

Lissage et reconnaissance de courbes gauches bruitées

Curve Smoothing and Matching *



André GUÉZIEC

INRIA, B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
email : gueziec@bora.inria.fr

André Guézic est né le 3 juin 1967. Ancien élève de l'École Centrale Paris (1989), puis du D.E.A. d'informatique de l'Université de Paris XI à Orsay (1990), il soutient en janvier 1993 une thèse à Orsay sur la mise

en correspondance d'images tridimensionnelles à partir de surfaces et courbes caractéristiques.

Depuis 1990, il travaille au sein du projet **Epidaure** de l'INRIA. Ses recherches portent sur la modélisation à partir de fonctions splines, sur la résolution de certains problèmes d'optimisation (éventuellement sous contrainte), et sur les méthodes d'indexation adaptées à la reconnaissance des formes.

Il est accueilli à New York University, au Courant Institute of Mathematics, à partir de janvier 1993 pour études post-doctorales.



Nicholas AYACHE

INRIA, B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
email : ayache@bora.inria.fr

Nicholas Ayache est directeur de recherche à l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique) où il dirige le projet **Epidaure** spécialisé dans l'interprétation des images médicales tridimensionnelles.

Ancien élève de l'École des Mines (1980), il a obtenu un Master of Sciences de l'Université de Californie à Los-Angeles (1981), et le titre de Docteur d'État de l'Université de Paris-Orsay (1988). Il est l'auteur de publications en Vision par Ordinateur et en Robotique, et auteur du livre *Artificial Vision for Mobile Robots* publié par MIT-Press et Inter-Editions.

Nicholas Ayache enseigne la vision par ordinateur dans plusieurs Grandes Écoles Parisiennes (Centrale, Mines, Ensta, Ponts) ainsi que dans le cadre du DEA de l'Université de Paris XI. Il est également consultant auprès de sociétés industrielles.

RÉSUMÉ

Nous présentons une solution originale au problème de la reconnaissance et du recalage d'une courbe gauche discrète. La spécificité du problème est la nécessité de conserver une faible complexité algorithmique en présence d'un très grand nombre de modèles, d'être robuste au bruit et aux occultations partielles.

Notre approche est une continuation logique des travaux de [27, 28] fondés sur un lissage des points par une courbe régulière puis par une reconnaissance à l'aide d'une table d'indexation mais présente deux innovations importantes :

- Pour une détermination plus fiable du modèle et de ses dérivées, les points discrets sont lissés par des splines en utilisant un critère d'erreur mixte et une distribution non uniforme de nœuds fondée sur la courbure locale et une régularisation exploitant la connaissance de la normale à la surface sur laquelle la courbe est inscrite et minimisant explicitement la variation de la courbure.

- la méthode de reconnaissance, à partir d'une table d'indexation de la courbure et torsion des courbes modèles, et dont la complexité est indépendante du nombre de modèles, utilise explicitement le trièdre de Frénet pour rendre la méthode véritablement insensible aux occultations partielles, ce qui n'était pas le cas des approches précédentes. Par ailleurs, une étude statistique de l'incertitude sur l'estimation de la courbure et de la torsion, permet d'ajuster de manière optimale la discrétisation de la table d'indexation, de préconiser l'emploi de nouveaux invariants plus stables et d'estimer de manière optimale les paramètres du recalage global à l'aide d'un filtre de Kalman étendu.

Nous présentons des résultats sur des données synthétiques et sur des courbes caractéristiques extraites d'images médicales.

MOTS-CLÉS

Recalage de courbes, B-Splines, Prédiction-Vérification, Accumulation, Indexation, Images Médicales.

ABSTRACT

We present a new approach to the problem of matching 3D curves. The approach has an algorithmic complexity sublinear with the number of models, and can operate in the presence of noise and partial occlusions.

Our method builds upon the seminal work of [27, 28], where curves are first smoothed using B-splines, with matching based on hashing using curvature and torsion measures. However, we introduce two enhancements :

- we make use of non-uniform B-spline approximations, which permits us to better retain information at high curvature locations. The spline approximations are controlled (i.e., regularized) by making use of normal vectors to the surface in 3-D on which the curves lie, and by an explicit minimization of a bending energy. These measures allow a more accurate estimation of position, curvature, torsion and Frénet frames along the curve ;

* Ce travail a été en partie financé par Digital Equipment Corporation.

- the computational complexity of the recognition process is considerably decreased with explicit use of the Frénet frame for hypotheses generation. As opposed to previous approaches, the method better copes with partial occlusion. Moreover, following a statistical study of the curvature and torsion covariances, we optimize the hash table discretization and discover improved invariants for recognition, different than the torsion measure. Finally, knowledge of invariant uncertainties is used to compute an optimal global transformation using an extended Kalman filter.

We present experimental results using synthetic data and also using characteristic curves extracted from 3D medical images.

KEY WORDS

Curve matching, approximation B-Splines, Alignment, Accumulation, Hashing, Medical Imaging.

1. Introduction

La mise en correspondance des images médicales tridimensionnelles (3-D) est un problème très concret auquel sont couramment confrontés les médecins. Il peut s'agir de comparer des informations complémentaires provenant de modalités d'imageries différentes (Scanner, Imagerie par Résonance Magnétique (IRM), Scintigraphies, Échographies), ou simplement de superposer des images provenant d'une même classe mais acquises à des périodes et/ou dans une position différentes.

Une méthodologie développée au sein du projet Epidaure à l'Inria consiste à extraire des images 3-D une représentation structurée, puis à utiliser celle-ci pour la mise en correspondance [4]. Cette représentation provient généralement d'une extraction de la surface des régions d'intérêt, obtenue à partir d'une extraction de contours 3-D [23-24] et de modèles déformables curvilignes ou surfaciques [11]. On extrait ensuite des lignes caractéristiques à la surface des régions extraites dont la nature est soit topologique (bords de surfaces, de trous, jonctions simples ou multiples...) [30] soit différentielle (lignes de courbures extrémales, lignes paraboliques, points ombiliques) [31].

Les lignes caractéristiques extraites sont stables par déplacement rigide de l'objet, et tolèrent des occultations partielles des objets puisque leur nature est locale. Elles sont généralement obtenues sous une forme discrète (un ensemble de voxels connexes) qui fournit une description très compacte par rapport aux données originales (quelques centaines de points au lieu de plusieurs millions). La figure 1 montre un exemple de lignes de crêtes sur un crâne [32]. Ces lignes pourraient servir à une décomposition standard du crâne pour établir des correspondances entre différents individus et guider des opérations chirurgicales [13]. Le problème posé dans cet article est l'utilisation de ces lignes caractéristiques pour reconnaître et localiser avec précision les objets tridimensionnels auxquels elles correspondent. Notre approche consiste à introduire un nouvel algorithme d'approximation de la courbe discrète par une courbe suffisamment régulière pour calculer des caractéristiques différentielles intrinsèques d'ordre 2 et 3 (courbure et torsion). L'équation analytique de cette courbe permet également d'estimer le repère de Frénet associé à chaque point.

Étant données deux courbes, on cherche ensuite la mise en correspondance d'une partie commune de celles-ci par un déplacement rigide. Nous introduisons trois approches, qui sont respectivement un algorithme de prédiction-vérifica-

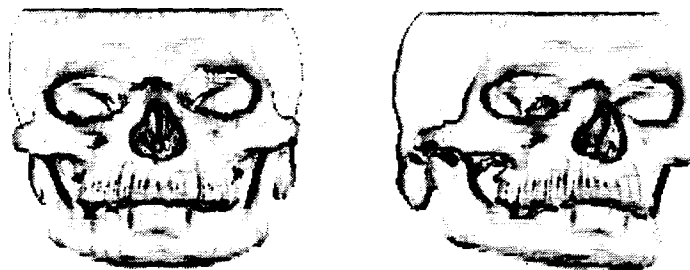


Figure 1. — Extraction de lignes caractéristiques sur un visage à partir de deux images scanner-X.

tion, un algorithme d'accumulation, et un algorithme d'indexation.

Ces travaux sont la continuation logique de ceux de [27, 28, 40, 6] sur l'utilisation de splines pour lisser et/ou apparier des points bruités. Ils sont également liés aux travaux de [5] et [20] sur la reconnaissance d'objets rigides. L'article est structuré comme suit :

- Nous introduisons d'abord notre méthode de lissage des données qui fonctionne en deux étapes avec un critère hybride : (la fig. 2 illustre le problème du lissage des courbes bruitées).

1. On se donne un seuil ε_∞ qui est une distance extrémale entre l'approximation et la courbe. Ce seuil correspond à la notion importante de l'échelle à laquelle on désire observer la courbe, et se trouve bien entendu lié au niveau de bruit et à la quantification spatiale de l'image volumique. On réalise ensuite une approximation polygonale (approximation de classe C^0) de la courbe pour ce seuil [15]. On utilise alors les points de coupure obtenus pour décider de la distribution des nœuds de l'approximation par une B-spline d'ordre 4 (approximation de classe C^3). L'idée est de concentrer les nœuds au voisinage des points de forte courbure, ce qui correspond assez bien au résultat de l'approximation polygonale [34]. On peut alors optimiser la position des points de contrôle de la B-spline en minimisant cette fois-ci une norme ε_2 (somme des distances au carré entre la courbe et son approximation).

2. On peut raffiner cette approximation en introduisant une connaissance des normales dans le critère quadratique à minimiser. En effet, les détecteurs de contours utilisés pour extraire les surfaces puis les courbes caractéristiques fournissent généralement une estimation assez précise de la normale. Enfin, dans un but de régularisation, on minimise explicitement la somme des dérivées secondes le long de la courbe.

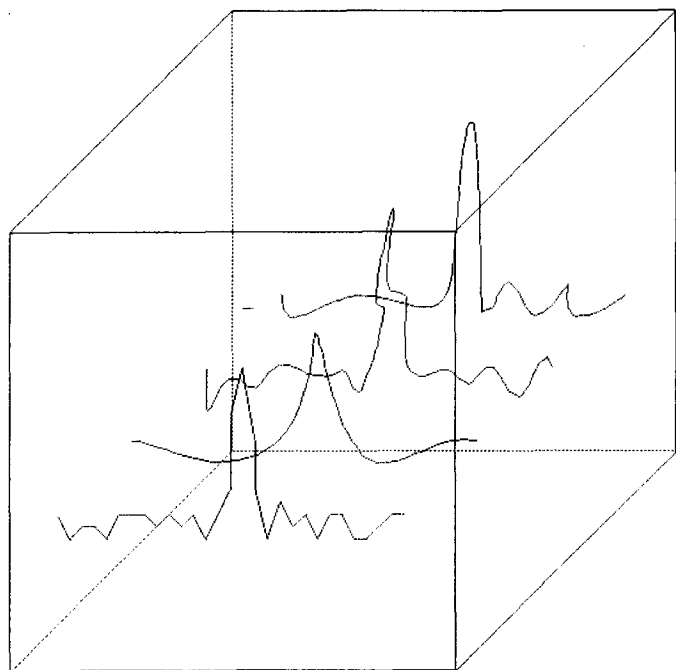


Figure 2. — Étant donnée une courbe entachée de bruit, on pourra lui faire correspondre toute une série de modèles qui la lisseront plus ou moins. Le lissage des courbes doit être adapté au niveau du bruit et au calcul précis de la courbure. Nous avons ici appliqué notre lissage à la courbe du premier plan avec des valeurs très différentes du seuil de l'approximation polygonale et nous avons obtenu les courbes 2, 3 et 4. On remarque que les parties gauche et droite de la courbe réagissent différemment car la fréquence et l'amplitude des oscillations y est différente.

- Nous présentons ensuite les trois méthodes (prédiction-vérification, accumulation et indexation) qui permettent de superposer par un déplacement rigide la plus grande partie commune de deux courbes ainsi approximées. Nous précisons la complexité de ces trois algorithmes : seul le dernier présente une complexité sous-linéaire par rapport au nombre de courbes modèles.

- Nous décrivons en détail l'algorithme d'indexation, et présentons des résultats expérimentaux sur des données réelles.

Par rapport aux méthodes itératives de recalage d'objets rigides décrites par exemple dans le récent article [7] et fondées sur la recherche itérative des points les plus proches, cette méthode offre une solution directe qui est bien plus rapide et élégante.

- Enfin nous concluons sur les perspectives de cette démarche.

2. Approximation de courbes bruitées

2.1. Motivations pour le choix des B-splines

Dans ce qui suit on présente un lissage des données de manière à déterminer un modèle pour ces dernières et à évaluer localement courbure, torsion et trièdre de Frénet. Il

est primordial de définir un critère de qualité de la modélisation que l'on va réaliser en précisant ce qui devra être considéré comme du bruit ou comme une caractéristique de la courbe digitale à approximer. Le critère que l'on se fixera ne devra pas autoriser qu'une erreur importante mais très localisée puisse être compensée par une très bonne précision par ailleurs. Ainsi choisit-on de se fixer une limite sur la distance maximale observée entre un point des données et son correspondant sur le modèle. Dans de nombreux cas la détermination de ce seuil est naturelle : en tenant compte d'une erreur de discrétisation de un pixel et si une erreur modérée est due au système d'enregistrement d'une image puis à son extraction de contour on approximerait au pixel près. Le seuil vaudra donc 1 pixel dans ce cas. Si l'on dispose de mesures de covariance sur la localisation des points de contour (cf. par exemple [31]), on peut ajuster le seuil en conséquence.

L'approximation polygonale est rapide et répond aisément à notre critère de distance maximale. Elle offre aussi l'avantage de devenir plus précise de manière automatique au voisinage des endroits de forte courbure. En revanche, à l'exception des angles que font entre eux les segments successifs de l'approximation, l'information locale sur les propriétés différentielles de la courbe est très limitée. On est donc conduit à rechercher un modèle d'un degré plus élevé, dont les dérivées successives soient suffisamment continues pour évaluer une courbure et éventuellement une torsion sur une courbe gauche. Dans la recherche d'une classe plus importante de modèles, non limitée aux lignes polygonales, nous avons choisi la famille des courbes B-splines, dont le polygone fait partie, pour leurs bonnes propriétés d'approximation, le calcul aisé de leurs dérivées ainsi que la minimisation implicite de l'énergie de courbure pour les B-splines cubiques [25, 39]. D'une manière plus générale, les B-splines de degré impair possèdent des propriétés de meilleure approximation, ou d'approximation à énergie minimale. On pourra lire attentivement l'ouvrage très complet [26] pour s'en convaincre. Les dérivées successives de la B-spline se calculent aisément par combinaison de deux valeurs de la B-spline de degré inférieur. (La relation 1 que nous démontrons dans cette section est d'ailleurs très proche de la relation de récurrence qui définit les B-splines). Pour calculer la courbure (relation 2) il faut dériver la courbe deux fois. On effectue le produit vectoriel des dérivées première et seconde. On divise alors la norme de ce produit vectoriel par la norme de la dérivée première au cube.

Les travaux sur les courbes B-splines ont été très nombreux au cours des dernières années. On peut se référer aux ouvrages [26, 6, 14, 16], à [9, 10], à l'excellent article de synthèse [8], ainsi qu'aux bibliographies correspondantes. On a conservé les notations de [6, 40] pour des raisons de cohérence.

Étant donnés $n + 1$ points chaînés $P_j(x_j, y_j, z_j)$, $i = 0 \dots n$ formant une courbe discrète, pour construire une B-spline d'approximation de classe C^{K-2} il faut se donner :

1. un polygone de $m + 1$ points de contrôle $V_j(X_j, Y_j, Z_j)$, $j = 0 \dots m$, m étant supposé connu ;
2. $m + 1$ fonctions splines polynomiales par morceaux de degré $K - 1$ et de classe C^{K-2} ; le point courant $Q(\bar{u})$

s'exprime par la somme pondérée des sommets du polygone par les fonctions splines :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\bar{u}) &= (X_q(\bar{u}), Y_q(\bar{u}), Z_q(\bar{u})) = \sum_{j=0}^m \mathbf{V}_j \mathbf{B}_{j,K}(\bar{u}) \\ &= \sum_{j=0}^m (X_j \mathbf{B}_{j,K}(\bar{u}), Y_j \mathbf{B}_{j,K}(\bar{u}), Z_j \mathbf{B}_{j,K}(\bar{u})); \end{aligned}$$

3. un ensemble de $m + K$ valeurs réelles $\{\bar{u}_j\}$ appelées nœuds qui réalisent une partition de $[0, \ell]$ en $m + K - 1$ intervalles, ℓ étant la longueur du polygone joignant tous les points \mathbf{P}_j . Avec une partition uniforme on obtient les B-splines uniformes.

On désigne le paramètre par \bar{u} et non par u pour distinguer le paramètre global \bar{u} de celui correspondant à l'intervalle séparant deux nœuds $u = (\bar{u} - \bar{u}_j) / (\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j)$. Les fonctions splines se construisent récursivement :

$$\mathbf{B}_{j,1}(\bar{u}) = \begin{cases} 1 & \bar{u}_j \leq \bar{u} < \bar{u}_{j+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{j,K+1}(\bar{u}) &= \frac{\bar{u} - \bar{u}_j}{\bar{u}_{j+K} - \bar{u}_j} \mathbf{B}_{j,K}(\bar{u}) + \\ &\quad + \frac{\bar{u}_{j+K+1} - \bar{u}}{\bar{u}_{j+K+1} - \bar{u}_{j+1}} \mathbf{B}_{j+1,K}(\bar{u}). \end{aligned}$$

En dérivant la relation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_{j,K+1}(\bar{u}) &= \frac{\mathbf{B}_{j,K}(\bar{u})}{\bar{u}_{j+K} - \bar{u}_j} - \frac{\mathbf{B}_{j+1,K}(\bar{u})}{\bar{u}_{j+K+1} - \bar{u}_{j+1}} + \\ &\quad + \frac{\bar{u} - \bar{u}_j}{\bar{u}_{j+K}} \mathbf{B}'_{j,K}(\bar{u}) + \frac{\bar{u}_{j+K+1} - \bar{u}}{\bar{u}_{j+K+1} - \bar{u}_{j+1}} \mathbf{B}'_{j+1,K}(\bar{u}). \end{aligned}$$

Par suite, pour montrer par récurrence que

$$\mathbf{B}'_{j,K+1}(\bar{u}) = K \left[\frac{\mathbf{B}_{j,K}(\bar{u})}{\bar{u}_{j+K} - \bar{u}_j} - \frac{\mathbf{B}_{j+1,K}(\bar{u})}{\bar{u}_{j+K+1} - \bar{u}_{j+1}} \right],$$

il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathbf{B}'_{j,K}$ et $\mathbf{B}'_{j+1,K}$ et de remarquer que l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_{j+K+1} - \bar{u}}{\bar{u}_{j+K+1} - \bar{u}_{j+1}} - \frac{\bar{u} - \bar{u}_j}{\bar{u}_{j+K} - \bar{u}_j} &= \\ &= \frac{\bar{u}_{j+K} - \bar{u}}{\bar{u}_{j+K} - \bar{u}_j} - \frac{\bar{u} - \bar{u}_{j+1}}{\bar{u}_{j+K+1} - \bar{u}_{j+1}}. \end{aligned}$$

On gagne donc un degré en différentiabilité alors que le degré des fonctions splines s'élève de 1. Aussi les splines quadratiques, les $\mathbf{B}_{j,3}$ sont-elles C^1 , les splines cubiques $\mathbf{B}_{j,4}$, C^2 , etc.

En orientant naturellement la courbe sur une surface, on écrit les formules cinématiques de la courbure et de la torsion :

$$\begin{aligned} k(\bar{u}) &= \frac{\|\mathbf{Q}'(\bar{u}) \wedge \mathbf{Q}''(\bar{u})\|}{\|\mathbf{Q}'(\bar{u})\|^3}, \\ \tau(\bar{u}) &= \frac{(\mathbf{Q}'(\bar{u}), \mathbf{Q}''(\bar{u}), \mathbf{Q}'''(\bar{u}))}{\|\mathbf{Q}'(\bar{u}) \wedge \mathbf{Q}''(\bar{u})\|^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Le trièdre de Frénet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ en un point courant s'obtient par :

$$\mathbf{t}(\bar{u}) = \frac{\mathbf{Q}'(\bar{u})}{\|\mathbf{Q}'(\bar{u})\|}, \quad \mathbf{b}(\bar{u}) = \frac{\mathbf{Q}'(\bar{u}) \wedge \mathbf{Q}''(\bar{u})}{k(\bar{u}) \|\mathbf{Q}'(\bar{u})\|^3},$$

\mathbf{n} résultant d'un produit vectoriel entre \mathbf{b} et \mathbf{t} .

2.2. LES LIMITES DE L'APPROCHE CLASSIQUE

On présente dans ce qui suit un premier schéma d'approximation proposé par Barsky [6] et par St-Marc et Médioni [40]. On en montrera les faiblesses pour l'objectif que l'on s'est fixé, les améliorations à apporter et on en commentera les résultats.

Les données sont lissées par une B-spline uniforme suivant le critère des moindres carrés. On rappelle que ce critère se trouve pleinement justifié si l'on suppose que les échantillons sont des variables gaussiennes de même variance [29]. Le polynôme recherché passera alors par les valeurs moyennes des échantillons gaussiens. Étant donné $n + 1$ points $\mathbf{P}_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0 \dots n$, on se propose de trouver un ensemble de $m + 1$ points de contrôle \mathbf{V}_j , $j = 0 \dots m$ correspondant à $m + K$ nœuds \bar{u}_j , $j = 0 \dots m + K - 1$ qui minimisent la distance entre la B-spline $\mathbf{Q}(\bar{u})$ de degré $K - 1$ qu'ils définissent et les données \mathbf{P}_i . Pour éviter toute confusion entre les nœuds $\{\bar{u}_j\}$, $j = 0 \dots m + K$ et la valeur particulière que prend le paramètre \bar{u} pour le point de la courbe le plus proche du point des données \mathbf{P}_i , on notera cette valeur \tilde{u}_i . On veut donc rendre minimale la quantité suivante :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum_{i=0}^n \|\mathbf{Q}(\tilde{u}_i) - \mathbf{P}_i\|^2 \\ &= \sum_{i=0}^n [(X_q(\tilde{u}_i) - x_i)^2 + (Y_q(\tilde{u}_i) - y_i)^2 + (Z_q(\tilde{u}_i) - z_i)^2] \\ &= \sum_{i=0}^n \left[\left(\sum_{j=0}^m X_j \mathbf{B}_{j,K}(\tilde{u}_i) - x_i \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{j=0}^m Y_j \mathbf{B}_{j,K}(\tilde{u}_i) - y_i \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{j=0}^m Z_j \mathbf{B}_{j,K}(\tilde{u}_i) - z_i \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

De la manière dont les \tilde{u}_i sont associés aux \mathbf{P}_i dépendra la validité de la minimisation de Δ_1 car les $\|\mathbf{Q}(\tilde{u}_i) - \mathbf{P}_i\|$ doivent correspondre à des distances euclidiennes de \mathbf{P}_i à la courbe $\mathbf{Q}(\bar{u})$. Comme expédient, Barsky propose

d'ajouter les distances parcourues en ligne droite jusqu'au point courant sur la ligne polygonale des données :

$$\tilde{u}_p = \sum_{i=0}^{p-1} \|P_{i+1} - P_i\|. \quad (3)$$

Nous y reviendrons plus en détail dans la section 2.3.1 (voir aussi *fig. 4*). La solution des moindres carrés conduit alors à chercher un minimum local de Δ_1 en annulant sa dérivée par rapport aux différents $V_j(X_j, Y_j, Z_j)$, $j = 0 \dots m$, inconnues du problème :

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial X_i} = 2 \sum_{j=0}^n B_{L,K}(\tilde{u}_i) \left(\sum_{j=0}^m X_j B_{j,K}(\tilde{u}_i) - x_i \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial Y_i} = 2 \sum_{j=0}^n B_{L,K}(\tilde{u}_i) \left(\sum_{j=0}^m Y_j B_{j,K}(\tilde{u}_i) - y_i \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial Z_i} = 2 \sum_{j=0}^n B_{L,K}(\tilde{u}_i) \left(\sum_{j=0}^m Z_j B_{j,K}(\tilde{u}_i) - z_i \right) = 0.$$

La notation matricielle s'impose ici. On appelle B la matrice des $B_{j,K}(\tilde{u}_i)$ à $m+1$ lignes et $n+1$ colonnes, X la matrice à $m+1$ lignes et 3 colonnes des points de contrôle, x la matrice à $n+1$ lignes et 3 colonnes des données : $\Delta_1 = (B^T X - x, B^T X - x)$, (x, y) désignant le produit scalaire entre les vecteurs x et y . En dérivant par rapport à X , on trouve

$$BB^T X - Bx = 0 \quad \text{soit} \quad AX = Bx.$$

Grâce à la relation $X^T BB^T X = \|B^T X\|^2$, on sait que le rang de A est celui de B , et si B est de rang $m+1$, A est définie positive symétrique ainsi que son inverse ($AA^{-1} = I = (A^{-1})^T A^T = (A^{-1})^T A$). La B -spline solution s'écrit alors $Sx = B^T A^{-1} Bx$.

Si la courbe ne se referme pas sur elle-même, A est en outre une matrice bande de largeur K , ce qui signifie que la résolution du système linéaire est en temps linéaire par rapport à m (méthode de Choleski, se référer à [44], pp. 50-56). L'écriture de B est bien sûr effectuée en temps proportionnel à n .

On observe suivant cette méthode des oscillations de petite amplitude qui n'apparaissent pas sur la courbe mais qui rendent les dérivées successives inexploitable pour trouver des appariements de points. Ce phénomène, que l'on s'attachera à réduire dans ce qui suit, s'amplifie à mesure que l'on l'approche de l'interpolation ($n = m$). Pour évaluer la méthode à partir de données synthétiques, on cherche à reconstruire une hélice bruitée (*fig. 3 a*). La figure 3 *b* illustre l'instabilité du calcul de la courbure par la méthode classique. Nous montrons dans la section suivante comment obtenir le résultat des figures 3 *c* et 3 *d*.

2.3. AMÉLIORATIONS

Les deux premières sections étudient un choix optimal des nœuds et valeurs du paramètre associées à chaque point.

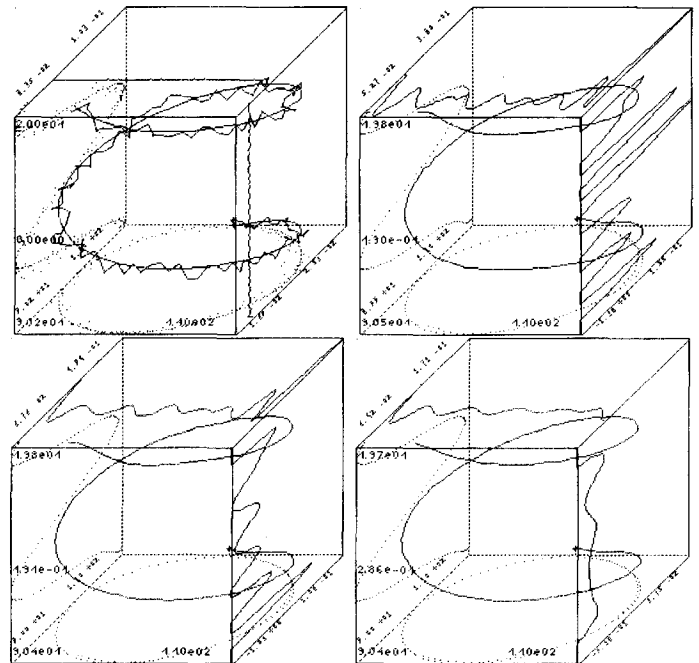


Figure 3. — a) En haut à gauche : Le bruit sur l'hélice est porté par la normale et la distance entre deux points consécutifs est bornée. On cherche à reconstituer sa courbure ainsi que sa torsion constantes (au-dessus et à droite des cadres en fonction de l'abscisse curviligne).
 b) En haut à droite : A partir d'une approximation classique de la courbe, la courbure et surtout la torsion sont peu exploitables même si la reconstruction de l'hélice est bonne.
 c) En bas à gauche : Un calcul plus précis de la distance entre la courbe et son approximation améliore le calcul de la courbure et de la torsion.
 d) En bas à droite : Avec la contrainte de la dérivée seconde le résultat s'améliore encore. En particulier, dans ce procédé de réduction de la courbure, les tangentes aux extrémités sont harmonisées avec le reste de la courbe. En toute rigueur, la torsion ne devrait pas être beaucoup mieux estimée. Cependant, pour une hélice, le produit courbure-torsion est une constante.

Les deux suivantes sont consacrées à la régularisation de la courbe obtenue en contraignant les dérivées seconde et troisième.

2.3.1. Meilleure distribution des nœuds

Les sommets d'un polygone d'approximation se concentrent autour des régions de courbure maximale [34]. Nous exploitons cette propriété pour fixer le nombre $m+K$ des nœuds de la B -spline et les disposer de manière non uniforme en fonction des longueurs des segments de l'approximation, de façon que leur répartition soit plus dense au voisinage des fortes courbures. Pour réaliser en aval un lissage du bruit cette première approximation est faite à une tolérance correspondant à quelques multiples de l'écart type de ce bruit que l'on doit évaluer. Contrairement à la suggestion de Barsky (formule 3, qui utilise le polygone interpolant, par opposition au polygone approximant), nous projetons chaque point P_i sur le polygone approximant puis considérons sur ce dernier la longueur de corde (B dans la *fig. 4*).

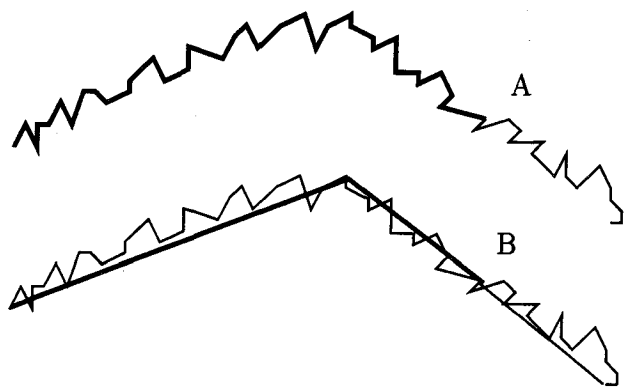


Figure 4. — Une comparaison des valeurs \tilde{u}_i , comme longueurs sur un polygone (en gras) suivant la méthode de Barsky (A) et notre modification (B).

Nous utilisons l'algorithme classique de découpages récursifs de Duda et Hart [15] que nous rappelons brièvement : à chaque étape on dispose d'un polygone reliant les extrémités de la courbe. On ajoute un sommet à l'endroit où la distance données-polygone est la plus grande. Pour fixer les valeurs des nœuds de la spline, on cherche tout d'abord leur valeur idéale pour une spline de degré 1 interpolant le polygone précédent, soit précisément ce même polygone. En associant à chaque nœud et donc à chaque point de contrôle la longueur de la corde on obtient précisément l'abscisse curviligne, à cela près que la tangente n'est pas définie aux points de contrôle. On conserve cette paramétrisation pour les splines de degré quelconque. Elle n'est en général pas uniforme et a pour effet de densifier les points de contrôle aux endroits courbés.

2.3.2. Meilleur calcul des distances [35]

La détermination des valeurs \tilde{u}_i influence de façon importante la qualité de l'approximation. Dans la première estimation qui en a été faite on calcule l'abscisse curviligne sur la ligne polygonale des données. Deux hypothèses sont attachées à cette démarche :

1. Le paramètre global \tilde{u} se comporte d'une manière similaire à une abscisse curviligne relative, ce qui signifie entre autres que la courbe est parcourue à vitesse constante. Cependant, à paramétrage identique, cette vitesse de parcours dépend du positionnement des points de contrôle. Ainsi la dérivée de la position par rapport au paramètre prend une valeur croissante si la distance entre points de contrôle successifs croît.

2. La seconde hypothèse est que l'abscisse curviligne relative est bien approximée par la longueur de la ligne polygonale. On sait que la limite de la longueur de cette ligne polygonale est bien l'abscisse curviligne, mais les erreurs de discrétisation vont s'additionner.

La difficulté qui se présente est d'évaluer la distance d'un point à une courbe qui peut être d'un degré arbitrairement élevé. Le vrai paramètre \tilde{u}_i doit être tel que $\|Q(\tilde{u}_i) - P_i\|$ soit minimum. Soit donc à résoudre l'équation suivante, où \tilde{u}_i désigne l'inconnue :

$$F(\tilde{u}_i) = \frac{\partial \|Q(\tilde{u}_i) - P_i\|}{\partial \tilde{u}_i} = 0 = \frac{\partial \left\| \sum_{j=0}^m V_j B_{j,K}(\tilde{u}_i) - P_i \right\|}{\partial \tilde{u}_i}$$

$$= 2 \left(\sum_{j=1}^m \frac{(K-1)(V_j - V_{j-1})}{\tilde{u}_{j+K-1} - \tilde{u}_j} B_{j,K-1}(\tilde{u}_i) \right)$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^m V_j B_{j,K}(\tilde{u}_i) - P_i \right).$$

On utilise un processus itératif de Newton pour la résoudre en mettant à jour \tilde{u}_i par la quantité $\delta_i = F(\tilde{u}_i)/F'(\tilde{u}_i)$. En posant :

$$DV_j = \frac{(K-1)(V_j - V_{j-1})}{\tilde{u}_{j+K-1} - \tilde{u}_j},$$

$$D^2 V_j = \frac{(K-2)(DV_j - DV_{j-1})}{\tilde{u}_{j+K-2} - \tilde{u}_j},$$

on obtient l'expression suivante pour δ_i :

$$F(\tilde{u}_i) = \left(\sum_{j=1}^m DX_j B_{j,K-1}(\tilde{u}_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m X_j B_{j,K}(\tilde{u}_i) - x_i \right)$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^m DY_j B_{j,K-1}(\tilde{u}_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m Y_j B_{j,K}(\tilde{u}_i) - y_i \right)$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^m DZ_j B_{j,K-1}(\tilde{u}_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m Z_j B_{j,K}(\tilde{u}_i) - z_i \right),$$

$$F'(\tilde{u}_i) = \left(\sum_{j=2}^m D^2 X_j B_{j,K-2}(\tilde{u}_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m X_j B_{j,K}(\tilde{u}_i) - x_i \right)$$

$$+ \left(\sum_{j=2}^m D^2 Y_j B_{j,K-2}(\tilde{u}_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m Y_j B_{j,K}(\tilde{u}_i) - y_i \right)$$

$$+ \left(\sum_{j=2}^m D^2 Z_j B_{j,K-2}(\tilde{u}_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m Z_j B_{j,K}(\tilde{u}_i) - z_i \right)$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^m DX_j B_{j,K-1}(\tilde{u}_i) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^m DY_j B_{j,K-1}(\tilde{u}_i) \right)^2$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^m DZ_j B_{j,K-1}(\tilde{u}_i) \right)^2.$$

Cette opération est moins coûteuse qu'il n'y paraît, car les $B_{j,K-1}$ et $B_{j,K-2}$ ont nécessairement été calculés pour obtenir les $B_{j,K}$ (ceci provient de la définition récursive des B-splines). Une fois tous les $\{\tilde{u}_i\}$ décrémentés de δ_i , on résoud donc à nouveau le système linéaire fournissant les points de contrôle car à ce nouveau choix des $\{\tilde{u}_i\}$ correspond une nouvelle courbe, et on évite d'itérer vers de fausses valeurs. La figure 5 illustre cette démarche. La méthode de Newton ne converge pas nécessairement en tout point et a fortiori pas nécessairement au niveau global. C'est pourquoi on réalise un test de divergence au bout

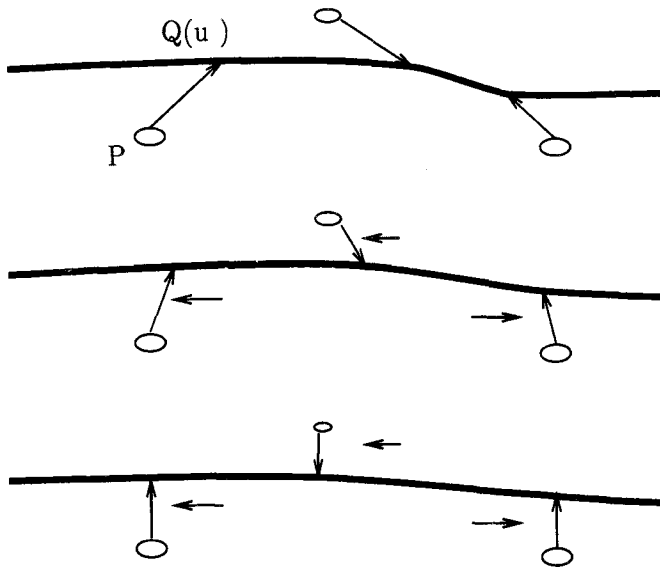


Figure 5. — Pour chaque point P le paramètre correspondant u suit une descente de gradient. A chaque itération la solution des moindres carrés est modifiée.

d'une itération et on stoppe le processus si le test est positif. En outre les valeurs itérées sont remises dans l'ordre à toutes fins utiles et remises à l'échelle entre les deux valeurs extrêmes des nœuds. Dans [21], le lecteur trouvera une description antérieure de ce type de méthode pour optimiser les valeurs \tilde{u}_i ainsi qu'une description des problèmes rencontrés. La figure 3c illustre les améliorations apportées par cette section.

2.3.3. Minimisation de la courbure

Les B-splines cubiques possèdent la propriété de meilleure approximation [26], car parmi tous les interpolants, ils minimisent la dérivée seconde. Ce résultat a été montré très tôt par [25]. On pourra aussi s'en convaincre dans [39]. Ce critère n'est pas universel et dans le cas du lissage, on peut en outre contraindre la dérivée seconde et obtenir une approximation optimale pour ce nouveau problème. En choisissant comme paramètre *naturel* de lissage la variance observée lors d'une première itération, le critère d'erreur Δ_1 devient :

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1}{\sigma_1^2} + \frac{\sum_{i=0}^{i=n} \|\mathbf{Q}''(\tilde{u}_i)\|^2}{\sigma_2^2},$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = \sigma^2(\|\mathbf{Q}(\tilde{u}_i) - \mathbf{P}_i\|), \\ \sigma_2^2 = \sigma^2(\|\mathbf{Q}''(\tilde{u}_i)\|). \end{cases}$$

Le second terme s'apparente à l'énergie de courbure de la spline. On a arbitrairement fixé le paramètre de lissage τ à la valeur $\tau = (\sigma_2/\sigma_1)^2$. Il ne s'agit cependant pas de la vraie énergie de courbure. On réalise ainsi un compromis qui nous permet, avec un coût faible en calcul, d'améliorer

considérablement notre estimation de la courbure. On discute en appendice A différentes manières d'optimiser cette valeur. Avec les notations matricielles précédemment introduites et en outre en appelant \mathbf{B}'' la matrice des $\mathbf{B}_{j,K}''(\tilde{u}_i)$ à $m+1$ lignes et $n+1$ colonnes, on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_2}{\sigma_1^2} &= (\mathbf{B}'\mathbf{X} - x, \mathbf{B}'\mathbf{X} - x) + \tau(\mathbf{B}'''\mathbf{X}, \mathbf{B}'''\mathbf{X}), \\ \mathbf{A}_\tau &= \mathbf{B}\mathbf{B}' + \tau\mathbf{B}''\mathbf{B}'''. \end{aligned}$$

Au minimum de Δ_2 , on trouve à nouveau une spline, qui s'écrira $\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{B}'\mathbf{A}_\tau^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}$. La figure 3d illustre l'intérêt de la contrainte de la dérivée seconde.

Il est aussi intéressant de contraindre la dérivée d'ordre $K-1$ (comme dans [1], où le dosage de la régularisation est laissé à l'utilisateur). Nous avons expérimenté cette idée, pourtant peu courante, en Annexe A (voir particulièrement la fig. 16). Cette régularisation pourrait corriger l'instabilité observée sur la torsion.

2.3.4. Prise en compte des normales

Dans l'étape suivante, on contraint la courbe à rester sur la surface en minimisant la moyenne quadratique des produits scalaires entre tangente à la courbe et normale \mathbf{n}_i à la surface. On rappelle que \mathbf{n}_i est en général différente de la normale à la courbe (fig. 6). Dans [31], une étude est réalisée sur la fiabilité des mesures de la normale comme gradient d'une surface d'iso-intensité comparée à celle de la position des points de contour.

$$\Delta_3 = \Delta_2 + \frac{\sum_{i=0}^{i=n} (\mathbf{Q}'(\tilde{u}_i) \cdot \mathbf{n}_i)^2}{\sigma_3^2}, \text{ avec } \sigma_3^2 = \sigma^2(\mathbf{Q}'(\tilde{u}_i) \cdot \mathbf{n}_i)^2.$$

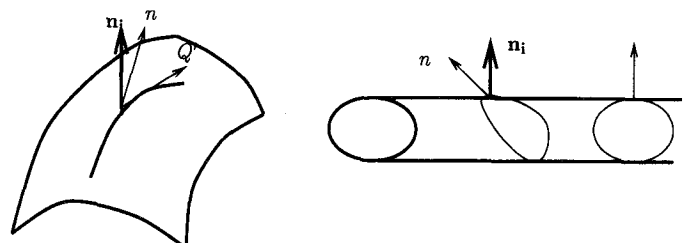


Figure 6. — La tangente à la courbe est dans le plan tangent à la surface.

On note maintenant \mathbf{N} la matrice à $n+1$ lignes et 3 colonnes des normales associées à chaque point de x , et ν le facteur de lissage lié à la régularisation par les normales ($\nu = (\sigma_3/\sigma_1)^2$). Pour exprimer Δ_3 sous forme de produits matriciels il faut introduire de nouvelles matrices à $3(n+1)$ colonnes :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_3 &= (\text{diag}(\mathbf{N}_x) \text{diag}(\mathbf{N}_y) \text{diag}(\mathbf{N}_z)), \\ \mathbf{B}_3 &= \begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}'_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}' & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}' & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}' \end{pmatrix}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

X_3 et x_3 désignant les vecteurs de dimension $3(m+1)$ formés à partir de X et x (noter que x et x_3 , X et X_3 sont identiques en mémoire de l'ordinateur) on a :

$$\frac{\Delta_3}{\sigma_1^2} = (B_3^t X_3 - x_3, B_3^t X_3 - x_3) + \tau(B_3^{tt} X_3, B_3^{tt} X_3) + \nu(N_3^t B_3^{tt} X_3, N_3^t B_3^{tt} X_3),$$

et $A_{3\tau,\nu} = B_3 B_3^t + \tau B_3^{tt} B_3^{tt} + \nu B_3^t N_3 N_3^t B_3^t$. Le résultat est encore une spline, $Sx_3 = B_3^t A_{3\tau,\nu}^{-1} B_3 x_3$, mais on ne résoud plus séparément en X , Y et Z . Comme le système n'est plus de type bande, la complexité de la résolution est en $O(m^3)$. Le progrès réalisé par cette section peut être mis en évidence sur des données réelles scanner- X , avec pour objectif de trouver le déplacement superposant deux vues (A et B) d'un même objet (un crâne) à partir de courbes caractéristiques (lignes de crêtes). Dans la figure 7, on a mis en valeur deux de ces lignes sur les vues A et B , la ligne sous-mandibulaire et une ligne orbitale, qui permettront un recalage avec une précision de 1 ou 2 voxels (notre modélisation de la ligne sous-mandibulaire est présentée dans la fig. 8 a). Ces deux courbes sont présentes dans la vue B , la ligne sous-mandibulaire étant toutefois occultée à droite et légèrement plus longue à gauche (on ne dispose donc pas d'appariements évidents), figure 8 b.

On a utilisé les normales à la surface pour la figure 8c et la courbure est plus proche de la vue A . La torsion dans B devient brusquement négative, aussi avons-nous recherché des invariants plus stables obtenus à partir de dérivées d'ordre moins élevé. Parallèlement, nous avons expérimenté la régularisation de la dérivée K -ième pour stabiliser la torsion (voir plus haut et Annexe A), avec des résultats encourageants.

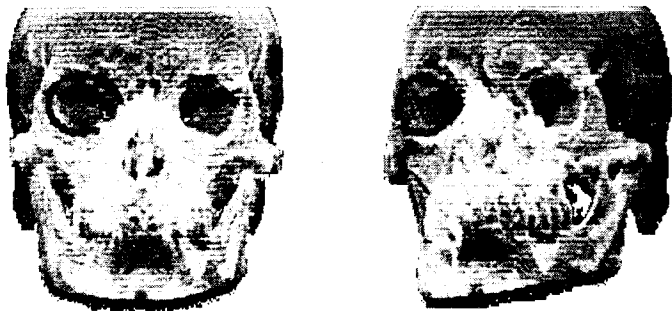


Figure 7. — Lignes de crêtes sous-mandibulaire et orbitale mises en évidence sur les vues A et B .

En résumé, le lissage par les B-splines régularisées est dans le cas le plus favorable, en $O(n+m)$ (cas défavorable : $O(n+m^3)$). Il offre par une solution directe un minimum d'énergie se traduisant par une évaluation de paramètres différentiels stables jusqu'au second ordre, et ceci en temps réel sur une station de travail moderne.

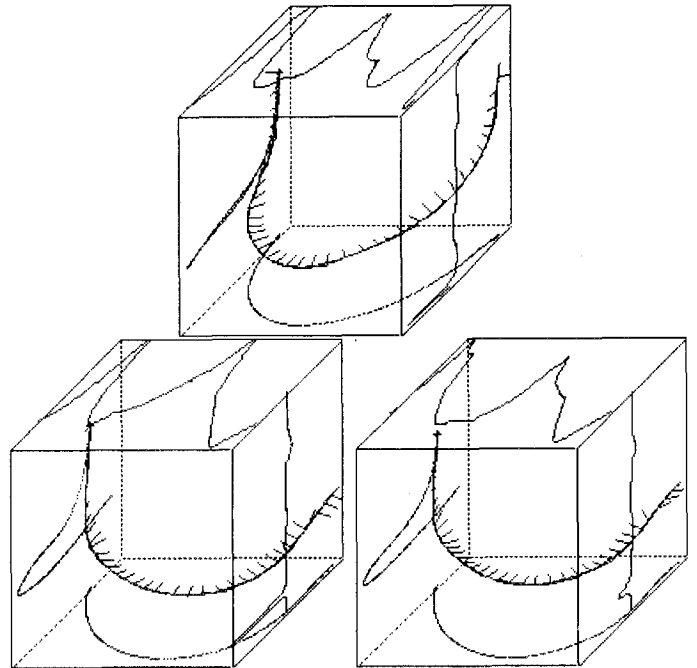


Figure 8. — a) En haut : Approximation de la ligne sous-mandibulaire sur la vue A par notre méthode, incluant la totalité des améliorations proposées. On observe sa courbure en haut et sa torsion à droite en fonction de l'abscisse curviligne. En un certain nombre de points régulièrement espacés on a tracé la tangente et la normale à cette courbe.
b) En bas à droite : La ligne sous-mandibulaire apparaît aussi sur la vue B , mais elle est occultée. On l'approxime ici sans introduire le terme de régularisation relatif aux normales. La courbure calculée en chaque point est encore relativement différente de celle de A .
c) En bas à gauche : Grâce à la connaissance des normales à la surface, notre approximation est complète et on a une représentation plus fidèle de la courbure, permettant de trouver des appariements entre A et B .

3. Reconnaissance et localisation

Nous utilisons la représentation analytique de la courbe pour la reconnaître et la localiser dans l'espace. Plus formellement, nous supposons disposer d'un ensemble de courbes modèles que nous appellerons $\{M_i\}$ et d'une courbe inconnue que nous appellerons S . Le problème est dual et consiste à :

- déterminer la courbe M_i qui contient le plus grand sous-ensemble de points commun avec S , à un déplacement rigide près,
- calculer le déplacement rigide en question.

Pour cela on peut utiliser plusieurs approches que nous détaillons maintenant. Le point central que nous exploitons dans ces méthodes est la connaissance d'un repère intrinsèque (repère de Frénet) associé à chaque courbe. Ceci permet de calculer un déplacement rigide $D = (R, u)$ à partir de la mise en correspondance d'un seul couple de points homologues.

En effet, étant donné un couple de points (M, S) (modèle, scène) et leurs trièdres de Frénet associés (t, n, b) et

(t', n', b') la rotation vectorielle R qui superpose (t, n, b) sur (t', n', b') est simplement le produit matriciel :

$$R = (t', n', b')(t, n, b)'$$

dans lequel (t, n, b) est la matrice 3×3 dont les colonnes sont respectivement les vecteurs t, n et b . Si O désigne l'origine d'un repère global, la translation est donnée par $u = OS - ROM$.

Nous supposons que les courbes ont un nombre de points de l'ordre de n , et nous examinons grossièrement⁽¹⁾ la complexité algorithmique de chaque approche par rapport à n et par rapport au nombre de courbes modèles M_i .

3.1. PLUSIEURS APPROCHES POSSIBLES

3.1.1. Calculs préalables

On utilise notre algorithme d'approximation pour calculer en chaque point d'abscisse curviligne s , le trièdre de Frénet associé, ainsi que les valeurs de la courbure $c(s)$ et de la torsion $\tau(s)$.

3.1.2. Prédiction-Vérification (Alignement)

On sélectionne un sous-ensemble de k points de la courbe S que l'on considère comme significatifs, par exemple les points de courbure extrême. On en choisit un, et on l'apparie avec les points d'une des courbes M_i présentant une courbure et une torsion similaires. Chaque appariement constitue une hypothèse.

La connaissance des trièdres de Frénet permet de calculer pour chaque hypothèse les 6 paramètres du déplacement rigide qui les superpose. On vérifie une hypothèse en appliquant le déplacement calculé aux points voisins, et en mettant à jour le déplacement rigide qui minimise la somme des distances au carré de manière récursive, par exemple avec un filtre de Kalman étendu [2].

On conserve l'hypothèse qui conduit à la superposition du plus grand nombre de points.

La complexité de l'algorithme est proportionnelle au nombre de modèles. Pour chaque modèle, la complexité est comprise entre $O(kn \log n)$ et $O(kn^2 \log n)$. (Il faut en effet effectuer $\log n$ comparaisons pour apparier les points de mêmes courbure et torsion si celles-ci ont été ordonnées au préalable sur les modèles, le nombre de vérifications varie entre 1 et n selon le degré de discrimination introduit par c et τ , et chaque vérification est proportionnelle à n).

3.1.3. Accumulation (Hough)

On apparie chacun des points de la courbe S avec les points d'une des courbes M_i présentant une courbure et une torsion similaires. La connaissance des trièdres de Frénet permet de calculer pour chaque appariement les 6 paramètres du déplacement rigide qui les superpose. On accumule ceux-ci dans un accumulateur de dimension 6, dont les pics correspondent aux transformations recherchées.

La complexité de l'algorithme est proportionnelle au nombre de modèles. Pour chaque modèle, la complexité est comprise entre $O(n \log n)$ et $O(n^2 \log n)$ selon le degré de discrimination introduit par c et τ .

3.1.4. Indexation

Un traitement préalable des courbes M_i consiste à créer une table d'indexation dont les entrées sont données par un couple (c, τ) . A chaque entrée est associée la liste des points modèles m_{ij} dont les valeurs de courbure et torsion correspondent à (c, τ) , ainsi que le trièdre de Frénet associé et l'index i du modèle correspondant.

L'algorithme de reconnaissance consiste à parcourir une seule fois la liste des points de S . Pour chaque point s_i de S , de paramètres $c(s_i), \tau(s_i)$, on examine les points m_{ij} des modèles présents dans les listes de la table d'indexation pour l'entrée $c(s_i), \tau(s_i)$. Pour chaque point m_{ij} , on calcule grâce au trièdre de Frénet le déplacement D_{ijl} associé au couple de points m_{ij} et s_i , et on vote pour le couple (M_i, D_{ijl}) . L'espace des transformations de dimension 6 est matérialisé par une table de hachage de dimension 1. La recherche d'accumulations en dimension 6 est délicate (voir [43]) alors qu'elle est aisée en dimension 1 grâce à cette table de hachage.

Après examen de chaque point de S , on conserve le couple (modèle, déplacement) qui a reçu le plus de votes, et qui correspond à la solution duale du problème. La complexité de l'algorithme de reconnaissance (hors prétraitement) est sous-linéaire par rapport au nombre de modèles. Celle-ci est de l'ordre de $O(n)$ à $O(n^2)$, suivant la répartition des valeurs de courbure et torsion dans la table d'indexation (cette méthode n'est pas adaptée à la reconnaissance des hélices, de courbure et torsion constantes ! et a fortiori pas à celle des droites. Ainsi, si une longue portion de la courbe est rectiligne ou circulaire la méthode est fortement handicapée).

Notre méthode d'indexation est voisine de celle de [27], mais présente un avantage important : le calcul explicite de la transformation rigide qui superpose les trièdres de Frénet remplace la simple différence d'abscisse curviligne mesurée entre les points m_{ij} et s_i . Ainsi notre méthode est indépendante du calcul de l'abscisse curviligne le long des courbes, quantité qui n'est pas locale et qui peut conduire à des erreurs d'interprétation. (En effet, la présence d'une excroissance sur la surface due par exemple au contact avec un autre objet ou bien à une bavure, perturbe le calcul de l'abscisse curviligne sur toute la partie de la courbe mesurée après celle-ci). (Notre approche pourra également être comparée à celle de Stein [41].)

Il faut bien comprendre également que la méthode d'indexation (MI) est différente de la méthode d'accumulation (MA) dans la mesure où le prétraitement permet de considérer tous les modèles simultanément pour la MI alors qu'il faut appliquer la MA successivement pour chaque modèle. Cette différence est d'autant plus significative que le nombre de modèles est élevé.

Nous allons voir ci-dessous qu'une étude statistique permet d'ajuster la taille de la table d'indexation, de calculer une distance « statistique » pour comparer 2 déplacements brui-

⁽¹⁾ Une étude fine de la complexité demanderait un examen approfondi de la répartition des données, et des algorithmes de remplissage et de recherche dans une table. Ce n'est pas le but recherché ici.

tés et que la méthode peut être combinée avec une procédure de vérification récursive pour optimiser récursivement le calcul du déplacement D_{ijl} .

Le résultat de la comparaison des complexités algorithmiques pour les trois méthodes envisagées est résumé dans le tableau suivant ; où m désigne le nombre de modèles.

complexité/méthode	alignement	accumulation	indexation
borne inf.	$O(mkn \log n)$	$O(mn \log n)$	$O(n)$
borne sup.	$O(mkn^2 \log n)$	$O(mn^2 \log n)$	$O(n^2)$

3.2. CHOISIR ET AMÉLIORER LA MÉTHODE D'INDEXATION

Nous avons rejeté la prédiction-vérification et la méthode d'accumulation, car ces méthodes, bien que donnant des résultats intéressants sur quelques exemples, ont une complexité qui augmente linéairement avec le nombre de modèles.

Nous avons donc décidé de nous concentrer sur la méthode d'indexation, dont la complexité est sous linéaire par rapport au nombre de modèles. Nous y avons apporté les améliorations suivantes.

3.2.1. Discrétisation de la table d'indexation

Guidés par la lecture de [19], nous avons conduit des expériences statistiques (exposées dans la section concernant les nouveaux invariants) sur la covariance de la courbure et de la torsion sur des courbes typiques que nous avons bruitées. Nous avons étudié la covariance intra- et inter-courbes de ces quantités, afin de définir une discrétisation « optimale » de la table d'indexation. Celle-ci doit être en effet suffisamment large pour prendre en compte le bruit de mesure, mais suffisamment fine pour discriminer des points distincts sur les courbes. On trace alors autour des mesures de courbure et de torsion une ellipse d'incertitude dont les axes ont pour valeur les covariances intra-courbe associées. La taille des cases doit être nécessairement plus grande que cette covariance, mais doit être du même ordre de grandeur. On ajoute une entrée à la table d'indexation dans toutes les cases avec lesquelles l'ellipse d'incertitude a une intersection non vide.

3.2.2. Comparaison de deux déplacements

Nous avons également calculé une covariance « canonique » sur les 6 paramètres de translation et de rotation d'un déplacement rigide qui superpose deux repères de Frénet bruités. Cette covariance permet de calculer une distance de Mahalanobis entre deux déplacements D_{ijl} qu'il s'agit de comparer lors de la phase de reconnaissance dans la méthode d'indexation.

3.2.3. Mise à jour récursive

Toujours dans cette phase, lorsque un point et son trièdre de Frénet associé votent pour un modèle et un déplacement, on peut mettre à jour immédiatement ce dernier par un filtre

de Kalman étendu qui minimise un critère de distance entre points appariés. Ceci améliore sensiblement la robustesse de la méthode, comme le montrent les résultats expérimentaux ci-dessous.

3.2.4. De nouveaux invariants géométriques

Les études statistiques sur des courbes bruitées nous ont conduit à étudier d'autres paramètres invariants pour l'indexation. Nous supposons que l'on choisit une base B sur une courbe modèle, et que l'on considère les points P sur la courbe (voir fig. 9). On calcule le déplacement rigide $D = (R, u)$ qui superpose le trièdre de Frénet associé à B avec celui associé à P . Cela définit 6 invariants qui sont les coordonnées (r_t, r_n, r_b) du vecteur rotation et (u_t, u_n, u_b) de la translation exprimées dans le repère de la base ⁽²⁾. En fait, pour une courbe plane r_t est nul et on remarque qu'il est préférable d'utiliser $(\theta_t, \theta_n, \theta_b)$, les angles entre les vecteurs des trièdres associés à B et P . Seuls 3 invariants subsistent dans le cas d'une courbe plane, il s'agit de (u_t, u_n, θ_t) .

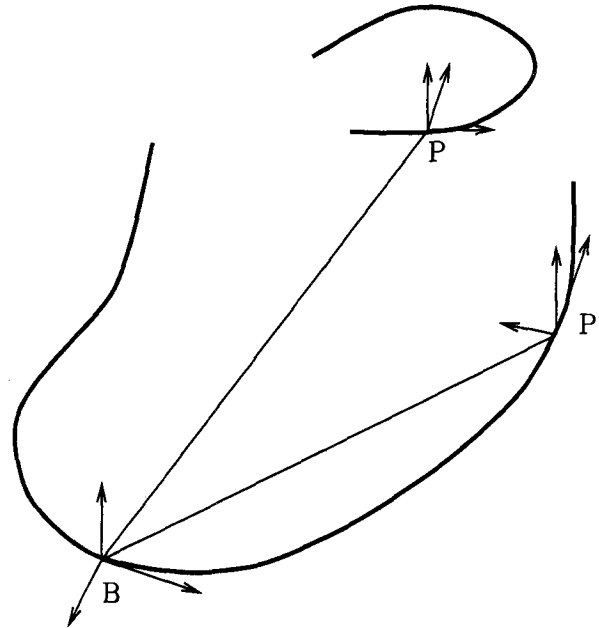


Figure 9. — A partir d'une base B on examine les transformations permettant d'atteindre les points P au-delà du demi-diamètre du nuage de points. Le cas où les courbes sont en plusieurs morceaux est traité.

A partir d'un modèle réel auquel nous appliquons 100 déplacements différents par rapport à une origine fixe, nous approximations chacune de ces instances suivant notre méthode puis nous les échantillons de manière identique. Une base B et un point P sur une courbe possèdent alors un correspondant sur les autres (même numéro d'échantillon), et en les considérant tous on évalue une

⁽²⁾ On rappelle qu'une rotation vectorielle de R^3 peut être paramétrée par un vecteur r de R^3 dont la direction correspond à celle de l'axe de la rotation et dont la norme représente l'angle de la rotation. Pour plus de détails ; consulter [3].

variance inter-courbes des paramètres. En ne considérant qu'une seule courbe et en faisant varier le point P on mesure une variance intra-courbe. Le quotient entre les

valeurs inter- et intra-courbe mesure la stabilité des différents paramètres. Les résultats ont été rassemblés dans le tableau suivant :

σ	c	τ	$\ u\ $	θ_t	θ_n	θ_b	u_t	u_n	u_b
inter	0,0034	0,4069	0,8932	0,0368	0,0832	0,0978	0,8267	1,0089	2,4657
intra	0,0192	0,5137	31,774	0,8822	0,5479	0,6602	36,350	8,8191	38,836
quotient	0,17771	0,7921	0,0281	0,0417	0,1518	0,1477	0,0227	0,1143	0,0634

Parmi tous ces invariants potentiels, $\|u\|$ ne dépend que de la position des points (u_t, u_n, u_b) , $(\theta_t, \theta_n, \theta_b)$ sont calculés à partir de dérivées première et seconde. $\|u\|$ et (u_t, u_n, u_b) sont corrélés. $\|u\|$ a le désavantage par rapport à u_t d'être isotrope, alors que nous supposons que des directions doivent être privilégiées par rapport à d'autres. Pour remplacer (c, τ) , une fois $\|u\|$ éliminé, θ_t et u_t arrivent en tête de liste grâce à leur stabilité. Par ailleurs nous avons décidé de garder la courbure parmi les invariants car : (i) elle ne dépend pas du choix de la base B, mais seulement du point P, et par conséquent si deux couples (B, P) et (B', P') se correspondent dans la table d'indexation, il y a davantage de précision au niveau de la correspondance (P, P') que de (B, B') ; (ii) nous avons observé qu'une dimension supplémentaire dans la table d'indexation permettait d'y distribuer davantage les modèles et de diminuer la combinatoire de la méthode. Dans un développement futur de la méthode nous étudierons plus avant l'intérêt de ces invariants et verrons s'il y a lieu de les prendre tous en compte. Nous exploitons (c, θ_t, u_t) dans un nouvel algorithme d'indexation que nous détaillons ci-dessous.

3.2.5. Une nouvelle méthode d'indexation

Le prétraitement des courbes modèles consiste à sélectionner successivement chaque courbe, à choisir une base B, et à calculer pour chaque point P de cette courbe les paramètres (c, θ_t, u_t) du vecteur BP. Cette opération est répétée pour toutes les bases possibles de la courbe modèle sélectionnée, puis pour chaque courbe modèle.

Ainsi les points des courbes modèles sont stockés dans une table de dimension 3, dont les entrées sont données par (c, θ_t, u_t) . On associe aux points le trièdre de Frénet correspondant, le numéro de la courbe modèle, et la base B associée.

L'algorithme de reconnaissance consiste alors à sélectionner une base arbitraire sur une des courbes de la scène, puis à parcourir une fois tous les points de la scène. Les paramètres (c, θ_t, u_t) calculés pour chaque point permettent de voter pour un modèle, une base et un déplacement rigide, de manière similaire à la méthode d'indexation

présentée précédemment. Nous présentons des résultats expérimentaux dans la section suivante.

Grâce à notre représentation des courbes par des quantités purement locales, nous pouvons à présent considérer une courbe en plusieurs parties comme plusieurs courbes et vice-versa. Nous pouvons même appliquer le recalage à partir d'une collection de points épars, à condition qu'il leur soit associé un repère local ainsi qu'une valeur de courbure. Nous examinons ces nouveaux développements dans la section suivante. En Annexe B nous introduisons une analyse bayésienne de cette méthode due à [38] qui interprète la meilleure correspondance comme un maximum de vraisemblance. Cette analyse bayésienne explique comment on affine successivement une transformation locale entre deux courbes pour obtenir globalement le meilleur déplacement rigide. La vraisemblance associée à la transformation augmente au cours de ce procédé (voir fig. 12).

4. Résultats

4.1. RECALAGE DE DEUX IMAGES À PARTIR DE COURBES CARACTÉRISTIQUES

Pour valider notre méthode d'indexation associée à la modélisation de courbes caractéristiques, nous l'avons appliquée au recalage de deux vues scanner-X d'un crâne, A et B. En indexant dans une table les courbes modèles de la vue A du crâne, on apparie automatiquement les deux lignes sous-mandibulaires A et B, superposés au mieux dans la figure 10 a.

Grâce à cette transformation on peut recaler les vues de l'ensemble du crâne A et B (fig. 11 b).

Parmi les correspondants de la ligne orbitale B à l'aide de la table, seule la ligne orbitale A est consistante avec la transformation précédente. Les appariements de points entre orbites A et B puis menton A et B ajoutés améliorent la précision du recalage (figs. 10 b puis 11 c).

courbe	nez	orbite droite	orbite gauche	menton	menton-orbite	ttes. courbes
nbre points	138	137	138	263	401	786
temps CPU (sec)	1,08	0,96	1,18	2,57	3,56	9,51

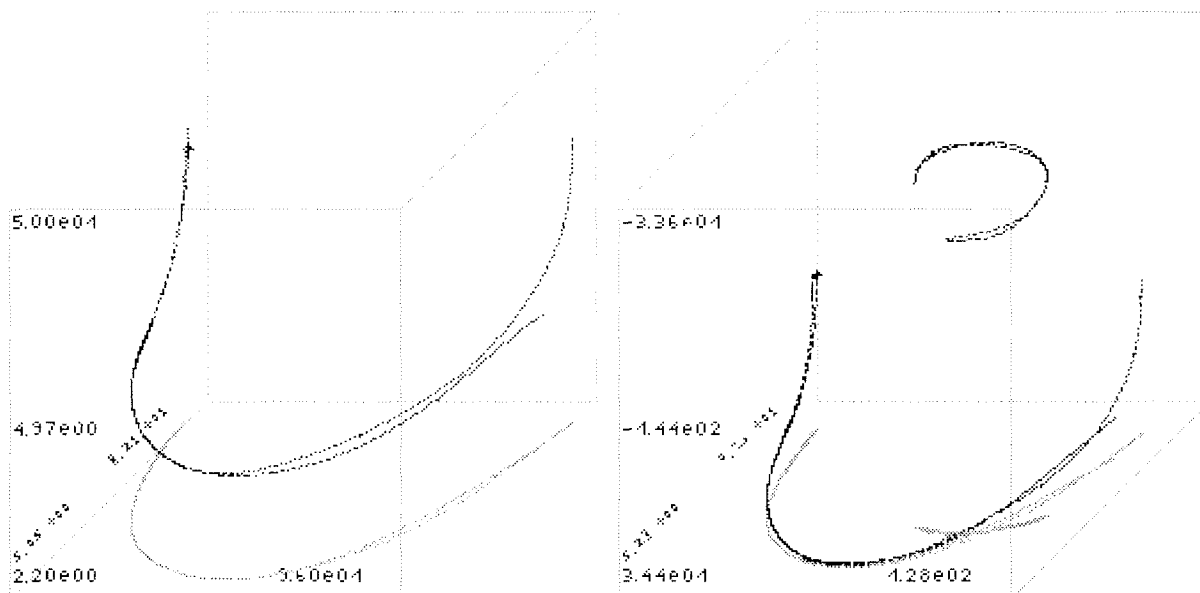


Figure 10. — a) A gauche : Superposition des lignes de crêtes sous-mandibulaire des vues A et B (noter l'occultation et le décalage des origines détectés de manière automatique).

b) A droite : La prise en compte de la ligne orbitale conduit à une meilleure superposition globale.

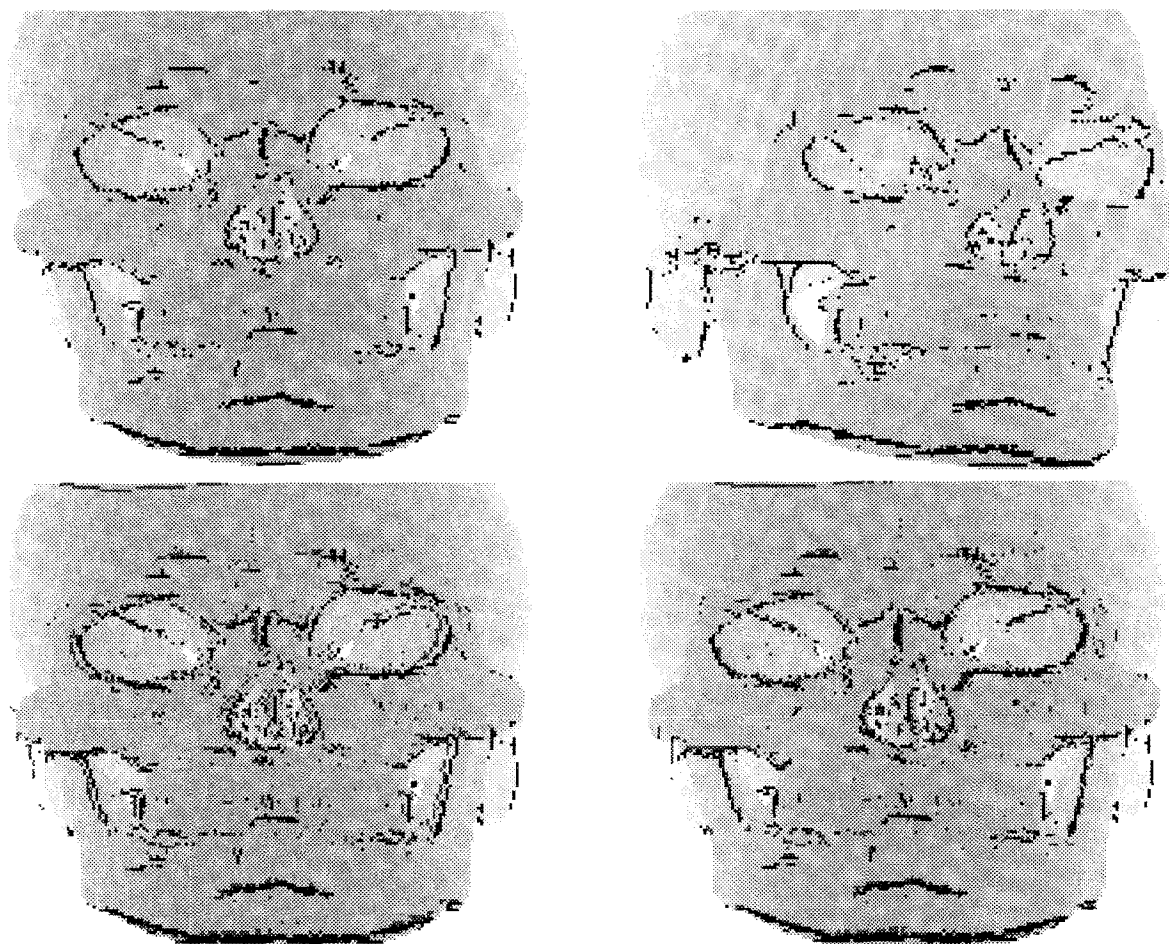


Figure 11. — a) En haut, sont représentées les lignes de crêtes du crâne dans les positions A (à gauche) et B (à droite).

b) En bas à gauche, on aperçoit la superposition des points de crêtes, obtenue en transformant les points de la vue B par la transformation associant les

courbes sous-mandibulaires. Les meilleures correspondances s'observent le long du menton.

c) En bas à droite, se trouve la transformation améliorée en incorporant les courbes orbitales gauches.

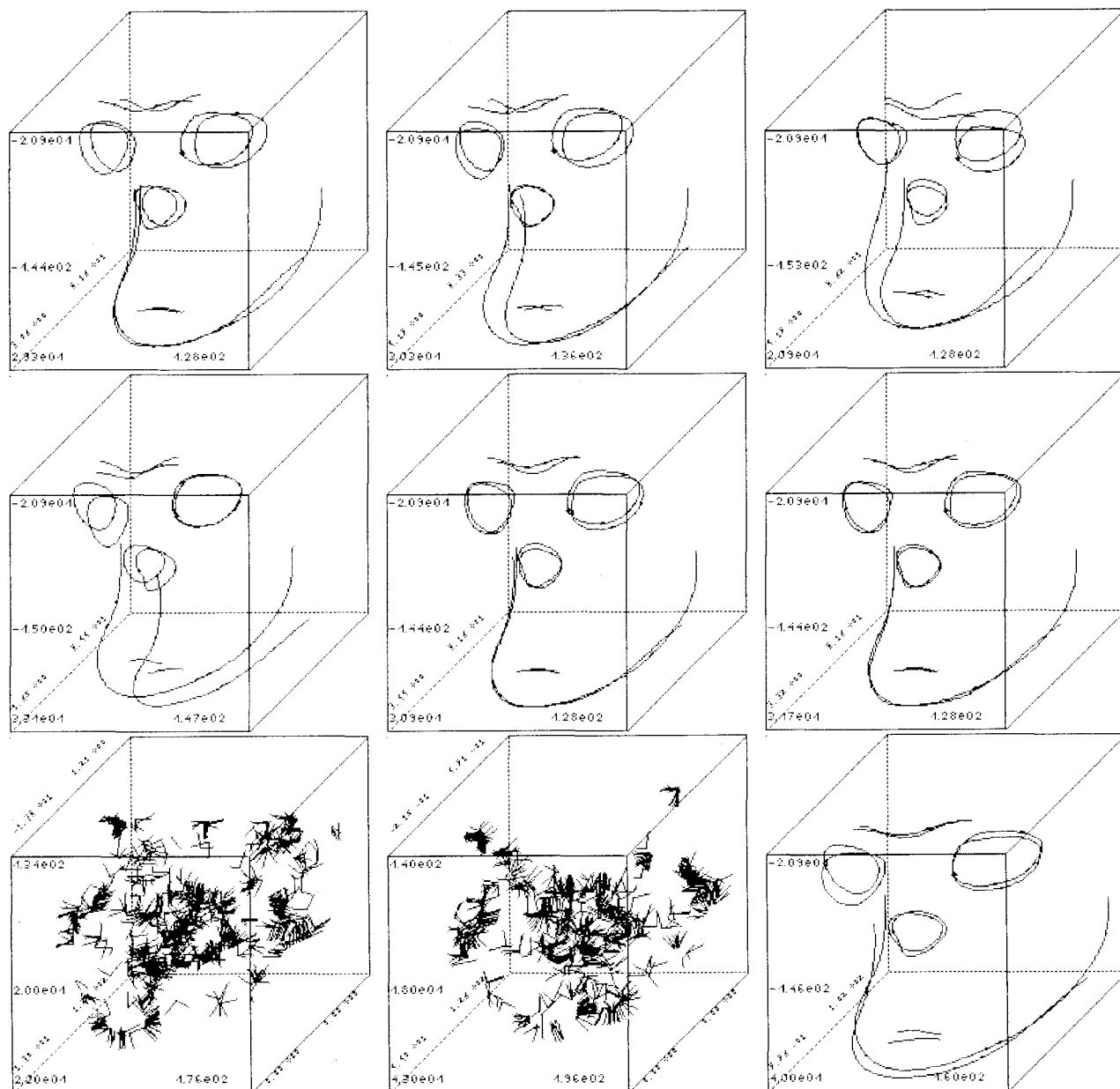


Figure 12. — a) En haut à gauche : Le déplacement rigide global est calculé à partir de la mise en correspondance automatique des deux lignes de crêtes sous-mandibulaires (l'occultation d'une partie du menton B n'a pas posé de problème particulier).
 b) En haut au milieu : Idem pour les lignes de crêtes associées aux contours du nez.
 c) En haut à droite : Idem orbite droite.
 d) Au milieu à gauche : Idem orbite gauche.
 e) Au milieu : Idem pour le menton et l'orbite droite rigidement liés.
 f) Au milieu à droite : Toutes les courbes sont rigidement liées entre elles.
 g) En bas : On considère un ensemble non connexe de points sélectionnés sur la surface pour une valeur de courbure principale maximale élevée. On leur associe le repère principal de la surface. On les représente sur la vue A (à gauche) et B (au milieu) avec leur trièdre. Ces quelques 500 points sur chaque vue permettent aussi de trouver une transformation rigide que l'on visualise seulement sur les lignes de crêtes (à droite). Le résultat est correct mais moins précis que celui obtenu en figure f).

4.2. RECONNAISSANCE AUTOMATIQUE DE COURBES

On traite dans cette expérience toutes les courbes que l'on a pu extraire de l'image et on tente de les recalculer automatiquement (fig. 12). A partir d'une correspondance locale entre deux sous-courbes on s'achemine vers une transfor-

mation globalement consistante à mesure que l'on incorpore de nouvelles courbes. Les temps CPU en secondes sur une station DEC-5000 sont rassemblés dans la table suivante. Ils comprennent la reconnaissance *et* la localisation. L'hypothèse du temps de calcul linéaire par rapport au nombre de points est convenable.

Le procédé peut aussi s'appliquer lorsque l'on dispose de points isolés associés à un repère local (fig. 12 g). Le résultat obtenu est alors directement la meilleure transformation rigide assurant le plus grand nombre de mises en correspondances.

4.3. RECALAGE DE MILLIERS DE POINTS EN QUELQUES SECONDES

Nous présentons enfin les tout derniers résultats sur des lignes de crêtes extraites avec l'algorithme de J. P. Thirion et A. Gourdon [42]. On voit dans la figure 13 les lignes à recalcer provenant d'images scanner du crâne dans deux positions différentes ainsi que leur superposition à l'aide de notre algorithme. Ces lignes comprennent plusieurs milliers de points. Le recalage prend quelques secondes CPU sur un DEC 5900. La figure 14 représente le rendu de surface pour une vertèbre acquise dans deux positions différentes. Dans la figure 15 on voit les lignes de crêtes provenant d'images scanner-X de la vertèbre représentée en figure 14, ainsi que le recalage à l'aide de notre algorithme qui ne prend que quelques secondes CPU sur un DEC 5900.



Figure 13. — a) En haut : Lignes de crêtes sur deux images scanner-X d'un crâne obtenues par le récent algorithme de J. P. Thirion et A. Gourdon [42]. b) En bas : Superposition des lignes de crêtes par notre algorithme en 7,7 secondes CPU sur un DEC 5900. 8 courbes sont identifiées sur respectivement 15 et 32. 53 points sont mis en correspondance sur 666 et 1124.

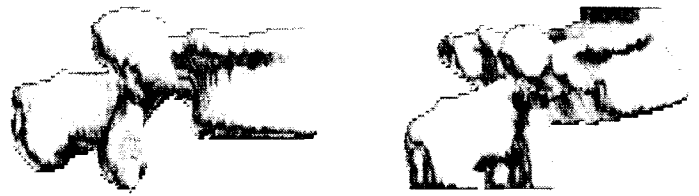


Figure 14. — Rendu de surface pour deux images scanner-X d'une vertèbre. (Nous remercions J. L. Coatrieux et R. Collorec de nous avoir fourni ces images.)

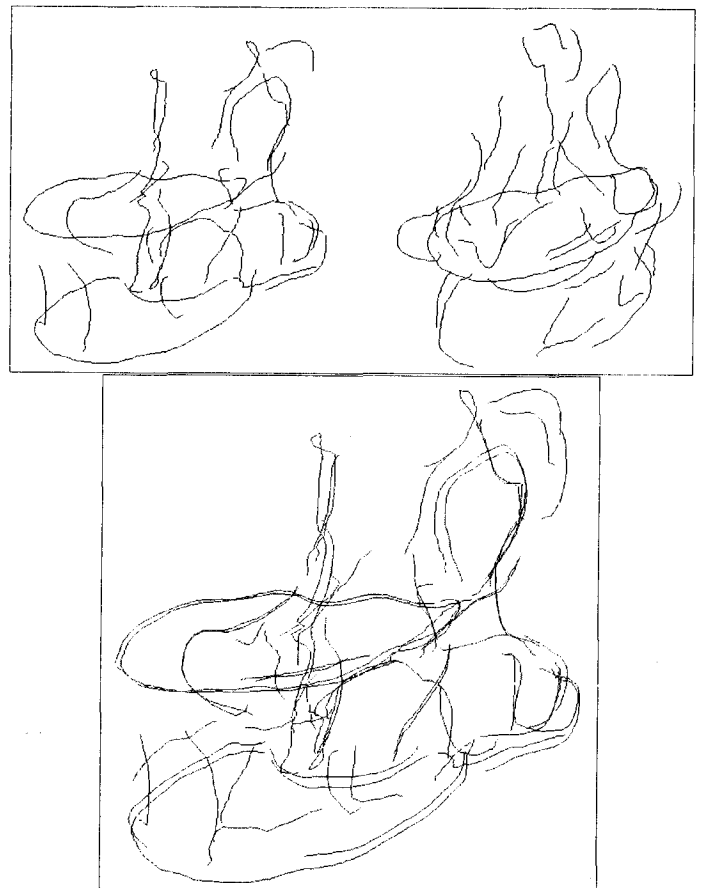


Figure 15. — a) En haut : Lignes de crêtes sur deux images scanner d'une vertèbre obtenues par l'algorithme de J. P. Thirion et A. Gourdon (voir fig. 14). b) En bas : superposition des lignes de crêtes par notre algorithme en 8,8 secondes CPU sur un DEC 5900. 12 courbes sont identifiées sur respectivement 28 et 33. 82 points sont mis en correspondance sur 1250 et 1213.

5. Conclusion

Nous avons décrit un algorithme d'approximation-lissage de courbes caractéristiques tridimensionnelles provenant de la surface d'objets présents dans des images. Cette approximation permet d'extraire de chaque courbe des paramètres invariants différentiels (courbure) ou géométri-

ques (trièdre de Frénet rapporté à une base fixée sur la courbe) et de les transcrire dans cet espace des paramètres. Par un algorithme rapide, évolution du classique indexage géométrique, ces courbes ont été mises en correspondance de manière automatique. La méthode a été appliquée au recalage rigide de deux images 3-D, problème qui suscite beaucoup d'intérêt dans le milieu médical.

Nous avons réalisé avec succès des expériences avec un nombre de courbes modèles beaucoup plus important.

Nous étudions plus en détail les invariants décrits plus haut et verrons s'il y a lieu d'en incorporer davantage dans notre méthode.

6. Remerciements

Digital Equipment Corporation a partiellement financé cette recherche. Nous remercions également General Electric-CGR qui a financé partiellement l'extraction des lignes de crêtes sur les images du crâne, ainsi que Serge Benayoun pour sa collaboration. Les images de la vertèbre ont été fournies par J. L. Coatrieux et R. Collorec, Groupe Signaux et Images en Médecine, Université Rennes I.

A. Optimisation des paramètres de lissage

Nous avons expérimenté deux méthodes :

1. La validation croisée généralisée telle que Craven et Wahba [12], ou Girard [18] la décrivent. Le lecteur intéressé pourra aussi consulter [17]. Celle-ci n'exige pas de connaître la distribution statistique des données, mais repose sur l'hypothèse que les erreurs d'observation sont non corrélées.

2. Une méthode de Newton due à Reinsch [36, 37] utilisant l'erreur moyenne souhaitée entre les données et l'approximation.

A.1. VALIDATION CROISÉE GÉNÉRALISÉE

En supposant que l'on enlève un des points pour évaluer l'approximation, ce point manquant doit être correctement extrapolé. En faisant la moyenne des erreurs d'extrapolation si on enlève à tour de rôle chacun des points on trouve :

$$V(\tau) = \frac{\|Sx - x\|^2}{\left(1 - \frac{\text{Tr}(S)}{n}\right)^2}.$$

On peut alors au choix obtenir pour chaque τ une valeur approchée de cette erreur en remplaçant x par une matrice aléatoire w , ou une valeur exacte par un calcul direct de $S_{k,k}$. La valeur idéale pour τ doit correspondre à un minimum de $V(\tau)$.

Ces deux versions du calcul produisent des résultats peu différents : τ est optimisé de manière à suivre fidèlement les données, ce qui n'était pas souhaitable pour notre application (voir fig. 16).

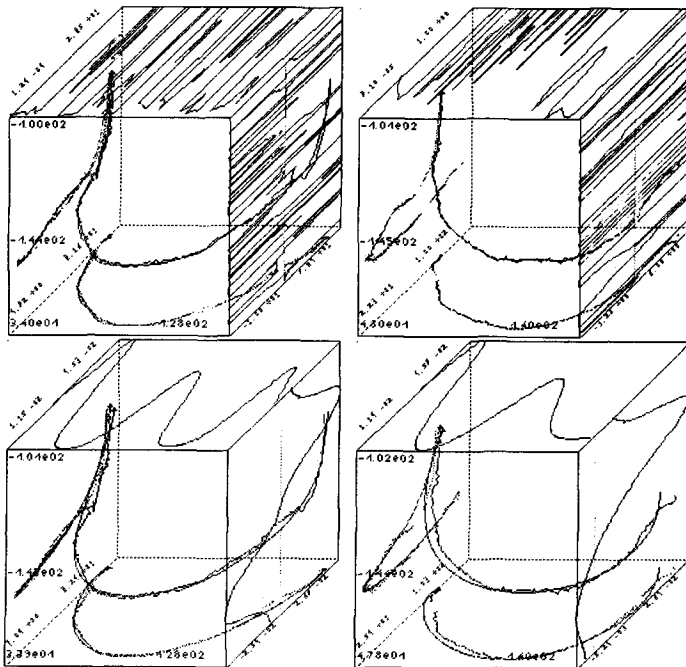


Figure 16. — En haut : Approximation des courbes avec un paramètre de lissage évalué par validation croisée : On restitue fidèlement les points de la courbe mais il est difficile de reconstituer des appariements à l'aide des mesures de courbes et de torsion. En bas : La méthode de Newton nous permet de lisser bien davantage et d'exploiter l'information sur la courbure et même sur la torsion : nous avons ici utilisé des splines de degré 4 et contraint la dérivée 4^e. Note : les 4 figures sont à la même échelle.

A.2. MÉTHODE DE NEWTON

On appelle $F_x(\tau)$ la valeur $\|Sx - x\|$, soit $\|\Delta x\|$. La valeur idéale du paramètre τ correspond à $F_x(\tau) = \sigma$, σ étant donné au préalable. Dérivons par rapport à τ :

$$A_\tau = BB^t + \tau B'' B'''$$

$$\frac{dA_\tau}{d\tau} = B'' B'''$$

$$\frac{dA_\tau^{-1}}{d\tau} = -A_\tau^{-1} B'' B''' A_\tau^{-1}$$

$$F_x(\tau) F'_x(\tau) = (Sx - x, -B^t A_\tau^{-1} B'' B''' A_\tau^{-1} Bx) = -(\Delta x, D^t D x),$$

(1) étant le produit scalaire.

En posant $D = B''' A_\tau^{-1} B$, Dx correspond à la dérivée seconde calculée en chaque point de la spline. Finalement :

$$F_x(\tau) F'_x(\tau) = (D\Delta x, D x),$$

soit
$$\frac{F_x(\tau) - \sigma}{F'_x(\tau)} = \frac{(\|\Delta x\| - \sigma)\|\Delta x\|}{(D\Delta x, D x)}.$$

Cette expression correspond au facteur de correction de Newton. Si S correspond à une projection (moindres carrés avec un facteur de lissage nul), on a $D\Delta x = DSx - Dx = Dx - Dx = 0$. De plus il n'est pas possible d'atteindre

toutes les valeurs de σ . Cependant $F_x(\tau)$ est monotone croissante car la quantité $(Dx, D\Delta x)$ est négative, sans quoi il n'y aurait pas lissage ($\|DSx\| \leq \|Dx\|$).

Aussi, avec une estimation convenable de τ , et un σ proche de la variance réelle sur la position des points, on observe effectivement la convergence pour la méthode de Newton. Elle peut aussi, dans les autres cas, diverger spectaculairement.

Notre méthode est à distinguer de celle de Reinsch. Nous n'avons pas pu démontrer que notre fonction $F_x(\tau)$ avait les propriétés désirables de convexité dans tous les cas de figure. Reinsch [37] prouve que la fonction $F_x(1/\tau)$ a les bonnes propriétés de convexité dans l'intervalle considéré et remarque que $F_x(\tau)$ ne les a pas toujours. Il suffit de dériver deux fois $F_x(1/\tau)$ par rapport à τ pour s'en rendre compte. En outre, Reinsch admet que l'optimisation de $1/\tau$ est parfois trop lente et propose de raffiner la méthode. Nous sommes satisfaits des résultats de notre méthode, étant donné que la divergence s'observe uniquement lorsque la valeur du σ à atteindre ne correspond manifestement pas au bruit réel sur les données.

Pour le cas de deux paramètres de lissage τ et ν , on peut chercher le minimum d'une fonction de 2 variables en s'aidant de la connaissance de son gradient. On note Π l'opérateur $\Pi = N_3^t B_3^t A_3^{-1} B_3$, Πx est le vecteur $n + 1$ des produits scalaires tangente- n_i et on a :

$$F(\tau, \nu) F_\nu(\tau, \nu) = (\Pi \Delta x_3, \Pi x_3).$$

On peut aussi fixer une des deux variables et optimiser l'équation du résidu pour la seconde.

Toutefois, les expériences qui suivent ont été menées avec un paramètre unique de lissage. Sur nos deux courbes expérimentales les plus significatives, nous avons optimisé automatiquement τ , le lissage associé à la dérivée, par validation croisée généralisée, puis par Newton. On retrouve fidèlement les données par la première méthode alors que la seconde, associée à une erreur moyenne bien plus importante, nous permet de reconstruire une courbure et une torsion en mesure d'apparier des points au prix d'un lissage important (voir fig. 16).

B. Analyse bayésienne de l'indexation [38]

On considère $P(c, \tau)$, la probabilité de trouver un point à l'adresse (c, τ) dans la table d'indexation, et $P(c, \tau/M_i)$, probabilité d'observer ces mêmes valeurs (c, τ) sachant que le modèle M_i est présent. On écrit, en respectant la règle de Bayes :

$$\prod P(M_i/c, \tau) = \prod \frac{P(c, \tau/M_i)}{P(c, \tau)} P(M_i)$$

(\prod désigne le produit sur toutes les valeurs (c, τ) faisant intervenir le modèle M_i).

La log-probabilité $\log(P(c, \tau/M_i)/P(c, \tau))$ mesure le facteur par lequel la vraisemblance d'une hypothèse augmente en fonction de la distribution des paramètres (c, τ) . Cette quantité est positive. Il est clair que si un modèle M_i est présent, la probabilité de rencontrer des valeurs de courbure et torsion (c, τ) dans la table d'indexation augmentera au voisinage des valeurs que fournit le calcul de (c, τ) pour M_i . Pour un calcul détaillé de ce quotient de probabilités, on se référera à [38]. Nous résumons cette idée sous la forme du schéma 17.

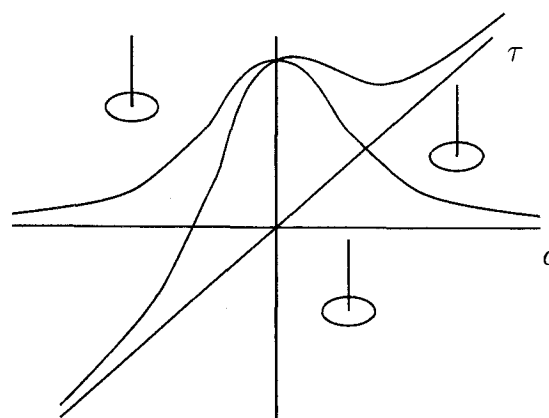


Figure 17. — La distribution de (c, τ) aléatoire comparée aux pics provenant des modèles présents dans la table (inspiré de [38]).

La vraisemblance de l'hypothèse, quant à elle, pourra être mesurée par

$$\sum \log \frac{P(c, \tau/M_i)}{P(c, \tau)}$$

(\sum désigne la somme sur toutes les valeurs (c, τ) faisant intervenir le modèle M_i .)

Par conséquent, il n'y a pas de limite à cette vraisemblance autre que le nombre total de points que l'on peut associer à cette hypothèse. Si une transformation globale existe entre deux vues et si on appelle rapport signal sur bruit le rapport entre le nombre de points superposables par cette transformation et le nombre de points total, il suffit que celui-ci dépasse 0,5 pour que l'on obtienne la transformation cherchée après incorporation de tous les points, car on aura alors la certitude d'avoir réalisé davantage d'appariements corrects que d'appariements incorrects. On pourra bien sûr se contenter d'une estimée sans utiliser tous les points, et déterminer le nombre de points nécessaire pour atteindre une vraisemblance donnée. Cette vraisemblance pourra être liée à l'incertitude sur la transformation fournie par le filtre de Kalman.

On remarque aussi que pour évoluer d'une mise en correspondance locale à une mise en correspondance globale qui feraient intervenir des déplacements très différents, il suffit d'introduire de nouveaux appariements. Il n'y a pas de notion d'inertie comme on serait tenté de le

penser ou comme c'est le cas pour d'autres méthodes. Le recalage sera modifié brusquement, dès que le pic de la H-table correspondant à la « bonne » transformation sera plus élevé que le pic de la transformation locale.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARBOGAST, La représentation des contours et leur segmentation. Technical Report RR 115, LIFIA, juillet 1990.
- [2] N. AYACHE, *Vision Stéréoscopique et perception multisensorielle. Applications à la robotique mobile*. Inter-Éditions, 1989.
- [3] N. AYACHE, *Artificial Vision for Mobile Robots. Stereo-Vision and Multisensory Perception*. Mit-Press, 1991.
- [4] N. AYACHE, J. D. BOISSONNAT, L. COHEN, B. GEIGER, J. LEVY-VEHEL, O. MONGA and P. SANDER, Steps toward the automatic interpretation of 3-D images. In H. Fuchs K. Hohne and S. Pizer, editors, *3D Imaging in Medicine*, pages 107-120. NATO ASI Series, Springer-Verlag, 1990.
- [5] N. AYACHE and O. D. FAUGERAS, Hyper : A new approach for the recognition and positioning of two-dimensional objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8 (1) : 44-54, January 1986.
- [6] R. BARTELS, J. BEATTY and B. BARSKY, *An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modelling*. Morgan Kaufmann publishers, 1987.
- [7] P. BESL and N. MCKAY, A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(2) : 239-256, February 1992.
- [8] W. BOHM, G. FARIN and J. KAHMANN, *A survey of curve and surface methods in CAGD*, pages 1-60. Elsevier Science Publishers (North Holland), 1984. In *Computer Aided Geometric Design*.
- [9] P. CINQUIN, Splines unidimensionnelles sous tension et bidimensionnelles paramétrées. Thèse de Doctorat de troisième cycle, Université de St-Etienne, Octobre 1981.
- [10] P. CINQUIN, Application des fonctions-spline au traitement d'images numériques, Thèse de Doctorat de mathématiques, Septembre 1987.
- [11] I. COHEN, L. D. COHEN and N. AYACHE, Introducing deformable surfaces to segment 3-D images and infer differential structures. In *Proc. International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Hawaii, USA, June 1991.
- [12] P. CRAVEN and G. WAHBA, Smoothing noisy data with spline functions, *Numerische Mathematik*, 31 : 377-403, 1979.
- [13] C. B. CUTTING, Applications of computer graphics to the evaluation and treatment of major craniofacial malformation. In Jayaram K. Udupa and Gabor T. Herman, editors, *3-D Imaging in Medicine*. CRC Press, 1989.
- [14] C. DE BOOR, *A practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 1978.
- [15] R. DUDA and P. HART, *Pattern Classification and Scene Analysis*. Wiley, 1973.
- [16] G. FARIN, *Curves and surfaces for computer aided geometric design*. Academic Press, 1988.
- [17] D. GIRARD, Détection de discontinuités dans un signal (ou une image) par inf-convolution spline et validation croisée. Technical Report RR702-I-M-, Imag, 1988.
- [18] D. GIRARD, A fast « monte-carlo cross-validation procedure » for large least squares problems with noisy data. *Numerische Mathematik*, 56 : 1-23, 1989.
- [19] W. ERIC, L. GRIMSON and D. P. HUTTENLOCHER, On the verification of hypothesized matches in model-based recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(12) : 1201-1213, December 1991.
- [20] W. E. L. GRIMSON and T. LOZANO-PERÉZ, Model-based recognition and localization from sparse range or tactile data. *International Journal of Robotics Research*, 3(3) : 3-35, 1984.
- [21] M. GROSSMAN, Parametric curve fitting. *The Computer Journal*, 14 : 169-172, 1971.
- [22] A. GUÉZIEC and N. AYACHE, Lissage et reconnaissance de courbes gauches bruitées. In *AFCET 8^e Congrès Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, Lyon, Novembre 1991.
- [23] A. GUÉZIEC and N. AYACHE, Smoothing and matching of 3-D-space curves. In *Proceeding of the Second European Conference on Computer Vision 1992*, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992.
- [24] I. HERLIN and N. AYACHE, Features extraction and analysis methods for sequences of ultrasound images. In *Proceedings of the Second European Conference on Computer Vision 1992*, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992.
- [25] J. C. HOLLADAY, Smoothest curve approximation. *Math. Tables Aids Computation*, 11 : 233-243, 1957.
- [26] E. N. NILSON, J. H. AHLBERG and J. L. WALSH, *The Theory of Splines and Their Applications*. Academic Press, New York, 1967.
- [27] E. KISHON, T. HASTIE and H. WOLFSON, 3-D curve matching using splines. Technical report, AT & T, November 1989.
- [28] E. KISHON and T. HASTIE, 3-D curve matching using splines. In *Proceedings of the First European Conference on Computer Vision 1990*, Antibes, France, April 1990.
- [29] P. LANCASTER and K. SALKAUSKAS, *Curve and surface fitting, an introduction*. Academic Press, 1986.
- [30] G. MALANDRIN, G. BERTRAND and N. AYACHE. Topological segmentation of discrete surface structures. In *Proc. International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Hawaii, USA, June 1991.
- [31] O. MONGA, N. AYACHE and P. SANDER, From voxels to curvature. In *Proc. International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Hawaii, USA, June 1991.
- [32] O. MONGA, S. BENAYOUN and O. D. FAUGERAS. Using third order derivatives to extract ridge lines in 3-D images. In *Proceedings of the IEEE Conference on Vision and Pattern Recognition*, Urbana Champaign, June 1992.
- [33] O. MONGA, R. DERICHE and J.-M. ROCCHISANI, 3-D edge detection using recursive filtering : Application to scanner images. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, January 1991.
- [34] T. PAVLIDIS, *Structural Pattern Recognition*. Springer-Verlag, 1977.
- [35] M. PLASS and M. STONE, Curve fitting with piecewise parametric cubics. In *Siggraph*, pages 229-239, July 1983.
- [36] C. H. REINSCH, Smoothing by spline functions. *Numerische Mathematik*, 10 : 177-183, 1967.
- [37] C. H. REINSCH, Smoothing by spline functions II. *Numerische Mathematik*, 16 : 451-454, 1970.
- [38] I. RIGOUTSOS and R. HUMMEL, Robust similarity invariant matching in the presence of noise : A data parallel approach. In *Proceeding of 8th Israeli Conference on Artificial Intelligence and Computer Vision*, December 1991.
- [39] J.-J. RISLER, *Méthodes Mathématiques pour la CAO*. Masson, 1991.
- [40] P. SAINT-MARC and G. MEDIONI, B-spline contour representation and symmetry detection. In *First European Conference on Computer Vision (ECCV)*, Antibes, April 1990.
- [41] F. STEIN, Structural hashing : Efficient 3-D object recognition. In *Proc. International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Hawaii, USA, June 1991.
- [42] J. P. THIRION and A. GOURDON, The 3-D marching lines algorithm and its application to crest lines extraction. Rapport de Recherche INRIA 1672, mai 1992.

- [43] D. W. THOMPSON and J. L. MUNDY, 3-D model matching from an unconstrained viewpoint. In *Proc. International Conference on Robotics and Automation*, pages 208-220, 1987.
- [44] J. H. WILKINSON and C. REINSCH, *Handbook for Automatic Computation : Linear Algebra*, volume 2 of *Die Grundlehren*

der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer-Verlag, 1971.

Manuscrit reçu le 14 février 1992.