

Identification superrésolutive de sources corrélées par décomposition de la base du sous-espace source estimé

High-Resolution Correlated Sources Identification Using Decomposition of the Estimated Source Sub-Space



Dominic GRENIER

Département de génie électrique
Université Laval
Québec (QC), Canada G1K 7P4
email : dgrenier@gel.ulaval.ca
Fax : (418) 656-3159

Dominique Grenier est né à Dolbeau (province de Québec) en 1960. Il a obtenu ses diplômes de baccalauréat, de maîtrise et son Doctorat en Génie Électrique à l'Université Laval à Québec, en 1983, 1985 et 1989 respectivement. Il s'est par la suite joint à la division radar du « Defence Research Establishment, Ottawa » (DREO), pour des travaux post-doctoraux sur l'ouverture synthétique radar inverse. Il est présentement professeur adjoint au sein du Département de Génie Électrique de l'Université Laval où ses activités de recherches se concentrent sur le traitement d'antenne réseau et l'imagerie radar.



Gilles Y. DELISLE

Département de génie électrique
Université Laval
Québec (QC), Canada G1K 7P4

Né à Québec en 1945, Gilles Y. Delisle est professeur titulaire au département de génie électrique de l'Université Laval depuis 1973. Il

a été successivement Directeur de ce département entre 1977 et 1983 ; et Vice-doyen au Développement et Transfert Technologique de la Faculté des Sciences et de Génie de 1989 à 1991. Depuis le 1^{er} juin 1992, il est Directeur de l'Institut National de Recherches Scientifiques, Télécommunications (INRS) à Montréal. Il poursuit actuellement des travaux de recherche dans le domaine de la modélisation du canal radio-mobile, la mesure et la prédiction de sections efficaces radar et la réalisation d'équipement de télécommunications. Il a reçu, en 1986, le prix J.-Armand Bombardier de l'Association canadienne pour l'avancement des sciences (ACFAS) pour l'innovation technologique et le prix d'Excellence du Canada pour le transfert de technologie.



Béatrice PHILIBERT

Département de génie électrique
Université Laval
Québec (QC), Canada G1K 7P4

Béatrice Philibert est diplômée ingénieur en physique et électronique de l'Institut de chimie, physique et informatique de Lyon en 1985. Elle a obtenu son doctorat en automatique et traitement du signal de l'INPG de Grenoble en 1989. Elle a par la suite effectué un stage post-doctoral à l'Université Laval d'une durée de 2 ans. Elle est présentement professeur adjoint au Département de Génie Électrique de l'Université Laval. Ses travaux de recherche portent sur le traitement adaptatif des signaux, les systèmes sonar et sur l'analyse radar de l'état de mer.

RÉSUMÉ

L'emploi des méthodes du deuxième ordre de traitement du signal pour l'analyse spatiale est limité par la corrélation existante entre les sources. Celles-ci doivent rayonner des signaux indépendants afin de satisfaire les exigences de ces méthodes et permettre un haut pouvoir résolvant.

La méthode proposée ici, parvient à augmenter le rang d'une matrice contenant les vecteurs susceptibles de reformer la base du sous-espace formé par les sources. Ceci agit comme une décorrélation des sources. L'avantage de cette méthode est qu'elle continue à séparer les sources totalement corrélées avec un haut pouvoir résolvant contrairement à la populaire diversité d'espace.

Cet article montre comment l'algorithme DEESE se sert de l'invariance en translation puis, de l'invariance en direction dans le but de récupérer une base orthonormale du sous-espace source. Des simulations réalistes sont aussi présentées pour confirmer la bonne estimation de la position des sources et la conservation du pouvoir résolvant.

MOTS CLÉS

Traitement du signal, analyse spatiale, haute résolution, sources corrélées, sous-espaces source et bruit.

ABSTRACT

Second order methods in signal processing for spatial analysis are limited by the correlation between sources. In fact, the sources must emit independent signals in order to satisfy the exigences of these methods as well as to obtain high resolution.

The method proposed here, increases the rank of the matrix that contains the vectors used to reform the source sub-space basis. This is like a source decorrelation. The advantage of this new method is that it continues to separate with a high resolution sources that are totally correlated unlike the popular method of spatial smoothing.

This article shows how the DEESE algorithm use translational invariance and directional invariance of the linear arrays for the recuperation of an orthonormal source sub-space basis. A realistic simulations are also presented to confirm the correct position of source estimations and high resolution factors.

KEY WORDS

Signal processing, Spatial analysis, High resolution, Correlated sources, Source and noise sub-spaces.

1. Introduction

Les techniques de traitement du signal du deuxième ordre appliquées à l'analyse spatiale permettent de localiser des sources rayonnantes à partir des signaux reçus à l'aide d'un réseau de capteurs. La résolution atteinte dépasse alors la limite de Rayleigh obtenue en analyse spatiale par préformation de voie. De ce pouvoir résolvant accru découle le terme de techniques superrésolutives.

Au départ, l'addition des techniques d'adaptativité à l'ensemble filtre-estimateur de variance de la préformation de voie classique a permis l'amélioration de la résolution : le traitement appliqué devenait alors fonction non seulement du paramètre de scrutation (θ), mais aussi des signaux reçus eux-mêmes par l'intermédiaire de la matrice de covariance des signaux reçus (ou plus simplement de la matrice de covariance). En conséquence, elles sont des méthodes d'estimation du second ordre. Plusieurs techniques sont issues de ce concept dont la vraisemblance maximale (MLM), le maximum d'entropie et le filtrage auto-régressif [1], [2], [3]. Leur dénominateur commun est d'ailleurs démontré par Munier et Delisle dans [4]. Parallèlement à ces travaux, des méthodes exploitant les notions de sous-espaces source et bruit se sont développées notamment par Bienvenu [5], [6], Schmidt [7] et bien d'autres [8]. Leur avantage provient du fait que les sous-espaces ne dépendent que de la géométrie du réseau et de la position des sources.

Le haut pouvoir résolvant est une caractéristique recherchée en analyse spatiale mais n'a pas permis une utilisation pratique généralisée des techniques du deuxième ordre. Quoiqu'elles apparaissent de plus en plus dans des applications spécialisées où leur succès ne fait aucun doute, les techniques du deuxième ordre doivent respecter certaines hypothèses de base, à savoir :

- 1) bruit seul indépendant de capteur en capteur, de type gaussien avec moyenne nulle et variance σ^2 ;
- 2) des fronts d'onde incidents sur le réseau conformes au modèle employé ;
- 3) un nombre plus élevé de capteurs que de sources ;
- 4) aucune corrélation entre les sources.

A cela s'ajoutent des considérations intrinsèques telles que :

- 5) système stationnaire pour tirer des informations du deuxième ordre des signaux reçus ;
- 6) temps de calcul trop important pour un traitement en temps réel.

L'hypothèse concernant la corrélation s'avère particulièrement contraignante dans beaucoup de situations réelles à cause de l'emploi des systèmes actifs de type radar, des possibilités importantes de trajets multiples, d'interférences ou autres. Comme le fait remarquer Gabriel [9], les signaux corrélés produisent un champ non stationnaire dans l'espace, ce qui crée une figure d'interférence sur le réseau. Cette figure d'interférence est produite par l'interac-

tion des fronts d'onde cohérents le long de la ligne qui contient les éléments d'échantillonnage. Si les sources cohérentes maintiennent leur relation de phase pendant la durée de l'observation alors on rencontre les deux difficultés suivantes avec la matrice de covariance :

- 1) elle n'a pas la structure Toeplitz car les valeurs le long des diagonales sont en accord avec l'amplitude de la figure d'interférence sur les capteurs ;
- 2) elle a une image de dimension inférieure à celle du sous-espace produit par les sources considérées indépendantes (la dimension de l'image est égale au rang de la matrice de covariance sans bruit).

Les travaux subséquents avaient donc comme objectif de rendre opérationnelles les méthodes à haut pouvoir résolvant dans des contextes prédéfinis avec corrélation : leurs auteurs cherchant à utiliser les propriétés des signaux ou la géométrie du réseau lui-même. L'étude de la corrélation entre les sources dans un milieu bruyant ou avec un nombre d'épreuves relativement faible fut et est encore un sujet d'actualité. Gabriel [9], [10] a d'abord proposé une approche de décorrélation basée sur un lissage Doppler. Wang et Kaveh [11] ont suggéré, à leur tour, une méthode réalisable dans le cas de systèmes à large bande. Il s'agit de décomposer le spectre de sortie, obtenue par une FFT, en bandes étroites desquelles, par une matrice de transformation fonction des directions préalablement estimées des sources, est calculée une matrice de covariance moyenne. Haber et Zoltowski [12], [13] ont utilisé, dans un premier temps, l'effet Doppler créé par un mouvement latéral du réseau qui varie avec la position des sources et, dans un second temps, une extension multi-dimensionnelle des méthodes d'estimation parmétrique. Suivant cette optique multi-dimensionnelle, Grenier [14], [15] a adapté une technique au cas d'un seul groupe en se servant d'une matrice dite de propagation et d'une recherche récursive.

Une solution largement répandue est celle de la diversité d'espace. Elle fut présentée par Evans *et al.* [16] mais popularisée par Shan *et al.* [17] sous le nom de lissage spatial (« spatial smoothing »). Cette solution consiste à diviser le réseau linéaire en sous-réseaux décalés les uns des autres d'un capteur puis à moyenner les matrices de covariance réduites issues de chacun des sous-réseaux. Cette démarche tentait de rendre la matrice de covariance finale (ou lissée) sous une forme se rapprochant de la matrice Toeplitz normalement obtenue avec des sources indépendantes. Cette idée se retrouve dans Kung *et al.* [18] ou d'une manière un peu différente dans Pillai *et al.* [19]. Finalement, dans une généralisation, Cazdow *et al.* [20] ont présenté une technique qui combine plusieurs solutions énumérées préalablement pour des sources à large bande ou non.

En conséquence, cet article traite de l'analyse superrésolutive de sources statiques (ou quasi-statiques) à bande étroite et fortement corrélées ensemble ou par groupe. La nouvelle méthode proposée, DEESE [15], s'appuie sur les propriétés d'équivalences translatives et directives d'un réseau de capteurs identiques, alignés et équidistants qui permettent de décomposer l'information tout en gardant les principes de base.

2. Modèle des données

Considérons un réseau composé de « N » capteurs identiques, alignés et équidistants d'une distance « d ». Soit « n » ($n < N$) fronts d'onde plans à bande étroite autour de la fréquence « f_0 », incidents sur le réseau provenant de sources dans les directions $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$. Suivant la représentation analytique, le signal reçu s'écrit :

$$(1) \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t),$$

avec

$$(2) \quad \mathbf{s}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}(\theta_i) \alpha_i(t)$$

où $\mathbf{x}(t)$ est un vecteur complexe de dimensions $(N \times 1)$ représentant le signal sur chacun des capteurs, $\mathbf{n}(t)$ est un vecteur complexe de bruits gaussiens non corrélés avec les sources, $\alpha_i(t)$ est l'enveloppe du signal analytique de la i -ième source et $\mathbf{u}(\theta_i)$ est un vecteur source défini à la fréquence centrale comme :

$$(3) \quad \mathbf{u}(\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, e^{-j(N-1)\phi_i}]^T,$$

$$(4) \quad \phi_i = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta_i$$

(le symbole T indique la transposée). Il est à noter que les signaux et les bruits sont des processus stochastiques supposés stationnaires et de moyennes nulles.

Pour simplifier l'écriture de (2), on obtient sous forme matricielle en sous-entendant le facteur temps :

$$(5) \quad \mathbf{s} = \mathbf{U}\boldsymbol{\alpha}$$

avec

$$(6) \quad \mathbf{U} = [\mathbf{u}(\theta_1), \mathbf{u}(\theta_2), \dots, \mathbf{u}(\theta_n)]$$

$$(7) \quad \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$$

\mathbf{U} étant la matrice source de dimensions $(N \times n)$ construite par juxtaposition des vecteurs sources et $\boldsymbol{\alpha}$, le vecteur des enveloppes complexes des sources $(n \times 1)$.

Avec les suppositions, la matrice de covariance devient :

$$(8) \quad \mathbf{R}_{xx} = E \{ \mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t)^+ \} = \mathbf{R}_{ss} + \mathbf{R}_{nn}$$

avec

$$(9) \quad \mathbf{R}_{ss} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^+$$

$$(10) \quad \mathbf{S} = E \{ \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^+ \}$$

(le symbole + indique la transposée-conjuguée). On note que lorsque les sources sont indépendantes, la matrice de covariance des sources, $\mathbf{S}(n \times n)$ est diagonale de rang complet. Par contre, elle devient inévitablement singulière lorsqu'au moins deux sources sont totalement corrélées. Entre ces deux états, elle possède des éléments extradiagonaux $[\mathbf{S}_{ij}]$ et $[\mathbf{S}_{ji}]$ ($i \neq j$) non nuls dont les valeurs font intervenir le facteur décorrélation entre les sources « i » et « j » en module et en phase, noté δ_{ij} .

Dans un environnement général comportant des sources corrélées ou non entre elles avec différents facteurs, on introduit la notion de groupe. Le terme groupe est utilisé pour décrire un ensemble de sources fortement corrélées entre elles mais indépendantes totalement ou presque des sources des autres groupes. En fait, un ensemble de plusieurs sources indépendantes constitue autant de groupes unitaires et, par opposition, un ensemble d'échos forme un seul groupe de dimension égale au nombre d'échos.

On démontre d'une part, que le rang de S équivaut au nombre de groupes « g » et que, d'autre part, la matrice source possède un rang complet selon les colonnes (rang de la matrice égal au nombre de colonnes) à condition que les déphasages électriques entre deux capteurs adjacents produits par les positions azimutales des sources, ϕ_i , soient différents. De par sa construction et des remarques précédentes, la matrice de covariance sans bruit est ainsi définie semi-positive (valeurs propres réelles, supérieures ou égales à 0) avec un rang « g ». Elle permet l'identification de deux sous-espaces orthogonaux ; l'un étant l'image et l'autre le noyau. En fait, l'image représente le sous-espace formé par les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles de R_{ss} ; et le noyau représente le sous-espace bruit (E_b) formé par les autres vecteurs propres. Avec des sources indépendantes ou partiellement corrélées ($g = n$), l'image est identique au sous-espace source (E_s) dont les vecteurs sources en forment une base. Autrement, l'image (appelée sous-espace source estimée, E_{se}) devient un sous-espace de dimension « g » à l'intérieur du sous-espace source qui demeure de dimension « n ».

Ayant

$$(11) \quad R_{ss} = V_N \Lambda_N V_N^+$$

avec

$$(12) \quad V_N = [v_1, v_2, \dots, v_N]$$

$$(13) \quad \Lambda_N = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_g, \underbrace{\lambda_{g+1}, \dots, \lambda_N}_{=0} \}$$

où les λ_i sont les valeurs propres classées en ordre décroissant et leurs v_i , leurs vecteurs propres associés ; alors

$$(14) \quad E_{se} = [v_1, v_2, \dots, v_g]$$

et

$$(15) \quad E_b = [v_{g+1}, \dots, v_N].$$

Cette constatation d'un sous-espace source estimé plus petit que celui généré par les vecteurs sources, explique l'insuccès des méthodes superrésolutives d'analyse spatiale du second ordre dont celles exploitant les notions de sous-espace source et bruit.

3. Diversité d'espace

La non-singularité de la matrice de covariance des sources est la clé du succès dans l'application des techniques

superrésolutives. Ce paragraphe montre les principes de base de la diversité d'espace (ou lissage spatial) pour augmenter le rang de la matrice S et garantir une non-singularité même avec des signaux cohérents. La diversité d'espace est un prétraitement issu de la division du réseau principal en « r » sous-réseaux enchevâchés de « m » capteurs : les capteurs $\{1, \dots, m\}$ formant le premier sous-réseau, les capteurs $\{2, \dots, m+1\}$ formant le second et ainsi de suite tel qu'illustré à la figure 1. La relation entre « m » et « r » résulte immédiatement de cette construction sachant que le nombre total de capteurs est de « N » :

$$(16) \quad r = N - m + 1.$$

La diversité d'espace utilise la matrice de covariance moyennée ($m \times m$) à partir des « r » matrices de covariance réduites provenant de chacun des sous-réseaux.

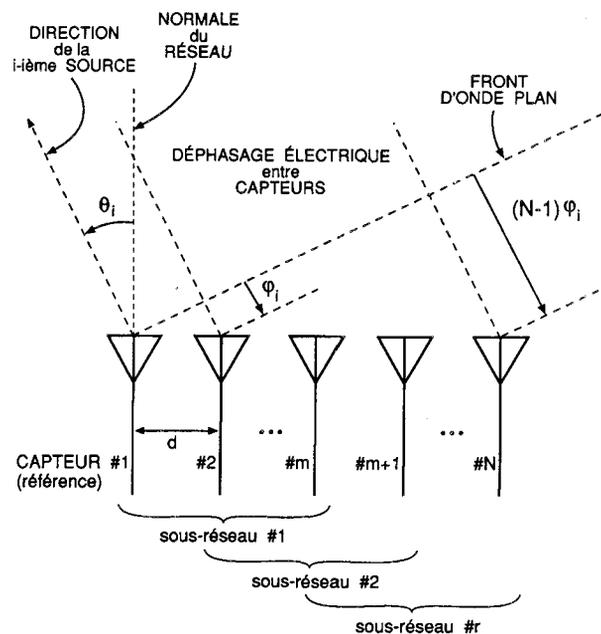


Figure 1. — Géométrie des réseaux et sous-réseaux.

Soit $s_{\{k\}}$, le vecteur des signaux reçus sans bruit au k -ième sous-réseau. En prenant toujours le capteur $\neq 1$ comme référence, on écrit :

$$(17) \quad s_{\{k\}} = U_{\{1\}} D^{(k-1)} \alpha$$

avec

$$(18) \quad D = \text{diag} \{ e^{j\phi_1}, e^{j\phi_2}, \dots, e^{j\phi_n} \}$$

où $U_{\{1\}}$ ($m \times n$), la matrice source au premier sous-réseau, est constituée des « m » premières lignes de U et $D^{(k-1)}$ dénote la $(k-1)$ -ième puissance de la matrice diagonale des phaseurs électriques.

La matrice de covariance après lissage $R_{ss(r)}$, appelée matrice de covariance lissée, s'exprime :

$$(19) \quad R_{ss(r)} = U_{\{1\}} S_{(r)} U_{\{1\}}^+,$$

avec $S_{(r)}$, la matrice de covariance des sources lissée. Shan *et al.* dans [17] démontrent que le rang de la matrice $S_{(r)}$ croît jusqu'au rang complet i.e. « n ». Il suffit de prendre un nombre de réseaux au moins égal à la taille du plus gros des groupes de sources corrélées, « b », tout en ayant plus de capteurs par sous-réseau que le total de sources ($m > n$).

L'action de la diversité d'espace est toutefois limitée. En plus de réduire considérablement le nombre de capteurs effectifs pour le traitement par les méthodes d'analyse spatiale (ce nombre correspond au nombre de capteurs par sous-réseau, « m »), la décorrélation se fait lentement pour des sources voisines. C'est le dilemme : pour assurer la superrésolution, qui est l'attribut des méthodes du deuxième ordre, il importe d'opérer avec plus de sous-réseaux au détriment du nombre de capteurs effectifs. Lorsque les sources sont à l'intérieur de la limite de Rayleigh du réseau principal, la décorrélation atteinte est souvent trop faible pour assurer, en présence de bruit, une bonne séparation des sources.

Il semble donc nécessaire d'améliorer le principe afin de le rendre plus performant. Une première idée serait de pondérer la somme des matrices de covariance partielles obtenues des sous-réseaux tel un fenêtrage des données. Or, la fenêtre rectangulaire est caractérisée par le lobe principal le plus étroit possible avec les lobes secondaires élevés. Cette dernière caractéristique s'avère assez secondaire ici. En conséquence, la pondération détériorera la faculté de décorrélation dans la zone proche de la limite de Rayleigh.

La méthode DEESE (« DEcomposition de l'Espace Source Estimé ») apporte un net progrès tout en conservant l'idée de base de la diversité d'espace.

4. Méthode DEESE

Un examen détaillé de l'action de la diversité d'espace montre que les matrices de covariance réduites, $R_{ss\{k\}}$, s'interprètent graphiquement par une série de blocs enche-

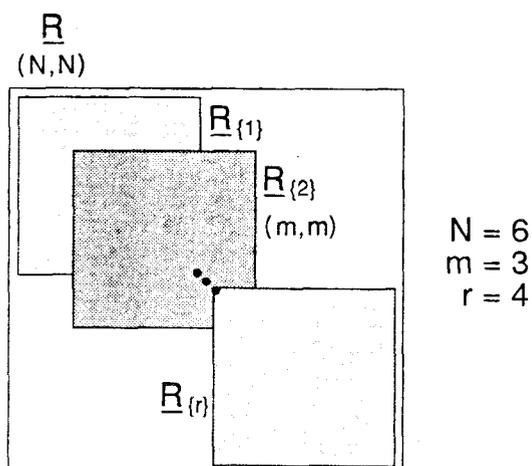


Figure 2. — Matrices de covariance réduites avec diversité d'espace.

vauchés, placés le long de la diagonale principale de la matrice de covariance du réseau principal entier tel qu'illustré à la figure 2. La partie blanche à l'intérieur de la matrice entière est inutilisée avec le lissage spatial. Avec un seul groupe, on obtient la même partition par la décomposition de l'unique vecteur propre associé au sous-espace source estimé, en « r » parties enchevêtrées.

La figure 3 montre que si

$$(21) \quad R_{ss} = \lambda_1 v_1 v_1^+, \quad (g = 1)$$

alors la matrice de covariance réduite au k -ième sous-réseau devient :

$$(22) \quad R_{ss\{k\}} = \lambda_1 v_{1\{k\}} v_{1\{k\}}^+, \quad (g = 1)$$

où

$$(23) \quad v_{1\{k\}} = [v_{1,k}, v_{1,k+1}, \dots, v_{1,k+m-1}]^T, \\ 1 \leq k \leq r.$$

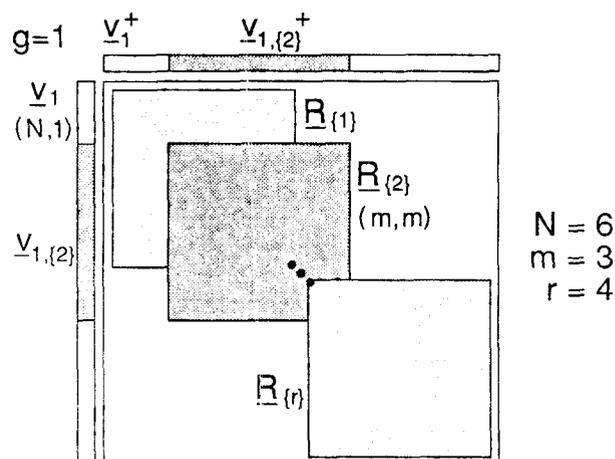


Figure 3. — Décomposition du vecteur du sous-espace source estimé.

L'annexe A démontre que les sous-vecteurs $v_{1\{k\}}$ génèrent un sous-espace qui est de dimension égale au minimum entre $\{n, r, m\}$. Ce sous-espace, dit sous-espace source récupéré, inclura tous les vecteurs sources si le nombre de sources est inférieur ou égal au nombre de réseaux et strictement inférieur à la dimension des sous-vecteurs. On rappelle que ces exigences s'appliquaient également à la diversité d'espace.

A quantité égale de sous-réseaux et de sources, les sous-vecteurs $v_{1\{k\}}$ forment une base du sous-espace source récupéré puisqu'ils sont linéairement indépendants. Cette base

$$(24) \quad V_{1(r)} = [v_{1\{1\}}, v_{1\{2\}}, \dots, v_{1\{r\}}]$$

n'est cependant pas orthonormale de sorte que la distance euclidienne entre le vecteur d'analyse, $u(\theta)$ (θ est le paramètre de balayage), et le sous-espace source récupéré ne peut être calculée par la norme de la projection du

vecteur sur la base. Deux solutions immédiates possibles :

1) l'orthonormalisation de la base $\mathbf{V}_{1(r)}$ qui fournirait une base du sous-espace source récupéré $\mathbf{E}_{sr(r)}$ à partir de laquelle est mesurée la distance par projection :

$$(25) \quad d_s(\theta)^2 = 1 - \mathbf{u}(\theta)^+ \mathbf{E}_{sr(r)} \mathbf{E}_{sr(r)}^+ \mathbf{u}(\theta);$$

2) l'emploi du calcul de la distance euclidienne généralisée à partir de la base $\mathbf{V}_{1(r)}$ quelconque :

$$(26) \quad d_s(\theta)^2 = 1 - \mathbf{u}(\theta)^+ \mathbf{V}_{1(r)} (\mathbf{V}_{1(r)}^+ \mathbf{V}_{1(r)})^{-1} \mathbf{V}_{1(r)}^+ \mathbf{u}(\theta).$$

Le principe s'étend pour permettre le traitement du cas de plusieurs groupes. L'extension se réalise par la décomposition non plus d'un seul mais des « g » vecteurs propres qui forment la base du sous-espace source estimé. On gardera maintenant les « $g * r$ » sous-vecteurs $\mathbf{v}_i \{k\}$ ($1 < i < g$ et $1 < k < r$) qui construiront la matrice $\mathbf{V}_{(r)}$ laquelle génère le sous-espace source récupéré :

$$(27) \quad \mathbf{V}_{(r)} = [\mathbf{V}_{1(r)}, \mathbf{V}_{2(r)}, \dots, \mathbf{V}_{g(r)}]$$

où les diverses matrices $\mathbf{V}_{i(r)}$ sont construites comme précédemment (cf. équations (23) et (24)) :

$$(28) \quad \mathbf{V}_{i(r)} = [\mathbf{v}_i \{1\}, \mathbf{v}_i \{2\}, \dots, \mathbf{v}_i \{r\}].$$

Le rang de cette nouvelle matrice $\mathbf{V}_{(r)}$ ($m \times (g * r)$) est maintenant limité, dans le cas sans bruit, par les trois grandeurs $\{n, m, g * r\}$ (annexe A). La dimension maximale du sous-espace source récupéré atteindra la valeur du nombre de sources lorsque, d'une manière comparable à la diversité d'espace :

- 1) le nombre de sous-réseaux est supérieur ou égal au nombre de sources dans le plus gros groupe ($r \geq b$);
- 2) le nombre de capteurs par sous-réseaux excède le nombre total de sources en présence ($m > n$).

La surestimation du nombre de sources ($r > n$) provoque, avec un groupe et sans bruit, la dépendance linéaire de « $r - n$ » sous-vecteurs en fonction des autres ; les colonnes de $\mathbf{V}_{1(r)}$ ($m \times r$) ne constituent plus une base. L'orthonormalisation par un processus tel celui de Gram-Schmidt et l'inverse matriciel dans la formulation générale de la distance échouent puisque le rang de $\mathbf{V}_{1(r)}$ est incomplet selon les colonnes. Cette difficulté se dissipe cependant par l'addition d'une matrice de covariance de bruit quelconque mais le surnombre de sous-réseaux dégradera les performances normales atteintes de par la diminution du nombre de capteurs effectifs.

Cependant, avec plusieurs groupes, le surdimensionnement de la matrice $\mathbf{V}_{(r)}$ selon les colonnes est automatique lorsque les groupes n'ont pas une taille identique. Qui plus est, il devient possible, même avec bruit, d'avoir une dépendance linéaire exacte entre les colonnes : le nombre de lignes limite la valeur du rang ($m < r * g$).

Une solution polyvalente est envisagée pour récupérer $\mathbf{E}_{sr(r)}$ de $\mathbf{V}_{(r)}$. Soit la matrice

$$(29) \quad \mathbf{Q}_{(r)} = \mathbf{V}_{(r)} \mathbf{V}_{(r)}^+,$$

de dimensions ($m \times m$), dont le rang correspond au minimum $\{r, n, m\}$. L'assurance d'un nombre suffisant de

capteurs par sous-réseau permet de dire que, sans bruit, les vecteurs propres formant l'image de $\mathbf{Q}_{(r)}$ forment une base orthonormale du sous-espace généré par les colonnes de $\mathbf{V}_{(r)}$. Cela suit le même principe que les vecteurs propres de la matrice de covariance et les vecteurs sources lorsqu'il n'y a pas de corrélation. Il en découle que :

$$(30) \quad \mathbf{E}_{sr(r)} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$$

où les vecteurs \mathbf{a}_i , de dimension ($m \times 1$), sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles (sans bruit) ou au-delà d'un certain seuil (avec bruit) de la matrice $\mathbf{Q}_{(r)}$ évaluée selon (29). On peut alors appliquer directement l'équation de la distance euclidienne avec base orthonormée (25) tout comme l'algorithme MUSIC [7]. Le traitement se déroule ainsi :

- 1) évaluation du nombre de groupes « g » par estimation du rang de la matrice de covariance sans bruit et obtention des « g » vecteurs propres formant la base du sous-espace source estimé ;
- 2) décomposition des vecteurs propres pour la formation des matrices $\mathbf{V}_{i(r)}$ selon (28) puis de $\mathbf{V}_{(r)}$ selon (27) ;
- 3) composition de la matrice $\mathbf{Q}_{(r)}$ selon (29) ;
- 4) obtention du système propre de $\mathbf{Q}_{(r)}$ et séparation des vecteurs propres liés au sous-espace source récupéré $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$;
- 5) calcul de la distance euclidienne entre le vecteur d'analyse et le sous-espace source récupéré selon (25).

5. Décomposition bidirective

La diversité d'espace et la méthode DEESE reposent sur l'équivalence translative du réseau de capteurs alignés et équidistants. La propriété de translation établit les positions des capteurs d'un sous-réseau à partir du sous-réseau précédent, ce, en suivant toujours la même loi. Des sous-réseaux équivalents en translation ont des matrices sources qui se déduisent l'une de l'autre par progression géométrique d'une matrice diagonale (la matrice \mathbf{D}). De cette façon, les matrices de covariance $\mathbf{R}_{ss \{k\}}$ sont équivalentes.

Il existe une propriété supplémentaire pour le réseau linéaire équidistant : l'équivalence directive. Cette propriété suggère la conservation de l'équivalence translative malgré la rotation complète du réseau (le capteur $\neq 1$ devient le capteur $\neq N$ et ainsi de suite...). La propriété directive, d'abord adaptée à la diversité d'espace par Williams *et al.* [21] et par Pillai *et al.* [22] augmente le nombre de capteurs effectifs car elle permet de diminuer le nombre de sous-réseaux nécessaire. La matrice de covariance sans bruit bidirective lissée devient régulière lorsque le nombre de sous-réseaux atteint « $b/2$ » donc deux fois moindre. Cette diminution est optimale dans le cas d'un seul groupe.

L'adaptation de l'équivalence directive à la méthode DEESE poursuit une même idée de rotation. La décomposition des vecteurs propres, formant la base du sous-espace source estimé, se réalise dans les deux sens, vers le bas et vers le haut (en parlant du sens de la décomposition des vecteurs \mathbf{v}_i en sous-vecteurs), d'où le nom bidirectif. Il faut

toutefois conjuguer les sous-vecteurs obtenus par la décomposition vers le haut car seule la référence est inversée : la position des sources ne l'est pas. Sous forme matricielle, l'opération s'écrit :

$$(31) \quad \mathbf{V}_{r(r)} = \mathbf{J}_m(\mathbf{V}_{(r)})^*,$$

où $\mathbf{J}_m(m \times m)$ est la matrice de rotation :

$$(32) \quad \mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} 0, & \dots, & 0, & 1 \\ 0, & & 1, & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1, & \dots, & 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{V}_{r(r)}$, qui renferme tous les sous-vecteurs décomposés depuis le bas, juxtaposée avec la matrice $\mathbf{V}_{(r)}$, qui elle contient tous les sous-vecteurs décomposés depuis le haut (cf. équation (23)), forme une nouvelle matrice, $\mathbf{V}_{b(r)}$:

$$(33) \quad \mathbf{V}_{b(r)} = [\mathbf{V}_{(r)}, \mathbf{V}_{r(r)}]$$

de dimensions $(m \times (g * 2 r))$. De là, on déduit la matrice

$$(34) \quad \mathbf{Q}_{b(r)} = \mathbf{V}_{b(r)} \mathbf{V}_{b(r)}^+.$$

Le reste du traitement demeure identique.

6. Test par le profil du rang

Le test par le profil du rang consiste en une procédure statistique qui détermine la structure de cohérence des sources et la solvabilité du résultat fourni par la diversité d'espace dans la détermination de la direction des sources. Le principe initial, élaboré par Shan *et al.* [23], étudie le rang des matrices de covariance lissées et recherche la valeur de « r » pour laquelle le rang est maximum (le rang estimé est évalué par un critère quelconque avec bruit). La diversité d'espace sera optimale avec ce nombre de sous-réseaux. Le test détermine la dimension du sous-espace source récupéré en fonction du nombre de sous-réseaux pour un nombre total de capteurs invariable, « N ».

En dépit d'une construction différente, la transposition pour DEESE est analogue, à l'exception qu'on étudie le rang de $\mathbf{Q}_{(r)}$ (ou de $\mathbf{Q}_{b(r)}$).

Les constatations graphiques dans le cas de DEESE sont les suivantes. Chaque graphique comporte trois régions :

- 1) dans la première, le rang augmente de façon monotone et informe sur la structure de la cohérence ;
- 2) le rang demeure stationnaire dans la seconde qui, si cette région est présente, atteste de la solvabilité ;
- 3) finalement, il décroît uniformément d'un rang par période, dans la dernière, car le rang de la matrice $\mathbf{Q}_{(r)}$ ne peut excéder ses dimensions.

La structure de la cohérence est déduite de ces principes :

- 1) la donnée de départ est un rang nul avec 0 sous-réseau ;
- 2) un changement de pente indique l'inclusion complète d'un ou plusieurs groupes ;

3) le nombre de ces groupes équivaut à la différence des pentes ;

4) la grosseur de ces groupes correspond au nombre de sous-réseaux au point de cassure.

Quant au test de la solvabilité, les critères sont :

1) une courbe sans segment de pente nulle indique que le réseau est incapable de résoudre toutes les sources. L'incapacité sera ressentie dans les groupes plus gros et résulte d'une insuffisance de sous-réseaux ou de capteurs par sous-réseaux ;

2) une pente nulle sur une seule période est un cas critique de solvabilité. L'ajout d'un capteur au réseau résoudrait l'ambiguïté ;

Une nuance s'impose cependant, un test de solvabilité positif n'indique pas pour autant, que toutes les sources seront discriminées même avec la sélection optimale de « r ». Lorsque deux sources sont rapprochées, elles tendent à se confondre en une seule. Ainsi, l'augmentation du nombre de sous-réseaux entraîne la diminution du nombre de capteurs effectifs et, du même coup, de la résolution possible. Le test ne confirme que la satisfaction aux exigences de la décorrélation par augmentation de rang : $(m > n)$ et $(r \geq b)$, dans le cas où toutes les sources peuvent être discriminées.

7. Résultats de simulation.

Les résultats de simulation montrés dans cette section, sont ceux obtenus typiquement après plusieurs essais. Le réseau était constitué de 10 capteurs alignés et équidistants d'une demi-longueur d'onde ($N = 10, d = \lambda/2$) et quelques 150 épreuves, chacune prélevant un échantillon par capteur, ont été amassées.

La première simulation effectuée mettait en présence deux sources totalement corrélées avec $\delta_{12} = 1,0 < 53^\circ$ ($n = 2, g = 1, b = 2$) : l'une avait une puissance de 6 dB par rapport au niveau du bruit (σ^2) à une position angulaire de -2° et l'autre, de 3 dB à 5° .

Le prétraitement par diversité d'espace avec deux sous-réseaux de 9 capteurs ($r = 2$) ne parvient pas à séparer les sources car le facteur décorrélation atteint à peine 2% : le nouveau taux de corrélation est donc 0,98. Si ce taux suffit pour discriminer les sources avec un bruit de la forme $\sigma^2 \mathbf{I}_N$, il est inapte dans des conditions de bruit plus réelles comme le montre le spectre obtenu avec diversité d'espace à la figure 4.

A la figure 5, la diversité d'espace parvient tout juste à distinguer le deux sources en augmentant le nombre de sous-réseaux. Elle y arrive difficilement à cause de la baisse du nombre de capteurs effectifs qui accompagne la hausse du nombre de sous-réseaux. Avec 5 sous-réseaux, la décorrélation approche 15%, ce qui semble suffisant pour permettre à la méthode de bien fonctionner, mais le peu de capteurs par sous-réseaux ne fournit pas le pouvoir résolutif nécessaire à la séparation.

La nouvelle méthode DEESE montre des signes plus prometteurs dans la seconde courbe de la figure.

Table 1. — Valeurs propres des matrices pour l'essai 2 sources

	R_{xx}	$R_{xx(2)}$	$R_{xx(3)}$	$Q_{(2)}$	$Q_{(3)}$	$Q_{b(1)}$	$Q_{b(2)}$
λ_1	5.3868	9.4667	12.3144	1.7519	2.2488	1.4135	2.5908
λ_2	0.1525	0.2912	0.5099	0.0156	0.0425	0.5865	0.9124
λ_3	0.1423	0.2537	0.3350	0.0000	0.0003	0.0000	0.0006
λ_4	0.1147	0.2361	0.3076	∴	0.0000	∴	0.0002
λ_5	0.1071	0.2104	0.2931		∴		0.0000
λ_6	0.1015	0.2023	0.2718				∴
λ_7	0.0910	0.1928	0.2560				
λ_8	0.0847	0.1820	0.2464		0.0000		
λ_9	0.0786	0.1508		0.0000			0.0000
λ_{10}	0.0553					0.0000	

Si on observe les valeurs des matrices $R_{xx(r)}$ et $Q_{(r)}$ au tableau 1 pour quelques valeurs de « r », on remarque que la seconde valeur propre des matrices $R_{xx(r)}$ se détache peu des suivantes ce qui explique la mauvaise séparation des sources avec la diversité d'espace. Avec DEESE, la présence de la deuxième source semble critique étant donnée la valeur de la deuxième valeur propre de $Q_{(2)}$. Mais le conditionnement de $Q_{(r)}$ est tel que la distorsion par le bruit du sous-espace source estimé est faible : on note la chute importante entre la seconde et la troisième valeurs propres de $Q_{(3)}$. Le choix de $n = 2$ se déduit à la limite mais des erreurs de biais se produisent inévitablement lorsque la décision devient de plus en plus serrée (phénomène identique pour toutes les méthodes d'analyse spatiale à la frontière de résolution).

La décomposition bidirectionnelle dépasse toutes les attentes : la troisième courbe à la figure 4 le confirme. La seconde des 10 valeurs propres de $Q_{b(1)}$ (tableau 1) a augmenté d'un facteur 40 par rapport à celle de $Q_{(2)}$ d'où découle la nette amélioration.

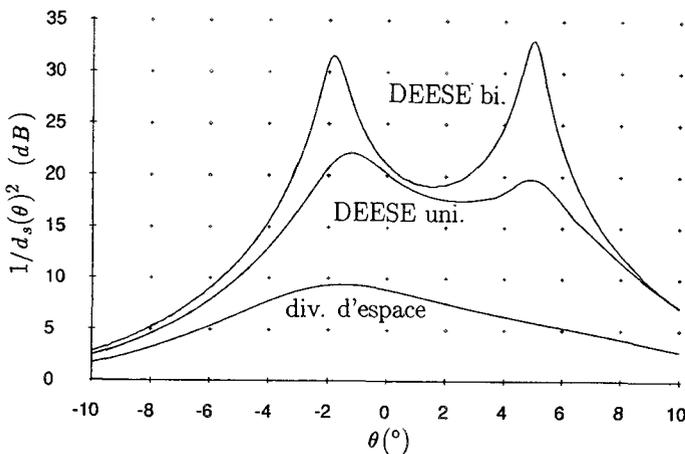


Figure 4. — Essai 2 sources et 2 sous-réseaux (1 sous-réseau pour bidirectionnel).

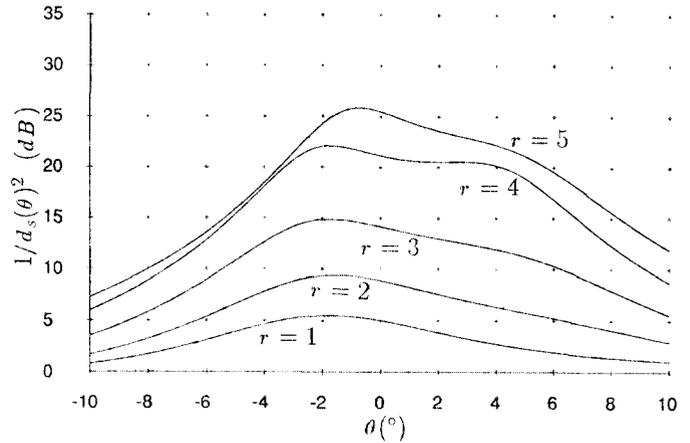


Figure 5. — Essai 2 sources et r sous-réseaux avec diversité d'espace.

On ajoute maintenant une source indépendante de 8 dB à -11° . Cette dernière forme un second groupe à elle seule ; le système comporte donc deux groupes de sources corrélées dont le plus gros est de dimension 2 ($n = 3, g = 2, b = 2$). Les valeurs propres de la matrice de covariance, retrouvées dans le tableau 2, révèlent la présence significative de ces deux groupes. Le groupe supplémentaire influe sur la capacité résolvante du pré-traitement en diminuant la dimension du sous-espace bruit et donc de l'information nécessaire pour restreindre son effet. D'ailleurs, la figure 6 démontre que la diversité d'espace est incapable de séparer les sources du premier groupe peu importe le nombre de sous-réseaux alors que la méthode DEESE unidirectionnelle y arrive mais avec un nombre plus grand de sous-réseaux à la figure 7. La figure 8 indique, encore une fois, la puissance de la méthode DEESE bidirectionnelle avec un seul sous-réseau et une estimation du sous-espace source récupéré de dimension 3 ($r = 1, n = 3$). L'isolation de toutes les sources semble même assez facile. Le tableau 2 dresse les valeurs propres des matrices impliquées pour l'évaluation du nombre total de sources pour les différentes méthodes dans le cas présent. On remarque particulièrement le détachement entre la troisième valeur propre ($n = 3$) et les suivantes qui est meilleur avec DEESE (surtout bidirectionnel) qu'avec la diversité d'espace.

Table 2. — Valeurs propres des matrices pour l'essai 3 sources, 2 groupes

	R_{xx}	$R_{xx(2)}$	$R_{xx(5)}$	$Q_{(2)}$	$Q_{(5)}$	$Q_{b(1)}$	$Q_{b(2)}$
λ_1	7.3706	13.7967	32.6435	1.9336	4.0827	1.9988	3.7310
λ_2	4.3109	6.9961	9.7435	1.5681	1.5450	1.4886	2.5964
λ_3	0.1495	0.3033	1.0090	0.0117	0.0328	0.5114	0.6954
λ_4	0.1406	0.2478	0.6950	0.0008	0.0021	0.0011	0.0026
λ_5	0.1172	0.2234	0.6155	0.0000	0.0007	0.0000	0.0016
λ_6	0.1029	0.2073	0.5495	∴	0.0005	∴	0.0009
λ_7	0.0885	0.1834					0.0004
λ_8	0.0801	0.1748					0.0002
λ_9	0.0770	0.1560		0.0000			0.0000
λ_{10}	0.0707					0.0000	

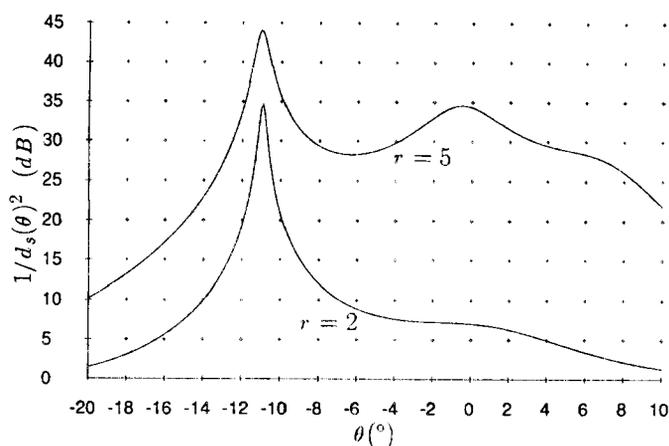


Fig. 6. — Essai 3 sources, 2 groupes et r sous-réseaux avec diversité d'espace.

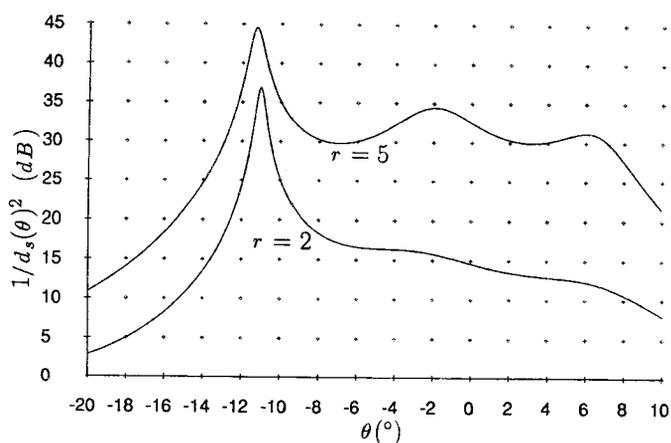


Fig. 7. — Essai 3 sources, 2 groupes et r sous-réseaux avec DEESE unidirective.

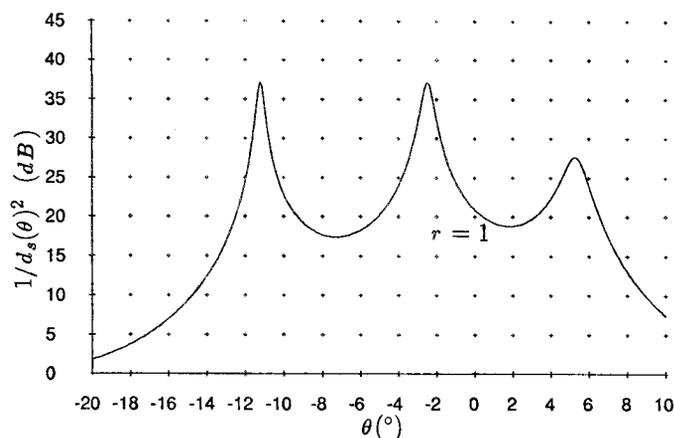


Fig. 8. — Essai 3 sources, 2 groupes et 1 sous-réseau avec DEESE bidirective.

8. Conclusion

La méthode DEESE permet de traiter des sources corrélées en décomposant les vecteurs propres formant la base du sous-espace source estimé ; elle décompose ces vecteurs d'une manière comparable à la décomposition en sous-réseaux suggérés par la diversité d'espace. Cette décomposition décorrelle graduellement les sources selon une loi qui fait intervenir le nombre de sous-réseaux et le déphasage électrique entre les sources.

La technique offre des avantages *a priori* :

- 1) utilisation de la matrice de covariance entière afin de récupérer le sous-espace source récupéré (cf. figures 2 et 3) ;
- 2) utilisation plus fiable du sous-espace source estimé : on choisit exclusivement les vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice entière qui sont nettement plus élevées que les autres ; non d'une tendance surestimative sur la matrice de covariance lissée comme dans la diversité d'espace. On n'augmente pas la dimension du sous-espace en se servant de vecteurs propres « contaminés » par le sous-espace bruit.

Ces deux atouts contribuent à l'efficacité améliorée de DEESE.

En théorie, on comble la déficience apportée par la singularité de S en prenant un nombre de sous-réseaux égal au nombre de sources dans le plus gros groupe. Par contre, le rapprochement des deux sources d'un même groupe demande plus de sous-réseaux pour bien décorrelater et plus de capteurs effectifs pour garder un bon pouvoir séparateur. On a donc intérêt à appliquer une seconde propriété du réseau rectiligne, l'équivalence directive, qui réduit par un facteur 2 le nombre de sous-réseaux. La décomposition des vecteurs propres s'effectue alors dans les deux sens (bidirective).

Finalement, le test par le profil du rang s'applique sur la matrice $Q_{(r)}$ pour déterminer le regroupement des sources cohérentes et prédire, jusqu'à un certain point, la qualité de l'estimation fournie par la nouvelle méthode.

9. Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) qui a octroyé les fonds nécessaires à ces travaux.

A. Annexe

La démonstration du rang de la matrice $V_{(r)}(m \times (g * r))$ sans bruit, s'obtient par la généralisation du cas d'un seul groupe ($g = 1$). En effet, si la décomposition du vecteur propre v_i associé au i -ième groupe permet d'obtenir une matrice $V_{i(r)}$ dont le rang sera « n_i », le nombre de sources dans le groupe ; la décomposition des « g » vecteurs propres v_k fournira une matrice $V_{(r)}$ dont le rang sera égal à

la somme des « n_i » soit « n » puisque tous les vecteurs propres sont orthonormaux.

Avec un seul groupe de sources corrélées, c'est une combinaison particulière de l'ensemble des vecteurs sources qui forme le sous-espace source estimé. Ainsi :

$$(35) \quad \mathbf{v}_1 = \beta \mathbf{U} \mathbf{c}$$

où \mathbf{c} est un vecteur de combinaison de dimension ($n \times 1$).

En pratiquant la décomposition, on obtient les relations suivantes entre les sous-vecteurs :

$$(36) \quad \mathbf{v}_{1 \{k\}} = \beta_k \mathbf{U}_{\{1\}} \mathbf{D}^{(k-1)} \mathbf{c}.$$

La juxtaposition des « r » sous-vecteurs forme la matrice $\mathbf{V}_{1(r)}$. Sachant que la multiplication d'une colonne par une constante non nulle ne modifie pas le rang et que, d'après le théorème de Sylvester, le rang d'un produit matriciel est inférieur ou égal au plus petit des rangs des matrices du produit, il s'ensuit que :

$$(37) \quad \mathbf{V}_{1(r)} = [\beta_1 \mathbf{U}_{\{1\}} \mathbf{c}, \beta_2 \mathbf{U}_{\{1\}} \mathbf{D} \mathbf{c}, \dots, \beta_r \mathbf{U}_{\{1\}} \mathbf{D}^{(r-1)} \mathbf{c}]$$

d'où

$$(38) \quad \text{rang} \{ \mathbf{V}_{1(r)} \} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \text{rang} \{ \mathbf{U}_{\{1\}} \} \\ \text{rang} \{ [\mathbf{c}, \mathbf{D} \mathbf{c}, \dots, \mathbf{D}^{(r-1)} \mathbf{c}] \} \end{array} \right.$$

Or le rang de la matrice source, en autant que les azimuts des sources soient tous différents, est complet selon les colonnes car cette matrice est de type Vandermonde laquelle est reconnue pour avoir un rang complet selon la plus petite de ses dimensions. Ainsi, l'égalité dans l'application du théorème de Sylvester est atteinte lorsque $\mathbf{U}_{\{1\}}$ a un rang complet selon les colonnes donc lorsque son nombre de lignes devient supérieur à son nombre de colonnes (laissant un degré de liberté pour le sous-espace bruit). Ceci implique :

- un nombre de capteurs par sous-réseau supérieur au nombre de sources dans le groupe ($m > n$).

Quant au rang de la seconde matrice dans le terme de droite de l'équation (38), on se rappelle que la permutation de colonnes n'affecte pas le rang :

$$(39) \quad \text{rang} \{ [\mathbf{c}, \mathbf{D} \mathbf{c}, \dots, \mathbf{D}^{(r-1)} \mathbf{c}] \} = \text{rang} \left\{ \begin{array}{c} c_1 \mathbf{d}_1^T \\ c_2 \mathbf{d}_2^T \\ \vdots \\ c_n \mathbf{d}_n^T \end{array} \right\},$$

où c_k est k -ième élément de \mathbf{c} tandis que \mathbf{d}_k est construit comme un vecteur source tronqué :

$$(40) \quad \mathbf{d}_k = [1, e^{j\phi_k}, \dots, e^{j(r-1)\phi_k}]^T.$$

Le rang des matrices de (39) équivaut à leur dimension minimale ($n \times r$) si les éléments de \mathbf{c} sont tous non nuls et si les vecteurs \mathbf{d}_k sont linéairement indépendants. La première condition est remplie automatiquement pour ne

pas contredire la définition d'un groupe ; la seconde condition est vérifiée étant donnée la structure du vecteur \mathbf{d}_k (la juxtaposition de ces vecteurs forme une matrice Vandermonde). Si le nombre de sources est surestimé, certains éléments de \mathbf{c} seront nuls de sorte que le rang de $\mathbf{V}_{1(r)}$ demeurera égal au nombre égal réel de sources. Il suffit donc que :

- le nombre de sous-réseaux soit égal ou supérieur au nombre de sources dans le groupe ($r \geq n$).

Avec plusieurs groupes, on doit utiliser l'ensemble des sous-vecteurs $\mathbf{v}_{i \{k\}}$:

$$(41) \quad \mathbf{v}_{i \{k\}} = \beta_k \mathbf{U}_{\{1\}} \mathbf{D}^{(k-1)} \mathbf{c}_i.$$

Les vecteurs \mathbf{c}_i de dimension ($n \times 1$) contiennent les relations de phase et d'amplitude entre les sources qui forment le i -ième groupe. Chaque vecteur se compose donc de « n_i » éléments non nuls dans les positions respectives des sources formant le groupe. Ainsi :

$$(42) \quad \text{rang} \{ \mathbf{V}_{(r)} \} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \text{rang} \{ \mathbf{U}_{\{1\}} \} \\ \text{rang} \{ [\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{D}^{(r-1)} \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{D}^{(r-1)} \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_g, \dots, \mathbf{D}^{(r-1)} \mathbf{c}_g] \} \end{array} \right.$$

De la même façon qu'avec un groupe, en supposant que $\mathbf{U}_{\{1\}}$ possède un rang complet selon les colonnes donc :

- le nombre de capteurs par sous-réseau supérieur au nombre total de sources ($m > n$) ;

le rang de $\mathbf{V}_{(r)}$ correspond à :

$$(43) \quad \text{rang} \{ [\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{D}^{(r-1)} \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{D}^{(r-1)} \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_g, \dots, \mathbf{D}^{(r-1)} \mathbf{c}_g] \}$$

$$\text{rang} \left\{ \begin{array}{cccc} c_{11} \mathbf{d}_1^T & c_{12} \mathbf{d}_1^T & \dots & c_{1g} \mathbf{d}_1^T \\ c_{21} \mathbf{d}_2^T & c_{22} \mathbf{d}_2^T & \dots & c_{2g} \mathbf{d}_2^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} \mathbf{d}_n^T & c_{n2} \mathbf{d}_n^T & \dots & c_{ng} \mathbf{d}_n^T \end{array} \right\}.$$

La notation c_{ki} indique le k -ième élément de \mathbf{c}_i ou encore l'élément d'indice $[C_{ki}]$ de la matrice \mathbf{C} définie ainsi :

$$(44) \quad \mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_g].$$

Comme chaque ligne de \mathbf{C} ($n \times g$) contient un élément non nul (chaque source faisant partie d'un et un seul groupe), les matrices de (43) sont donc constituées, après permutations des lignes et des colonnes, de « g » blocs de dimensions ($n_i \times r$) placés de manière diagonale (un peu comme des blocs de Jordan qui seraient non carrés). Le rang de ces matrices vaut donc la somme des rangs des blocs qui, pour chacun des blocs, atteint la valeur de leur plus petite dimension.

Ainsi, le rang de $\mathbf{V}_{(r)}$ est égal au nombre de sources si :

- le rang des blocs est « n_i » ce qui implique un nombre de sous-réseaux supérieur ou égal au nombre de sources dans le plus gros groupe ($r > b$).

La matrice $\mathbf{V}_{(r)}$ possède, en conséquence, un rang de « n ». C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. CAPON, « High-Resolution Frequency-Wavenumber Spectrum Analysis », *Proc. IEEE*, vol. 57, août 1969, pp. 1408-1418.
- [2] H. MERMOZ, « Élimination de brouilleurs par traitement optimal d'antenne », *Annales Télécomm. (FR.)*, vol. 24, juillet-août 1969, pp. 282-293.
- [3] M. A. LAGUNAS, A. GASULL, « An Improved Maximum Likelihood Method for Power Spectral Density Estimation », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-32, fév. 1984, pp. 170-173.
- [4] J. MUNIER, G. Y. DELISLE, « Spatial Analysis in Passive Listening Using Adaptive Techniques », *Proc. IEEE*, vol. 75, nov. 1987, pp. 1458-1471.
- [5] G. BIENVENU, L. KOPP, « Principe de la goniométrie passive adaptative », in *7^e Colloque GRETSI*, Nice (France), 1979, pp. 106/106/10.
- [6] G. BIENVENU, L. KOPP, « Optimality of High Resolution Array Processing Using the Eigensystem Approach », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-31, oct. 1983, pp. 1235-1248.
- [7] R. SCHMIDT, « Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation », in *RADC Spectral Estim. Workshop*, Rome (NY), 1979, pp. 243-258.
- [8] D. H. JOHNSON, S. R. DEGRAAF, « Improving the Resolution of Bearing in Passive Sonar Arrays by Eigenvalue Analysis », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-30, août 1982, pp. 638-647.
- [9] W. F. GABRIEL, « Spectral Analysis and Adaptive Array Super-resolution Techniques », *Proc. IEEE*, vol. 68, juin 1980, pp. 654-666.
- [10] W. F. GABRIEL, « Adaptive Superresolution of Coherent RF Spatial Sources », in *1st ASSP Workshop Spectral Estim.*, Hamilton (Canada), 1981, pp. 134-139.
- [11] H. WANG, M. KAVEH, « Coherent Signal-Subspace Processing for the Detection and Estimation of Angles of Arrival of Multiple Wide-Band Sources », *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-33, août 1985, pp. 823-831.
- [12] F. HABER, M. ZOLTOWSKI, « Spatial Spectrum Estimation in a Coherent Signal Environment Using an Array in Motion », *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-34, mars 1986, pp. 301-310.
- [13] M. ZOLTOWSKI, F. HABER, « A Vector Space Approach to Direction Finding in a Coherent Multipath Environment », *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-34, sept. 1986, pp. 1069-1079.
- [14] D. GRENIER, G. Y. DELISLE, « Technique superrésolutive d'identification de sources totalement corrélées », *Can. J. on Electr. and Comp. Eng.*, vol. 14, mars 1989, pp. 82-88.
- [15] D. GRENIER, *Application du traitement du signal à l'analyse de sources corrélées à bande étroite*. Thèse de Ph. D., Université Laval, Québec (Canada), fév. 1989.
- [16] J. E. EVANS, J. R. JOHNSON, D. F. SUN, « High resolution Angular Spectrum Estimation Techniques for Terrain Scattering Analysis and Angle of Arrival Estimation », in *1st ASSP Workshop Spectral Estim.*, Hamilton (Canada), 1981.
- [17] T. J. SHAN, T. KAILATH, « Adaptive Beamforming for Coherent Signals and Interference », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-33 juin 1985, pp. 527-536.
- [18] S. Y. KUNG, C. K. LO, R. FOKA, « A Toeplitz Approximation Approach to Coherent Source Direction Finding », in *Proc. ICASSP*, Tokyo (Japan), 1986, pp. 5.7.1-5.7.4.
- [19] S. U. PILLAI, Y. LEE, « Coherent Signal Classification Using symmetry Considerations », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-37, jan. 1989, pp. 135-138.
- [20] J. A. CADZOW, Y. S. KIM, D. C. SHIUE, « General Direction-of-Arrival Estimation: A Signal Subspace Approach », *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-25, jan. 1989, pp. 31-46.
- [21] R. T. WILLIAMS, S. PRASAD, A. K. MAHALANABIS L. H. SIBUL, « An Improved Spatial Smoothing Technique for Bearing Estimation », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal proc.*, vol. ASSP-36, avril 1988, pp. 425-432.
- [22] S. U. PILLAI, B. H. KWON, « Forward/Backward Spatial Smoothing Techniques for Coherent Signal Identification », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-37 jan. 1989, pp. 8-15.
- [23] T. H. SHAN, A. PAULRAJ, T. KAILATH, « On Smoothed Rank Profile tests in Eigenstructure Methods for Direction-of-Arrival Estimation », *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. ASSP-35, oct. 1987, pp. 1377-1385.