

## Regroupement optimal de capteurs en traitement du signal radar

---

### *Optimal Gathering of Sensors in Radar Signal Processing*

---



#### **Patrick DUVAUT**

ETIS ENSEA  
Les Chênes Pourpres  
95000 Cergy-Pontoise  
Tél. : 30 73 66 10  
Fax : 30 73 66 67

Encien élève de l'École Normale Supérieure de Cachan, Patrick Duvaut a obtenu l'Agrégation de Physique en 1981, une thèse de Doctorat au Laboratoire des Signaux & Systèmes de l'École Supérieure

d'Électricité en 1987 et l'Habilitation à encadrer des travaux de recherche en 1991. Il est actuellement : Professeur des Universités à l'ENSEA de Cergy, Responsable du DEA Image-Signal de l'Université de Cergy, Directeur Scientifique de la Société KURTOSIS Ingénierie et responsable de Collection traitement du Signal des Éditions HERMÈS. Il anime les pôles de recherche : Moments d'Ordre Supérieur et Méthodes Mixtes (*Image-Signal*) de l'Équipe de Recherche ETIS de l'ENSEA. Ses thèmes actuels de recherche sont les suivants : Détection-Estimation conjointes, Modélisation de processus Non-Gaussiens, Méthodes Paramétriques d'Estimation de Bispectres, Analyse en Composantes Indépendantes appliquée aux Images temps-fréquence et temps-échelle, Analyse multirésolution appliquée aux textures.



#### **Lionel HAYOUN**

ETIS ENSEA  
Les Chênes Pourpres  
95000 Cergy-Pontoise  
Tél. : 30 73 66 66  
Fax : 30 73 66 67

Lionel Hayoun est né à Paris en 1966. Après avoir obtenu le diplôme d'Ingénieur de l'ENSEA (*École Nationale supérieure de l'Électronique et de ses Applications*), en juin 1990, il a entrepris une thèse de Doctorat au sein de la division DEM de THOMSON CSF sur le thème « Regroupement des Capteurs d'une Antenne de Réseau ». Ses autres thèmes de recherche concernent les algorithmes de traitement d'antenne (filtrage adapté spatial, méthodes haute résolution, Maximum de Vraisemblance etc.) et les problèmes relatifs à leurs mises en œuvre sur données réelles.



#### **Jean-Paul GUYVARCH**

THOMSON-CSF  
Division Électronique de Missiles  
23 à 27 rue Pierre valette  
92240 Malakoff

Ancien élève de l'École Supérieure d'Électricité (ESE 76), Jean-Paul Guyvarch a rejoint THOMSON-CSF en 1989, où il occupe actuellement le poste d'adjoint à la Direction Technique de la division DEM. Son domaine d'activités comprend notamment les études amont sur les autodirecteurs de missiles, et en particulier les questions concernant le traitement du signal radar, l'anti-brouillage et la furtivité.

---

### RÉSUMÉ

---

Afin de réduire la complexité d'une chaîne de réception RADAR à formation de faisceau par le calcul, on s'intéresse à la notion de regroupement de capteurs. Après avoir apporté un formalisme adéquat, on s'interroge sur l'existence d'une loi de fusion optimale. Le problème du choix du critère d'optimalité se pose tout naturellement. On présente d'abord des résultats relatifs à des critères d'ordre énergétiques, classiques en traitement d'antenne : le rapport signal sur bruit et le taux de réjection

des brouilleurs. Dans un deuxième temps, un critère d'ordre géométrique est décrit, quelques simulations en montrent le bien-fondé.

#### MOTS CLÉS

Radar, antenne, regroupement, rapport signal sur bruit, interférences, matrice de fusion, sous-réseaux, diagramme de rayonnement, formation de voies, multicritères, quotient de Rayleigh.

## ABSTRACT

*In order to reduce the complexity of a RADAR reception chain with digital beamforming, we study the notion of sensor fusion. Once we have written that notion into proper mathematical language, we must wonder about the existence of an optimal way of gathering the sensors. As a matter of fact it turns out to be a multi criteria approach. The first chosen criteria are very classical in array processing, they belong to energy type criteria : signal to noise ratio, and interference to noise ratio. On the other hand, in order to take into account some practical aspects, a*

*geometric criterion is introduced that happens to be efficient, according to simulations.*

### KEY WORDS

*Radar, array, gathering, signal to noise ratio, interferences, fusion matrix, subarrays, array beam pattern, beamforming, multicriteria, Rayleigh quotient.*

## 1. Introduction

Les techniques de traitement d'antennes sont aujourd'hui bien connues et malgré les puissances considérables de calcul qu'elles impliquent souvent, elles commencent à être mises en œuvre, grâce notamment aux progrès faits dans le domaine des microcomposants rapides et à la découverte d'algorithmes performants.

Cependant, dans certaines applications, on est contraint, pour des raisons d'ordre matériel (nombre de voies de réception) ou de coût en calcul (puissance, taille du calculateur) de réduire la taille du vecteur observation. Plusieurs solutions sont envisageables. L'une d'entre elles, bien connue, consiste à adopter une structure de réseau lacunaire. La solution retenue ici, revient à associer à plusieurs capteurs une seule grandeur scalaire, en regroupant les capteurs élémentaires en sous-réseaux : c'est le concept de fusion de capteurs.

Cette technique, contrairement à certaines autres (antenne lacunaire, [1], [2]), présente l'avantage important de conserver certaines caractéristiques fondamentales du réseau (gain). Bien entendu, la réduction du nombre de degrés de liberté de l'antenne s'accompagne d'une dégradation des performances. Dans la mesure où pour une antenne réseau bidimensionnelle donnée, il existe un très grand nombre de façons d'opérer la fusion, le problème du choix d'une loi de fusion optimale s'avère très délicat. L'une de ses principales difficultés réside dans la détermination de critères d'optimalité significatifs.

Dans le paragraphe 2, on précise le concept de fusion et un formalisme adéquat est proposé. Le paragraphe 3 est consacré, ensuite, à l'étude de la dégradation, due à la fusion, des performances énergétiques du filtrage spatial. Le rapport signal sur bruit et le taux de réjection des brouilleurs sont calculés en sortie de filtrage, après fusion. Les résultats obtenus, qui s'écrivent à partir de quotients de Rayleigh, montrent, en particulier, qu'il est théoriquement possible d'atteindre une optimalité énergétique. Dans le paragraphe 4, enfin, un critère d'ordre géométrique tendant à favoriser un comportement isotrope de l'antenne est introduit. Sa pertinence est attestée par des simulations.

## 2. Présentation de la fusion ; notations, formalisation

La fusion de capteurs est un problème dont l'enjeu considérable suscite de plus en plus d'intérêt. Paradoxalement, il a peu été abordé dans la littérature, [3], [4], [5], notamment dans le cas des antennes planes. Le présent article traite la question dans le cas de réseaux plans.

### 2.1. LA FUSION

La fusion a pour but de réduire la taille du vecteur observation, et donc le coût en calcul, tout en gardant une même surface d'antenne et donc une même puissance émise et reçue. L'idée consiste à associer à un groupe de  $n$  capteurs élémentaires une seule grandeur scalaire, combinaison linéaire des niveaux reçus sur chacun d'eux ; on fabrique ainsi un nouveau capteur appelé sous-réseau. Dans la pratique, cette opération peut être réalisée in situ, en établissant des connexions adéquates entre les capteurs d'un sous-réseau. Certaines contraintes sous-tendent parfois le choix d'une loi de fusion comme par exemple, l'adjacence entre capteurs élémentaires d'un même sous-réseau.

### 2.2. NOTATIONS ET FORMALISATION DE LA FUSION

On considère dans tout l'article une antenne rectangulaire, située dans le plan  $xOy$ , contenant  $QM$  capteurs supposés parfaits (omnidirectionnels, découplés, gains identiques, sans distorsion de phase), répartis en  $Q$  colonnes selon l'axe  $Ox$  et  $M$  lignes suivant  $Oy$  ; deux colonnes sont distantes de  $d_x$ , deux lignes de  $d_y$ . La position angulaire d'une source est repérée dans le système de coordonnées sphériques  $(\theta, \phi)$ ,  $\theta$  désignant la colatitude et  $\phi$  la longitude (voir fig. 1). Un capteur quelconque est repéré par les deux indices  $q$  et  $m$ , avec  $q$  compris entre 1 et  $Q$  et  $m$  compris entre 1 et  $M$ .

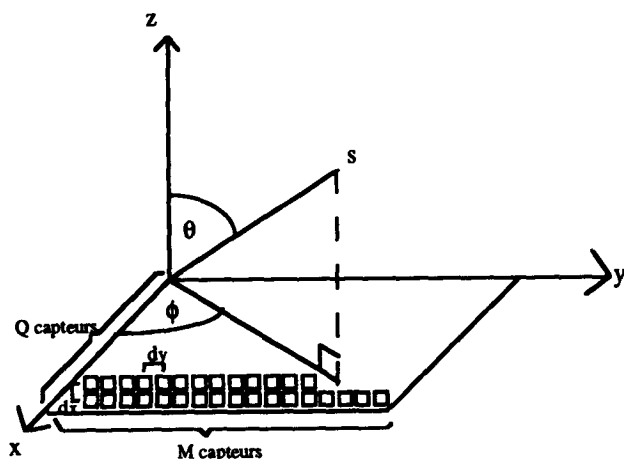


Figure 1. — Antenne, Notations.

La fusion d'une antenne initiale à  $QM$  capteurs en une antenne à  $Q'M'$  capteurs ( $Q'M' < QM$ ) est complètement déterminée par la donnée d'une matrice  $F$ , appelée matrice de fusion. Cette matrice contient  $Q'M'$  colonnes et  $QM$  lignes, chaque colonne correspond à un sous-réseau et contient des « 1 » et des « 0 » : un « 1 » indique que le capteur est effectivement regroupé, un « 0 » indique que tel n'est pas le cas. La présence de « 1 » et de « 0 » indique que la combinaison linéaire effectuée est une simple sommation. En toute généralité, il faudrait définir la matrice  $F$  avec des « 0 » et des nombres complexes quelconques, ce qui correspondrait à une combinaison linéaire quelconque, et ce qui physiquement pourrait être obtenu en utilisant des déphaseurs et des atténuateurs situés en aval des capteurs.

Prenons l'exemple d'une antenne à 12 capteurs que l'on regroupe en 3 sous-réseaux. Il faut se définir au préalable, un sens de parcours de l'antenne, par exemple de gauche à droite et bas en haut.

La matrice de fusion correspondante est :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que, par construction (et si l'on se fixe comme contrainte, par exemple pour des raisons de simplicité de la réalisation matérielle, qu'un capteur ne peut appartenir qu'à un seul sous-réseau), les colonnes de la matrice de fusion sont orthogonales. Il peut donc être intéressant de normaliser les colonnes de la matrice de

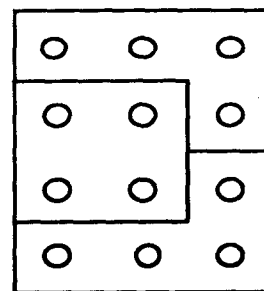


Figure 2. — Exemple de regroupement.

fusion (ce qui physiquement revient à donner la même puissance à chaque sous-réseau), ce qui confère à alors à la version normalisée  $F$  considérée dans toute la suite la propriété :

$$(1) \quad F^\dagger F = I_{Q'M'}$$

En toute cohérence avec ce qui précède, si  $r(t)$  est le vecteur des signaux reçus sur l'ensemble des  $QM$  capteurs de l'antenne initiale à l'instant  $t$ , alors le vecteur de réception de l'antenne fusionnée est :

$$(2) \quad r'(t) = F^\dagger r(t)$$

C'est-à-dire que le vecteur de réception après fusion s'obtient par la transformation linéaire de matrice  $F$  du vecteur reçu avant fusion. Cette modélisation simple étant faite, on va étudier le comportement de l'antenne après regroupement.

### 3. Critères énergétiques de fusion optimale : le rapport signal sur bruit et le taux de réjection des brouilleurs

#### 3.1. RAPPELS SUR LE FILTRAGE ADAPTÉ SPATIAL

On se place dans le cas où le traitement d'antenne effectué a pour but d'estimer la position angulaire d'une source en présence de  $K$  signaux brouilleurs gaussiens, temporellement blancs et spatialement localisés.

A un instant donné, le signal reçu sur l'antenne (avant fusion, dans le cas bande étroite et pour un champ lointain) s'écrit :

$$(3) \quad r = \alpha(\omega) e_c + b \quad \text{avec} \quad b = \sum_{k=1}^K \beta_k j_k + n$$

où  $e_c$  désigne le vecteur de direction de la source utile :

$$(4) \quad e_c = \begin{bmatrix} \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta_c) (q d_x \cos(\phi_c) + m d_y \sin(\phi_c)) \right] \end{bmatrix}$$

$$1 \leq q \leq Q, \quad 1 \leq m \leq M.$$

$\alpha(\omega)$  s'identifie à l'amplitude complexe inconnue de la source utile, supposée gaussienne, avec :

$$(5) \quad E[|\alpha(\omega)|^2] = \pi_s$$

si  $\pi_s$  désigne la puissance du signal utile. Parmi les autres symboles utilisés, on rencontre :

$\mathbf{b}$  : terme parasite global ,  
 $\mathbf{j}_k$  : vecteur de direction du  $k$ -ième brouilleur,  
 $\beta_k$  : amplitude complexe  
 du  $k$ -ième brouilleur (gaussienne) ,  
 $\pi_k$  : puissance du brouilleur  $k$ , telle que :

$$(6) \quad E[\beta_k \beta_{k'}] = \pi_k \delta(k - k')$$

(les brouilleurs sont statistiquement orthogonaux) ,

$\mathbf{n}$  : bruit thermique ,  
 gaussien complexe circulaire, centré ,

temporellement et spatialement blanc, de puissance  $\sigma^2$ .

Dans ces conditions, la matrice de covariance exacte des signaux parasites s'écrit :

$$(7) \quad \mathbf{B} = E[\mathbf{b}\mathbf{b}^\dagger] = \sigma^2 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^K \pi_k \mathbf{j}_k \mathbf{j}_k^\dagger$$

L'estimation au sens du maximum de vraisemblance des angles  $\theta_c$ ,  $\phi_c$  de la source utile revient à appliquer au vecteur reçu un filtrage transverse de réponse impulsionnelle [6], [7], [8] :

$$(8) \quad \mathbf{w}(\theta, \phi) = \frac{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}(\theta, \phi)}{\sqrt{\mathbf{e}(\theta, \phi)^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}(\theta, \phi)}}$$

avec

$$\mathbf{e}(\theta, \phi) = \left[ \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta) (q d_x \cos(\phi) + m d_y \sin(\phi)) \right] \right]$$

$$1 \leq q \leq Q, \quad 1 \leq m \leq M.$$

On trouvera une justification de l'expression (8) dans le contexte général d'une problématique de détection et d'estimation conjointes selon une démarche fondée sur le rapport de vraisemblance généralisé dans [10].

Le filtre  $\mathbf{w}(\theta_c, \phi_c)$  appartient à la droite vectorielle des filtres linéaires qui maximisent le rapport signal à bruit en sortie de filtrage, défini par, [9], [10] :

$$(9) \quad [\text{SNR}] (\theta, \phi) = \frac{E[|\mathbf{w}(\theta, \phi)^\dagger \alpha \mathbf{e}_c|^2]}{E[|\mathbf{w}(\theta, \phi)^\dagger \mathbf{b}|^2]} = \pi_s \frac{|\mathbf{w}(\theta, \phi)^\dagger \mathbf{e}_c|^2}{\mathbf{w}(\theta, \phi)^\dagger \mathbf{B} \mathbf{w}(\theta, \phi)}$$

Une autre grandeur intéressante est le taux de réjection des brouilleurs [9], défini pour le brouilleur  $k$  par :

$$(10) \quad [\text{INR}]_k = \frac{\text{puissance du brouilleur après filtrage}}{\text{puissance du bruit blanc après filtrage}} = \frac{E[|\beta_k \mathbf{w}^\dagger \mathbf{j}_k|^2]}{E[|\mathbf{w}^\dagger \mathbf{n}|^2]}$$

Nous allons étudier l'évolution de ces grandeurs avec la fusion.

### 3.2. FILTRAGE ADAPTÉ SPATIAL SUR L'ANTENNE FUSIONNÉE ET ÉVOLUTION DES PERFORMANCES

Après fusion, le signal reçu devient :

$$(11) \quad \mathbf{r}' = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{r} = \alpha \mathbf{F}^\dagger \mathbf{e}_c + \sum_{k=1}^K \beta_k \mathbf{F}^\dagger \mathbf{j}_k + \mathbf{F}^\dagger \mathbf{n}$$

$\mathbf{e}'_c = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{e}_c$  et  $\mathbf{j}'_k = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{j}_k$  représentent les vecteurs de direction après fusion. Remarquons que le caractère unitaire de  $\mathbf{F}$  ( $\mathbf{F}^\dagger \mathbf{F} = \mathbf{I}_{Q' \times M'}$ ) entraîne que le bruit thermique reste spatialement blanc :

$$E[\mathbf{n}' \mathbf{n}'^\dagger] = \mathbf{F}^\dagger E[\mathbf{n}\mathbf{n}^\dagger] \mathbf{F} = \mathbf{F}^\dagger \sigma^2 \mathbf{I} \mathbf{F} = \sigma^2 \mathbf{I}.$$

De plus, la linéarité de la fusion implique que le caractère gaussien circulaire, [10], est conservé (la conservation de la circularité s'établit de façon immédiate). Le traitement spatio-temporel garde donc la même structure, et en particulier le traitement spatial reste linéaire. Le filtrage adapté spatial consiste alors à appliquer à  $\mathbf{r}'$  le filtre :

$$(12) \quad \mathbf{w}'(\theta, \phi) = \frac{\mathbf{B}'^{-1} \mathbf{e}'(\theta, \phi)}{\sqrt{\mathbf{e}'(\theta, \phi)^\dagger \mathbf{B}'^{-1} \mathbf{e}'(\theta, \phi)}}$$

avec  $\mathbf{e}'(\theta, \phi) = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{e}(\theta, \phi)$ , où  $\mathbf{B}'$  est la matrice de covariance des signaux parasites reçus après fusion :

$$(13) \quad \mathbf{B}' = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{B} \mathbf{F}.$$

a) Rapport signal sur bruit maximal en sortie de filtrage

Un premier critère d'optimisation de la matrice de fusion, robuste, [11], est le rapport signal à bruit maximal en sortie de filtrage ; celui-ci est obtenu lorsque le filtre appliqué correspond à la direction de la source utile.

Avant et après fusion on a respectivement :

$$(14) \quad [\text{SNR}]_{\max} = \pi_s \mathbf{e}_c^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_c$$

$$(15) \quad [\text{SNR}']_{\max} = \pi_s \mathbf{e}'_c^\dagger \mathbf{B}'^{-1} \mathbf{e}'_c$$

soit

$$(16) \quad [\text{SNR}']_{\max} = \pi_s \mathbf{e}_c^\dagger \mathbf{F} (\mathbf{F}^\dagger \mathbf{B} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^\dagger \mathbf{e}_c.$$

$\mathbf{B}$  étant une matrice hermitienne positive, elle admet une racine carrée  $\mathbf{C}$  qui vérifie :

$$(17) \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}^2.$$

La matrice  $\mathbf{M}$  à  $QM$  lignes et  $Q' \times M'$  colonnes définie par :

$$(18) \quad \mathbf{M} = \mathbf{C} \mathbf{F}$$

définit un sous-espace colonne de dimension  $Q' M'$ . En remarquant que,  $\mathbf{F}^\dagger \mathbf{B} \mathbf{F} = \mathbf{M}^\dagger \mathbf{M}$ , il vient :

$$(19) \quad [\text{SNR}' ]_{\max} = \pi_s \mathbf{e}_c^\dagger \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{M}^\dagger \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\dagger \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_c.$$

En notant enfin que  $\mathbf{P}_M = \mathbf{M} (\mathbf{M}^\dagger \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\dagger$  définit la projection orthogonale sur l'espace colonne de  $\mathbf{M}$ , on obtient finalement :

$$(20) \quad [\text{SNR}' ]_{\max} = \pi_s (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_c)^\dagger \mathbf{P}_M (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_c).$$

Il s'avère possible désormais de chiffrer la dégradation des performances occasionnée par la fusion en calculant le quotient des rapports signal à bruit après et avant fusion :

$$(21) \quad \frac{[\text{SNR}' ]_{\max}}{[\text{SNR}]_{\max}} = \frac{(\mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_c)^\dagger \mathbf{P}_M (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_c)}{(\mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_c)^\dagger (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_c)}.$$

La formule (21) exprime que le quotient des rapports signal à bruit maximaux après et avant fusion est le quotient de Rayleigh du vecteur  $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_c$  relativement à l'opérateur  $\mathbf{P}_M$ . On sait que cette quantité est bornée inférieurement et supérieurement respectivement par la plus petite et la plus grande valeur propre de  $\mathbf{P}_M$  [12].

$\mathbf{P}_M$  étant un projecteur, ses seules valeurs propres sont 1 et 0. Ceci implique que le rapport signal à bruit maximal en sortie de filtrage est toujours dégradé par la fusion. Néanmoins, il est facile de voir que si l'on choisit la matrice  $\mathbf{F}$  de telle sorte que la matrice  $\mathbf{M} = \mathbf{C} \mathbf{F}$  contienne le vecteur  $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{e}_c$ , alors on aura :

$$[\text{SNR}' ]_{\max} = [\text{SNR}]_{\max}.$$

Cette contrainte sur  $\mathbf{M}$  est équivalente à la contrainte sur  $\mathbf{F}$  :

$$(C1) \quad \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_c \in \{\mathbf{F}\}.$$

En conséquence, l'optimalité au sens du rapport signal à bruit maximal peut être atteinte, à condition que la contrainte géométrique  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_c \in \{\mathbf{F}\}$  soit respectée.

### b) Taux de réjection des brouilleurs

Avant fusion, le taux de réjection du brouilleur  $k$  s'écrit compte tenu de (10) :

$$(22) \quad [\text{INR}]_k(\theta, \phi) = \frac{\pi k |\mathbf{e}^\dagger \mathbf{B}^{-1} \mathbf{j}_k|^2}{\sigma^2 \mathbf{e}^\dagger \mathbf{B}^{-2} \mathbf{e}}$$

en posant  $\mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}(\theta, \phi)$  et  $\mathbf{P}_k = \frac{\mathbf{j}_k \mathbf{j}_k^\dagger}{|\mathbf{j}_k|^2}$ ,  $[\text{INR}]_k$  peut s'exprimer comme un quotient de Rayleigh :

$$(23) \quad [\text{INR}]_k(\theta, \phi) = \text{QM} \frac{\pi k \mathbf{u}^\dagger \mathbf{P}_k \mathbf{u}}{\sigma^2 \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}}.$$

Après fusion, on a :

$$(24) \quad [\text{INR}' ]_k(\theta, \phi) = \frac{\pi k |\mathbf{e}'^\dagger \mathbf{B}'^{-1} \mathbf{j}'_k|^2}{\sigma'^2 \mathbf{e}'^\dagger \mathbf{B}'^{-2} \mathbf{e}'}$$

en posant  $\mathbf{v} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}_M \mathbf{C}^{-1} \mathbf{e} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}_M \mathbf{C} \mathbf{u}$ , on obtient :

$$(25) \quad [\text{INR}' ]_k(\theta, \phi) = \text{QM} \frac{\pi k \mathbf{v}^\dagger \mathbf{P}_k \mathbf{v}}{\sigma'^2 \mathbf{v}^\dagger \mathbf{v}}$$

ou encore, en fonction du vecteur  $\mathbf{u}$  en posant :

$$(26) \quad \mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}_M \mathbf{C}$$

il vient :

$$(27) \quad [\text{INR}' ]_k(\theta, \phi) = \text{QM} \frac{\pi k |\mathbf{P}_k \mathbf{P} \mathbf{u}|^2}{\sigma'^2 |\mathbf{P} \mathbf{u}|^2}.$$

Le rapport des taux de réjection avant et après fusion s'écrit donc :

$$(28) \quad \frac{[\text{INR}]_k(\theta, \phi)}{[\text{INR}' ]_k(\theta, \phi)} = \frac{|\mathbf{P} \mathbf{u}|^2 |\mathbf{P}_k \mathbf{u}|^2}{|\mathbf{P}_k \mathbf{P} \mathbf{u}|^2 |\mathbf{u}|^2}$$

il peut prendre des valeurs inférieures ou supérieures à 1, ce qui signifie que la fusion ne dégrade pas forcément le taux de réjection des brouilleurs. Néanmoins, la formule (27) montre qu'il est possible d'optimiser  $[\text{INR}' ]_k$  (c'est-à-dire de le minimiser) en imposant que les vecteurs  $\mathbf{P} \mathbf{u}$  et  $\mathbf{j}_k$  soient orthogonaux ; un rapide calcul montre qu'une condition suffisante pour que cela soit réalisée est :

$$(C2) \quad \{\mathbf{F}\} \subset \{\mathbf{j}_k\}^\perp.$$

### 3.3. STRATÉGIES DE DÉCISION

Les formes des conditions d'optimalité (C1) et (C2) appellent quelques commentaires. Tout d'abord, ces conditions ne définissent pas complètement la matrice de fusion optimale (non unicité de la solution) mais apparaissent comme des contraintes linéaires que doit satisfaire celle-ci. D'autre part, ces conditions dépendent du scénario. Pour la condition (C1), cette dépendance provient du vecteur  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_c$ , qui est fonction de  $3K + 3$  paramètres (puissances et positions des brouilleurs, position de la source utile, puissance du bruit thermique) ; pour (C2), elle provient du vecteur de direction du brouilleur  $\mathbf{j}_k$ . Il est donc nécessaire d'adopter une approche, soit moyenne, soit robuste. L'approche moyenne présente l'inconvénient de nécessiter que l'on se donne, a priori, les densités des différents paramètres. De plus, elle conduit à des solutions difficilement exploitables mathématiquement. Bien que l'approche robuste ne soit pas résolue dans ce papier, on précise malgré tout sa mise en équation.

Comme on l'a vu, la satisfaction des critères ne génère pas une solution unique ; de plus, la loi de fusion doit satisfaire des contraintes diverses : adjacence, contraintes heuristiques (cf. partie 4)... Cela implique que l'on doit chercher la « meilleure » loi de fusion (au sens de tel ou tel critère), parmi un certain nombre de lois candidates, ayant subi une sélection préalable. Bien entendu, selon le critère envisagé, le classement est susceptible de varier et la décision finale devra prendre en compte l'ensemble des critères et des

classements auxquels ils donnent lieu (ce dernier point ne sera pas abordé dans le cadre de cet article, il fait néanmoins l'objet de travaux complémentaires à l'heure actuelle).

a) *Rapport signal sur bruit maximal en sortie de filtrage*

Considérons donc  $n$  lois de fusion  $F_1, F_2, \dots, F_m$ , et cherchons celle qui satisfait au mieux la condition (C1). Introduisons pour cela le projecteur orthogonal sur  $\{F\}$ ,

$$(29) \quad P_F = F(F^\dagger F)^{-1} F^\dagger = FF^\dagger.$$

La loi qui satisfait au mieux (C1) est celle qui minimise la distance du vecteur  $B^{-1} e_c$  à l'espace  $\{F\}$ , c'est-à-dire la quantité :

$$(30) \quad d = |(I - P_F) B^{-1} e_c|.$$

L'approche robuste [11] consiste à choisir la loi dont le comportement dans le scénario qui lui est le plus défavorable, est le moins mauvais ; autrement dit, en appelant  $p$ , le vecteur des paramètres dont dépend  $B^{-1} e_c$  :

$$(31) \quad F_{opt} = \text{ARG} \left\{ \text{Min}_F \left\{ \text{Max}_p (|(I - P_F) B^{-1} e_c|) \right\} \right\}.$$

*Remarque :* Dans l'expression (31),  $\text{ARG} \{ \}$  signifie argument.

La résolution de l'équation (31) qui repose éventuellement sur la détermination de « points selles » sera abordée dans une publication ultérieure.

b) *Taux de réjection des brouilleurs*

Il s'agit de trouver la loi qui vérifie au mieux la contrainte

$$\{F\} \subset \{j_k\}^\perp.$$

On obtient alors :

$$(32) \quad F_{opt} = \text{ARG} \left\{ \text{Min}_F \left\{ \text{Max}_p (|P_F j_k|) \right\} \right\}.$$

L'exploitation des formules (21) et (32) suppose donc une sélection préalable des lois de fusion. Le paragraphe suivant décrit, cette fois, une approche heuristique complémentaire, permettant d'établir une discrimination pertinente entre plusieurs lois de fusion candidates. La fonction de coût introduite présente une forte corrélation avec le niveau des lobes secondaires de l'antenne fusionnée.

## 4. Critère heuristique de fusion optimale lié à un comportement isotrope de l'antenne

### 4.1. DIAGRAMME DE DIRECTIVITÉ A LONGITUDE FIXÉE

L'approche adoptée ici, consiste simplement à rechercher un comportement isotrope de l'antenne (équiprobabilité

des divers scénarios). Pour cela, on s'intéresse aux performances, après un regroupement donné, de l'antenne, dans les plans  $\phi = \text{constante}$ . Le comportement de l'antenne dans le plan  $\phi = \phi_c$ , c'est-à-dire son aptitude à localiser une source à  $(\theta, \phi) = (\theta_c, \phi_c)$ , située dans ce plan, est caractérisée par son diagramme dans ce plan. Le diagramme de l'antenne fusionnée s'obtient en pondérant le vecteur de direction de la source utile reçue après fusion ( $e'_c(\theta_c, \phi_c)$ ) avec une « série » de vecteurs de direction, de même longitude  $\phi_c$  et de colatitude  $\theta$  variable  $e'(\theta, \phi_c)$ . Cette opération, qui n'est autre qu'une formation de voie classique réalisée sur les données reçues après fusion, est résumée sur la figure suivante :

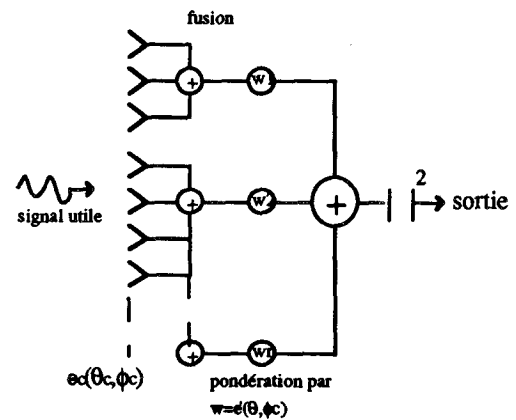


Figure 3. — Obtention du diagramme après fusion.

La qualité de ces diagrammes peut être évaluée par des critères classiques tels que la largeur du lobe principal à 3 dB et le niveau relatif des lobes secondaires.

### 4.2. INTERPRÉTATION, HYPOTHÈSES

La première étape dans l'élaboration du critère consiste à remarquer que, dans le plan  $\phi = \phi_c$ , l'antenne initiale est équivalente sur le plan des performances à l'antenne monodimensionnelle, obtenue en projetant sur la droite d'intersection du plan de l'antenne et du plan d'analyse  $\phi = \phi_c$  (droite :  $z = 0, \phi = \phi_c$ ), les barycentres des capteurs élémentaires, supposés omnidirectionnels (les deux antennes présentent la même loi de phase dans le plan considéré).

On conjecture alors, ce qui sera d'ailleurs validé à l'usage, que le diagramme de l'antenne linéaire obtenue par projection sur la droite ( $z = 0, \phi = \phi_c$ ) des centres de phases des sous-réseaux est représentatif du diagramme de directivité de l'antenne plane fusionnée dans des plans d'analyse  $\phi = \phi_c$ . Ce résultat n'est, cette fois, qu'une approximation car il faudrait tenir compte des diagrammes propres de chacun des sous-réseaux, qui ne sont ni omnidirectionnels, ni identiques.

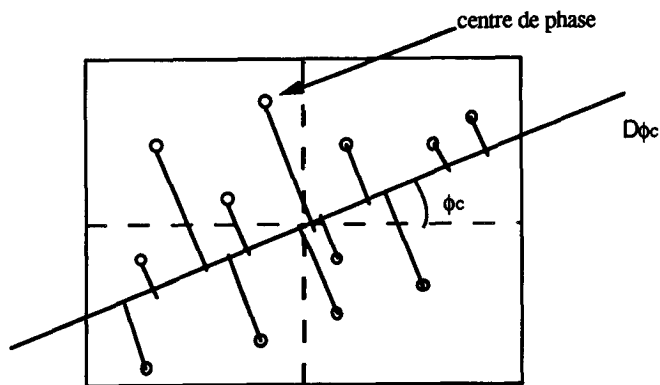


Figure 4. — Antenne linéaire équivalente.

En toute cohérence avec ce qui vient d'être dit, si l'on choisit comme critère le niveau des lobes secondaires, le diagramme obtenu dans le plan  $\phi = \phi_c$  sera d'autant plus satisfaisant (indépendamment de toute pondération d'amplitude pouvant être appliquée par ailleurs) que la répartition des centres de phase après fusion, projetés sur la droite ( $z = 0, \phi = \phi_c$ ) évitera le plus possible les « accidents » de type « trou » ou « point d'accumulation ». Comme il faut satisfaire à ces règles pour l'ensemble des plans d'observation  $\phi = \phi_c$  (antenne isotrope), il faut que la loi de fusion induise une répartition des centres de phase aussi univormes que possible sur l'antenne, sans direction privilégiée (alignement).

### 4.3. LE CRITÈRE HEURISTIQUE

Le critère découle naturellement de ce qui précède. Il consiste à comparer, au moyen d'un coût quadratique, la répartition des centres de phase projetés sur la droite  $D\phi_c$  ( $z = 0, \phi = \phi_c$ ) avec une répartition théorique, obtenue en projetant sur  $D\phi_c$  une distribution uniforme de points. Pour chaque direction  $\phi_c$ , on fait glisser une fenêtre (dont la largeur et le pas de variation sont réglés en fonction de la taille de l'antenne), on enregistre le nombre de points contenus dans chacune des positions de la fenêtre.

On obtient ainsi un histogramme empirique que l'on compare, de façon quadratique, à l'histogramme théorique :

$$(33) \quad C(\phi_c) = \sum_{k=k_i}^{k=k_f} (n(\phi_c, k) - n_{th}(k))^2$$

où les paramètres utilisés ont les significations suivantes :  $k_i$  : position initiale de la fenêtre,  $k_f$  : position finale de la fenêtre,  $n(\phi_c, k)$  : nombre de centres de phase projetés sur la droite  $D\phi_c$  se trouvant dans la  $k$ -ième position de la fenêtre,  $n_{th}(k)$  : nombre de points de la loi théorique se trouvant dans la  $k$ -ième position de la fenêtre.

Le coût étant calculé pour chaque direction  $\phi_c$ , on remarque d'emblée que le critère permet non seulement de discriminer éventuellement deux lois de fusion, mais aussi de connaître a priori le comportement d'une loi de fusion donnée dans chacun des plans  $\phi = \text{constante}$ .

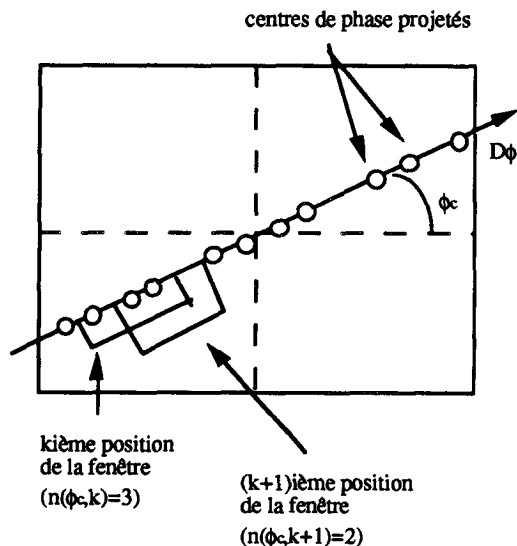


Figure 5. — Mise en œuvre du coût.

Le nombre de lois de fusion se trouve limité ; en premier lieu, par des contraintes matérielles et de coût telles que :

- nombre de sous-réseaux fixé ;
- adjacence des capteurs élémentaires au sein d'un même sous réseau.

Bien entendu, malgré ces contraintes, il reste encore un grand nombre de lois de fusion possibles ; on peut alors introduire des contraintes heuristiques supplémentaires :

- choisir des sous-réseaux non symétriques favorisant naturellement un pavage « aléatoire » de l'antenne (sans symétries, périodicités ou alignements) ;
- éviter d'utiliser des sous-réseaux dont le diagramme est trop irrégulier, de façon à éviter une lacunarité de l'antenne pour certaines directions. Il faut donc utiliser des sous-réseaux aussi compacts que possible ;
- se limiter à des sous-réseaux comprenant de préférence, le même nombre de capteurs (chaque sous-réseau doit être aussi peu directif que possible, ce qui appliqué à l'ensemble de l'antenne, conduit à l'égalité du nombre de capteurs par sous-réseau).

Ces quelques règles heuristiques et la fonction de coût décrite sont mises en pratiques sur les exemples suivants.

### 4.5. SIMULATIONS

#### 4.5.1. Antenne utilisée et contraintes sur la fusion

L'antenne utilisée pour les simulations est de forme carrée et comprend 100 capteurs équidistants d'une demi-longueur d'onde. Le nombre de sous-réseaux est de l'ordre de 20 (compromis nombre de degrés de liberté/coût), ce qui suggère une fusion en « pentominos », sous-réseaux à 5 capteurs.

Il existe au total 12 pentominos distincts (on ne tient évidemment pas compte des symétries et des rotations). La règle de compacité conduit au choix des pentominos « + », « C » et « P ».

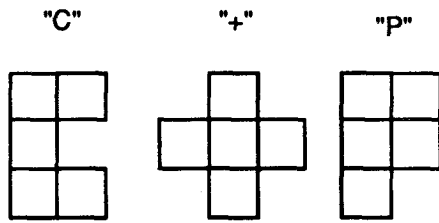


Figure 6. — Exemples de pentominos.

Néanmoins, le caractère symétrique du pentomino « + » transgresse la première règle et le pentomino « C » présente l'inconvénient d'exhiber de mauvaises performances dans le plan vertical (pondération forte aux extrémités), aussi seul le pentomino « P » est apparemment exempt de défauts chroniques. On a dénombré, le nombre de pavages possibles utilisant uniquement le pentomino « P » et ses transformées par symétrie ou rotation. Le nombre s'élève à 378 268 et motive à lui seul la recherche de lois de fusion optimales !

#### 4.5.2. Définition de 3 lois de fusion candidates

Considérons 3 lois de fusion, notées  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , représentées respectivement sur les figures 7, 8 et 9 que l'on va tenter de discriminer à l'aide la fonction de coût. Les remarques suivantes se déduisent directement des caractéristiques des différents pavages :

- la loi  $F_1$  utilise plusieurs sortes de pentominos, notamment le « P » et le « + » (8 « P », 9 « + »). Comme on s'y attendait, l'utilisation du « + », sous-réseau symétrique, induit d'une part des problèmes de pavage (on est contraint de remplir les bords avec des pentominos très directifs) et d'autre part des alignements des centres de phase (il y a ici des alignements à  $\phi = 26,5$  et à  $\phi = 116,5$  degrés) ;
- la loi  $F_2$  n'utilise que des pentominos « P ». Le pavage est donc plus aléatoire et ne fait pas apparaître d'alignements. Néanmoins, on peut s'attendre à une dissymétrie site/gisement car le pavage utilise 16 pentominos verticaux et 4 horizontaux ; on aura donc, a priori, de meilleures performances dans le plan gisement (c'est-à-dire pour  $\phi_c = 0$ ) ;
- la loi  $F_3$  utilise aussi des pentominos « P » uniquement, mais a l'avantage, par rapport à la loi  $F_2$ , de présenter une équitépartition des pentominos verticaux et horizontaux.

#### 4.5.3. Étude de la loi $F_1$

Les variations du coût géométrique (33) de la loi  $F_1$  en fonction de la longitude sont données sur la figure 10. Comme prévu, il y a apparition de deux pics assez marqués au voisinage de 27 degrés et de 117 degrés, le reste du diagramme ne présentant pas de pics notables. On a calculé quelques diagrammes après fusion, pour s'assurer de la pertinence de la fonction de coût ; ils correspondent à une source de colatitude  $\theta_c = 15$  degrés.

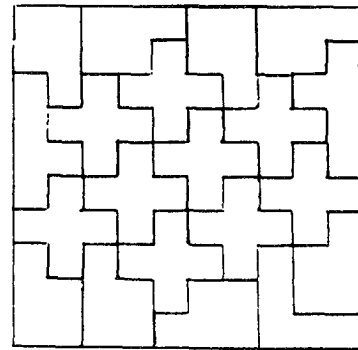


Figure 7. — Loi de fusion  $F_1$ .

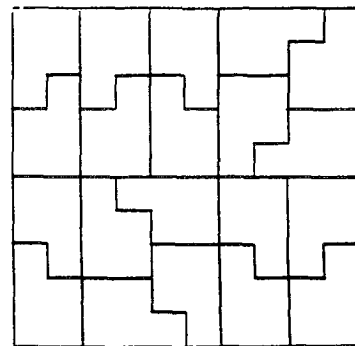


Figure 8. — Loi de fusion  $F_2$ .

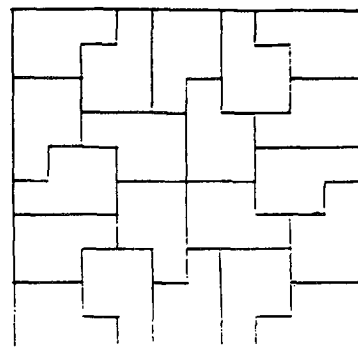


Figure 9. — Loi de fusion  $F_3$ .

— Pour  $\phi = 117$  et 27 degrés (Figures 11 et 12), on note effectivement une forte remontée de lobe secondaire (lobe de réseau), avec un niveau relatif de 13,7 décibels. Dans cette direction, la fusion occasionne une perte de 10 décibels puisque avant regroupement le niveau relatif est de 24 décibels.

— Pour  $\phi = 0$  (niveau relatif de 11 db contre 13 avant fusion) et  $\phi = 55$  (niveau relatif de 24,8 db contre 26 avant fusion), la fonction de coût est de faible intensité et on constate que les diagrammes sont satisfaisants.



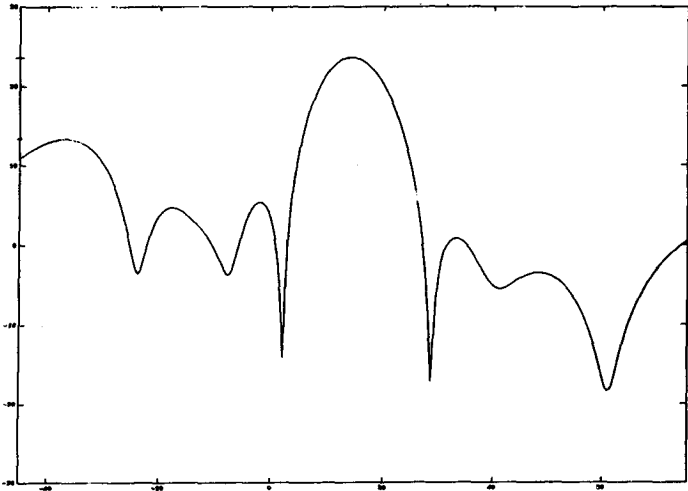


Figure 10. — Coût géométrique de la loi  $F_1$ .

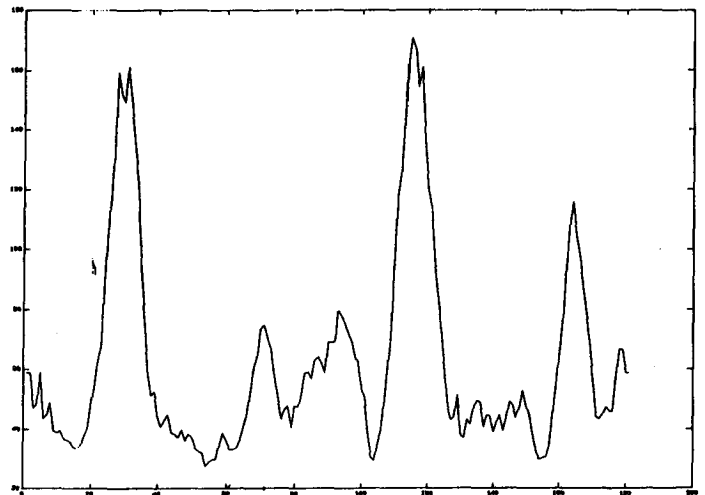


Figure 11. — Diagramme de directivité associé à  $F_1$  dans un plan de longitude  $117^\circ$ .

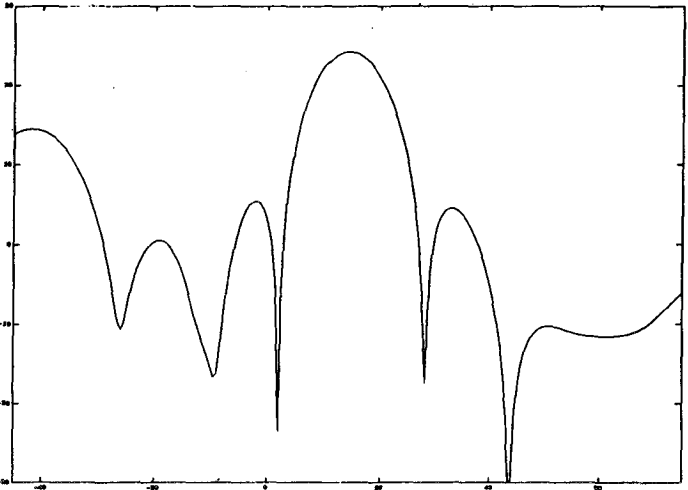


Figure 12. — Diagramme de directivité associé à  $F_1$  dans un plan de longitude  $27^\circ$ .

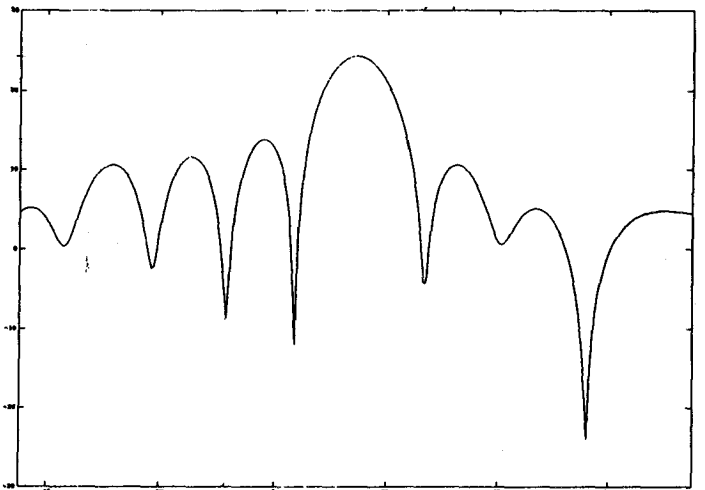


Figure 13. — Diagramme de directivité associé à  $F_1$  dans un plan de longitude  $0^\circ$ .

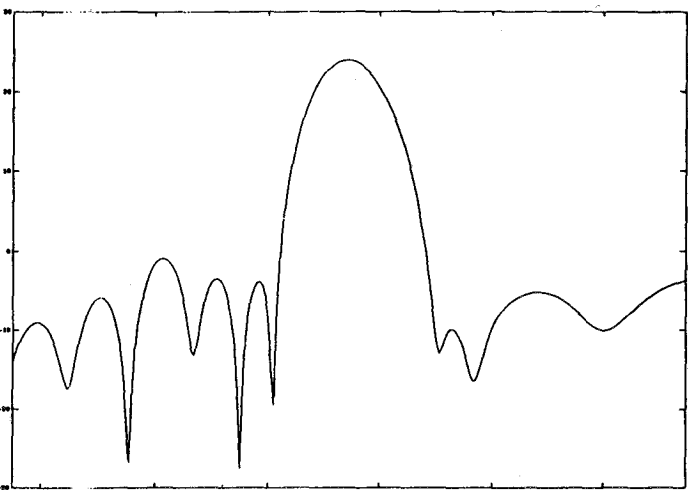


Figure 14. — Diagramme de directivité associé à  $F_1$  dans un plan de longitude  $55^\circ$ .

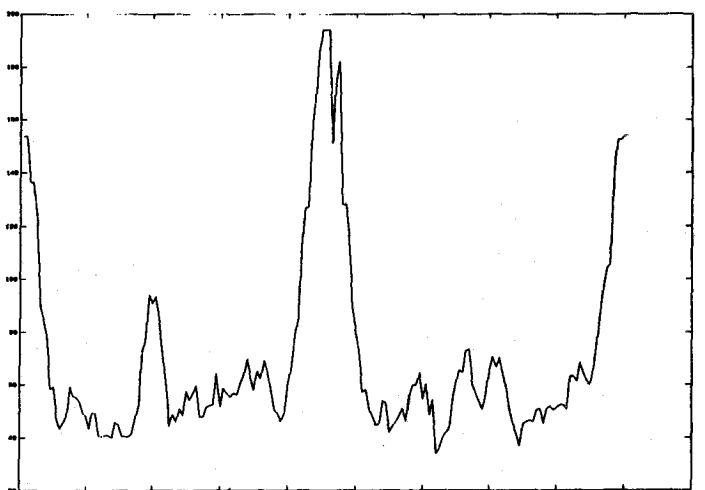


Figure 15. — Coût géométrique de la loi  $F_2$ .

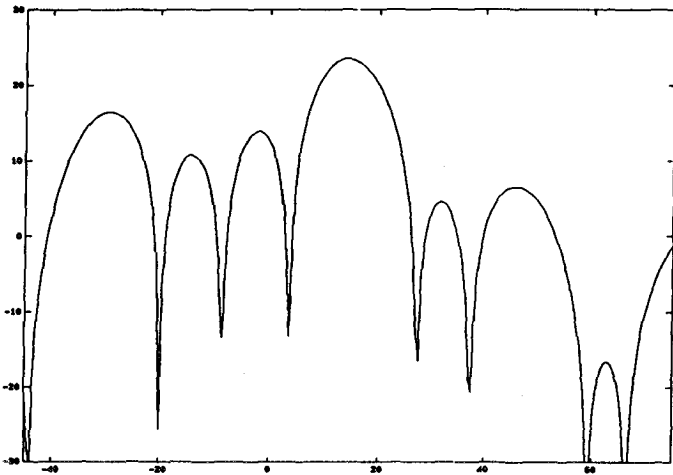


Figure 16. — Diagramme de directivité associé à  $F_2$  dans un plan de longitude  $0^\circ$ .

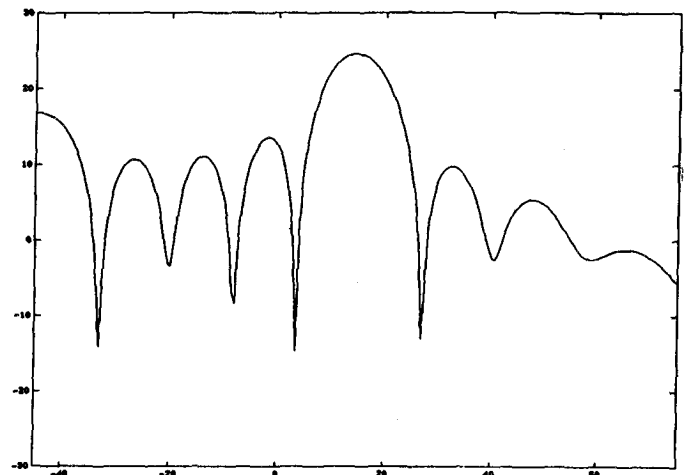


Figure 17. — Diagramme de directivité associé à  $F_2$  dans un plan de longitude  $90^\circ$ .

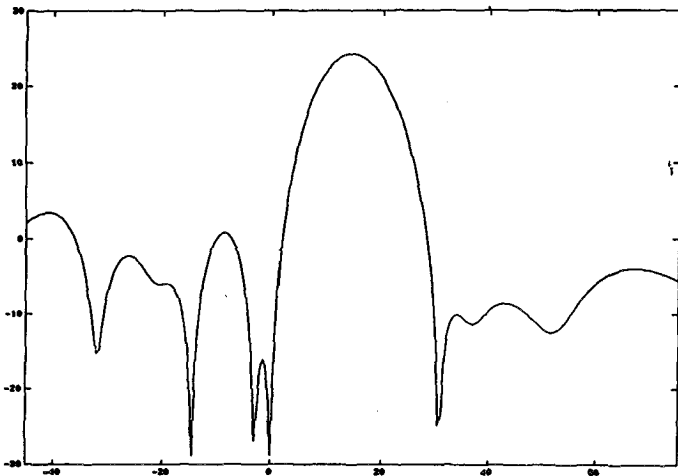


Figure 18. — Diagramme de directivité associé à  $F_2$  dans un plan de longitude  $40^\circ$ .

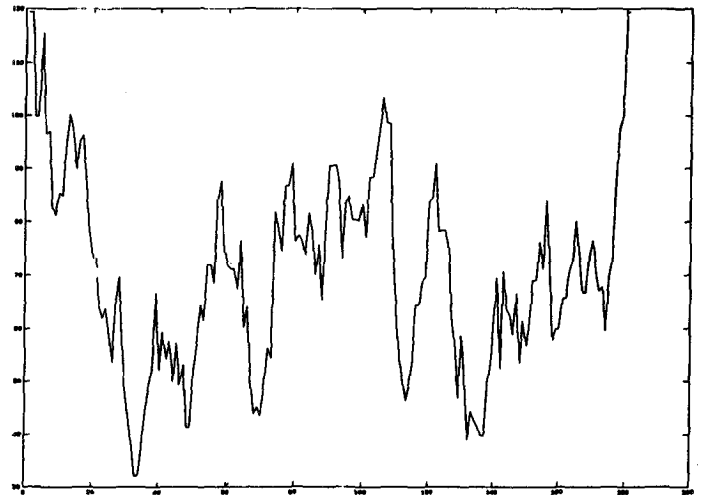


Figure 19. — Coût géométrique de la loi  $F_3$ .

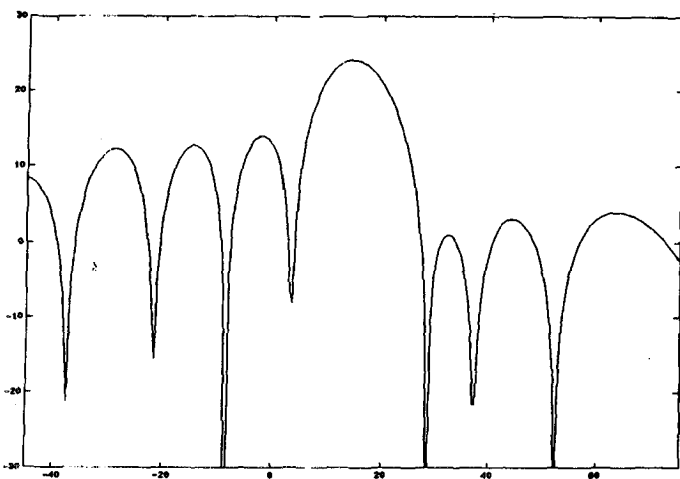


Figure 20. — Diagramme de directivité associé à  $F_3$  dans un plan de longitude  $0^\circ$ .

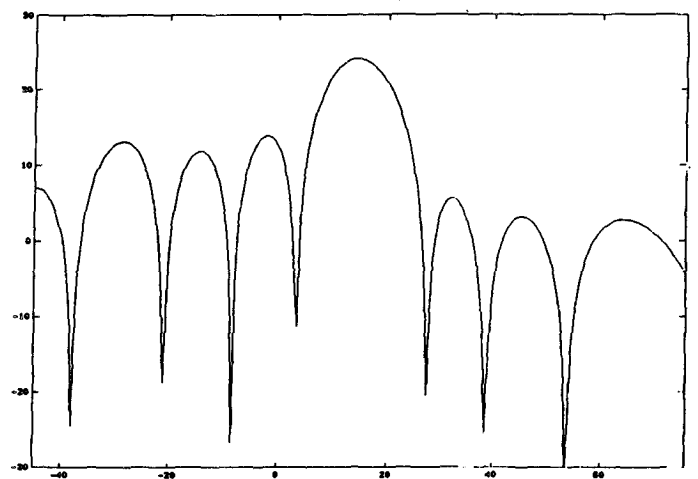


Figure 21. — Diagramme de directivité associé à  $F_2$  dans un plan de longitude  $90^\circ$ .

### 4.5.4. Étude de la loi $F_2$

La fonction de coût prédit deux mauvaises directions,  $\phi = 0$  et  $\phi = 90$  (ces directions sont déjà mauvaises avant fusion), avec des performances un peu plus mauvaises pour  $\phi = 90$ , comme la structure du pavage le laissait présager.

Les diagrammes montrent effectivement la présence d'une remontée secondaire avec un niveau relatif de 8 db pour  $\phi = 0$  et de 7,2 db pour  $\phi = 90$ . Pour  $\phi = 40$ , on note un pic assez marqué et le diagramme correspondant présente effectivement une remontée à 21 db (27,4 db avant fusion).

### 4.5.5. Étude de la loi $F_3$

Tout d'abord, on remarque que le maximum du diagramme de coût a une valeur nettement plus faible que pour les deux autres lois. De plus, le diagramme est plus « tassé », comme en témoigne les valeurs des écarts-type des fonctions de coût :  $\sigma = 33,7$  pour la loi  $F_1$ ,  $\sigma = 59,9$  pour  $F_2$  et  $\sigma = 18,3$  pour  $F_3$ . La valeur de  $\sigma$  est évidemment à relier au caractère isotrope de l'antenne. Enfin, les deux directions parallèles aux axes de l'antenne ( $\phi = 0$  et  $\phi = 90$ ) sont encore les plus mauvaises, mais le sont moins comparativement à la loi  $F_2$  (pour  $\phi = 0$ , par exemple, il n'y a pas de remontée et le niveau relatif est de 10 db).

Finalement, la fonction de coût proposée s'est révélé assez pertinente pour la discrimination de ces trois lois, la loi  $F_3$  apparaissant comme la meilleure et la loi  $F_1$  comme la plus mauvaise.

## Conclusion

L'article pose le problème du regroupement optimal de capteurs et propose trois critères d'optimalité : deux classiques de nature énergétique ; le dernier plus original, d'une teneur géométrique est validé par des simulations. Un certain nombre de questions délicates restent encore en suspens dans l'objectif de définir une stratégie globale de choix d'une loi de fusion telles que :

- la recherche d'un ensemble de critères pertinents (un critère intéressant et non abordé ici, est la borne de Cramer-Rao relative à l'estimateur angulaire) ;
- l'étude de la corrélation entre les différents critères ;
- la synthèse des résultats relatifs aux différents critères en vue d'une prise de décision finale ;

Il faut avoir à l'esprit que la complexité du problème est accrue par la nécessité de satisfaire des contraintes, la fusion optimale apparaissant donc comme un problème d'optimisation multi-critères et multi-contraintes.

D'autres questions, non liées à la recherche d'une loi optimale mais ayant trait aux conséquences de la fusion, restent ouvertes :

— la compensation du couplage, [13], [14] (le problème étant plus ardue après fusion) et mise en œuvre du filtre adapté spatial et des méthodes haute-résolution sur une antenne fusionnée ;

— la robustesse vis-à-vis des défauts de calibration et de la dégradation douce.

Enfin, remarquons que l'une des difficultés du problème de la fusion optimale réside dans le fait que, pour certains critères, l'optimalité dépend du scénario alors que la loi de regroupement reste figée (fusion « matérielle »).

Cette étude a été réalisée avec le soutien de la DGA STET.

Manuscrit reçu le 12 mars 1992.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. E. KOPILOVITCH et L. G. SODIN, Two-dimensional aperiodic antenna arrays with a low sidelobe level, *IEE Proceedings*, vol. 138, n° 3, June 1991.
- [2] S. R. DE GRAFF et D. H. JOHNSON, Optimal linear arrays for narrow-band beamforming, *IEE*, 1984.
- [3] P. DUVAUT, L. HAYOUN et J. P. GUYVARCH, Regroupement optimal de capteurs en traitement du signal RADAR, GRETSI 1991.
- [4] L. RANDY, Reducing grating lobes due to subarray amplitude tapering, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP33, n° 8, August 1983.
- [5] K. SUDHAKAR RAO et I. KARLSSON, Low sidelobe design considerations of large linear array antennas with contiguous subarray, *IEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP35, n° 4, April 1987.
- [6] R. A. MONZINGO et T. W. MILLER, « Introduction to adaptive arrays », Wiley and Sons, 1980.
- [7] F. LE CHEVALIER, « Principes de traitement du signal RADAR et SONAR », 1989.
- [8] U. NICKEL, « Angle estimation with adaptive arrays and its relation to super-resolution », *IEE Proceeding*, février 1987.
- [9] P. CHEVALIER, « Antenne adaptative à évison de fréquence, Antenne non linéaire adaptative », Thèse de Doctorat, Université de Paris 11, 1990.
- [10] P. DUVAUT, Traitement du signal, concepts et applications, Édition Hermès, Paris, 1991.
- [11] M. BOUVET, Étude de certains problèmes de détection et de normalisation adaptatives, Application à l'ASM, Thèse de Doctorat d'état, Orsay, février 1987.
- [12] P. LASCAUX, 1986, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, t. 1 et 2, Masson, Paris 1986.
- [13] B. KANG, B. D. STEINBERG et S. B. KESLER, A solution for self-calibrating a large distorted phased array using subarray processing, *IEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP39, n° 3, March 1991.
- [14] B. FRIELANDER et A. J. WEISS, Direction finding in the presence of mutual coupling, *IEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, n° 3, March 1991.