

Des gaussiennes pour la modélisation des signatures et la segmentation de tracés manuscrits

Gaussian Curves for Signature Modelization and Word Segmentation

Franck LECLERC

Laboratoire Scribens,
Département de Génie Électrique,
École Polytechnique de Montréal,
C.P. 6079, succursale A,
Montréal, Québec, Canada, H3C 3A7

Franck Leclerc a reçu une Maîtrise des Sciences et des Techniques (MST) en Génie Biologique et Médical en 1985, un Diplôme Études

Approfondies (DEA) en traitement d'images en 1986 à l'Université Paris Val de Marne. En 1989, il a obtenu une M.Sc.A (Master) à l'École Polytechnique de Montréal. Depuis 1991, il poursuit ses études à l'École Polytechnique de Montréal afin d'obtenir un Ph.D en Génie Électrique.

Ses domaines d'intérêt sont le traitement de signal, le traitement d'image et la reconnaissance de formes. Il a travaillé spécifiquement sur le traitement d'images échographiques. En 1990, il a travaillé pour Thomson sur les problèmes radar. Il a rejoint le laboratoire Scribens en 1987 et participe maintenant à des travaux de modélisation du processus de génération de tracés manuscrits et de vérification de signatures.

Réjean PLAMONDON

Laboratoire Scribens,
Département de Génie Électrique,
École Polytechnique de Montréal,
C.P. 6079, succursale A,
Montréal, Québec, Canada, H3C 3A7

Réjean Plamondon a fait ses études à l'Université Laval, Québec : B.Sc. Physique, 1973 ; M.Sc.A et Ph.D, Génie Électrique, 1975 et 1978 respectivement. En 1978, il s'est joint au personnel du Département de Génie Électrique et de Génie Informatique de l'École Polytechnique de Montréal, où il est actuellement professeur titulaire.

Ses centres d'intérêt en recherche sont tous reliés à l'analyse et au traitement de l'écriture manuscrite par ordinateur : modèles biomécaniques et perceptuels, aspects neuromoteurs, reconnaissance de

caractères, vérification de signatures, bloc-notes électronique, traitement des signaux et des images, interface homme-ordinateur, éducation, sciences judiciaires et représentation des connaissances. Il est fondateur et directeur du laboratoire Scribens, un groupe de recherche exclusivement dédié à l'étude de ces sujets.

Membre actif de plusieurs sociétés professionnelles et membre senior de l'IEEE, le professeur Plamondon siège du bureau de direction de International Graphonomic Society (IGS) ; il est président de l'Association Canadienne de Traitement des Images et de Reconnaissances de Formes, Gouverneur de l'IAPR et président de son comité technique sur la reconnaissance de textes (TC-11). En 1989-90, il a été nommé *Fellow* du Netherlands Institute for Advanced Study. Il collabore avec des scientifiques de nombreux pays et il est l'auteur et le co-auteur de nombreuses publications. Il a co-édité trois livres : *Computer Recognition and Human Production of Handwriting* (1989), *Pattern Recognition : Architectures, Algorithms and Applications* (1991). Il a aussi publié un conte pour enfants, une nouvelle policière et un recueil de poèmes.



Guy LORETTE

IRISA, Université de Rennes 1,
Campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex, France

Guy Lorette a reçu son diplôme d'ingénieur de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) à Lyon en 1967. Il y a obtenu son diplôme de docteur-ingénieur en 1970, a été professeur assistant de 1967 à 1972 et a travaillé dans le Laboratoire de Ferroélectricité.

Il a rejoint l'Université Paris Val de Marne (UPVM) en 1972 et a participé à la création du Laboratoire de Génie Électrique de Créteil (LGEC). Il a reçu son doctorat d'état en sciences physiques en 1983. Il est maintenant professeur en informatique à l'Université de Rennes 1, et il a rejoint le centre de recherche de l'IRISA. Ses centres d'intérêt en recherche sont reliés au traitement d'image et à la reconnaissance de formes. Il travaille sur plusieurs projets de recherche sur la reconnaissance d'écriture cursive, la vérification de signatures, le traitement d'images échographiques.

Guy Lorette est membre de l'Association Française pour la Cybernétique Économique et Technique (AFCET) et de la Société des Électriciens, Électroniciens et Radioélectriciens (SEE) de l'IEEE.

RÉSUMÉ

Cet article traite de l'utilisation d'un modèle de génération de tracés manuscrits pour la synthèse de signatures et la segmentation de mots manuscrits. Ce modèle est basé sur l'intégration de vitesse provenant de deux générateurs : un générateur de vitesse curviligne et un générateur de vitesse angulaire. Dans les domaines curviligne et angulaire, le modèle approxime les profils de vitesse par une succession de fonctions gaussiennes. Le début de cet article comporte une description du modèle théorique et des concepts sous-jacents qui ont permis d'établir ses bases. Ensuite,

pour tester la validité de ce modèle, celui-ci est appliqué à des signatures manuscrites d'origines très diverses. L'article se termine par l'utilisation du modèle en vue de la segmentation de mots manuscrits. Les résultats obtenus sont décrits et commentés à la fin de cet article.

MOTS CLÉS

Modélisation d'écriture, segmentation, profil de vitesse gaussien, signature, générateur de vitesses, mots manuscrits.

ABSTRACT

This paper presents the use of a handwriting generation model for signature reconstruction and word segmentation. This model is based on two velocity generators : a curvilinear velocity generator and an angular velocity generator. In the curvilinear and the angular domains, the model estimates velocity profiles with a series of gaussian curves. In the first part of this paper, the theoretic model and the underlying concepts are described. Then the validity of the model is tested on various kind of

signatures (european, chinese, north-american). At the end of this paper the model is used for cursive word segmentation and the results are discussed.

KEY WORDS

Modelization, segmentation, gaussian curves, signature, gaussian velocity, cursive world, velocity generator.

1. Introduction

L'étude de tracés manuscrits, signature et écriture, demande de bien connaître le processus qui les a engendrés. Ce processus complexe englobe :

- la représentation ou codage, c'est-à-dire la manière dont l'information de génération de tracés manuscrits est mémorisée dans le cerveau,
- la génération, qui peut se diviser en une commande d'excitation (la commande nerveuse) et l'exécution de cette commande (la contraction des muscles).

Pour décrire la génération de tracés manuscrits, de nombreux modèles ont été proposés et une étude comparative de ces différents modèles a montré des résultats plus ou moins satisfaisants [1]. Les systèmes testés sont tous des systèmes linéaires d'ordre supérieur ou égal à 2. Différents articles [1]-[6] proposent un nouveau modèle basé sur la génération de profils de vitesse gaussiens. Après une présentation de ce modèle et des concepts qui ont permis d'en établir les fondements, la manière dont les tracés manuscrits ont été traités est décrite, ainsi que les différentes étapes du traitement. Ensuite deux applications sont présentées, l'une porte sur des signatures manuscrites et constitue la validation du modèle, l'autre concerne la segmentation de mots manuscrits qui ouvre la voie à une application possible du modèle. Enfin, certaines conclusions sont formulées sur la fonction d'écriture, déduites directement de la segmentation, sous l'hypothèse que le modèle reproduit bien le comportement du système réel. Ce dernier point permet, d'une certaine manière, de montrer le rôle prédictif du modèle.

2. Concepts généraux du modèle

Cette section permet de résumer succinctement certains éléments d'ordre très généraux qui ont conduit à l'établissement du modèle proposé.

Dans le modèle de génération de tracé proposé, l'information permettant de générer un tracé manuscrit, écriture ou signature, est supposée être contenue dans le cerveau. Cette information de haut niveau peut être représentée sous la forme d'un programme moteur, décrit dans certains articles, qui est transmis par les nerfs sous la forme d'ondes dépolarisantes [1], [5]. Après transfert synaptique de la commande nerveuse par l'intermédiaire de la plaque motrice, les muscles sont activés pour produire le déplacement du crayon. La figure 1 résume le processus de génération de tracés manuscrits.

Pour la modélisation du système générateur de tracés manuscrits, le programme moteur est pris comme entrée, et le déplacement du crayon comme sortie du système à modéliser. La figure 2 met en évidence ce modèle. Les paramètres du modèle seront calculés à partir des déplacements du crayon (signature ou écriture) enregistrés à partir d'une tablette à digitaliser.

Les figures 1 et 2 montrent que le système possède une seule entrée : le programme moteur, ce qui veut dire qu'aucun contrôle extérieur n'est possible. Le modèle suppose donc un mouvement balistique rapide, programmé d'avance [5]. Il n'y a aucune boucle de contre-réaction psycho-visuelle prenant en compte des informations de la sortie du système pour modifier son entrée. Pour des tracés manuscrits tels que les signatures, l'hypothèse d'un mouve-

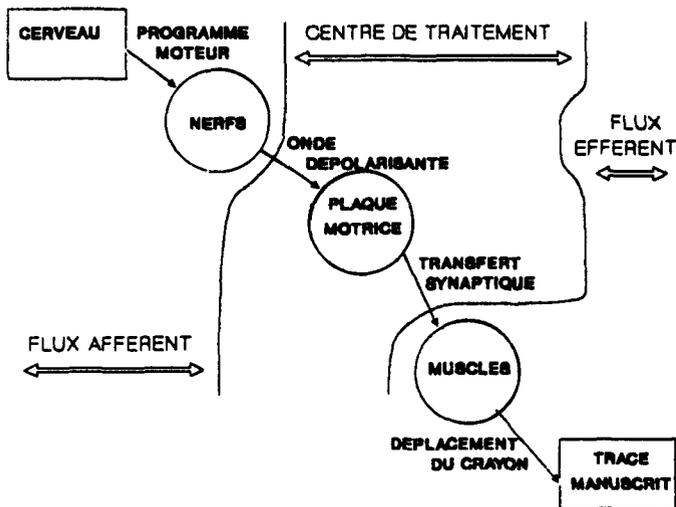


Figure 1. — Processus de génération de tracés manuscrits.

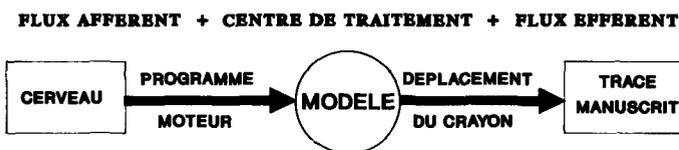


Figure 2. — Modélisation du processus de génération.

ment balistique rapide, programmé d'avance, semble tout à fait justifiée [7]. Chaque personne signe de façon quasi-automatique. La signature est un mouvement entièrement appris et stéréotypé qui se répète à volonté. Toutefois, pour l'écriture, il peut exister un rétro-contrôle visuel (souvent pour contrôler la lisibilité de son écriture). La commande du système bras/main peut être changée pour modifier le graphisme du tracé. Pendant la période d'apprentissage de l'écriture, l'enfant doit se servir énormément de cette information visuelle pour reproduire du mieux qu'il peut la forme des lettres. Avec l'expérience, il finit par acquérir des automatismes. Son écriture se forge et devient très personnelle. Le mouvement devient un mouvement programmé d'avance qui peut se répéter à volonté. Dès lors, le rétrocontrôle visuel devient négligeable ce qui nous permet d'appliquer notre modèle qui n'en tient pas compte. Dans cet article, des travaux préliminaires de segmentation de mots manuscrits réalisés avec le modèle, vont permettre de mettre en évidence cette notion de mouvement programmé d'avance.

L'information contenue dans le cortex moteur doit probablement être indépendante du système de référence (représentation) et être invariante aux translations et aux rotations. Cette invariance s'applique au codage de l'information et non pas aux effecteurs (bras, main) qui eux ont des limitations physiques. Avec une représentation des tracés manuscrits dans un repère cartésien, il n'est pas possible

d'obtenir une invariance du codage des signaux correspondant après une rotation ou une translation. Il convient donc de trouver un codage insensible aux différentes transformations. La géométrie différentielle permet d'obtenir cette invariance [8]. L'équation d'une courbe reste la même quelle que soit la transformation subie (translation et/ou rotation), seules changent les conditions initiales : point de début du tracé et direction du premier déplacement. Une courbe plane peut être entièrement caractérisée par son équation intrinsèque qui exprime sa courbure (variation angulaire) le long de l'abscisse curviligne [5]. Ceci s'exprime par l'équation (1) :

$$c(\sigma) = \frac{d\theta(\sigma)}{d\sigma}$$

- (1) $\Theta(\sigma)$: angle le long de l'abscisse curviligne
 $c(\sigma)$: trajectoire courbe
 σ : abscisse curviligne .

Ainsi, pour réaliser un tracé manuscrit, le système doit contrôler le déplacement par rapport à un point d'origine, traduit mathématiquement par l'abscisse curviligne, et la direction dans laquelle s'effectue le mouvement caractérisée par la courbure le long de l'abscisse curviligne. Pour cela, le modèle doit posséder deux parties distinctes : un générateur de mouvements curvilignes et un générateur de mouvements angulaires, chacun d'eux étant commandé par un programme moteur [2], [5]. Les entrées des deux générateurs de mouvements sont constituées par des créneaux rectangulaires [1], [2] d'amplitude et de durée variables. La figure 3 résume les différents aspects du modèle utilisé.

Une étude réalisée au laboratoire Scribens sur des algorithmes de comparaison de signaux de position, de vitesse et d'accélération provenant de signatures manuscrites, a montré de meilleurs résultats de vérification dans le domaine des vitesses [9], [10]. Les signaux de vitesse semblent plus stables. Donc, plutôt que de considérer les déplacements, le modèle proposé est appliqué au domaine des vitesses. Puisque le modèle comporte deux parties distinctes, nous avons deux générateurs de vitesse, un pour le mouvement curviligne et un pour le mouvement angulaire.

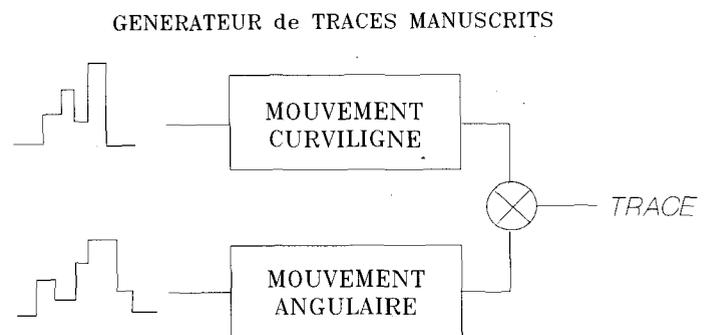


Figure 3. — Schéma global du modèle.

En géométrie différentielle, à partir des coordonnées obtenues dans un repère orthonormé, la vitesse curviligne s'exprime par l'équation (2).

$$(2) \quad v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$

avec :

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

(3) $x(t)$: abscisse du tracé manuscrit
 $y(t)$: ordonnée du tracé manuscrit

et la vitesse angulaire par l'équation (4).

$$(4) \quad \Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

avec :

$$(5) \quad \theta(t) = \arctan \left(\frac{dy(t)}{dx(t)} \right).$$

L'intégration de ces deux vitesses, combinées avec les conditions initiales du tracé, permet ensuite de reconstruire le tracé manuscrit.

Dans l'étude de multiples processus moteurs, l'observation des courbes de vitesse (nommés aussi profils dans cet article) met en évidence une succession de courbes en forme de cloche légèrement asymétrique, citée également dans d'autres articles [11], [12]. Ce phénomène quasi-universel se retrouve aussi dans les profils de vitesses curviligne et angulaire des tracés manuscrits. Suite à plusieurs travaux [1]-[6], ces différents profils ont pu être modélisés par des équations gaussiennes permettant de les approcher.

Pour résumer, le modèle utilisé dans cette étude est composé de deux générateurs de profils de vitesses gaussiens : un pour les vitesses curvilignes et un autre pour les vitesses angulaires. Après intégration et combinaison de ces deux vitesses, les signatures ou l'écriture manuscrite étudiées peuvent être reproduites. La figure 4 montre le schéma général du modèle utilisé.

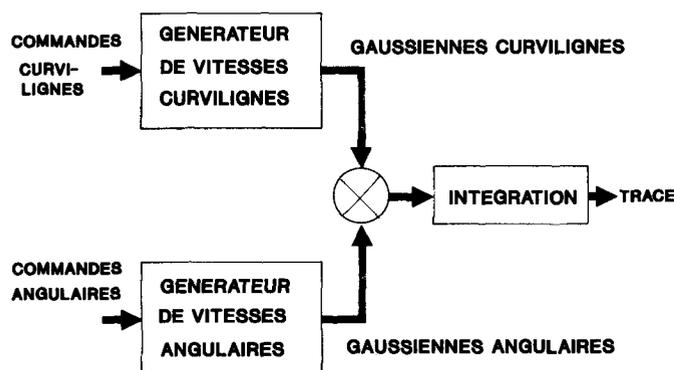


Figure 4. — Schéma général du modèle utilisé.

3. Mise en œuvre du modèle

3.1. LES COMPOSANTES ET LES CHAÎNES

Dans le modèle théorique, deux termes ont été clairement définis : les composantes et les chaînes. La compréhension du modèle passe par la définition de ces deux termes. Ce paragraphe contient les définitions théoriques des chaînes et des composantes. Dans la suite de cet article, ces notions vont être légèrement adaptées pour faciliter l'implantation logiciel. Il est donc important de garder ces notions à l'esprit pour la suite de cet article.

Pour un tracé manuscrit, deux types de discontinuité peuvent être distingués, conduisant à la définition de deux termes : les composantes et les chaînes [2], [5]. La délimitation des composantes s'effectue à partir des discontinuités spatiales. Une *composante* est une portion de tracé manuscrit située entre deux discontinuités spatiales. Une discontinuité spatiale se caractérise par une discontinuité du tracé (levée de crayon) et une vitesse curviligne pratiquement nulle (voir fig. 5). La délimitation des chaînes s'effectue à partir des discontinuités angulaires. Une *chaîne* est une portion de tracé manuscrit située entre deux discontinuités angulaires. Une discontinuité angulaire se caractérise par une très forte variation d'angle pendant un temps très court. Elle se traduit dans le tracé par la présence d'un point de rebroussement et, sur les courbes de vitesse angulaire, par la présence d'un pic de très forte amplitude (voir fig. 6).

Un tracé manuscrit commence et finit toujours par une discontinuité angulaire. Ainsi, le début (ou la fin) d'un tracé manuscrit délimite le début (ou la fin) d'une chaîne. Les limites des composantes et des chaînes sont fixées, respectivement, à partir des profils de vitesse curviligne (fig. 5) et angulaire (fig. 6). Ainsi, un mot manuscrit (ou une signature) est constitué d'une ou de plusieurs composantes qui sont elles-mêmes constituées d'une ou de plusieurs chaînes.

Le fait qu'un pic dans les vitesses angulaires s'accompagne toujours d'une très faible vitesse curviligne, constaté

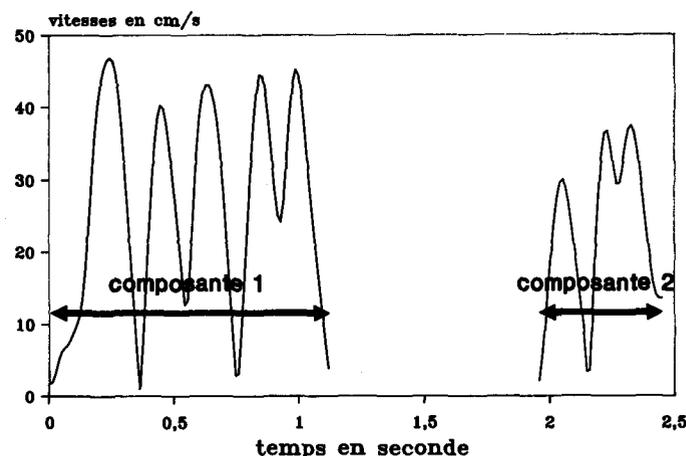


Figure 5. — Vitesse curviligne d'un tracé manuscrit.

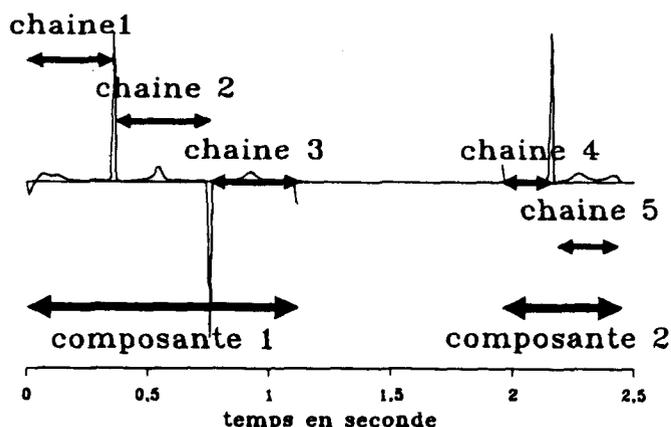


Figure 6. — Vitesse angulaire d'un tracé manuscrit.

également dans d'autres travaux [11], [13], trouve une justification mathématique assez simple si l'on reprend l'équation (4) mais en la présentant sous une autre forme. La vitesse angulaire $\Omega(t)$ peut s'exprimer par l'équation (6)

$$(6) \quad \Omega(t) = \frac{\frac{d^2y(t)}{dt^2} \cdot \frac{dx(t)}{dt} - \frac{d^2x(t)}{dt^2} \cdot \frac{dy(t)}{dt}}{v^2(t)}$$

Ainsi on constate que si le numérateur de l'équation (6) est non nul et, que la vitesse curviligne (le dénominateur) tend vers zéro, alors la vitesse angulaire tend vers l'infini.

3.2. LES CONDITIONS INITIALES

Dans certains articles présentant le modèle il est fait état que celui-ci prend de nouvelles conditions initiales angulaires au début de chaque chaîne et de nouvelles conditions initiales angulaire et de position au début de chaque composante [2], [5]. En pratique toutefois, dans ce travail, de nouvelles conditions initiales angulaire et de position sont données au début des chaînes et des composantes afin d'éviter des accumulations d'erreurs lors de la reconstruction des tracés. Cette modification a d'ailleurs déjà été appliquée dans d'autres travaux [13]. Ceci introduit une différence avec la théorie qu'il est important de souligner.

3.3. DÉLIMITATION DES CHAÎNES FONCTIONNELLES

Pour délimiter les chaînes d'un tracé manuscrit, le modèle théorique propose des définitions claires et précises (section 3.1). Celles-ci ne sont pas forcément facilement implantable dans un contexte logiciel. A quel moment a-t-on une discontinuité angulaire ? Quel est le seuil de l'amplitude de la vitesse angulaire qui peut nous garantir que nous sommes en présence d'une discontinuité angulaire ? Face à ce problème nous avons choisi une approche, décrite dans cette section, facilitant l'implantation logicielle.

Le modèle considéré suppose un mouvement balistique rapide programmé d'avance. Ainsi, la génération d'une

gaussienne peut commencer avant que la précédente ne soit entièrement terminée. Dans ce cas il peut y avoir une superposition de plusieurs gaussiennes successives. L'implantation logicielle du modèle tient compte de cette sommation possible mais celle-ci est toutefois limitée à l'influence d'une seule gaussienne, celle immédiatement avant. Au-delà d'une gaussienne, nous considérons comme négligeable l'influence des autres gaussiennes trop éloignées dans le temps pour modifier les valeurs des vitesses. De plus, le fait d'avoir créé un algorithme de recherche des paramètres du modèle tenant compte de la superposition (sommation) des gaussiennes successives, va permettre de déterminer les différentes chaînes du tracé manuscrit (segmentation). Comme nous l'avons dit précédemment, une chaîne est délimitée par deux discontinuités angulaires qui sont toujours accompagnées par une vitesse curviligne quasi nulle (voir section 3.1). Celle-ci semble montrer une absence de superposition (sommation) entre la fin de la gaussienne précédente et le début de la suivante comme s'il y avait une réinitialisation du système. Ainsi, dans la réalisation pratique du modèle, une discontinuité angulaire est détectée si l'algorithme de recherche des paramètres des gaussiennes considère qu'il n'y a pas de superposition (sommation) entre deux gaussiennes curvilignes successives. La discontinuité angulaire ainsi déterminée par l'algorithme délimite une **chaîne fonctionnelle** (elles sont nommées ainsi pour les distinguer des chaînes prédites par le modèle théorique : section 3.1). La figure 7 montre la présence d'une discontinuité angulaire et la non-superposition des gaussiennes curvilignes qui l'accompagne. De plus, sur cette même figure, dans la partie qui précède la discontinuité angulaire, on peut constater la présence d'une sommation de deux gaussiennes curvilignes.

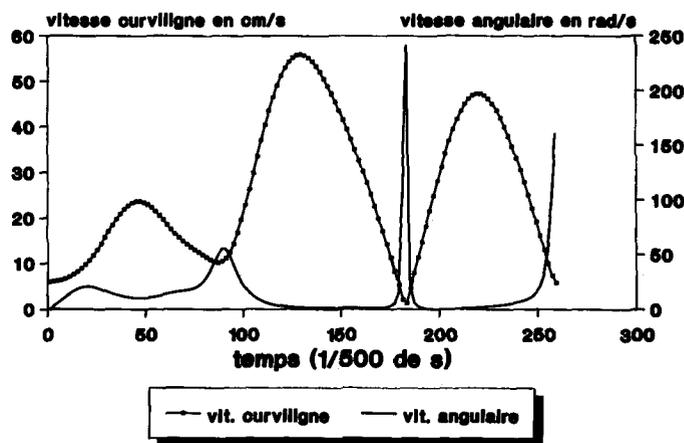


Figure 7. — Profils de vitesses montrant la non-sommation de 2 gaussiennes curvilignes.

3.4. LES CONSTANTES DE TEMPS

Pour la génération des gaussiennes des vitesses curvilignes ou angulaires, le modèle suppose que la durée de la croissance de la gaussienne est différente de la durée de la décroissance de la gaussienne. L'asymétrie dans la forme

de cloche constatée sur les profils de vitesse peut s'expliquer soit par le fait que la croissance de la vitesse est due à un mouvement actif résultant de la contraction musculaire, alors que la décroissance provient plus d'un mouvement passif dû à l'élasticité du muscle, soit que l'asymétrie est due à différentes combinaisons possibles de muscles agonistes et antagonistes qui ne sont pas les mêmes dans les deux cas [14]. Ainsi dans les courbes des vitesses curvilignes ou angulaires, un profil en cloche est décrit par deux demi-gaussiennes, une montante et l'autre descendante, chacune caractérisée par un écart-type différent. Une demi-gaussienne montante peut s'exprimer par l'équation 7, et une demi-gaussienne descendante par l'équation 8. La figure 7 montre l'asymétrie entre la demi-gaussienne montante et la demi-gaussienne descendante et confirme donc que ces deux demi-gaussiennes n'ont a priori pas la même constante de temps (voir section 3.2).

$$v_m = A e^{-\left(\frac{t-t_c}{\tau_m}\right)} \quad \text{avec} \quad -\infty \leq t \leq t_c$$

(7) v_m : vitesse pendant la demi-gaussienne montante

τ_m : constante de temps de montée

$$v_d = A e^{-\left(\frac{t-t_c}{\tau_d}\right)} \quad \text{avec} \quad t_c \leq t \leq +\infty$$

(8) v_d : vitesse pendant la demi-gaussienne descendante

τ_d : constante de temps de descente

A : amplitude maximum de la gaussienne

t_c : temps pour lequel la gaussienne atteint son maximum.

Remarque : Dans cet article nous nommons constante de temps l'écart-type de chaque demi-gaussienne, ceci par analogie avec la constante de temps d'une exponentielle.

Si l'on tient compte de la sommation des gaussiennes, pour une portion de tracé manuscrit, l'équation des vitesses peut s'exprimer en additionnant les équations 7 et 8. Pour la sommation nous obtenons l'équation 9.

$$(9) \quad v = v_d + v_m = A_d e^{-\frac{(t-t_c)}{\tau_d}} + A_m e^{-\left(\frac{t-t_c}{\tau_m}\right)}$$

3.5. MODÉLISATION DES TRACÉS A VITESSE ANGULAIRE CONSTANTE

Dans certains cas particuliers les courbes de vitesses angulaires montrent que certaines portions du tracé manuscrit s'effectuent à vitesse angulaire quasi-constante et non nulle [13] (voir fig. 8). Une gaussienne commençant et finissant toujours à zéro, il n'est pas possible de reproduire ces changements de direction à vitesse quasi constante et non nulle même avec la superposition de deux gaussiennes. Pour cette raison, une constante a été ajoutée à l'équation d'une demi-gaussienne [13]. En principe la valeur de cette constante varie pour chaque demi-gaussienne. Toutefois, sa valeur peut être égale pour deux demi-gaussiennes

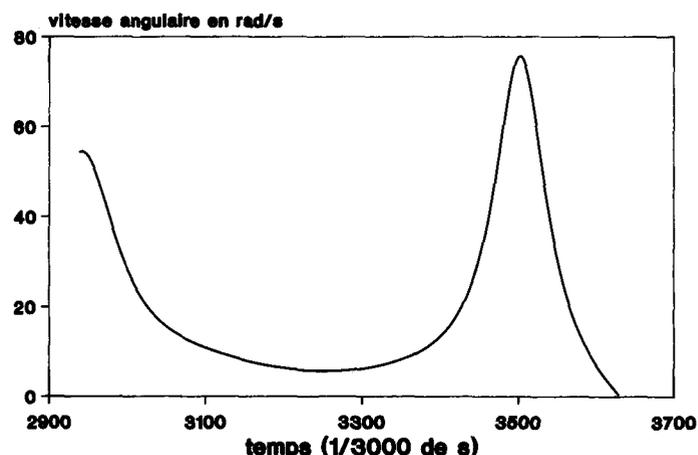


Figure 8. — Composante continue et non nulle sur les profils de vitesse angulaire.

successives. Ainsi pour l'équation d'une demi-gaussienne nous obtenons l'équation (10).

$$(10) \quad v = A e^{-\left(\frac{t-t_c}{\tau}\right)} + \alpha$$

α : constante additive .

Les valeurs des paramètres « A » et « t_c » peuvent être déduites directement des courbes de vitesse. « A » représente l'amplitude maximale de la gaussienne et « t_c » l'instant pour lequel cette gaussienne atteint son maximum. Comme le tracé manuscrit est issu d'une séquence programmée d'avance dont l'exécution est rapide, le système peut parfois enchaîner des commandes successives générant les différentes portions du tracé manuscrit. Une nouvelle commande pouvant être générée sans que la précédente ne soit entièrement terminée, le système peut ne pas atteindre son régime permanent. C'est pourquoi, les paramètres « A » et « t_c » sont considérés comme faisant partie du modèle et sont également estimés lors de l'extraction des paramètres (d'autres travaux précisent cette extraction de paramètres [6, 13]).

Les bases théoriques du modèle venant d'être présentées, la suite de l'article traite de son utilisation pratique.

4. Procédure de traitement d'un tracé manuscrit

Le tracé manuscrit constitue la sortie générée par le système Bras/Main. Cette sortie est utilisée pour calculer les paramètres du modèle qui simulent le comportement du système réel, générateur de tracés manuscrits. Le traitement d'un tracé manuscrit s'effectue en quatre étapes : acquisition, suréchantillonnage, extraction des paramètres et reconstruction.

L'implantation du modèle s'est faite en langage C, sur un Compaq 386 à 20 MHz avec coprocesseur numérique.

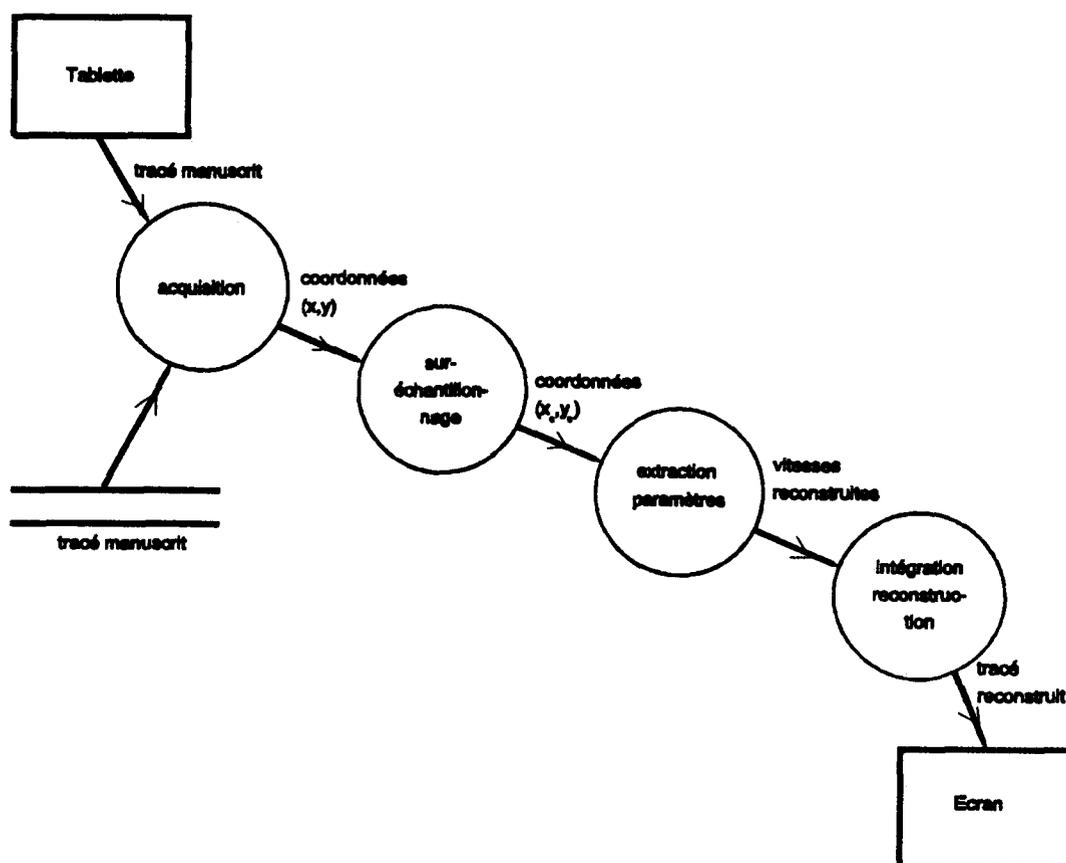


Figure 9. — Les différentes étapes du traitement.

Chaque traitement (acquisition, suréchantillonnage, extraction des paramètres, reconstruction) est indépendant et peut être effectué en différé à condition que les étapes précédentes aient été complétées. Si toutes les étapes sont enchaînées les unes à la suite des autres, le traitement d'une signature manuscrite prend de quelques minutes à environ 15 mn selon la longueur de la signature. Le logiciel créé ne vise pas la performance, il fait de nombreux affichages graphiques sur écran VGA (chaînes, composantes, vitesse angulaire, vitesse curviligne, tracé original et reconstruit). C'est un outil de recherche qui nous permet d'explorer le modèle proposé.

La figure 9 montre l'enchaînement de ces différentes étapes et les paragraphes suivants vont préciser le contenu de chacune d'elle.

4.1. ACQUISITION

L'acquisition du tracé manuscrit se fait grâce à une tablette à digitaliser. La fréquence d'acquisition est de 100 points par seconde. Cette fréquence d'acquisition est largement suffisante car la plus grande partie de l'information se situe dans une gamme de fréquences 2-12 Hz [15]. La tablette permet d'obtenir les coordonnées (x, y) de la pointe du crayon en fonction du temps. La résolution de la tablette utilisée (Penpad 300) est de 39.37 points/mm (1 000 lignes/pouces) en abscisse et en ordonnée. Les dimensions de la tablette sont de 305 × 305 mm.

Note :

L'acquisition peut également se faire à partir d'un fichier contenant un tracé manuscrit préalablement enregistré avec la tablette.

4.2. SURÉCHANTILLONNAGE ⁽¹⁾

Les discontinuités angulaires sont de rapides changements de direction du tracé. Elles se caractérisent sur les profils de vitesse angulaire par la présence de pics étroits et de fortes amplitudes. Pour mieux estimer la forme de ces pics étroits et avoir plus de points pour calculer les paramètres du modèle, les signaux de vitesse angulaire ont été suréchantillonnés. La vitesse curviligne étant liée pour son calcul à la vitesse angulaire, celle-ci a été également suréchantillonnée. Une méthode basée sur une décomposition en série de Fourier a permis de réaliser ce suréchantillonnage et le filtrage des signaux [16]. Le filtrage s'effectue en supprimant les coefficients de la série de Fourier de fréquences supérieures à 12 Hz. Cette méthode donne une équation continue en fonction du temps qui, après dérivation, permet de calculer les vitesses curvilignes et angulaires grâce aux équations (2) et (6). Une comparaison visuelle des signaux originaux et filtrés permet d'apprécier la qualité du filtrage du bruit sans qu'apparaisse de dégradation notable du tracé manuscrit.

⁽¹⁾ Augmentation du nombre d'échantillons temporels.

4.3. EXTRACTION DES PARAMÈTRES

Le calcul des paramètres du modèle est effectué par la méthode des moindres carrés appliqués aux cas d'équations non linéaires [13], [17]. Donc la recherche des paramètres se fait par minimisation de la somme des carrés des erreurs entre les points expérimentaux et les points calculés.

La méthode consiste à donner une estimation de la correction à apporter à un paramètre pris comme valeur initiale. La valeur corrigée peut être ensuite utilisée pour calculer une autre correction. Après plusieurs itérations successives, les calculs convergent en général vers les valeurs des paramètres des gaussiennes qui minimisent la somme des carrés des erreurs. Dans les rares cas de non convergence, il suffit de prendre une autre valeur initiale et de recommencer les itérations. Le changement des valeurs de départ se fait par dichotomie [13].

4.3.1. Exemple dans un cas simple

Pour mieux illustrer la méthode utilisée, un exemple simple est donné dans lequel on cherche à calculer la constante de temps de la gaussienne en minimisant l'erreur suivant le critère des moindres carrés. Dans cet exemple, nous considérons l'équation (11).

$$(11) \quad v = A e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$

τ : constante de temps à estimer .

Dans une première étape, on linéarise cette équation pour se ramener à la méthode des moindres carrés « classique ». Pour cela, on développe la fonction en série de Taylor autour d'une solution approchée et, on ne retient que les termes linéaires. On obtient l'équation (12).

$$v = A e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} + \frac{2 A t^2}{\tau_0^3} e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} \Delta\tau$$

$$(12) \quad \tau_0 : \text{solution approchée de } \tau$$

$\Delta\tau$: représente la correction à apporter à τ_0 .

Les mesures sont données par des couples (t_k, v_k) pris à des intervalles de temps constants. A partir de ces mesures, et connaissant une approximation de la constante de temps, nous obtenons le système d'équations linéaires (13).

$$[V] = [C] \cdot \Delta\tau$$

avec

$$(13) \quad \begin{aligned} [V] &: [b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_m]^T \\ [C] &: [a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_m]^T \\ b_k &= v_k - A e^{-\left(\frac{t_k}{\tau_0}\right)^2} \\ a_k &= \frac{2 A t_k^2}{\tau_0^3} e^{-\left(\frac{t_k}{\tau_0}\right)^2} \end{aligned}$$

En appliquant les moindres carrés représentés par l'équation (14), l'estimation de la correction de la valeur de la

constante de temps qui minimise l'erreur est donnée par l'équation (15). La valeur initiale de la constante de temps (valeur approchée) est prise arbitrairement. Cette valeur est changée si la constante de temps ne converge pas après plusieurs itérations. La variation de la valeur initiale de la constante de temps se fait par dichotomie.

$$(14) \quad ([C]^T [C]) \Delta\tau = [C]^T [V] \quad (\text{moindres carrés}) .$$

$$\Delta\tau = \frac{\sum_{k=1}^m a_k b_k}{\sum_{k=1}^m a_k^2}$$

$$(15) \quad \Delta\tau : \text{correction de la valeur initiale } \tau_0$$

Ainsi :

$$\tau = \tau_0 + \Delta\tau .$$

4.3.2. Les paramètres extraits

A partir de l'équation (10), quatre paramètres $(A_i, \tau_i, t_{c_i}, \alpha_i)$ peuvent être optimisés. Pour chaque demi-gaussienne (V_i) des profils de vitesse (curviligne ou angulaire) les quatre paramètres sont extraits par la méthode des moindres carrés. Pour les demi-gaussiennes descendantes nous déterminons ces paramètres en tenant compte d'une sommation possible avec la demi-gaussienne montante (équation 9). De la détermination des paramètres avec sommation ou sans sommation, nous retiendrons ceux qui donnent la plus faible erreur selon le critère des moindres carrés. De plus chaque demi-gaussienne sera caractérisée par un temps de début (t_{d_i}) et de fin (t_{f_i}) de génération qui seront déduits directement des courbes de vitesse. Ainsi nous aurons un total de 6 paramètres pour chaque demi-gaussienne, 4 déterminés par la méthode des moindres carrés, plus 2 autres déduits à partir des courbes. Maintenant chaque demi-gaussienne s'exprime par l'équation (16),

$$v_i = A_i e^{-\left(\frac{t-t_{c_i}}{\tau_i}\right)^2} + \alpha_i \quad \text{où } t_{d_i} \leq t \leq t_{f_i}$$

$$(16) \quad \text{avec}$$

t_{d_i} : temps de début de la gaussienne

t_{f_i} : temps de fin de la gaussienne

et un profil de vitesse curviligne ou angulaire pour un tracé manuscrit par l'équation (17) où « n » est le nombre de demi-gaussiennes.

$$(17) \quad V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_i, \dots, v_n\} .$$

4.4. RECONSTRUCTION

A partir des paramètres extraits par la méthode des moindres carrés et ceux extraits directement des courbes, les profils de vitesse curviligne et angulaire peuvent être reproduits par une succession de demi-gaussiennes. Avec ces vitesses, après intégration, il est possible de reconstruire un signal proche de l'original. L'intégration des vitesses a été réalisée par la méthode d'intégration numérique de Simpson [17]. Dans la formule de Simpson, la courbe est approximée par une fonction $f(x)$ qui passe par

trois points d'appui $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$. La fonction $f(x)$ est donnée par l'équation (18) :

$$(18) \quad f(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2} + \frac{(x - x_1)^2}{\Delta x^2} \cdot \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

L'intégrale s'obtient avec l'équation (19) :

$$(19) \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot \Delta x [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

En répétant l'équation (19) pour un nombre pair d'intervalles (l'intervalle entre deux échantillons consécutifs étant constant), la formule d'intégration de Simpson devient :

$$(20) \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot \Delta x [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_n - 1) + f(x_n)].$$

Après intégration des vitesses curviligne et angulaire, les signaux obtenus vont permettre de reconstruire le tracé manuscrit. L'intégration de la vitesse angulaire du temps $t_0 = 0^\circ$ (début de la signature) au temps t_i , donne le déplacement angulaire cumulatif depuis le début du tracé par rapport à une direction initiale. La direction dans laquelle s'est effectuée le déplacement de la pointe du stylo est déterminée à partir de ce déplacement angulaire. L'horizontale de la partie inférieure de la tablette nous sert de référence pour le calcul des angles et pour retracer les courbes. Un angle initial fixe la direction à prendre pour tracer le premier point à partir du point d'origine de la signature (x_0, y_0) .

Connaissant la distance parcourue et la direction du parcours, on peut tracer les différents points à l'aide de l'équation de reconstruction (21).

$$\begin{aligned} x &= d \cos(\Phi) + x_p \\ y &= d \sin(\Phi) + y_p \end{aligned}$$

avec :

- (21) d : distance parcourue ,
 Φ : angle par rapport au repère fixe ,
 x_p : abscisse du point précédent ,
 y_p : ordonnée du point précédent .

Pour reconstruire le tracé manuscrit, les coordonnées du premier point et la direction initiale sont nécessaires. Les coordonnées du premier point, à partir duquel se fait la reconstruction, sont obtenues à partir des coordonnées du point correspondant sur le tracé manuscrit original. L'angle initial est obtenu, en générant une première fois tout le tracé d'une chaîne avec un angle nul. Puis on calcule la rotation à faire subir à la chaîne reconstruite (avec le premier point du tracé pris comme pivot), pour que le dernier point du tracé reconstruit soit le plus proche possible du point original. L'angle ainsi déterminé nous donne les conditions initiales angulaires pour générer le tracé.

5. Résultats

5.1. TRAITEMENT DES SIGNATURES

La simulation du modèle a été utilisée en premier lieu sur des signatures manuscrites. Ces signatures ont servi à la validation du modèle afin de montrer sa capacité à reproduire des tracés manuscrits avec une faible erreur de reconstruction. Les signatures sont un bon exemple de mouvement balistique dans lequel il semble qu'il n'existe pas de récontrôle visuel (ou très peu). De plus certaines signatures sont presque de l'écriture (signature de type nord américain) alors que d'autres sont presque graphiques (chinoise et de type européen). Donc les signatures couvrent une large gamme de tracés manuscrits.

A partir de signatures manuscrites d'origines très différentes (Chine, Europe, Amérique), acquise à l'aide d'une tablette à digitaliser, une estimation des paramètres du modèle pour chaque signature a été réalisée. Les signatures générées ont été comparées avec les signatures originales. Pour chaque chaîne d'une signature, l'erreur commise est calculée à l'aide de l'équation (22). La figure 10 montre les erreurs maximales obtenues pour une chaîne sur 12 signatures très différentes.

La figure 11 et les erreurs présentées dans la figure 10 permettent de constater que le modèle reproduit de manière tout à fait remarquable les tracés manuscrits originaux. De plus il est important de souligner que même si le but final est de reconstruire le tracé original, le modèle utilisé reproduit également la cinématique de la signature : les vitesses curviligne et angulaire [6, 13].

La validation du modèle sur les signatures est très satisfaisante. Nous venons de voir que celui-ci est capable de reproduire des tracés manuscrits très différents avec une faible erreur. Cette validation nous permet de passer à l'étape suivante qui vise l'interprétation du processus de génération de tracés manuscrits à l'aide du modèle et des hypothèses de base qui ont été faites.

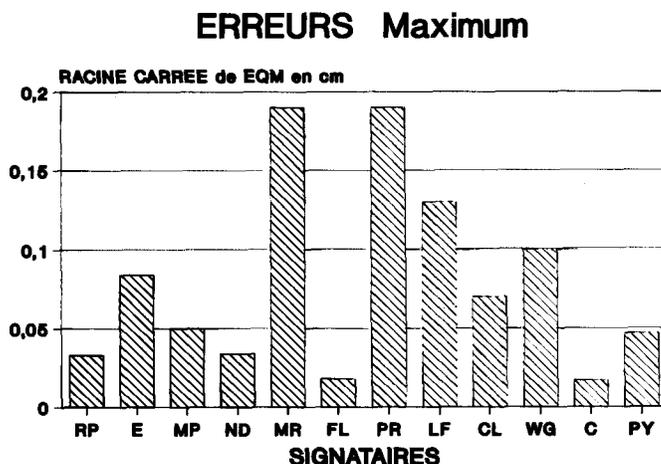


Figure 10. — Racine carrée de l'erreur quadratique moyenne pour 12 signatures.

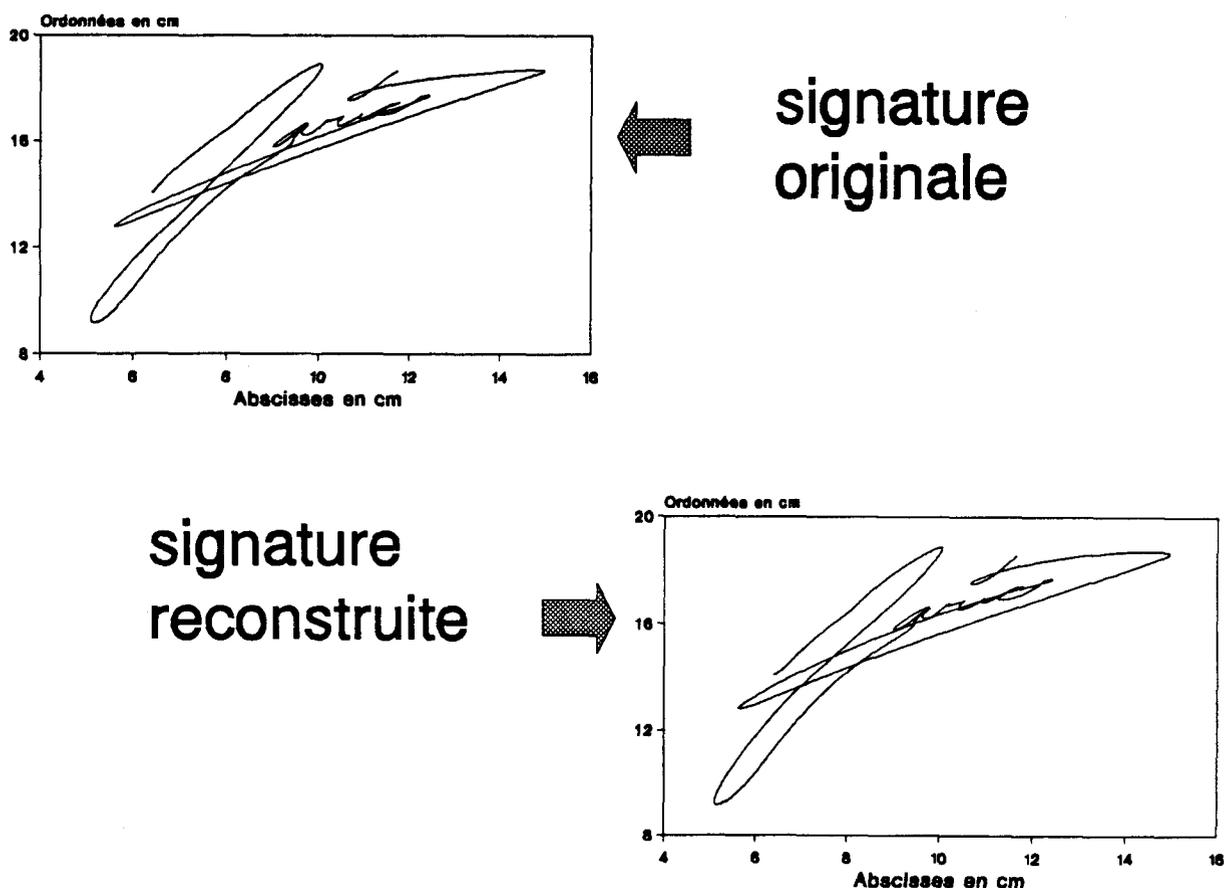


Figure 11. — Signature originale et reconstruite du signataire MR.

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{k=1}^N d_k^2}$$

- (22) d_k : distance euclidienne entre le point expérimental et le point reconstruit
 N : nombre de points de la signature .

5.2 SEGMENTATION DE MOTS MANUSCRITS

5.2.1. Généralités

Le modèle ayant fait ses preuves dans la reconstruction de signatures manuscrites, celui-ci a été également appliqué à la segmentation de mots. Le but de cette deuxième utilisation est d'étudier le processus de génération de tracés manuscrits, de vérifier si le modèle respecte les concepts énoncés et, s'il permet de mieux comprendre comment s'exécute un tracé manuscrit.

La segmentation des mots manuscrits a été effectuée à partir de la réalisation pratique du modèle (le logiciel de simulation) en utilisant les chaînes fonctionnelles. Cette segmentation en chaînes fonctionnelles est légèrement différentes des chaînes du modèle théorique. L'avantage de la segmentation en chaînes fonctionnelles tient au fait que cette méthode est programmée et qu'elle est entièrement automatique. Elle permet d'approcher ce que serait la segmentation avec le modèle théorique et par conséquent

de tirer des conclusions sur le processus de génération de l'écriture compte tenu du modèle proposé.

La segmentation des mots se fait sur deux types d'écriture purement cursive. Les deux scripteurs ayant participé à la collecte des données ont écrit à main levée, c'est-à-dire naturellement, sans aucune contrainte. Les mots sont écrits de manière très spontanée afin de respecter l'hypothèse de base du modèle qui nécessite un tracé rapide sans contrôle extérieur. Les mots utilisés sont les suivants : axe, maman, papa, lilas, polo, âtre, hypnose, zèbre, vie, que, fou, wagon, biberon, cerveau, billet, diva, affreux, habit, jouet, kawa, sosie, sur.

5.2.2. Résultats

Les résultats graphiques de la segmentation sont présentés dans les figures 12 et 13. A partir de ces figures, une grande stabilité peut être observée pour la segmentation de certaines lettres comme le « m » et le « n ». Cette segmentation est identique quel que soit le mot. Dans le modèle que nous proposons, nous avons supposé que la génération d'un tracé manuscrit résulte de l'exécution d'un programme moteur. A partir de ces résultats, on peut déjà penser que le cerveau contient un certain nombre de programmes moteurs en nombre limité qu'il utilise pour générer les lettres puis les mots. Ainsi pour générer des lettres « m » ou des lettres « n », le cerveau utilise un même programme moteur qu'il exécute plusieurs fois pour obtenir le résultat désiré. Le fait

ake Maman papa Lola
 polo âtre hypusse zébo
 wic que fou wagon
 bibron Cerveau billet
 diva affre jouet
 kawa Soie Sur

Figure 12. — Mots segmentés du scripteur 1.

ake Maman papa Lola
 polo âtre hypusse zébo
 wic que fou wagon
 bibron billet Cerveau
 diva affre jouet Sur
 kawa Soie

Figure 13. — Mots segmentés du scripteur 2.

d'utiliser plusieurs fois le même programme moteur pour générer des portions de lettres, permet de limiter le nombre de programmes moteurs stockés dans notre mémoire. De plus, ces programmes peuvent être utilisés pour générer d'autres tracés, proche de l'écriture, avec une grande rapidité. Ainsi on peut penser que le cerveau fait un compromis entre la vitesse d'exécution et l'efficacité du stockage. Pour être rapide le cerveau devrait contenir un programme moteur par lettre ou par mot, mais cela demanderait de stocker un nombre très important de programmes moteurs qui encombreraient notre mémoire et ceci avec des programmes moteurs qui servent très peu.

Ainsi, il est certainement plus judicieux de penser que le cerveau, en fonction des nombreux tracés qu'il doit effectuer, constitue un lot de programmes moteurs élémentaires qu'il pourra utiliser à souhait et qui lui permettront de

générer n'importe quelle lettre couramment utilisée. Cette base de données doit être régulièrement mise à jour et s'adapter aux besoins. Ainsi un Européen, apprenant à écrire le chinois ou l'arabe modifiera certainement le lot de ses programmes moteurs dans un souci de rapidité et d'encombrement de sa mémoire, pour s'adapter aux nouveaux tracés à générer.

Toujours à partir des résultats de la segmentation, on peut parfois constater une segmentation par lettre. Pour l'un des scripteurs il s'agit du « o », pour l'autre il s'agit du « e ». Ceci vérifie toujours les hypothèses faites sur le modèle. Durant l'apprentissage de l'écriture, chaque individu crée sa propre base de programmes moteurs. Cette base est différente d'un scripteur à l'autre car elle est le résultat de son expérience passée et conditionne la forme prise par son écriture. Un scripteur peut posséder un programme moteur pour générer une lettre dans un souci de rapidité en fonction de son écriture. Pour un autre scripteur, la même lettre peut être générée de façon tout à fait différente. Pour chaque individu, il doit être possible (mais cela peut être long car le phénomène de génération d'écriture est certainement évolutif) de trouver la base de programmes moteurs lui permettant de générer son écriture. Malgré tout, il doit exister certaines constantes puisque nous utilisons des systèmes d'écriture semblables (même base culturelle) et que nous possédons le même système physique (nerveux et musculaire) donc certains programmes moteurs doivent se retrouver d'un individu à un autre. Ainsi pour les « m » et les « n », nous avons pu constater que nos deux scripteurs possèdent la même segmentation.

De plus on peut constater que la segmentation peut varier avec le contexte, ainsi avec les liaisons des lettres, par souci de rapidité, le cerveau peut changer de programme moteur pour s'adapter au contexte de la lettre générée avant et après si l'on considère que le système doit anticiper.

Ceci termine la description de l'utilisation du modèle pour la génération et la segmentation de tracés manuscrits et montre ainsi le potentiel d'un tel modèle, c'est-à-dire de nous permettre de mieux connaître le processus de génération de tracés manuscrits.

6. CONCLUSIONS

Dans cet article nous avons présenté un modèle de génération de tracés manuscrits basé sur la génération de profil de vitesse sous forme d'une succession de demi-gaussiennes. Le modèle a d'abord été testé sur des signatures car celles-ci ont un caractère dynamique et stéréotypé qui reflète bien un mouvement entièrement appris, sans rétrocontrôle visuel (ou peu), une des hypothèses de base du modèle. Le modèle proposé a permis de les reproduire avec une très bonne précision. Une telle reproduction des tracés manuscrits n'a pas encore été atteinte actuellement par d'autres modèles, d'autant plus que le modèle proposé est capable de reproduire la dynamique des signatures et pas seulement leurs formes [6].

Le modèle permettant de reproduire en partie le processus de génération de tracé manuscrit, il est possible, compte tenu également de nos hypothèses de base, d'expliquer partiellement ce processus à partir de la segmentation par

chaînes fonctionnelles. Même si les résultats que nous avons obtenus nous semblent encourageants pour la poursuite de nos travaux, certains aspects ne sont pas encore entièrement satisfaisants comme la nécessité d'ajouter une composante continue difficile à justifier et le fait que le support d'une fonction gaussienne soit infini (le processus physique de génération étant lui fini dans le temps). De plus, le gros problème de ce modèle tient dans la présence de discontinuités sur les courbes des vitesses curviligne et angulaire que nous générons. L'utilisation des deux demi-gaussiennes pour modéliser la forme de cloche asymétrique est responsable de ce phénomène, car nous n'avons pas assuré la continuité au point de jonction de ces deux courbes. Sinon, nous n'avons pas de contre-exemple de signatures ou de tracés mal reconstruits, l'application du modèle et de la recherche des paramètres par la minimisation de la somme des carrés des erreurs donnant d'excellents résultats.

Donc comme tout modèle, celui-ci doit évoluer en fonction des résultats obtenus et une partie des travaux futurs va consister à affiner ce modèle. Entre autres, nous allons travailler sur les problèmes des discontinuités au niveau de la jonction des deux demi-gaussiennes et certainement repenser au modèle proposé.

Manuscrit reçu le 15 janvier 1992.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. PLAMONDON, F. J. MAARSE, « An Evaluation of Motor Models of Handwriting », *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybern.*, vol. 19, n° 5, sept-oct. 1989, p. 1060-1072.
- [2] R. PLAMONDON, « Handwriting Control : A Functional Model », *Models of Brain Function*, Ed. Rodney, M. J. Cotterill, Cambridge University Press, 1989, p. 563-574.
- [3] R. PLAMONDON, G. E. STELMACH et N. TEASDALE, « Motor Program Coding Representation from Handwriting Generator Models : The Production of Line Responses », *Biological Cybernetics*, vol. 63, p. 443-451, 1990.
- [4] R. PLAMONDON, Y. LI-DE et G. E. STELMACH, B. CLEMENT, « On the Automatic Extraction of Biomechanical Information from Handwriting Signals », *IEEE Trans. On Systems Man and Cybernetics*, vol. 21, no. 1, p. 90-101, 1991.
- [5] R. PLAMONDON, « A Handwriting Model Based on Differential Geometry », *Computer Recognition and Human Production of Handwriting*, R. Plamondon, C. Y. Suen, M. Simmer, Eds. World Scientific Publish., Hong Kong, 1989, p. 179-192.
- [6] F. LECLERC, R. PLAMONDON, « Validation d'un modèle de la fonction de transfert du bras sur des signatures manuscrites », *Proc. of Vision Interface 90*, p. 105-111, Halifax 1990.
- [7] N. M. HERBST, C. N. LIU, « Automatic Verification of Signatures By Means Of Acceleration Patterns », *Proc. IEEE, Conf. on Pattern Recognition and Image Processing*, p. 332-337, June 1977.
- [8] R. PLAMONDON, « What does Differential Geometry tell Us About Handwriting Generation », compte rendu du troisième symposium international sur l'écriture manuscrite et ses applications informatiques, juillet 1987, Montréal, p. 11-13.
- [9] M. PARIZEAU, R. PLAMONDON, « A Comparative Analysis of Regional Correlation Dynamic Time, and Skeletal Tree Matching for Signature verification », *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, no 7, juillet 1990, p. 710-717.
- [10] R. PLAMONDON, M. PARIZEAU, « Signature Verification from Position, Velocity and Acceleration Signals : A Comparative Study », *Proc. of 9th International Conference on Pattern Recognition*, p. 260-265, Rome, novembre 1988.
- [11] T. FLASH, NEVILLE HOGAN, « The Coordination of Arm Movements : An Experimentally Confirmed Mathematical Model », *Journal of Neuroscience*, vol. 5, No. 7, p. 1688-1703, juillet 1985.
- [12] Y. UNO, M. KAWATO, R. SUZUKI, « Formation and Control of Optimal trajectory in Human Multijoint Arm Movement », *Biological Cybernetics* 61, p. 89-101, 1989.
- [13] F. LECLERC, Validation d'un modèle générateur de vitesse à profil gaussien sur des signatures manuscrites », mémoire de MScA, École polytechnique de Montréal, novembre 1989.
- [14] R. PLAMONDON, B. CLEMENT, « Dependence of peripheral and central parameters describing handwriting generation on movement direction », Elsevier Science Publishers B. V., *Human Movement Science* 10, p. 193-221, 1991.
- [15] T. K. WORTHINGTON, T. J. CHAINER, J. D. WILLIFORD, S. C. GUNDERSEN, « IBM Dynamic Signature Verification », *Computer Security : Practical Issues in a Troubled World*, Eds. J. B. Grimson et H. J. Kugler, p. 129-159, 1985.
- [16] D. J. BURR, « A Normalizing Transform for Cursive Script Recognition », *Proc. of the 6th Int. Conf. on Pattern recognition*, Munich, 19-22 octobre 1982, vol. 2, p. 1027-1030.
- [17] K. ARBENZ et A. WOHLHAUSER, « Méthodes mathématiques pour l'ingénieur, analyse numérique », Presses Polytechniques Romandes, 1981.