méthodes de soustraction de bruit appliquées à des signaux de sonars. Elle est actuellement chargée de recherche au CNRS depuis 1990. Ses domaines de recherche concernent le filtrage adaptatif, l'application des moments d'ordres supérieurs à la soustraction de bruit et la séparation de sources.



D. BAUDOIS

Centre d'Étude des Phénomènes
Aléatoires et Géophysiques
BP 46,
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex

Ingénieur électricien, diplômé de l'École Nationale Supérieure des Ingénieurs électriciens de Grenoble (1970) et Maître de Conférences à l'ENSIEG (Institut National Polytechnique de Grenoble) il anime au CEPHAG un groupe de recherche concernant la réduction du bruit à l'aide d'algorithmes adaptatifs.

RÉSUMÉ

Cet article traite de l'estimation du gain complexe d'un filtre linéaire et homogène dans le cadre de la soustraction de bruit, lorsque le signal utile et la référence-bruit sont corrélés. Nous étudions le cas où ces deux signaux contiennent des composantes déterministes de même fréquence.

La méthode classique consiste à déterminer un filtre linéaire et homogène qui, excité par la référence-bruit, fournit une estimation du bruit perturbateur. Les paramètres de ce filtre sont obtenus en minimisant un critère quadratique entre la référence filtrée et la voie signal. Cette approche est couramment appelée méthode (ou filtrage) de Wiener. Malheureusement, dans ce contexte, son utilisation entraîne une dégradation des performances de la réduction de bruit.

Dans ce travail, nous chiffrons ces pertes de performances, puis nous

proposons deux méthodes permettant d'améliorer cette réduction. Ces méthodes prennent en compte des informations statistiques d'ordre 1, 2 ou 3 issues d'hypothèses de décorrélation et d'indépendance des parties aléatoires contenues dans les signaux.

Nous comparons les deux méthodes proposées en calculant les variances des deux estimateurs. Les résultats analytiques sont validés par des simulations.

MOTS CLÉS

Soustraction de bruit, identification de filtres, filtrage de Wiener, statistiques d'ordre supérieur

ABSTRACT

This paper deals with the estimation of the complex gain of a linear filter in a noise cancelling problem. We consider the particular case where the useful signal and the noise-reference are correlated because they all contain sinusoids of same frequencies.

The classical method of Wiener filtering cannot be used correctly in this context when signals are correlated. We first study the decrease of the performances of the noise cancelling. Then we propose two methods which both estimate exactly a linear filter, considering a noise soustrac-

tion model. These methods use informations at order 1, 2 and 3 in frequency-domain. These informations take into account decorrelation and independence hypothesis of random terms contained in signals. The two methods are compared by computing their quadratic errors. Theoretical results are validated with simulations.

KEY WORDS

Noise soustraction, filters identification, Wiener filtering, higher order statistics.

1. Introduction

L'extraction de l'information contenue dans un signal additivement bruité est un problème très classique en traitement du signal. Nous nous intéressons plus particulièrement au cas pratique où nous avons accès à une référence-bruit corrélée au bruit perturbateur. Ce problème conduit à la définition du soustracteur de bruit. Il s'agit de construire un filtre à réponse impulsionnelle finie (R.I.F.) \mathcal{W} , qui excité par la référence-bruit, fournit une estimation du bruit perturbateur additivement le signal. Une approche classique consiste à déterminer \mathcal{W} en minimisant un critère quadratique : il s'agit de la méthode de Wiener.

Lorsque la corrélation entre la référence-bruit et le bruit perturbateur résulte de l'existence d'un filtrage linéaire et homogène (\mathcal{F}), la méthode de Wiener revient en fait à identifier le filtre \mathcal{F} . Dans le cas plus général où le transfert \mathcal{F} n'est plus linéaire, le filtre obtenu \mathcal{W} est son approximant dans la classe des filtres linéaires (au sens de l'écart quadratique moyen minimal).

La méthode de Wiener conduit à des calculs simples utilisant des moments du second ordre (fonctions de corrélations ou densités spectrales dans le cas de signaux stationnaires). Le filtre \mathcal{W} peut être caractérisé, soit par les coefficients de sa réponse impulsionnelle, soit par ceux de son gain complexe.

La première méthode, qui consiste à renouveler l'estimation de la réponse du filtre pour chaque échantillon des signaux a déjà été largement étudiée. Elle conduit à des solutions maintenant très connues, optimales de type Moindres-Carrés-Rapides [1] ou Treillis [2] ou sous-optimales de type Gradient [3].

La seconde méthode consiste à renouveler l'estimation du gain complexe du filtre en effectuant des transformées de Fourier de tranches temporelles de signal. Elle conduit aussi à des méthodes optimales au sens des moindres-carrés de type Wiener [4] [5] ou sous-optimales de type Gradient [6].

Les performances de toutes ces méthodes de soustraction de bruit sont fondées sur les propriétés statistiques de la référence-bruit : indépendance avec le signal à estimer et corrélation avec le bruit perturbateur. Malheureusement, en pratique la référence observée est souvent corrélée avec le signal utile (présence de composantes du réseau 50 Hz par exemple ou de raies harmoniques...). Dans ces conditions, l'utilisation de la méthode de Wiener entraîne une dégradation des performances du soustracteur. En particulier lorsque le filtre \mathcal{F} est linéaire et homogène la méthode ne conduit plus à son identification. Celle-ci repose en effet sur la décorrélation entre la référence-bruit et le signal utile, ce qui n'est plus le cas.

Dans une première étape, nous chiffrons donc cette dégradation entraînée par l'utilisation du filtre \mathcal{W} .

Dans une seconde étape, nous proposons deux méthodes qui conduisent à l'identification du filtre \mathcal{F} supposé linéaire et homogène. Ces méthodes sont élaborées dans le domaine fréquentiel et utilisent des informations statistiques d'ordre 1, 2 ou 3. Nous comparons ensuite ces deux méthodes en calculant les erreurs quadratiques effectuées sur les gains complexes des filtres estimés sur des durées finies et montrons que les informations à l'ordre 3 sont intéressantes pour des références particulièrement bruitées. Ces résultats théoriques sont finalement validés par des expériences sur signaux simulés.

2. Estimation du gain complexe d'un filtre dans le cadre de la soustraction de bruit

2.1. PRINCIPE DE LA SOUSTRACTION DE BRUIT

Dans la suite, nous supposons que les signaux sont à temps discret. Le signal utile $s(k)$ n'est pas directement observé. L'opérateur dispose d'une observation bruitée $x(k) = s(k) + v(k)$. La soustraction de bruit est une technique utilisée lorsqu'en plus de $x(k)$, un signal $r(k)$, linéairement corrélé au bruit perturbateur $v(k)$ et indépendant du signal utile

$s(k)$ est également accessible. La soustraction de bruit revient alors à un problème d'identification de filtre. Il suffit en effet d'estimer le filtre réel \mathcal{F} qui engendre le bruit $v(k)$ à partir du signal $r(k)$, appelé « référence-bruit seul » (fig. 1). Excité par $r(k)$, le filtre reconstruit \mathcal{W} fournit alors une estimation du bruit, $\hat{v}(k)$, qui retranchée à l'observation $x(k)$ donne une estimation du signal utile, $\hat{s}(k)$.

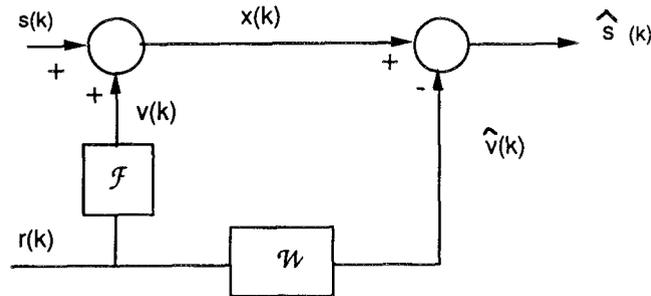


Figure. 1. — Schéma de principe du soustracteur de bruit.

Nous nous intéressons dans la suite, à l'estimation des paramètres du filtre linéaire et homogène \mathcal{W} qui excité par le signal aléatoire $r(k)$, supposé stationnaire au second ordre et centré, approche au sens de l'écart quadratique moyen minimal le signal aléatoire $v(k)$ (fig. 1). $v(k)$ et $s(k)$ sont supposés eux-mêmes être stationnaires au second ordre et centrés.

2.2. FORME DE L'ESTIMATEUR DU GAIN COMPLEXE

Le filtre \mathcal{W} est un filtre discret à réponse impulsionnelle finie (RIF) caractérisé par les N valeurs de sa réponse impulsionnelle $w(0), \dots, w(N-1)$ ou par les N valeurs $W(0), \dots, W(N-1)$ de son gain complexe $W(n)$ calculées pour les fréquences discrètes n_0, n_1, \dots, n_{N-1} obtenues par transformée de Fourier discrète (TFD) des échantillons de la réponse impulsionnelle. Le vecteur $w(i)$ est obtenu par le principe de la projection orthogonale :

$$(1) \quad \Gamma_{vr}(p) - \sum_{i=0}^{N-1} w(i) \Gamma_{rr}(p-i) = 0; \quad 0 \leq p \leq N-1,$$

expression dans laquelle $\Gamma_{vr}(p)$ [resp: $\Gamma_{rr}(p)$] est la fonction d'intercorrélation entre $r(k)$ et $v(k)$ [resp: fonction de corrélation de $r(k)$]. Dans les hypothèses classiques de la soustraction de bruit, $s(k)$ et $v(k)$ sont indépendants et centrés. Le vecteur $w(i)$ peut donc être calculé par l'expression (2) qui ne contient que des quantités accessibles :

$$(2) \quad \Gamma_{xr}(p) - \sum_{i=0}^{N-1} w(i) \Gamma_{rr}(p-i) = 0; \quad 0 \leq p \leq N-1.$$

En général, $W(n)$ est approchée par :

$$(3) \quad W(n) = \frac{\gamma_{xr}(n)}{\gamma_{rr}(n)}$$

où $\gamma_{xr}(n)$ [resp: $\gamma_{rr}(p)$] est la TFD de $\Gamma_{xr}(n)$ [resp: $\Gamma_{rr}(p)$]. Les expressions (2) et (3) ne sont pas rigoureusement identiques à cause de la périodisation effectuée par l'opération de TFD. Cependant, on peut choisir N suffisamment grand devant le support du filtre \mathcal{F} à estimer pour diminuer l'influence de la convolution circulaire effectuée par les TFD.

En pratique, cette approche probabiliste est difficile à mettre en œuvre car nous avons rarement une connaissance sur les moments statistiques $\Gamma_{xr}(p)$ et $\Gamma_{rr}(p)$.

Deux méthodes sont alors possibles. Dans la première méthode, l'estimation de $W(n)$ est obtenue en remplaçant $\gamma_{xr}(n)$ et $\gamma_{rr}(n)$ par leurs estimations $\hat{\gamma}_{xr}(n)$ et $\hat{\gamma}_{rr}(n)$ calculées à partir d'observations de durée finie T . Ainsi l'estimation $\hat{W}(n)$ de $W(n)$ sera définie de la manière suivante :

$$(4) \quad \hat{W}(n) = \frac{\hat{\gamma}_{xr}(n)}{\hat{\gamma}_{rr}(n)}.$$

L'adaptativité du traitement n'est assurée que si les estimations $\hat{\gamma}_{xr}(n)$ et $\hat{\gamma}_{rr}(n)$ de $\gamma_{xr}(n)$ et $\gamma_{rr}(n)$ sont renouvelées au cours du temps en tenant compte de tranches successives des signaux observés. Nous supposons avoir accès, à un instant

donné, à L tranches adjacentes ou non, constituées chacune de N échantillons temporels où N est égal à l'ordre du filtre choisi (ou nombre de points qui définissent la réponse impulsionnelle du filtre). Nous utilisons la méthode du périodogramme moyenné pour estimer $\hat{\gamma}_{xr}(n)$ et $\hat{\gamma}_{rr}(n)$, en introduisant un facteur d'oubli λ pour tenir compte d'éventuelles non stationnarités lentes des signaux $r(k)$ et $x(k)$.

$$(5) \quad \begin{aligned} \hat{\gamma}_{xr}(n) &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{1}{N} \lambda^{L-i} \chi^i(n) \bar{\mathcal{R}}^i(n) \\ \hat{\gamma}_{rr}(n) &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{1}{N} \lambda^{L-i} \mathcal{R}^i(n) \bar{\mathcal{R}}^i(n) \end{aligned}$$

où $\chi^i(n)$ et $\mathcal{R}^i(n)$ sont respectivement les transformées de Fourier discrètes calculées à partir des N échantillons de la i-ème tranche temporelle des signaux $x(k)$ et $r(k)$ et où $\bar{\mathcal{R}}^i(n)$ représente le complexe conjugué de $\mathcal{R}^i(n)$.

Dans la deuxième méthode qui est une approche totalement déterministe, $\hat{W}(n)$ est vu comme minimisant un critère quadratique déterministe :

$$\sum_{i=1}^L \lambda^{L-i} |\chi^i(n) - \hat{W}(n) \mathcal{R}^i(n)|^2.$$

Les deux méthodes conduisent en pratique au même estimateur $\hat{W}(n)$ (4), (5).

Dans la suite, nous considérons le cas pratique où le signal utile $s(k)$ est corrélé à la référence dans la mesure où les deux signaux contiennent une ou plusieurs composantes déterministes de même fréquence, provenant par exemple d'un même signal physique. Ces signaux ne sont plus centrés : l'équation (1) est toujours exacte mais l'équation (2) qui ne contient que des quantités accessibles n'est plus vérifiée [7]. Dans le domaine fréquentiel, pour ces fréquences communes, la densité spectrale de puissance d'interaction entre $s(k)$ et $v(k)$ n'est plus nulle. Le gain complexe $W(n)$ de \mathcal{W} ne peut plus être calculé par l'expression (3) qui, sans aménagement, ne tend plus vers $F(n)$. Un nouvel estimateur doit donc être cherché.

3. Cas de la présence de sinusoides dans le signal et la référence

Dans cette partie, nous modélisons les signaux en 3.1, puis nous étudions en 3.2 la dégradation des performances du soustracteur entraînée par l'utilisation de la formule (3) contenant seule des quantités observées $x(k)$ et $r(k)$. Nous proposons ensuite en 3.3 et 3.4 deux méthodes permettant une identification exacte du transfert linéaire \mathcal{F} entre les signaux $r(k)$ et $v(k)$. La première méthode centre les signaux observés tandis que la seconde utilise des informations à l'ordre 3.

3.1. MODÉLISATION DES SIGNAUX

Nous supposons dans une première étape que $s(k)$ [resp. $r(k)$] est la somme d'une sinusoïde et d'un bruit aléatoire stationnaire au second ordre et centré :

$$(6) \quad \begin{aligned} s(k) &= A_s \sin(2\pi\omega k + \phi_s) + b_s(k) \\ r(k) &= A_r \sin(2\pi\omega k + \phi_r) + b_r(k) \end{aligned}$$

A_s , A_r , ϕ_s et ϕ_r sont des amplitudes et des phases déterministes et inconnues, la relation de phase entre ϕ_s et ϕ_r restant inchangée au cours du temps. La fréquence ω est a priori inconnue. Les bruits $b_s(k)$ et $b_r(k)$ sont supposés indépendants et centrés.

Les signaux sont découpés en tranches temporelles adjacentes, chaque tranche contenant N échantillons. La transformée de Fourier discrète de la i-ème tranche temporelle est alors égale à

$$(8) \quad \mathcal{F}^i(n) = \sum_{k=iN}^{(i+1)N-1} [A_s \sin(2\pi\omega k + \phi_s) + b_s(k)] e^{-2\pi j \frac{kn}{N}}.$$

Soit (9) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^i(n) &= \frac{A_s}{2j} \left[e^{j \left[\phi_s + 2\pi\omega iN + \pi(N-1) \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} \frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} \right. \\ &\quad \left. - e^{-j \left[\phi_s + 2\pi\omega iN + \pi(N-1) \left(\omega + \frac{n}{N} \right) \right]} \frac{\sin \left[\pi \left(\omega + \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega + \frac{n}{N} \right) \right]} \right] + \mathcal{B}_s^i(n). \end{aligned}$$

Dans cette expression, $\mathcal{B}_s^i(n)$ est la composante fréquentielle d'un bruit aléatoire centré de densité spectrale de puissance moyenne $\gamma b_s(\nu)$. La fenêtre de pondération $\frac{\sin \left[\pi \left(\omega + \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega + \frac{n}{N} \right) \right]}$ centrée autour de $-\omega N$ a très peu d'influence dans la partie significative de la transformée de Fourier $[n = 0, \dots, (N-1)/2]$. $\mathcal{S}^i(n)$ et $\mathcal{R}^i(n)$ ne peuvent alors être approximés par :

$$(10) \quad \mathcal{S}^i(n) = \frac{A_s}{2j} e^{j \left[\phi_s + 2\pi\omega n + \pi(N-1) \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} \frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} + \mathcal{B}_s^i(n)$$

$$(11) \quad \mathcal{R}^i(n) = \frac{A_r}{2j} e^{j \left[\phi_r + 2\pi\omega n + \pi(N-1) \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} \frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} + \mathcal{B}_r^i(n).$$

Dans le cas où il y a plusieurs sinusoides de même fréquences $\omega_1, \dots, \omega_p$ dans $s(k)$ et $r(k)$, le modèle proposé (10) et (11) est encore correct si N est assez grand et si les différentes fréquences sont assez espacées. Chacune sera alors traitée de manière indépendante.

3.2 DÉGRADATION DE LA MÉTHODE CLASSIQUE

Nous cherchons maintenant à calculer la dégradation des performances du système soustracteur (3) pour les fréquences n où la fenêtre de pondération $\frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]}$ n'est pas négligeable [cas d'une corrélation réelle entre $\mathcal{S}^i(n)$ et $\mathcal{R}^i(n)$].

Le gain complexe du filtre $W(n)$ a pour expression en supposant le filtre \mathcal{F} linéaire :

$$(12) \quad W(n) = \frac{E \{ \mathcal{X}^i(n) \bar{\mathcal{R}}^i(n) \}}{E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \}}.$$

Il se décompose en deux termes : l'un réalise la minimisation d'un écart quadratique entre $\mathcal{Y}^i(\nu)$ et $\mathcal{R}^i(\nu)$ tandis que l'autre est responsable de la dégradation du système.

$$(13) \quad W(n) = \frac{E \{ \mathcal{Y}^i(n) \bar{\mathcal{R}}^i(n) \}}{E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \}} - \frac{A_r A_s}{4 E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \}} e^{j[\phi_s - \phi_r]} \left[\frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} \right]^2.$$

L'erreur d'estimation qui en découle vaut alors :

$$(14) \quad \varepsilon^i(n) = \left[W(n) - \frac{E \{ \mathcal{Y}^i(n) \bar{\mathcal{R}}^i(n) \}}{E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \}} \right] \cdot \mathcal{R}^i(n).$$

La puissance de cette erreur qui mesure la dégradation du système soustracteur de bruit s'exprime par :

$$(15) \quad E \{ |\varepsilon^i(n)|^2 \} = \frac{[A_r A_s]^2}{16 E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \}} \left[\frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} \right]^2.$$

Cette formule montre que la puissance d'erreur « résiduelle » est proportionnelle aux amplitudes des composantes déterministes présentes dans les signaux et peut ne pas être négligeable. La méthode d'estimation (3) est donc en général inutilisable sans aménagement.

3.3. MÉTHODES PROPOSÉES-ANALYSE PROBABILISTE

3.3.1. Espace des fréquences continues

Dans ce paragraphe, nous considérons les signaux dans les espaces à temps et à fréquence continus. Nous proposons deux méthodes permettant l'identification exacte du filtre \mathcal{F} supposé linéaire et homogène. Nous cherchons donc à évaluer le gain complexe $F(\nu)$ du filtre \mathcal{F} (où ν est la variable dans l'espace des fréquences continues) tel que l'on ait :

$$(16) \quad \chi_T(\nu) = \mathcal{S}_T(\nu) + F(\nu) + F(\nu) \mathcal{R}_T(\nu)$$

où $\chi_T(\nu)$ est la transformation de Fourier du signal $x(t)$ de durée T .

Une première équation peut être obtenue en faisant intervenir des moments d'ordre deux, c'est-à-dire en calculant la densité spectrale de puissance d'interaction $E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \chi_T(\nu) \overline{\mathcal{R}_T(\nu)} \right\}$.

$$(17) \quad \gamma_{xr}(\nu) = \frac{A_s A_r}{4} [e^{j[\phi_s - \phi_r]} \delta(\nu - \omega N) + e^{-j[\phi_s - \phi_r]} \delta(\nu + \omega N)] + F(\nu) \gamma_{rr}(\nu).$$

Cette équation est obtenue en utilisant l'hypothèse de décorrélation entre les parties aléatoires de $\mathcal{S}_T(\nu)$ et $\mathcal{R}_T(\nu)$. Cette équation permet de calculer le filtre aux fréquences ν différentes de ωN et $-\omega N$. Pour les deux autres fréquences, une deuxième équation est nécessaire. Elle peut être obtenue, soit en calculant le moment d'ordre 1 sous l'hypothèse de bruits aléatoires centrés, soit en calculant un moment d'ordre 3 sous l'hypothèse de bruits aléatoires indépendants et centrés.

$$(18) \quad m_x(\nu) = \frac{A_s}{2j} [e^{j[\phi_s]} \delta(\nu - \omega N) - e^{-j[\phi_s]} \delta(\nu + \omega N)] + F(\nu) m_r(\nu)$$

où $m_x(\nu)$ est la transformée de Fourier de $E \{x(t)\}$. Cette quantité existe : elle est nulle pour la partie aléatoire stationnaire et centrée et définie au sens des distributions pour la partie déterministe.

$$(19) \quad E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \chi_T(\nu) |\mathcal{R}_T(\nu)|^2 \right\} = \frac{A_s}{2j} [e^{j[\phi_s]} \delta(\nu - \omega N) - e^{-j[\phi_s]} \delta(\nu + \omega N)] \left[\left| \frac{A_r}{2} \right|^2 + \gamma_{br}(\nu) \right] + F(\nu) E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{R}_T(\nu) |\mathcal{R}_T(\nu)|^2 \right\}.$$

Les moments d'ordre 3 existent : ils sont nuls en faisant l'hypothèse réaliste que les signaux aléatoires sont à densité de probabilité symétrique ou sont définis au sens des distributions.

En remarquant que $\gamma_r(\nu) = \left| \frac{A_r}{2} \right|^2 [\delta(\nu - \omega N) + \delta(\nu + \omega N)] + \gamma_{br}(\nu)$, on s'aperçoit que nous avons deux inconnues : la composante déterministe du signal $s(t)$ à la fréquence étudiée ωN ou $-\omega N$ et le coefficient du gain complexe que l'on cherche $F(\nu)$. Deux des trois équations parmi (17), (18) ou (19) forment donc un système linéaire de deux équations à deux inconnues dont les coefficients ne dépendent que des quantités observées $x(t)$ et $r(t)$. Les solutions sont les suivantes :

$$(20) \quad F_1(\omega N) = \frac{\gamma_{xr}(\omega N) - m_x(\omega N) \cdot m_r(\omega N)}{\gamma_r(\omega N) - |m_r(\omega N)|^2}$$

(20) utilise les informations aux ordres 1 et 2.

$$(21) \quad F_2(\omega N) = \frac{\gamma_{xr}(\omega N) \cdot \gamma_r(\omega N) - E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \chi_T(\omega N) |\mathcal{R}_T(\omega N)|^2 \right\} \cdot \bar{m}_r(\omega N)}{(\gamma_r(\omega N))^2 - \bar{m}_r(\omega N) E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{R}_T(\omega N) |\mathcal{R}_T(\omega N)|^2 \right\}}$$

(21) utilise les informations aux ordres 2 et 3.

$$(22) \quad F_3(\omega N) = \frac{m_x(\omega N) \cdot \gamma_r(\omega N) - E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \chi_T(\omega N) |\mathcal{R}_T(\omega N)|^2 \right\}}{m_r(\omega N) \cdot \gamma_r(\omega N) - E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{R}_T(\omega N) |\mathcal{R}_T(\omega N)|^2 \right\}}$$

(22) utilise les informations aux ordres 1 et 3.

On remarque que les expressions (20) et (21) sont identiques au filtre classique lorsque la moyenne statistique des signaux est nulle (pas de corrélation entre le signal et la référence).

3.3.2. Espace des fréquences discrètes

Nous proposons maintenant deux méthodes permettant l'identification exacte dans les espaces à temps et à fréquences discrets du filtre \mathcal{F} supposé linéaire et homogène. Nous cherchons donc à évaluer le gain complexe $F(n)$ du filtre \mathcal{F} tel que pour chaque bloc temporel d'indice i on ait :

$$(23) \quad \chi^i(n) = \mathcal{S}^i(n) + F(n) \mathcal{R}^i(n).$$

Une première équation peut être obtenue en faisant intervenir des moments d'ordre deux, c'est-à-dire en calculant la densité spectrale de puissance d'interaction $E \{ \chi^i(n) \overline{\mathcal{R}^i(n)} \}$ à partir des équations (9) et (16).

$$(24) \quad E \{ \mathcal{X}^i(n) \overline{\mathcal{R}^i(n)} \} = \frac{A_s}{2j} e^{j \left[\phi_s + 2\pi\omega_i N + \pi(N-1) \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} \frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} + E \{ \overline{\mathcal{R}^i(n)} \} + F(n) E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \}.$$

Cette équation est obtenue en utilisant l'hypothèse de décorrélation entre les bruits $\mathcal{B}_s^i(n)$ et $\mathcal{B}_r^i(n)$. Pour chaque fréquence n , nous avons donc deux inconnues : la composante déterministe du signal $s(k)$ à la fréquence étudiée et le coefficient du gain complexe que l'on cherche $F(n)$. Une deuxième équation est donc nécessaire. Elle peut être obtenue, soit en calculant le moment d'ordre 1 sous l'hypothèse de bruits aléatoires centrés, soit en calculant un moment d'ordre 3 sous l'hypothèse de bruits aléatoires indépendants et centrés.

$$(25) \quad E \{ \mathcal{X}^i(n) \} = \frac{A_s}{2j} e^{j \left[\phi_s + 2\pi\omega_i N + \pi(N-1) \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} \frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} + F(n) E \{ \mathcal{R}^i(n) \}$$

$$(26) \quad E \{ \mathcal{X}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2 \} = \frac{A_s}{2j} e^{j \left[\phi_s + 2\pi\omega_i N + \pi(N-1) \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} \frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} + E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \} + F(n) E \{ \mathcal{R}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2 \}.$$

Deux des trois équations parmi (24), (25) ou (26) forment un système linéaire de deux équations à deux inconnues dont les coefficients ne dépendent que des quantités observées $x(k)$ et $r(k)$.

$$(27) \quad F_1(n) = \frac{E \{ \mathcal{X}^i(n) \cdot \mathcal{R}^i(n) \} - E \{ \mathcal{X}^i(n) \} \cdot E \{ \mathcal{R}^i(n) \}}{E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \} - |E \{ \mathcal{R}^i(n) \}|^2}$$

(27) utilise les informations aux ordres 1 et 2.

$$(28) \quad (F_2(n)) = \frac{E \{ \mathcal{X}^i(n) \cdot \mathcal{R}^i(n) \} \cdot E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \} - E \{ \mathcal{X}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2 \} \cdot E \{ \overline{\mathcal{R}^i(n)} \}}{(E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \})^2 - E \{ \mathcal{R}^i(n) \} E \{ \mathcal{R}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2 \}}$$

(28) utilise les informations aux ordres 2 et 3.

$$(29) \quad F_3(n) = \frac{E \{ \mathcal{X}^i(n) \} \cdot E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \} - E \{ \mathcal{X}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2 \}}{E \{ \mathcal{R}^i(n) \} E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \} - E \{ \mathcal{R}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2 \}}$$

(29) utilise les informations aux ordres 1 et 3.

On remarque que les expressions (27) et (28) sont identiques au filtre classique lorsque la moyenne statistique des signaux est nulle (pas de corrélation entre le signal et la référence).

Nous obtenons ainsi trois expressions rigoureusement équivalentes de $F(n)$, à condition de connaître les moments statistiques des signaux. En pratique ceci est impossible. Nous nous intéresserons dans la suite à une analyse non probabiliste où les moments seront estimés en effectuant des moyennes sur des blocs temporels. Des précautions doivent cependant être prises car les signaux ne sont pas ergodiques (présence du terme $e^{j[2\pi\omega iN]}$ dans (10) et (11)).

3.4. MÉTHODES PROPOSÉES - ANALYSE NON PROBABILISTE

Développons les moments d'ordre 2, 1 et 3 (premiers membres des équations (24) (25) et (26)) en effectuant des moyennes sur L blocs temporels. Nous obtenons les équations suivantes à deux inconnues dont les coefficients ne dépendent que des quantités observées. On montre (annexe 1) que si L est assez grand et dans les conditions d'une fenêtre d'observation finie, les termes $\varepsilon 1(n)$, $\varepsilon 2(n)$ et $\varepsilon 3(n)$ sont faibles.

$$(30) \quad \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{X}^i(n) \bar{\mathcal{R}}^i(n) = \frac{A_s}{2j} e^{j[\phi_s + \pi(N-1)(\omega - \frac{n}{N})]} \frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \bar{\mathcal{R}}^i(n) + F(n) \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} |\mathcal{R}^i(n)|^2 + \varepsilon 1(n)$$

$$(31) \quad \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{X}^i(n) = \frac{A_s}{2j} e^{j[\phi_s + \pi(N-1)(\omega - \frac{n}{N})]} \frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} + F(n) \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{R}^i(n) + \varepsilon 2(n)$$

$$(32) \quad \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{X}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2 = \frac{A_s}{2j} e^{j[\phi_s + \pi(N-1)(\omega - \frac{n}{N})]} \frac{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) N \right]}{\sin \left[\pi \left(\omega - \frac{n}{N} \right) \right]} \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} |\mathcal{R}^i(n)|^2 + F(n) \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \mathcal{R}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2 + \varepsilon 3(n).$$

Ces équations conduisent à trois estimateurs différents du filtre \mathcal{W} identifiant le filtre \mathcal{F} , calculés par (33), (34) et (35) en supposant la stationnarité des bruits aléatoires sur L tranches.

$$(33) \quad \hat{W}_1^L(n) = \frac{\frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{X}^i(n) \cdot \bar{\mathcal{R}}^i(n) - \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{X}^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{R}^i(n)}{\frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L |\mathcal{R}^i(n)|^2 - \frac{1}{N} \left| \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{R}^i(n) \right|^2}$$

$$(34) \quad \hat{W}_2^L(n) = \frac{\frac{1}{N^2 L} \sum_{i=1}^L \mathcal{X}^i(n) \cdot \mathcal{R}^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |\mathcal{R}^i(n)|^2 - \frac{1}{N^2 L} \sum_{i=1}^L \mathcal{X}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2 \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \bar{\mathcal{R}}^i(n)}{\frac{1}{N^2} \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |\mathcal{R}^i(n)|^2 \right)^2 - \frac{1}{N^2 L} \sum_{i=1}^L \bar{\mathcal{R}}^i(n) \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{R}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2}$$

$$(35) \quad \hat{W}_3^L(n) = \frac{\frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{X}^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |\mathcal{R}^i(n)|^2 - \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{X}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2}{\frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{X}^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |\mathcal{R}^i(n)|^2 - \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{R}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2}$$

Nous allons comparer les trois estimateurs proposés en calculant en 3.1 les erreurs quadratiques entre les filtres estimés par (33), (34), (35) et le filtre réel $F(n)$.

4. Comparaison des méthodes proposées

4.1. CALCUL DE L'ÉCART QUADRATIQUE

Nous nous proposons de calculer l'erreur quadratique commise lorsque l'on est proche de la convergence en effectuant des développements limités au premier ordre des quantités estimées. Pour chaque méthode à comparer, l'estimateur se met sous la forme suivante :

$$(36) \quad \widehat{W}(n) = \frac{\widehat{N}(n)}{\widehat{D}(n)} = \frac{N(n) + \delta N(n)}{D(n) + \delta D(n)}$$

où $\delta N(n)$ et $\delta D(n)$ sont les erreurs d'estimation commises par rapport aux numérateurs et dénominateurs théoriques des expressions (27), (28) et (29) (§ 2-3-2). En supposant une durée d'estimation assez longue, les quantités $\delta N(n)$ et $\delta D(n)$ sont faibles vis-à-vis de $N(n)$ et $D(n)$. Développons l'expression (36) au premier ordre en prenant par exemple le Logarithme de $W(n)$:

$$(37) \quad \delta W(n) = W(n) - \widehat{W}(n) \approx -\frac{N(n) \delta D(n)}{D(n)^2} + \frac{\delta N(n)}{D(n)}.$$

Nous avons supposé que sur chaque tranche d'indice i , on a (23) [filtre \mathcal{F} linéaire] :

$$\mathcal{X}^i(n) = \mathcal{S}^i(n) + F(n) \mathcal{R}^i(n) \quad (23)$$

En examinant les équations (27), (28), (29), (33), (34) et (35), on remarque que les quantités $N(n)$ et $\delta N(n)$ peuvent se séparer en deux termes dont l'un ne dépend que du signal s et l'autre que de la référence r .

$$(38) \quad \begin{aligned} N(n) &= N_s(n) + F(n) N_r(n) \\ \delta N(n) &= \delta N_s(n) + F(n) \delta N_r(n). \end{aligned}$$

D'après (27), (28) et (29), et en utilisant l'hypothèse de bruits aléatoires centrés, on obtient :

$$(39) \quad \begin{aligned} N_s(n) &= 0 \\ N_r(n) &= D(n) \\ \delta N_r(n) &= \delta D(n). \end{aligned}$$

L'équation (37) devient alors :

$$(40) \quad \widehat{W}(n) - F(n) \approx \frac{\delta N_s(n)}{D(n)}.$$

Les erreurs quadratiques des estimateurs 1, 2 et 3 sont alors calculées par :

$$(41) \quad E \{ |\widehat{W}^L(n) - F(n)|^2 \} \approx E \left\{ \left| \frac{\delta N_s^L(n)}{D(n)} \right|^2 \right\}$$

où $\delta N_s^L(n)$ est l'erreur commise en estimant les quantités sur L tranches temporelles de N échantillons. Nous supposons que les L tranches sont disjointes.

Le calcul de l'erreur quadratique (41) pour la méthode 1 est détaillé en annexe 2. Il conduit à :

$$(42) \quad E \{ |\widehat{W}_1^L(n) - F_1(n)|^2 \} \approx \frac{1}{L} \frac{E \{ |\mathcal{B}_s^i(n)|^2 \} E \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \}}{\gamma_{\mathcal{B}_r}^2(n)}.$$

Le calcul de l'erreur quadratique (41) pour la méthode 2 est détaillé en annexe 3. Il conduit à :

$$(43) \quad E \{ |\widehat{W}_2^L(n) - F_2(n)|^2 \} \approx \frac{E \{ |\delta N_s^L(n)|^2 \}}{\gamma_{\mathcal{B}_r}^4(n)}$$

où :

$$(44) \quad E \{ |\delta N_S^L(n)|^2 \} \approx \frac{1}{L} E \{ |\mathcal{B}_S^i(n)|^2 \} \left[\left(\frac{A_r}{2} \right)^4 E \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \} + \left(\frac{A_r}{2} \right)^2 \frac{1}{N^2} E^2 \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \} + \frac{1}{N^4} E^3 \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \} \right].$$

Le calcul de l'erreur quadratique (41) pour la méthode 3 est détaillé en annexe 4. Il conduit à :

$$(45) \quad E \{ |\widehat{W}_3^L(n) - F_3(n)|^2 \} \approx \frac{E \{ |\delta N_S^L(n)|^2 \}}{\left| \frac{A_r}{2} \right|^2 \gamma_{\mathcal{B}_r}^2(n)}$$

où :

$$E \{ |\delta N_S^L(n)|^2 \} \approx \frac{1}{L} E \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \} \left[2 \left(\frac{A_r}{2} \right)^2 \frac{1}{N^2} E \{ |\mathcal{B}_s^i(n)|^2 \} + \frac{1}{N^4} E^2 \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \} \right].$$

On remarque que l'erreur quadratique de l'estimateur 3 est toujours plus forte que dans le cas de la première méthode. D'autre part, le dénominateur théorique de $F_3(n)$ (29) est proportionnel à $A_r/2$. Cette méthode ne sera donc pas valable pour tous les canaux de fréquence traités, ce qui la rend difficilement utilisable. Nous ne comparerons donc par la suite en 4.2 que les écarts quadratiques des deux premiers estimateurs proposés.

4.2. COMPARAISON DES ÉCARTS QUADRATIQUES

Le calcul de la transformée de Fourier discrète sur une durée finie entraîne une erreur d'estimation sur les densités spectrales. La relation entre la transformée de Fourier discrète et la transformée de Fourier du signal $x(k)$, quand elle existe, vaut [8] :

$$(46) \quad \mathcal{X}^i(n) = \int_g^{g+1} \mathcal{X}(v) H(n-v) dv$$

où $H(n-v)$ est la transformée de Fourier discrète de la fenêtre de pondération utilisée. Dans le cas d'une fenêtre naturelle :

$$H(v) = \frac{\sin(\pi v N)}{\sin(\pi v)}.$$

Alors :

$$\frac{1}{N} E \{ |\mathcal{X}^i(n)|^2 \} = \frac{1}{N} \int_g^{g+1} \gamma_x(v) \left(\frac{\sin(\pi(n-v)N)}{\sin(\pi(n-v))} \right)^2 dv.$$

Supposons que les densités spectrales des bruits soient localement blanches autour de la fréquence considérée. L'intégrale peut être approchée en intégrant sur une plage correspondant à la largeur du lobe principal de la fenêtre de pondération :

$$(47) \quad \frac{1}{N} E \{ |\mathcal{X}^i(n)|^2 \} = \gamma_x(n) \frac{1}{N} \int_{-1/N}^{1/N} \left(\frac{\sin(\pi v N)}{\sin(\pi v)} \right)^2 dv.$$

Pour $N = 64, 128$ et 256 , nous avons calculé l'intégrale numériquement avec un pas de $1/(128 * 20\,000)$. Le résultat est quasiment indépendant de N . On obtient :

$$\frac{1}{N} E \{ |\mathcal{X}^i(n)|^2 \} \approx 0.9 \gamma_x(n).$$

L'erreur quadratique de la première méthode est alors :

$$(48) \quad E \{ |\widehat{W}_1^L(n) - F_1(n)|^2 \} \approx \frac{1}{L} \frac{0.9^2 \gamma_{\mathcal{B}_s}(n)}{\gamma_{\mathcal{B}_r}(n)}.$$

L'erreur quadratique de la deuxième méthode est alors :

$$(49) \quad E \{ |\widehat{W}_2^L(n) - F_2(n)|^2 \} \approx \frac{\frac{1}{L} \gamma_{\mathcal{B}_s}(n) \left[N^2 \left(\frac{A_r}{2} \right)^4 0.9^2 \gamma_{\mathcal{B}_r}(n) + \left(\frac{A_r}{2} \right)^2 N 0.9^2 \gamma_{\mathcal{B}_r}^2(n) + \gamma_{\mathcal{B}_r}^3(n) 0.9^4 \right]}{\gamma_{\mathcal{B}_r}^4(n)}.$$

Introduisons α , le rapport signal à bruit dans la voie référence au canal de fréquence n .

$$\alpha = \frac{\left(\frac{A_r}{2}\right)^2 N}{\gamma_{\mathcal{B}_r}(n)}$$

L'erreur quadratique de la méthode 2 est plus faible que celui de la méthode 1 lorsque :

$$(50) \quad 0.9^3 + \alpha 0.9^2 + \alpha^2 0.9 \leq 0.9$$

soit un rapport signal à bruit inférieur à -7.5 dB.

Nous constatons donc théoriquement que la méthode 2 utilisant des moments d'ordre 3 est intéressante pour des signaux de référence très bruités, au prix d'un coût de calcul beaucoup plus important que la première méthode. Nous allons en 4.3 valider ces résultats par des simulations.

4.3. COMPARAISON SUR SIGNAUX SIMULÉS

Nous avons appliqué les deux méthodes précédentes à des signaux simulés. Le signal consiste en la somme d'une sinusoïde d'amplitude 1, de fréquence réduite 0.3 et d'un bruit blanc gaussien de puissance unité. La référence consiste, elle, en la somme de la même sinusoïde (amplitude 1, fréquence réduite 0.3) et d'un bruit blanc gaussien de rapport signal à bruit α variable dans la référence (de -20 dB à 10 dB). Nous avons alors calculé la variance des estimateurs pour cette fréquence en ayant pris soin de se placer au-delà de la durée d'apprentissage du filtre. Cet écart est moyenné sur 12 réalisations. Les résultats sont présentés en figure 2. Aucun facteur d'oubli n'a été utilisé, étant donné la nature stationnaire des bruits.

| α | -20dB | -10dB | 0dB | 10dB |
|-----------|---------|---------|---------|----------|
| Méthode 1 | 1 E-8 | 2.2 E-7 | 1.1 E-6 | 3.4 E-5 |
| Méthode 2 | 6.4 E-9 | 9 E-8 | 2.2 E-6 | 6.25 E-2 |

Figure 2. — Évolution de l'écart quadratique en fonction du rapport signal à bruit dans la référence.

Nous constatons donc que les performances de la méthode 1 sont supérieures à celles de la méthode 2 pour des rapports signal à bruit supérieurs à 0 dB et inférieures pour des rapports inférieurs à -10 dB lorsque l'on se trouve proche de la convergence. Ceci confirme les résultats théoriques obtenus au paragraphe 3-2. Nous remarquons aussi sur des signaux simulés que ces résultats sont encore corrects pendant le temps de convergence du filtre. Nous avons tracé par exemple pour chaque bloc temporel du signal traité l'écart quadratique pendant la durée d'apprentissage du filtre et le régime permanent pour un rapport signal à bruit de -10 dB (fig. 3). Cet écart est estimé comme précédemment. On remarque que

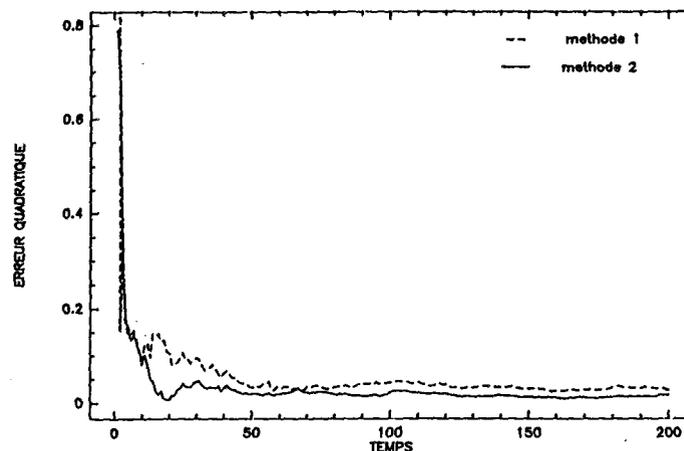


Figure 3. — Évolution temporelle de l'erreur quadratique (rapport signal à bruit de -10 dB).

la méthode 2 est toujours meilleure (erreur quadratique plus faible) et que le filtre estimé converge beaucoup plus rapidement. Pour un rapport signal à bruit de 0 dB (fig. 4), on remarque, comme prévu par la théorie, que la méthode 1 est meilleure. Les transformées de Fourier sont calculées sur 64 échantillons, avec un taux de recouvrement de moitié. La durée du taux de convergence est à peu près de 50 blocs, soit 1 600 échantillons.

On peut, à titre de comparaison, évaluer l'erreur commise en utilisant le filtre de Wiener dans le cas précédent. Considérons un rapport signal à bruit de 0 dB dans la référence, l'erreur quadratique commise (15) serait alors égale à 0.041.

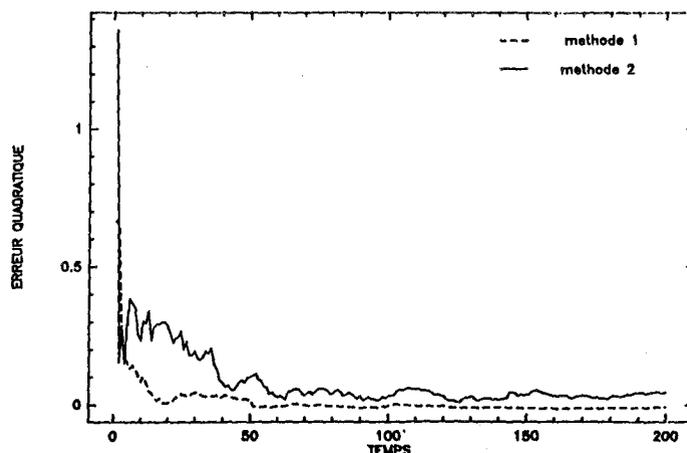


Figure 4. — Évolution temporelle de l'erreur quadratique (rapport signal à bruit de 0 dB).

5. Conclusion

Cet article traite de l'estimation du gain complexe d'un filtre linéaire et homogène en soustraction de bruit dans le cas d'un signal et d'une référence corrélés par des composantes déterministes de même fréquence. La méthode de Wiener classique n'est plus valable sans aménagement car elle nécessite l'hypothèse de décorrélation entre le signal et la référence. Nous avons chiffré cette dégradation puis proposé deux méthodes d'identification de filtres utilisant des informations sur les signaux aux ordres 1, 2 ou 3. Nous comparons ces deux méthodes en calculant les erreurs quadratiques des estimateurs des filtres près de la convergence en effectuant un développement limité. Nous montrons que l'information à l'ordre 3 (moments d'ordre 3 dans le domaine fréquentiel) peut être intéressante en cas de référence fortement bruitée, au prix d'un coût de calcul plus important. Ces résultats ont été validés sur des signaux simulés. Cette étude peut avoir des applications pratiques en séparation de bruits de machines tournantes. Les méthodes proposées sont d'ailleurs actuellement appliquées sur ce type de signaux.

Manuscrit reçu le 13 décembre 1991.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CIOFFI et KAILATH, Fast RLS transversal filters for adaptive filtering, *IEEE Trans. ASSP*, 32, avril 1984, pp. 304-337.
- [2] FRIEDLANDER, Lattice filters for adaptive processing, *Proc. IEEE*, 70, août 1982, p. 829-867.
- [3] WIDROW *et al.*, Adaptive noise cancelling : principles and applications, *Proc. IEEE*, 63, décembre 1965, pp. 1692-1716.
- [4] VAN TREES, Detection, Estimation and Modulation Theory, Wiley, 1968.
- [5] COMON, Traitement de signaux magnétiques multivariés, Thèse INP Grenoble, décembre 1985.
- [6] BERSHAD et FEINTUCH, A normalized Frequency Domain Adaptive Algorithm, *IEEE Trans. ASSP*, 34, juin 1986, p. 452-461.
- [7] PAPOULIS, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, Mc Graw-Hill Book Company.
- [8] KUNT, Traité d'Électricité, vol. XX, Traitement numérique des signaux, Éditions Georgi.

Annexe 1

Mise en œuvre de l'approche statistique.

Les équations (30), (31) et (32) sont obtenues en remarquant que :

$$(1.1) \quad \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e^{j 2 \pi \omega i N}$$

est proche de 1 dans une plage de valeurs de L adéquate pour l'estimation du filtre,

$$(1.2) \quad \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \bar{\mathcal{B}}_r^i(n) e^{j 2 \pi \omega i N}$$

tend vers 0 lorsque L tend vers l'infini,

$$(1.3) \quad \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} |\bar{\mathcal{B}}_r^i(n)| e^{j 2 \pi \omega i N}$$

est proche de $\gamma_{\bar{\mathcal{B}}_r}(n)$ dans la plage des valeurs de L définie précédemment.

Démonstration de (1.1) :

(1.1) est obtenue en écrivant tout d'abord que $\omega N = M + \alpha$ où M est entier et $-1/2 < \alpha < 1/2$. Donc :

$$A(L) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e^{j 2 \pi \omega i N} = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e^{j 2 \pi i \alpha}.$$

Si α vaut 0 (cas d'une sinusoïde sur un canal de fréquence de la TFD) A(L) vaut 1. Dans le cas de bonnes connaissances a priori sur la fréquence ω (cas d'élimination de bruits de machines tournantes), le terme $\exp(j 2 \pi \omega i N)$ peut être compensé sur chaque tranche temporelle d'indice i. Dans le cas général, α est au maximum égal à 1/2 et cette borne est trop grande pour considérer que A(L) est proche de 1 sur une durée assez grande. Calculons $\mathcal{X}^i(n)$ et $\bar{\mathcal{B}}^i(n)$ pour Kj canaux compris entre M/N et (M + 1)/N. Il existe alors un canal Kj et un réel α tel que : $\omega N = M + K_j + \alpha$. En compensant le terme exponentiel $\exp(j 2 \pi K_j i)$ sur chaque tranche d'indice i et pour chacun de ces K canaux, A(L) devient :

$$A(L) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} e^{j 2 \pi i \alpha}$$

où α est au maximum égal à 1/2 K pour le canal Kj.

$$A(L) = \frac{1}{L} \frac{1 - e^{j \frac{\pi(L)}{K}}}{1 - e^{j \frac{\pi}{K}}}.$$

Si K est assez grand, π/K peut être considéré comme infiniment petit et $A(L) \approx 1$. Ceci est vrai tant que L n'est pas trop grand puisque L . A(L) est un terme borné. Par exemple, si K est égal à 128, A(L) est compris entre 1,01 et 0,99 quand L est compris entre 55 et 120 blocs. Ensuite A(L) décroît pour tendre vers 0 lorsque L tend vers l'infini. Cet exemple montre que la plage des valeurs où A(L) est proche de 1 est suffisamment grande pour une estimation correcte du filtre, surtout dans le cas pratique où les signaux et le système à identifier ne sont que localement stationnaires sur une fenêtre d'observation finie. Les deux expressions précédentes permettent, pour toute valeur de K choisie, de savoir sur quelle fenêtre temporelle intégrer. D'autre part, on peut remarquer que plus K est grand et plus la plage des valeurs possibles de L est grande.

Pour les autres canaux Kj, A(L) tend rapidement vers 0 : il y a alors décorrélation des deux signaux et les méthodes proposées 1 et 2 conduisent au filtre de Wiener.

Démonstration de (1.2) :

Montrons que $B(L) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \bar{\mathcal{B}}_r^i(n) e^{j 2 \pi \omega i N}$ tend vers 0 lorsque L est assez grand, en particulier sur la plage précédemment définie. B(L) peut s'exprimer de la manière suivante :

$$(1.4) \quad B(L) + \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \bar{\mathcal{B}}_r^i(n) \sum_{k \neq i} e^{j 2 \pi \omega k N} = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \bar{\mathcal{B}}_r^i(n) \sum_{k=0}^{L-1} e^{j 2 \pi \omega k N}.$$

Le bruit $\mathcal{B}_r^i(n)$ étant centré,

$$B(L) \approx -\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \overline{\mathcal{B}_r^i(n)} \sum_{k \neq i} e^{j 2 \pi \omega k N}$$

si L est assez grand. Prenons le module carré de l'expression précédente :

$$(1.5) \quad |B(L)|^2 \leq \frac{1}{L^2} \sum_{i=0}^{L-1} |\overline{\mathcal{B}_r^i(n)}|^2 \left| \sum_{k \neq i} e^{j 2 \pi \omega k N} \right|^2.$$

On remarque que $|B(L)|$ est borné par un terme qui tend vers 0 quand L est assez grand. Démonstration de (1.3) : (1.3) s'obtient facilement en remplaçant $|\overline{\mathcal{B}_r^i(n)}|^2$ par la somme de la densité spectrale de $b_b(\nu)$ et d'une variable aléatoire centrée, et en utilisant les résultats (1.1) et (1.2).

Annexe 2

Calcul de la variance de l'estimateur 1.

Nous supposons par la suite pour simplifier que $n = \omega N$, dans les annexes 2, 3 et 4.

Les erreurs quadratiques des estimateurs 1, 2 et 3 sont calculées par :

$$(2.1) \quad E \{ |\widehat{W}^L(n) - F(n)|^2 \} \approx E \left\{ \left| \frac{\delta N_S^L(n)}{D(n)} \right|^2 \right\}$$

où $\delta N_S^L(n)$ est l'erreur commise en estimant les quantités sur L tranches temporelles de N échantillons. Le filtre exact est calculé par (27). En supposant l'hypothèse d'ergodicité des signaux aléatoires, les moyennes statistiques peuvent être remplacées par des moyennes temporelles (2.2) lorsque N tend vers l'infini.

$$(2.2) \quad F_1(n) = \frac{\frac{1}{N} E \{ \mathcal{X}^i(n) \cdot \overline{\mathcal{R}}^i(n) \} - \frac{1}{N} E \{ \mathcal{X}^i(n) \} \cdot E \{ \overline{\mathcal{R}}^i(n) \}}{\frac{1}{N} E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \} - \frac{1}{N} |E \{ \mathcal{R}^i(n) \}|^2}.$$

On remarque que lorsque les moments d'ordre 1 sont nuls (pas de corrélation entre le signal et la référence), on retrouve l'expression du filtre de Wiener (12). Cette méthode est donc applicable pour tous les canaux de fréquence.

Calculons l'erreur quadratique obtenue par la méthode 1 par (2.1). Le dénominateur théorique de $F_1(n)$ (2.2) $D(n)$ vaut $\gamma_{\mathcal{B}_r}(n)$. La contribution du signal au numérateur estimé par (33) vaut :

$$(2.3) \quad \widehat{N}_S^L(n) = \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{S}^i(n) \cdot \overline{\mathcal{R}}^i(n) - \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{S}^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \overline{\mathcal{R}}^i(n).$$

En utilisant l'équation (10), on obtient :

$$\widehat{N}_S^L(n) = \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_S^i(n) \cdot \overline{\mathcal{B}_r^i(n)} - \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_S^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \overline{\mathcal{B}_r^i(n)}$$

$\widehat{N}_S^L(n)$ est à moyenne nulle donc l'erreur commise $\delta N_S^L(n)$ vaut :

$$(2.4) \quad \delta N_S^L(n) = \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_S^i(n) \cdot \overline{\mathcal{B}_r^i(n)} - \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_S^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \overline{\mathcal{B}_r^i(n)}.$$

Chacune des sommes de (2.4) est à moyenne nulle et peut être considérée comme infiniment petite. Nous effectuons un développement limité au premier ordre pour calculer l'erreur quadratique, soit :

$$(2.5) \quad \delta N_S^L(n) \approx \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_S^i(n) \cdot \overline{\mathcal{B}_r^i(n)}.$$

Ce qui conduit à l'erreur quadratique suivante (2.6) en supposant les bruits aléatoires b_s et b_r indépendants entre eux et les transformées de Fourier effectuées sur des tranches temporelles disjointes indépendantes.

$$E \{ |\widehat{W}^L(n) - F_1(n)|^2 \} \approx \frac{\frac{1}{L} \frac{1}{N^2} E \{ |\mathcal{B}_s^i(n)|^2 \} E \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \}}{\gamma_{\mathcal{B}_r}^2(n)}.$$

Annexe 3

Calcul de la variance de l'estimateur 2.

Celle-ci est calculée par :

$$(3.1) \quad E \{ |\widehat{W}^L(n) - F(n)|^2 \} \approx E \left\{ \left| \frac{\delta N_S^L(n)}{D(n)} \right|^2 \right\}$$

où $\delta N_S^L(n)$ est l'erreur commise en estimant les quantités sur L tranches temporelles de N échantillons. Le filtre exact est calculé par (28). En supposant l'hypothèse d'ergodicité des signaux aléatoires, les moyennes statistiques peuvent être remplacées par des moyennes temporelles (3.2) lorsque N tend vers l'infini.

$$(3.2) F_2(n) = \frac{\frac{1}{N^2} E \{ \mathcal{X}^i(n) \cdot \bar{\mathcal{R}}^i(n) \} \cdot E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \} - \frac{1}{N^2} E \{ \mathcal{X}^i(n) | \mathcal{R}^i(n) |^2 \} \cdot E \{ \bar{\mathcal{R}}^i(n) \}}{\frac{1}{N^2} (E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \})^2 - \frac{1}{N^2} E \{ \bar{\mathcal{R}}^i(n) \} E \{ \bar{\mathcal{R}}^i(n) | \mathcal{R}^i(n) |^2 \}}$$

On remarque que lorsque les moments d'ordre 1 sont nuls (pas de corrélation entre le signal et la référence), on retrouve l'expression du filtre de Wiener (12).

Calculons l'erreur quadratique obtenue par la méthode 2 par (3.1). Le dénominateur théorique de $F_1(n)$ (3.2) $D(n)$ vaut $\gamma^2_{\mathcal{B}_r}(n)$. La contribution du signal au numérateur estimé par (34) vaut :

$$(3.3) \quad \widehat{N}_S^L(n) = \frac{1}{N^2 L} \sum_{i=1}^L \mathcal{S}^i(n) \cdot \bar{\mathcal{R}}^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |\mathcal{R}^i(n)|^2 - \frac{1}{N^2 L} \sum_{i=1}^L \mathcal{S}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2 \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \bar{\mathcal{R}}^i(n).$$

En utilisant l'équation (10) et en supposant pour simplifier que $n = \omega N$, on obtient :

$$(3.4) \quad \mathcal{S}^i(n) = \frac{A_s}{2j} e^{j[\phi_s] N} + \mathcal{B}_s^i(n)$$

$$(3.5) \quad \widehat{N}_S^L(n) = \left(\frac{A_r e^{-j\phi_r}}{2j} \right)^2 \left[\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot \mathcal{B}_r^i(n) - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_r^i(n) \right] +$$

$$+ \frac{A_r e^{-j\phi_r}}{2j} \frac{1}{N} \left[\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot \mathcal{B}_r^i(n) \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \bar{\mathcal{B}}_r^i(n) - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \bar{\mathcal{B}}_r^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_r^i(n) \right]$$

$$+ \frac{A_r e^{-j\phi_r}}{2j} \frac{1}{N} \left[\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{N^2} \left[\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \bar{\mathcal{B}}_r^i(n) - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \bar{\mathcal{B}}_r^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \right]$$

$\widehat{N}_S^L(n)$ est à moyenne nulle donc l'erreur commise $\delta N_S^L(n)$ vaut :

$$(3.6) \quad \delta N_S^L(n) = \widehat{N}_S^L(n).$$

Nous effectuons un développement limité au premier ordre pour calculer l'erreur quadratique, soit :

$$(3.7) \quad \delta N_S^L(n) \approx \left(\frac{A_r e^{-j\phi_r}}{2j} \right)^2 \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot \mathcal{B}_r^i(n) + \frac{A_r e^{-j\phi_r}}{2j} \frac{1}{N} \left[\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot E |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \right] - \frac{1}{N^2} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot \bar{\mathcal{B}}_r^i(n) E |\mathcal{B}_r^i(n)|^2.$$

Supposons maintenant que les bruits $b_r(k)$ et $b_s(k)$ sont gaussiens. Les transformées de Fourier de ces signaux le sont aussi. On montre alors que leurs moments d'ordre 3 sont nuls. Il vient alors :

$$(3.8) \quad E \{ |\delta N_S^L(n)|^2 \} \approx \frac{1}{L} E \{ |\mathcal{B}_s^i(n)|^2 \} \left[\left(\frac{A_r}{2} \right)^4 E \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \} + \left(\frac{A_r}{2} \right)^2 \frac{1}{N^2} E^2 \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \} + \frac{1}{N^4} E^3 \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \} \right].$$

Annexe 4

Calcul de la variance de l'estimateur 3.

Celle-ci est calculée par :

$$(4.1) \quad E \{ |\widehat{W}^L(n) - F(n)|^2 \} \approx E \left\{ \left| \frac{\delta N_S^L(n)}{D(n)} \right|^2 \right\}$$

où $\delta N_S^L(n)$ est l'erreur commise en estimant les quantités sur L tranches temporelles de N échantillons. Le filtre exact est calculé par (29). En supposant l'hypothèse d'ergodicité des signaux aléatoires, les moyennes statistiques peuvent être remplacées par des moyennes temporelles (4.2) lorsque N tend vers l'infini.

$$(4.2) \quad F_3(n) = \frac{\frac{1}{N^2} E \{ \mathcal{X}^i(n) \} \cdot E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \} - \frac{1}{N} E \{ \mathcal{X}^i(n) | \mathcal{R}^i(n) |^2 \}}{\frac{1}{N^2} E \{ \mathcal{R}^i(n) \} \cdot E \{ |\mathcal{R}^i(n)|^2 \} - \frac{1}{N} E \{ \mathcal{R}^i(n) | \mathcal{R}^i(n) |^2 \}}.$$

Calculons l'erreur quadratique obtenue par la méthode 3 par (4.1). Le dénominateur théorique de $F_3(n)$ (4.2) $D(n)$ vaut $-\frac{A_r e^{j\phi_r}}{2j} \gamma \mathcal{B}_r(n)$. La contribution du signal au numérateur estimé par (37) vaut :

$$(4.3) \quad \widehat{N}_S^L(n) = \frac{1}{N^2 L} \sum_{i=1}^L \mathcal{S}^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |\mathcal{R}^i(n)|^2 - \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{S}^i(n) |\mathcal{R}^i(n)|^2.$$

En utilisant l'équation (10), on obtient :

$$(4.4) \quad \widehat{N}_S^L(n) = \left(\frac{A_r e^{j\phi_r}}{2j} \right) \left[-\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot \bar{\mathcal{B}}_r^i(n) + \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \bar{\mathcal{B}}_r^i(n) \right] + \frac{A_r e^{-j\phi_r}}{2j} \frac{1}{N} \left[\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_r^i(n) - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \mathcal{B}_r^i(n) \right] + \frac{1}{N^2} \left[-\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 + \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \right]$$

$\widehat{N}_S^L(n)$ est à moyenne nulle donc l'erreur commise $\delta N_S^L(n)$ vaut :

$$(4.5) \quad \delta N_S^L(n) = \widehat{N}_S^L(n).$$

Nous effectuons un développement limité au premier ordre pour calculer l'erreur quadratique, soit :

$$(4.6) \quad \delta N_S^L(n) \approx - \left(\frac{A_r e^{j\phi_r}}{2j} \right) \frac{1}{NL} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot \mathcal{B}_r^i(n) - \frac{A_r e^{-j\phi_r}}{2j} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot \mathcal{B}_r^i(n) - \frac{1}{N^2 L} \sum_{i=1}^L \mathcal{B}_s^i(n) \cdot E \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \}.$$

$$(4.7) \quad E \{ |\delta N_S^L(n)|^2 \} \approx \frac{1}{L} E \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \} \left[2 \left(\frac{A_r}{2} \right)^2 \frac{1}{N^2} E \{ |\mathcal{B}_s^i(n)|^2 \} + \frac{1}{N^4} E^2 \{ |\mathcal{B}_r^i(n)|^2 \} \right].$$

On remarque que l'erreur quadratique est toujours plus forte que dans le cas de la première méthode. D'autre part, le dénominateur théorique de $F_3(n)$ (29) est proportionnel à $A_r/2$. Cette méthode ne sera donc pas valable pour tous les canaux de fréquence traités, ce qui la rend difficilement utilisable.