

## Utilisation du Cepstre d'énergie pour la vélocimétrie par images de particules

### *Use of the Power Cepstrum for the Particle Image Velocimetry*

---



#### Thierry Fournel

Laboratoire Traitement du Signal et  
Instrumentation  
UA-CNRS 842  
23, rue du Dr Paul Michelon  
42023 Saint-Etienne Cedex 2, France

Docteur ès Sciences (avril 1991, Université Jean Monnet), Thierry Fournel est actuellement Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche à l'Université de Saint-Etienne. Il poursuit au laboratoire TSI (Traitement du Signal et Instrumentation), ses recherches sur le dépouillement d'images en tomographie et en microholographie.



#### Joannès Danière

Laboratoire Traitement du Signal et  
Instrumentation  
UA-CNRS 842  
23, rue du Dr Paul Michelon  
42023 Saint-Etienne Cedex 2, France

Docteur ès Sciences (1977, Université de Lyon I), Joannès Danière est Maître de Conférences puis Professeur (1988) à l'Université de Saint-Etienne où il enseigne l'automatique depuis 1976 et le traitement numérique des signaux depuis 1988. De 1966 à 1978, à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon, ses travaux de recherches concernaient la spectroscopie nucléaire. A partir de 1979, au sein du laboratoire TSI, ses activités portent sur l'étude et la réalisation de capteurs dans le cadre de contrats industriels. Depuis 1990 il collabore plus étroitement avec le groupe images.



#### Martine Moine

Laboratoire Traitement du Signal et  
Instrumentation  
UA-CNRS 842  
23, rue du Dr Paul Michelon  
42023 Saint-Etienne Cedex 2, France

Martine Moine est titulaire d'un DEA Image, Intelligence Artificielle et Algorithmie de l'Université de Saint-Etienne. Elle prépare une thèse depuis 1990 au sein de l'équipe images du laboratoire TSI.



#### Jacques Pigeon

Laboratoire Traitement du Signal et  
Instrumentation  
UA-CNRS 842  
23, rue du Dr Paul Michelon  
42023 Saint-Etienne Cedex 2, France

Jacques Pigeon a débuté (1964) ses activités de recherche et d'enseignement à l'Université Claude Bernard de Lyon où il a soutenu

sa thèse de Doctorat ès Sciences en 1970 (Physique Théorique). Nommé Maître de Conférences (1967) puis Professeur (1983) à l'Université de Saint-Etienne, il y enseigne la mécanique relativiste, la mécanique quantique, la mécanique des fluides, la physique nucléaire et le traitement du signal. Il a participé à la création du laboratoire TSI de cette Université. Ses activités de recherche ont alors concerné dans un premier temps l'étude théorique des guides optiques (fibres optiques et guides plans). Elles s'orientent actuellement vers le traitement d'images.



#### Michel Courbon

Laboratoire Traitement du Signal et  
Instrumentation  
UA-CNRS 842  
23, rue du Dr Paul Michelon  
42023 Saint-Etienne Cedex 2, France

Docteur ès Sciences (1986, Université Jean Monnet), Michel Courbon est Maître de Conférences à l'UT de Saint-Etienne où il enseigne l'informatique et l'électricité depuis 1987. Travaillant dans le domaine du traitement d'images depuis 1983, il a rejoint J. P. Schon en 1987 pour s'intéresser plus particulièrement à l'analyse quantitative de visualisations en mécanique des fluides.



## Jean-Paul SCHON

Laboratoire Traitement du Signal et  
Instrumentation  
UA-CNRS 842  
23, rue du Dr Paul Michelon  
42023 Saint-Etienne Cedex 2, France

Jean-Paul Schon est ingénieur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (Hydraulique 1967), Assistant puis Maître Assistant à l'École

Centrale de Lyon où il s'intéresse à la simulation en soufflerie de la diffusion dans les basses couches de l'atmosphère, concrétisé par une Thèse d'État en 1974. Maître de Conférences puis Professeur à l'IUT de Saint-Etienne depuis 1975, il s'intéresse depuis 1976 aux techniques de visualisations quantitatives en mécanique des fluides (tomographie laser, microholographie et traitement d'images). Chercheur depuis 1989 au laboratoire TSI à Saint-Etienne, il dirige aussi le centre informatique de l'Université Jean Monnet.

## RÉSUMÉ

Nous proposons l'utilisation du cepstre d'énergie en vélocimétrie par images de particules (VIP) dans un fluide comme alternative à l'autocorrélation, souvent utilisée dans ce domaine. Le cepstre d'énergie, dont nous discutons différentes formulations, est en effet un outil bien adapté à la détection des échos engendrés par la multi-exposition. Sa résolution est, contrairement à celle de l'autocorrélation, indépendante de la taille des particules. De ce fait, son utilisation présente l'avantage de pouvoir mesurer des déplacements inférieurs aux dimensions des particules.

Nous montrons que l'utilisation d'une fenêtre permet d'augmenter la contribution de l'écho par rapport à celle du signal initial dans le cepstre et nous vérifions qu'elle permet aussi d'améliorer le rapport cepstre sur bruit.

### MOTS CLÉS

Cepstre d'énergie, autocorrélation, vélocimétrie par images de particules, analyse d'images.

## SUMMARY

While the autocorrelation is often computed in particle image velocimetry (PIV), we propose instead to use the power cepstrum for such a measurement. We discuss different formulations of the power cepstrum which is indeed a tool well-suited for the detection of the echoes due to multi-exposure. Contrary to the autocorrelation, the resolution of the power cepstrum is not related to the size of particles. Thence, the use of the power cepstrum has the advantage to allow the measurement of displacements lower than the size of particles.

We show that the contribution of the echo in comparison with the contribution of the initial signal in the cepstrum is increased by the use of a window. We verify that such a use also allows to improve the cepstrum over noise ratio.

### KEY WORDS

Power cepstrum, autocorrelation, particle image velocimetry, image analysis.

## 1. Introduction

La vélocimétrie par images de particules (VIP) peut aujourd'hui être considérée comme une technique classique de mesure de champs de vitesse dans un écoulement [1]. Son principe consiste à introduire dans le fluide étudié, des particules de petite taille et à éclairer ces particules plusieurs fois de suite à intervalle de temps constant, leurs différentes positions étant enregistrées sur une même image. La détermination de la vitesse d'une particule se ramène alors à la mesure de la distance entre deux positions successives.

Le dépouillement se fait soit directement par repérage et appariement des positions (cela n'est en fait possible que si les particules sont peu nombreuses), soit par dépouillement optique (les images des particules sont alors assimilées à des trous d'Young [2]), soit enfin par calcul de l'autocorrélation de portions d'image [3].

Les images de VIP peuvent être considérées comme des signaux entachés d'échos. Or la détermination d'un écho ou plus particulièrement celle du décalage induit par un écho peut être réalisée grâce au cepstre (sismique, écho

radar, acoustique, contrôle, ...) [4, 5, 6, 7, 8]. Nous proposons donc dans cette étude, de montrer les possibilités offertes par le cepstre d'énergie en VIP.

## 2. principe de la détection d'écho par le cepstre

Dans la suite, nous symboliserons les signaux par des lettres minuscules et leurs transformées de Fourier par les majuscules correspondantes. La transformée d'une expression sera notée : TF[expression].

Graphiquement, ces signaux et leurs transformées seront présentés avec l'origine à gauche dans le cas monodimensionnel, l'origine au centre et sur 256 niveaux de gris dans le cas bidimensionnel. Enfin la distribution singulière de Dirac à l'abscisse  $a$  sera notée :  $\delta_a$ .

### 2.1. MODÉLISATION DE L'ÉCHO

Le phénomène d'écho introduit une version translattée et éventuellement dégradée d'un signal initial  $s_i$ . Ce signal  $s_i$  peut être soit déterministe, bruité ou non, soit aléatoire.

Désignons par  $s_d * \delta_a$  sa version translattée de  $a$ , l'indice  $d$  indiquant une dégradation. Le signal dégradé  $s_d$  peut être représenté par le produit de convolution du signal  $s_i$  par une distribution  $g$  :

$$s_d = g * s_i \quad (1)$$

Pour un écho non dégradé, on a :

$$g = K \cdot \delta \quad (2)$$

où la constante  $K$  représente une atténuation ou un gain. De toute façon, il est évident que si l'on veut qualifier d'écho la quantité  $s_d$ , il est essentiel qu'elle soit peu différente de  $s_i$  c'est-à-dire que la distribution  $g$  soit « proche » de celle de Dirac. En VIP, cette distribution  $g$  nous permettra notamment de modéliser le biais de gradient [9] qui correspond au fait que la vitesse n'est pas constante dans la fenêtre étudiée.

Dans ces conditions, le signal  $s$  constitué du signal initial et de son écho, peut être modélisé par l'expression :

$$s = s_i * [\delta + g * \delta_a] + p \quad (3)$$

le terme  $p$  étant introduit pour tenir compte d'une perturbation à caractère aléatoire ou déterministe. En VIP, cette distribution peut avoir différentes origines :

— Des réflexions parasites lors de l'éclairage de la scène étudiée ou la présence de grains de poussières sur l'objectif du système d'acquisition, ne participent pas au décalage et induisent des motifs fixes dans l'image.

— Des trajectoires de particules sécantes au plan éclairé ou des particules en bordure de la zone visualisée sont la cause de l'enregistrement de traces consécutives en nombre inférieur au nombre d'expositions. Ce phénomène est appelé biais de détection [10].

Dans un tel contexte, le but généralement recherché est l'estimation du paramètre  $a$ .

## 2.2. PRINCIPE DU CEPSTRE D'ÉNERGIE

Historiquement, la notion de cepstre a été introduite par Bogert *et al.* en 1963 [4]. Ils proposaient pour estimer le décalage «  $a$  » induit par un écho présent dans le signal  $s$ , de calculer la densité spectrale de la quantité :  $\ln |S|^2$ . Le résultat appelé « cepstrum », est devenu par la suite le cepstre d'énergie. Ce dernier présente un jeu de pics espacés du décalage  $a$ .

En effet, dans le cadre de la modélisation précédemment introduite, si le signal est non perturbé ( $p = 0$ ), et non dégradé ( $g = \delta$ ), nous avons :

$$s = s_i * (\delta + \delta_a) \quad (4)$$

Si  $u$  désigne la fréquence, sa transformée de Fourier s'écrit :

$$S(u) = S_i(u) [1 + \exp(-2 i \pi u a)] \quad (5)$$

Notons que le terme entre crochets de l'expression (5) s'annule sur un ensemble dénombrable. Par ailleurs, le signal initial  $s_i$  étant de durée finie, sa transformée

$S_i$  ne peut s'annuler que sur un ensemble de mesure nulle (cf. théorème de Paley-Wiener).

L'existence de l'écho introduit donc une pseudo-périodicité dans la TF du signal. Cette pseudo-périodicité peut être extraite en calculant soit la partie réelle, soit la partie imaginaire, soit la norme, soit la norme au carré de  $S$ . C'est l'une de ces deux dernières solutions qui a été choisie car elles permettent lorsqu'on en prend le logarithme, de rendre additive la contribution du décalage qui est, elle, purement périodique. Soit par exemple :

$$\ln |S(u)|^2 = 2 \{ \ln |S_i(u)| + \ln |1 + \exp(-2 i \pi u a)| \} \quad (6)$$

La contribution  $\ln |1 + \exp(2 i \pi u a)|$  est une fonction périodique de fréquence  $a$  en la variable  $u$ . Cette fréquence, autrement dit le décalage, peut être déterminée en calculant la densité spectrale de la quantité  $\ln |S|^2$ , ce qui conduit en utilisant l'estimation spectrale la plus simple à la définition :

$$\tilde{s} = |\text{TF} [\ln |S|^2]|^2 \quad (7)$$

Il est à noter que cette densité spectrale existe en toute circonstance puisque la quantité  $\ln |S|^2$  ne prend des valeurs infinies que sur un ensemble de mesure nulle.

Si le signal  $s_i$  est réel alors la quantité  $|S|$  est paire donc la transformée TF  $[\ln |S|^2]$  est réelle, en conséquence :

$$\tilde{s} = \{ \text{TF} [\ln |S|^2] \}^2 \quad (8)$$

Ce concept fut par la suite généralisé en 1965 par Oppenheim [11] qui introduisit le cepstre complexe, défini par :

$$\hat{s} = \text{TF}^{-1} [\text{Inc}(S)] \quad (9)$$

où  $\text{Inc}$  désigne le logarithme népérien complexe :

$$\text{Inc}(S) = \ln |S| + i \cdot \arg(S) \quad (10)$$

$\arg$  étant la version déballée de l'argument, c'est-à-dire une fonction uniforme reconstituée à partir de sa valeur principale modulo  $2 \pi$ .

Le cepstre complexe est un opérateur réversible : il permet non seulement de déterminer le décalage induit par l'écho mais encore de reconstruire le signal initial. En contre-partie, le déballage de la phase soulève de grosses difficultés, notamment à deux dimensions, de sorte que le cepstre d'énergie se révèle plus simple d'emploi lorsqu'on ne s'intéresse qu'à la valeur du décalage.

La définition la plus courante du cepstre d'énergie est homogène à celle du cepstre complexe. Elle consiste à remplacer l'opérateur  $\text{Inc}$  par l'opérateur  $\ln | \cdot |$ , de sorte que :

$$\tilde{s} = \text{TF}^{-1} [\ln |S|] \quad (11)$$

Il faut remarquer en outre qu'il existe une relation simple entre le cepstre complexe et le cepstre d'énergie. En effet, de la définition du logarithme complexe, il vient :

$$\hat{s} = \tilde{s} + i \cdot \text{TF}^{-1} [\arg(S)] \quad (12)$$

Si le signal  $s$  est réel causal (s'il est non causal et à durée limitée, on pourra toujours se ramener à un signal causal), le cepstre complexe  $\hat{s}$  est réel causal. De plus, comme le cepstre d'énergie  $\tilde{s}$  est réel pair et la quantité  $i \cdot \text{TF}^{-1} [\arg (S)]$  est réelle impaire, on a :

$$\hat{s} = 2 h \cdot \tilde{s} \quad (13)$$

où  $h$  désigne la fonction de Heaviside avec  $h(0) = 1/2$ . Remarquons encore que le retour au signal  $s$  à partir du cepstre complexe  $\hat{s}$  obtenu à l'aide de l'expression (13), donne la version à phase minimum de ce signal.

Un cepstre d'énergie comporte le spectre de la participation périodique de l'écho, généralement riche en harmoniques. Si cet écho est non dégradé ( $g = K \cdot \delta$ ) et non perturbé ( $p = 0$ ), cela se traduit par un jeu de distributions de Dirac d'amplitudes décroissantes, espacées du décalage  $a$  et de signes alternés ou non selon la définition adoptée. Selon la définition (11), le cepstre (fig. 1 d) de l'écho idéal

(fig. 1 a) est :

$$(\delta \mp \delta_a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{2 |n|} \delta_{na} \quad (14)$$

Le cepstre correspondant à la définition (8) est représenté sur la figure 1 c.

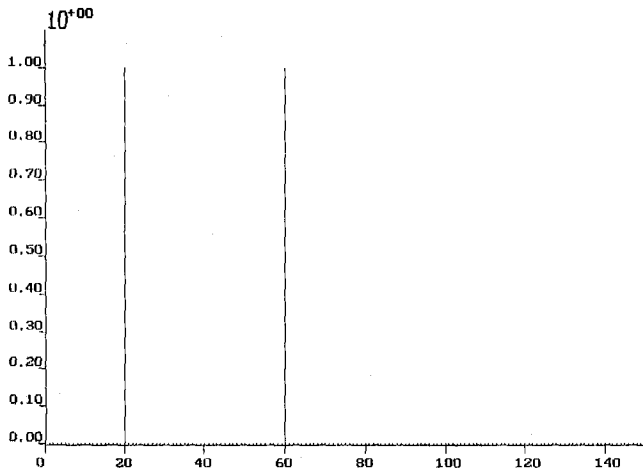


Figure 1 a. — Terme d'écho idéal.

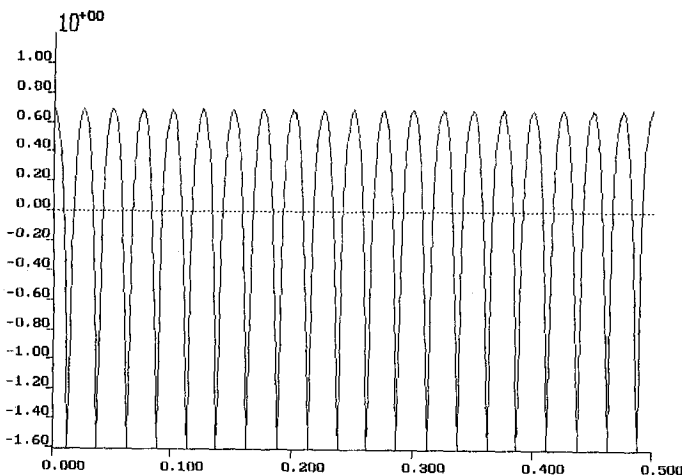


Figure 1 b. — Contribution périodique du terme d'écho idéal.

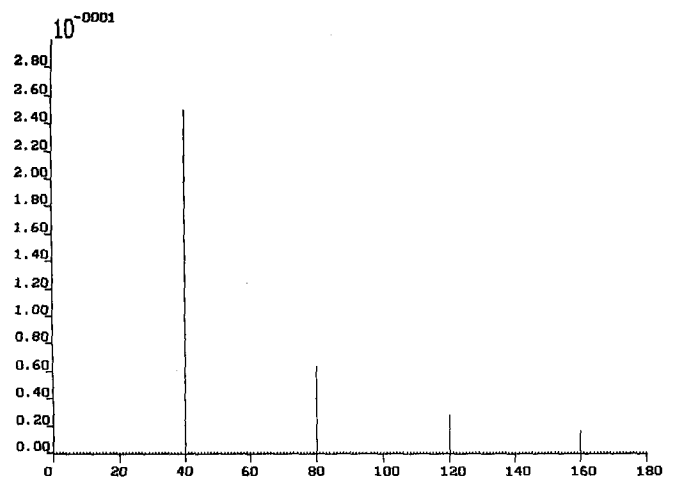


Figure 1 c. — Cepstre d'énergie du terme d'écho idéal (définition 8).

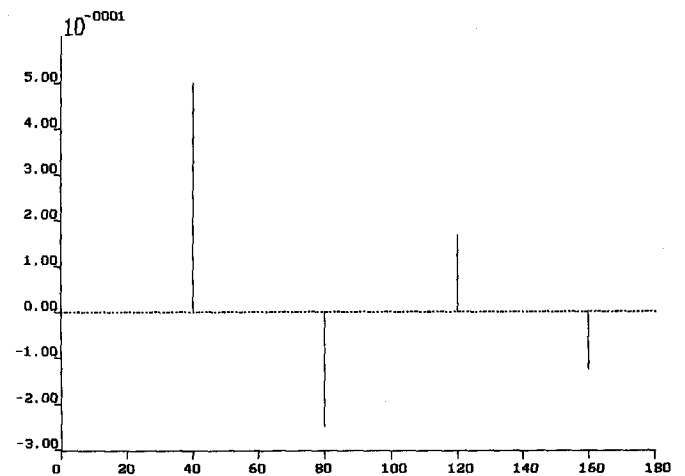


Figure 1 d. — Cepstre d'énergie du terme d'écho idéal (définition 11).

### 2.3. UTILISATION DU CEPSTRE D'ÉNERGIE DANS LE CONTEXTE DE LA VIP

Nous venons de voir que la dernière phase du calcul du cepstre d'énergie peut être interprétée comme l'estimation spectrale simple de la quantité  $\ln |S|^2$ . En pratique, les calculs étant réalisés à l'aide de la transformation de Fourier discrète, ajoutons qu'il n'est théoriquement pas nécessaire d'utiliser d'autres estimateurs (incluant par exemple une fenêtre) puisque les effets de bord n'existent pas. En effet, la fonction  $\ln |S|^2$  est une fonction réelle paire périodique, de période unité.

Il est cependant judicieux de multiplier la quantité  $\ln |S|^2$  par une fenêtre paire, avant d'en prendre la transformée de Fourier. En effet, lorsque le signal  $s_i$  est une impulsion de durée finie  $b$ ,  $S_i$  présente alors sur une partie du spectre, des oscillations, de fréquence  $b$  autour de la valeur zéro. En conséquence, l'estimation spectrale de  $\ln |S_i|^2$  fait ressortir un jeu de pics distants de  $b$  sur le cepstre. Ces pics peuvent être prépondérants si le gain de l'écho est faible.

En VIP, les particules dont les dimensions sont naturellement finies, représentent en fait des impulsions de type passe-bas (impulsions dont la densité spectrale est importante uniquement dans les basses fréquences).

Les oscillations seront donc présentes au centre de la fenêtre d'étude  $[0, 1[$  sur l'axe des fréquences et pourront alors être affaiblies par une fenêtre paire. La figure 2 est une illustration monodimensionnelle de ce qui vient d'être dit. Le cepstre d'une impulsion de type passe-bas en présence de son écho (fig. 2 a) a été calculé (fig. 2 b) selon (8) qui correspond à la définition souvent utilisée en traitement d'images [12]. Ce cepstre a ensuite été recalculé

(fig. 2 e), en intercalant une multiplication par une fenêtre paire de Blackman paire de largeur 1 en  $u$  (fig. 2 d). On peut remarquer (fig. 2 c) la présence des deux systèmes d'oscil-

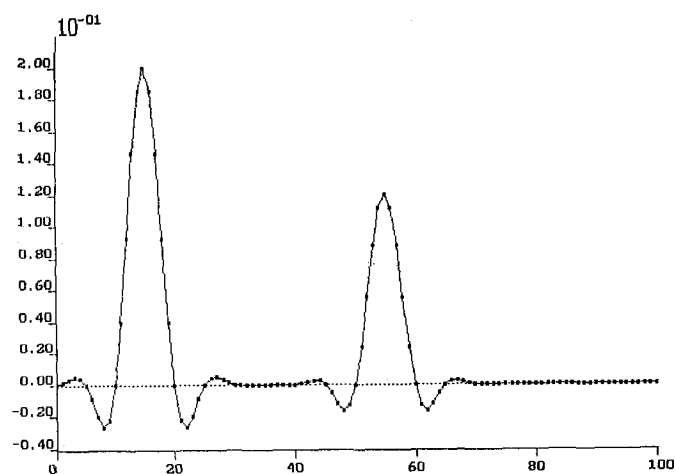


Figure 2 a. — Impulsion de 31 échantillons et son écho de gain 0,6 au 40<sup>e</sup> échantillon.

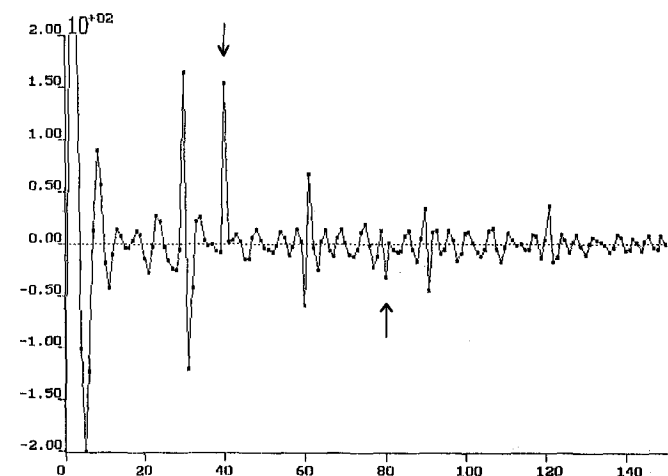


Figure 2 b. — Cepstre du signal de la figure 2 a (définition 11). Les flèches indiquent les pics dus à l'écho.

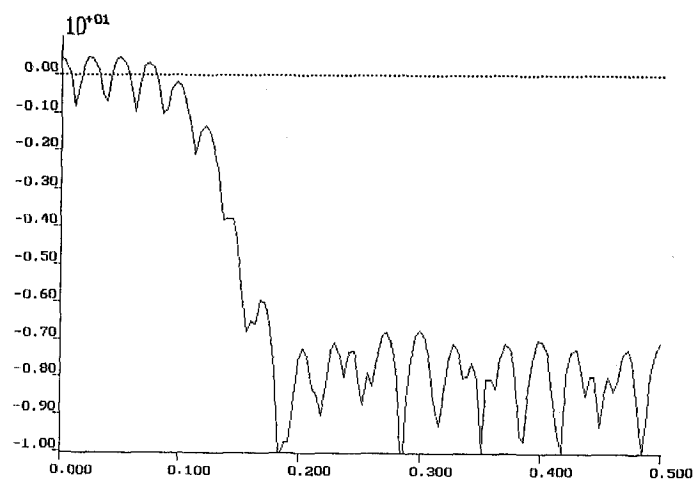


Figure 2 c. — Allure du logarithme du module au carré de la transformée de Fourier du signal de la figure 2 a.

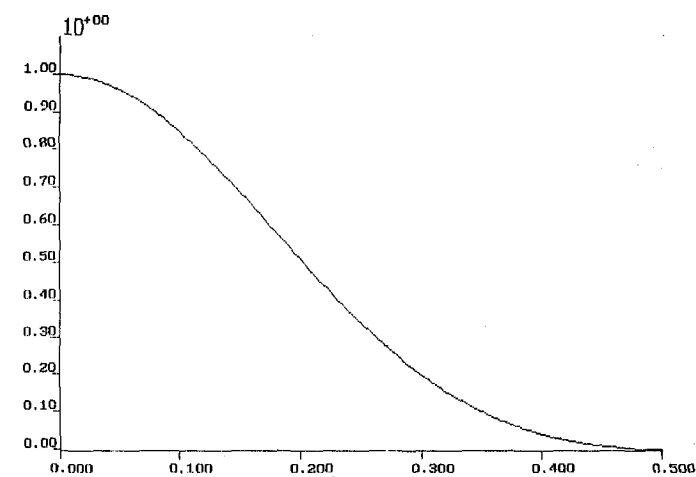


Figure 2 d. — Fenêtre de Blackman paire, de largeur unité en  $u$ .

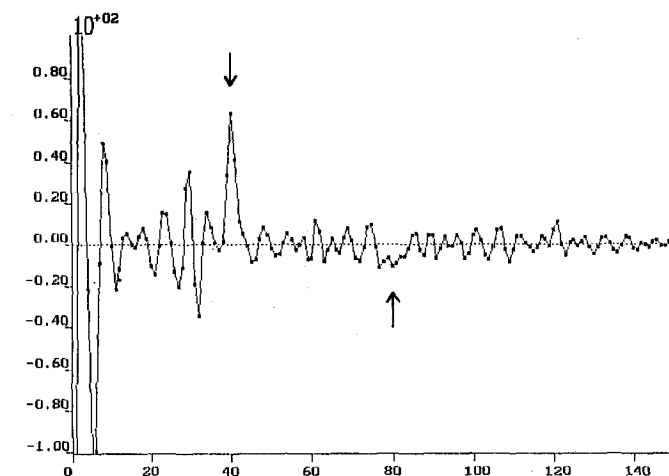


Figure 2 e. — Cepstre du signal de la figure 2 a (définition 11), en intercalant la multiplication du signal de la figure 2 c par la fenêtre de la figure 2 d.

lations dans la bande coupée alors que dans la bande passante, seules les oscillations dues à l'écho subsistent.

Il se trouve par ailleurs que l'utilisation d'une telle fenêtre contribue à l'atténuation de l'effet d'une perturbation additive aléatoire  $p$ . En effet, la présence de cette perturbation engendre deux difficultés [13]. La première est que le cepstre du signal initial et du terme d'écho ne sont plus séparables par le logarithme et la deuxième est que l'estimation simple est non efficace.

Il faut remarquer à ce sujet que si la variance est uniformément répartie en fréquence au niveau du module  $|S|$ , elle ne l'est évidemment plus au niveau du logarithme de cette quantité. Ainsi on conçoit que, pour un signal  $s_i$  de type passe-bas, la multiplication de  $\ln |S|^2$  par une fenêtre paire  $w$ , permet de favoriser le domaine fréquentiel dans lequel la variance est la plus faible. A contrario, s'il s'agissait d'un signal de type passe-haut, il faudrait utiliser une fenêtre causale. D'une manière générale, l'utilisation de la fenêtre  $w$  de transformée de Fourier  $W$  conduit au résultat suivant :

$$\tilde{s} = \text{TF} [w \cdot \ln |S|^2] = W * \text{TF} [\ln |S|^2] \quad (15)$$

les figures 3 donnent une illustration de ce que nous venons de dire. La figure 3 a représente quatre impulsions et leurs versions décalées. A ce signal est ajouté un bruit blanc (fig. 3 b). La figure 3 c représente le cepstre d'énergie évalué d'après la définition (8), et la figure 3 d le résultat obtenu en utilisant une fenêtre de Blackman paire, de largeur 1 en la fréquence  $u$ .

Il apparaît que les raisons qui conduisent à l'utilisation d'une fenêtre  $w$  sont en fait étrangères au problème classique de l'estimation spectrale. De ce fait le choix de  $w$  peut ne pas se limiter aux fenêtres généralement employées dans ce domaine : une fenêtre, appelée CEPHAG, a spécialement été développée pour le calcul du cepstre d'énergie [13].

Comme nous l'avons déjà signalé, les images de VIP peuvent présenter un biais dû au gradient de vitesse. Un

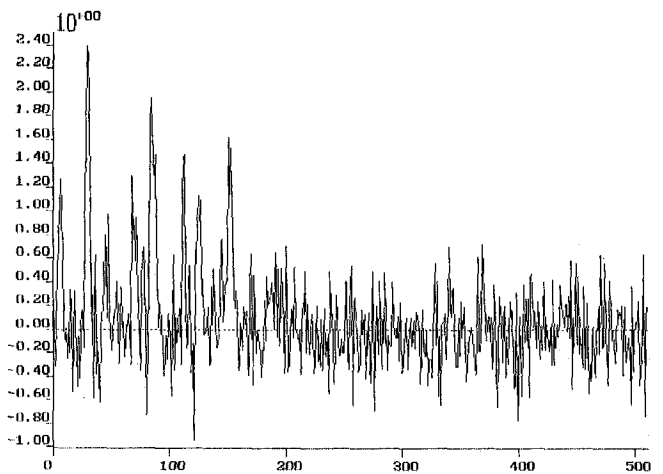


Figure 3 b. — Même chose qu'en figure 3 a mais en présence d'un bruit blanc d'écart type 0,25.

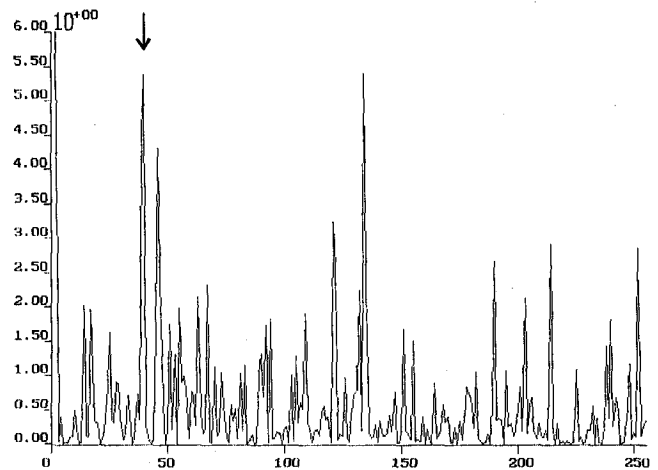


Figure 3 c. — Cepstre du signal de la figure 3 b (définition 8). La flèche indique le premier pic dû à l'écho.

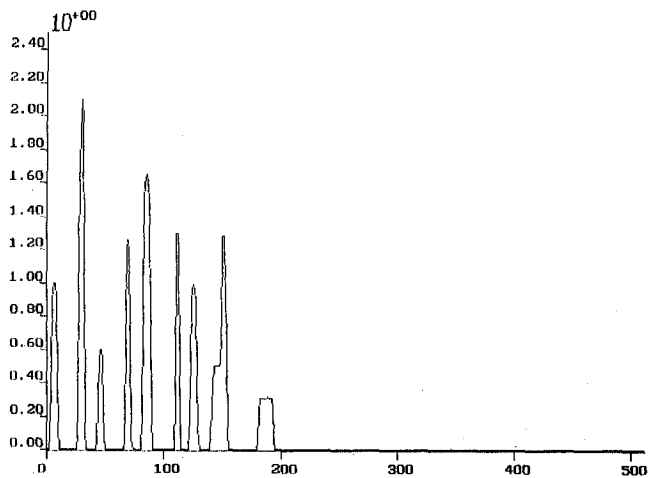


Figure 3 a. — Quatre impulsions d'amplitudes allant de 0,5 à 1,7, et leurs versions décalées de 40 échantillons et affaiblies d'un facteur 0,6.

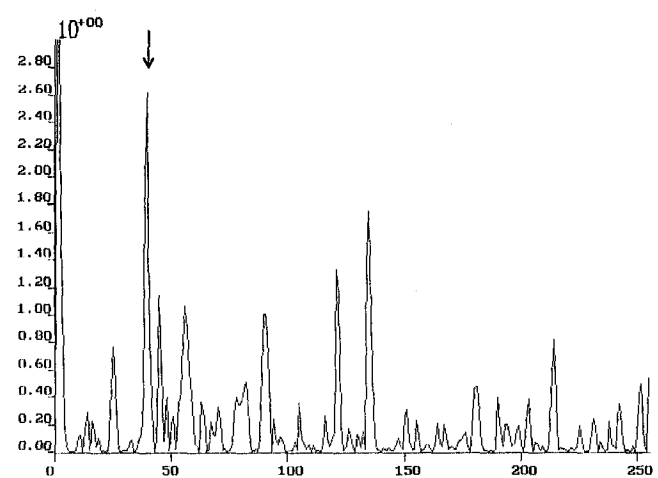


Figure 3 d. — Cepstre du signal de la figure 3 a comprenant l'utilisation d'une fenêtre de Blackman paire, de largeur unité en  $u$ .

tel gradient induit une distribution  $g$  des décalages dans l'image étudiée, non identique à la distribution de Dirac. Dans la modélisation (3), en notant  $e$  le terme d'écho :

$$e = \delta + g * \delta_a \quad (16)$$

le signal étudié  $s$  s'écrit :

$$s = s_i * e \quad (17)$$

et son cepstre complexe :

$$\hat{s} = \hat{s}_i + \hat{e}. \quad (18)$$

Si le gain de l'écho est inférieur ou égal à 1, le cepstre complexe du terme d'écho est :

$$\begin{aligned} \hat{e} &= \text{TF}^{-1} [\text{Inc} (1 + G \cdot e^{-i2\pi ua})] = \\ &= \text{TF}^{-1} \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} G^n e^{-i2\pi nua} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

soit encore :

$$\hat{e} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot g^{*n} * \delta_{na} \quad (20)$$

où  $g^{*n}$  désigne le produit de convolution de  $g$  par lui-même  $n$  fois. Puisque la norme de  $G$  reste inférieure ou égale à l'unité, l'argument de la transformée de  $e$  varie entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ . En conséquence, nous pouvons utiliser la relation (13). Le terme d'écho a donc pour cepstre d'énergie :

$$\tilde{e} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{2|n|} \cdot g^{*n} * \delta_{na}. \quad (21)$$

Le pic du cepstre  $\tilde{e}$  du terme d'écho, obtenu pour  $n = 1$ , est donc constitué de la distribution  $g$  elle-même translatée en  $a$ . Pour illustrer ceci, nous avons représenté sur la figure 4 a un terme d'écho de gain unité et distribué

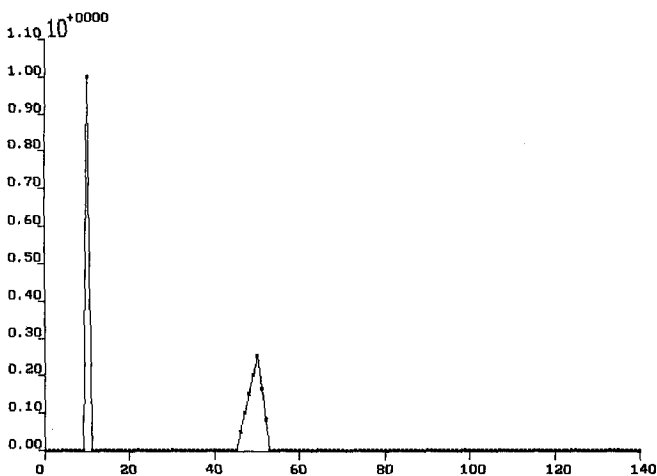


Figure 4 a. — terme d'écho dégradé par une distribution triangulaire asymétrique de surface unité.

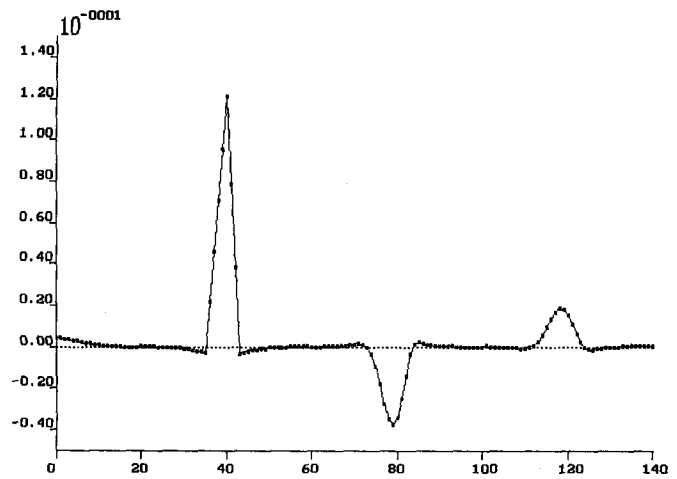


Figure 4 b. — Cepstre d'énergie de l'écho de la figure 4 a (définition 11).

selon un triangle asymétrique. La figure 4 b représente le cepstre d'énergie correspondant à la définition (11). L'ondulation visible sur cette figure est en fait le résultat du recouvrement dû aux pics éloignés et élargis après de nombreuses convolutions.

L'étude précédente montre que la résolution (largeur à mi-hauteur des pics d'écho) du cepstre d'énergie est essentiellement liée d'une part à la largeur de la distribution des décalages et d'autre part à l'emploi éventuel d'une fenêtre  $w$ . Précisons que cette résolution ne dépend pas de la taille des particules ce qui n'est pas le cas de l'autocorrélation pour laquelle la résolution correspond à leur taille moyenne.

### 3. Étude de cas types de vélocimétrie par images de particules

Le but de l'exploitation des images de VIP est de mesurer la vitesse des particules multi-exposées présentes dans des fenêtres recouvrant l'image étudiée. Chacune de ces fenêtres est choisie suffisamment petite pour permettre une mesure locale (le biais de gradient est alors faible) et suffisamment grande pour avoir un biais de détection convenable. Chaque fenêtre est alors le support du signal  $s$  caractérisé par un décalage «  $a$  » proportionnel à la vitesse des particules. Numériquement et en cas de forte concentration de particules, cette exploitation est souvent réalisée en calculant la fonction d'autocorrélation  $C_{ss}$  du signal  $s$  (toujours définie car  $s$  est d'énergie fini). Le décalage «  $a$  » est alors associé à la position de l'un des pics secondaires de cette fonction, qui mesure en effet la similitude entre le signal  $s$  et son translaté de «  $a$  ».

La figure 5 a est une fenêtre extraite d'un champ multi-exposé de particules se déplaçant le long d'un pare-brise d'automobile. Nous avons calculé la fonction d'autocorrélation (fig. 5 b) et le cepstre d'énergie (fig. 5 c) de cette

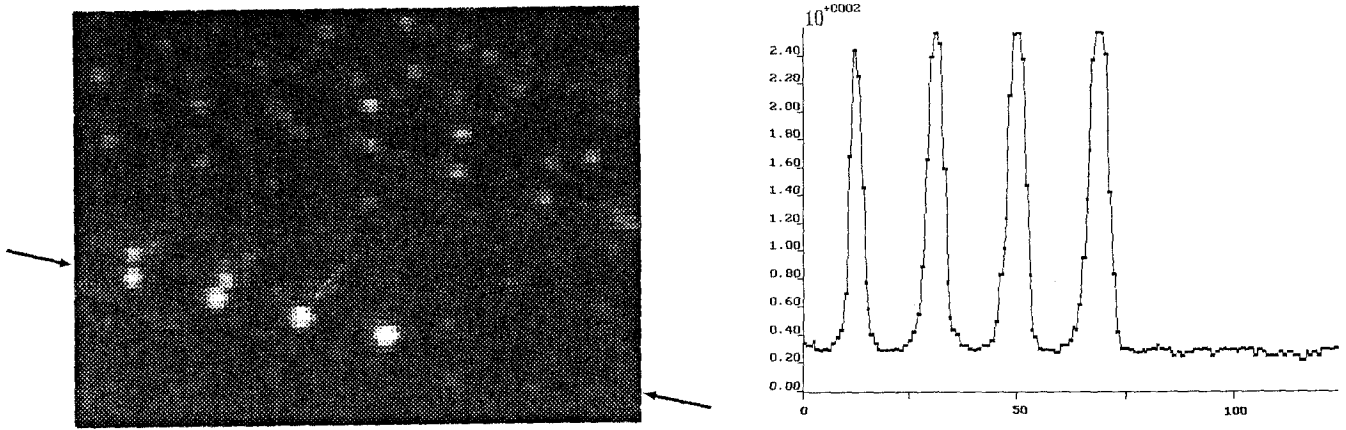


Figure 5 a. — Fenêtre d'étude (quatre expositions).

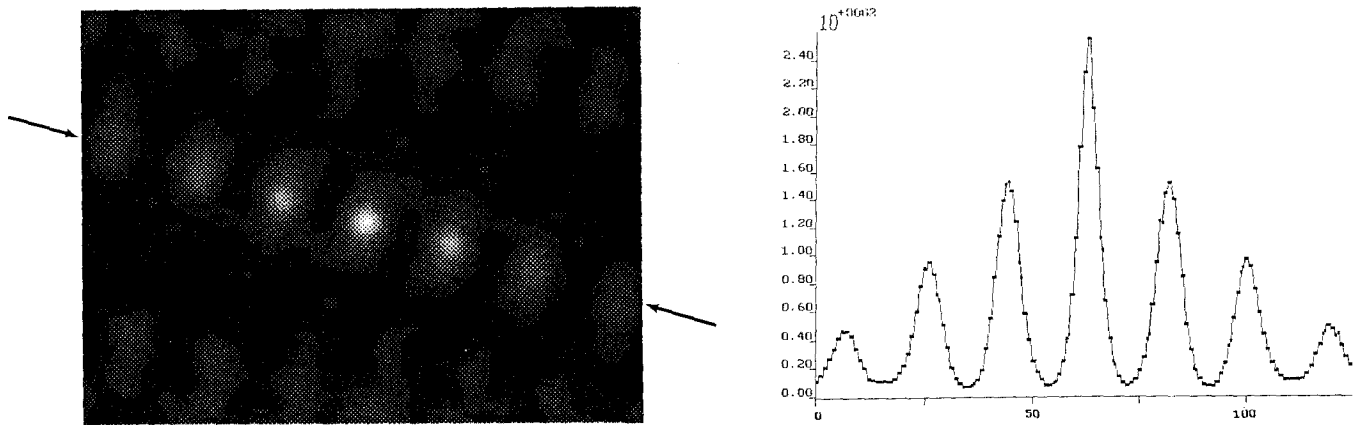


Figure 5 b. — Fonction d'autocorrélation du signal de la figure 5 a.

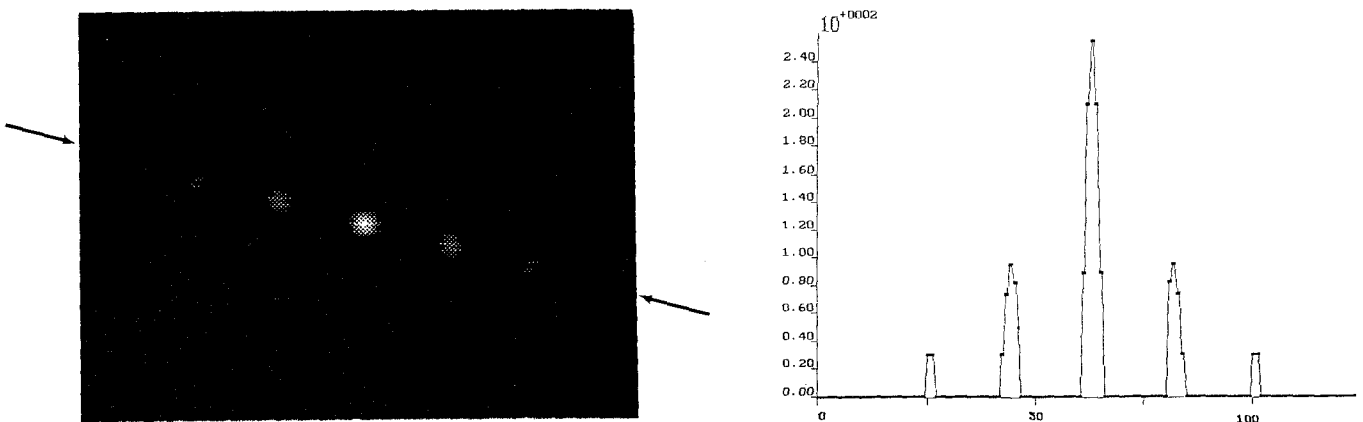


Figure 5 c. — Cepstre d'énergie du signal de la figure 5 a.



fenêtre. Nous pouvons observer que les pics secondaires de ces deux fonctions conduisent au module et à la direction du déplacement dans la fenêtre. Nous pouvons également constater que le cepstre présente une résolution meilleure que celle de l'autocorrélation.

Parce que ces deux méthodes nécessitent des temps de calcul comparables, confrontons les maintenant de manière plus large. Cinq exemples types de VIP viendront confirmer la conclusion précédente. Ils auront par ailleurs le mérite de montrer que la méthode du cepstre demeure opérationnelle dans un plus grand nombre de cas.

Les trois premiers exemples sont synthétiques. Sur la figure 6 a, le signal initial  $s_i$ , binaire, est un ensemble d'ellipses, d'excentricités différentes, traduité une fois. Seul le cepstre d'énergie (fig. 6 c) permet la mesure du déplacement réel. Les formes initiales étant conservées à la seconde exposition (dégradation nulle), l'écho est idéal et le décalage est alors parfaitement mesuré par le cepstre. La fonction d'autocorrélation (fig. 6 b), elle, est sensible au recouvrement.

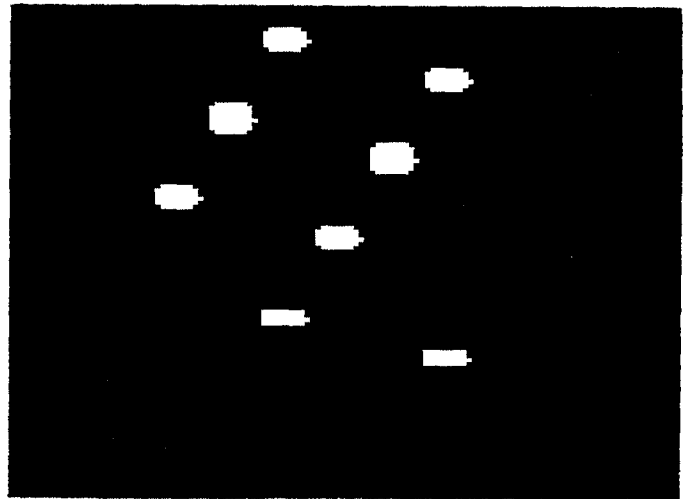


Figure 6 a. — Double exposition d'objets binaires elliptiques.

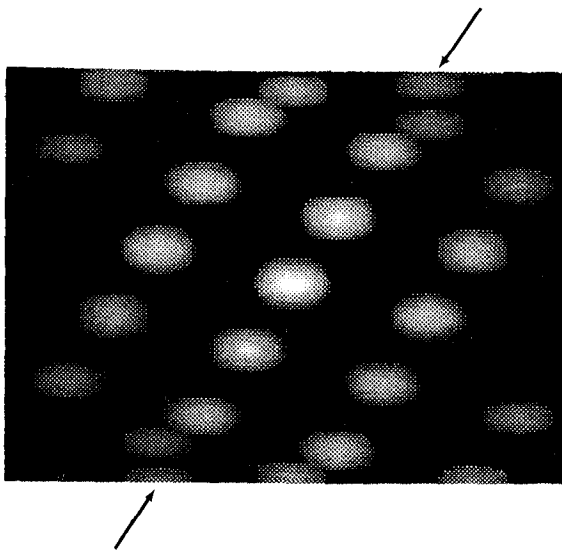


Figure 6 b. — Fonction d'autocorrélation du signal de la figure 6 a.

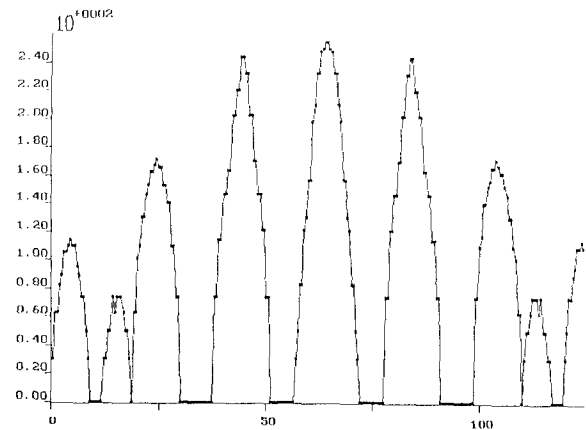
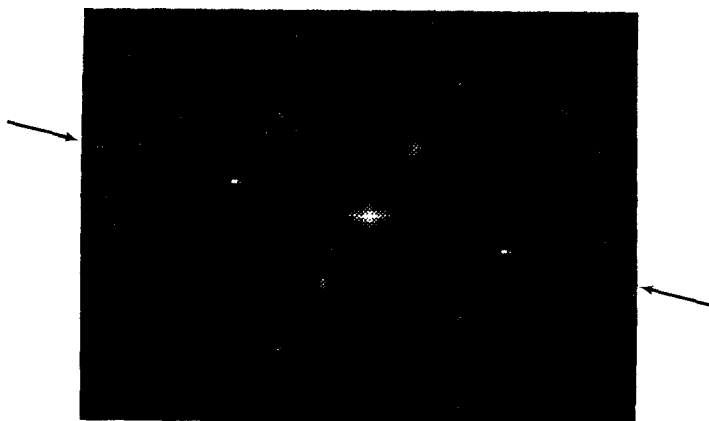


Figure 6 c. — Cepstre d'énergie du signal de la figure 6 a.



Il est donc très facile de trouver une disposition d'objets  $s_t$  provoquant des pics secondaires dans une direction qui n'est pas celle du déplacement.

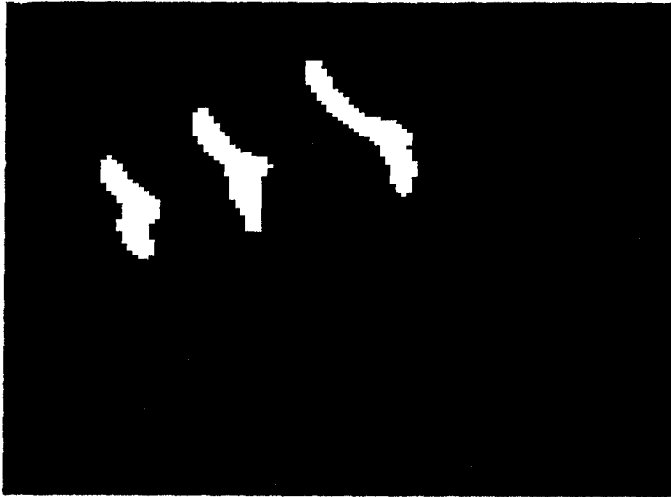


Figure 7 a. — Triple exposition d'une forme binaire, déformée dans le temps.

La figure 7 a présente une forme connexe binaire, trois fois exposée et déformée dans le temps. L'autocorrélation (fig. 7 b), comme le cepstre d'énergie (fig. 7 c), nous donne le déplacement (au sens près). Cependant, le rapport de l'amplitude des pics secondaires sur celle du pic central est plus important pour l'autocorrélation que pour le cepstre. En fait, la forme a subi une dégradation importante qui dessert la fidélité de l'écho à laquelle le cepstre est sensible.

Dans le troisième cas (fig. 8 a), nous considérons un objet de taille supérieure au décalage qu'il subit. Le pic central et les pics secondaires de la fonction d'autocorrélation (fig. 8 b) ne sont pas résolus, alors que l'exploitation du cepstre d'énergie (fig. 8 c) ne présente aucune ambiguïté.

Les quatrième et cinquième exemples sont extraits de situations physiques réelles. Dans le quatrième cas (fig. 9 a), une perturbation non soumise au décalage est présente dans la fenêtre étudiée. Cette perturbation est de taille supérieure au décalage, la fonction d'autocorrélation (fig. 9 b) exhibe alors le même inconvénient que précédemment puisque sa résolution est directement liée à la taille des objets considérés.

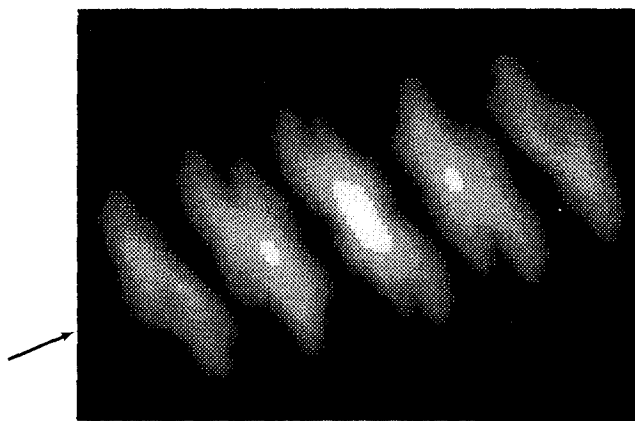


Figure 7 b. — Fonction d'autocorrélation du signal de la figure 7 a.

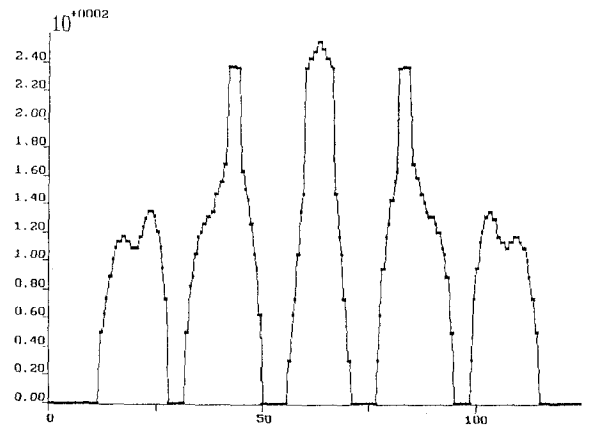


Figure 7 c. — Cepstre d'énergie du signal de la figure 7 a.

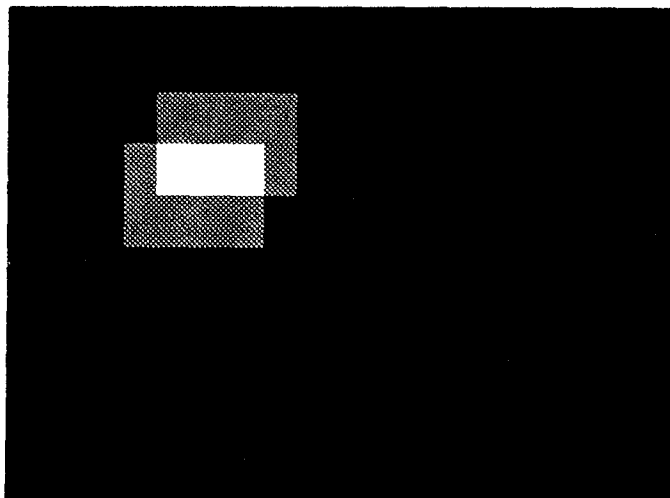


Figure 8 a. — Double exposition d'un objet de taille importante. ►

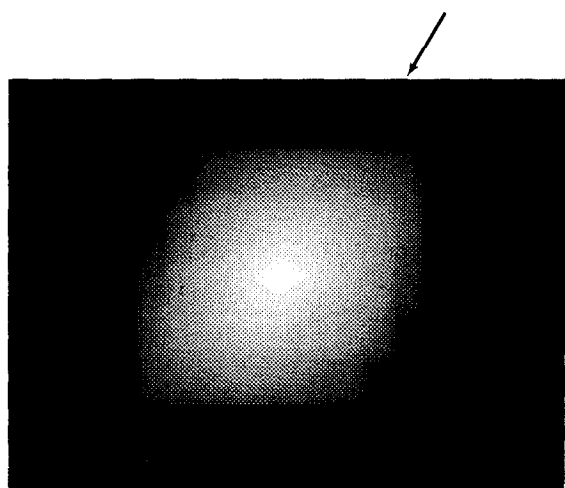


Figure 8 b. — Fonction d'autocorrélation du signal de la figure 8 a.

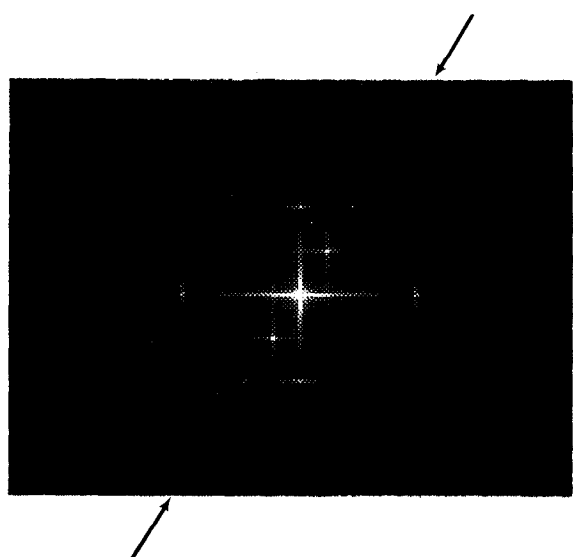
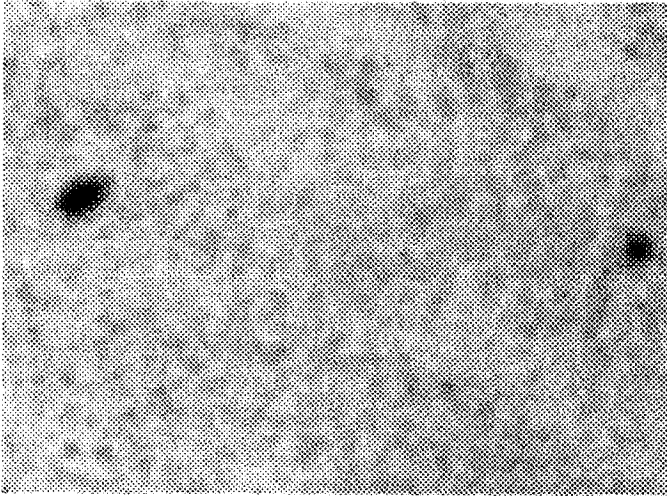


Figure 8 c. — Cepstre d'énergie du signal de la figure 8 a.



◀ Figure 9 a. — Triple exposition avec une perturbation de grande taille.

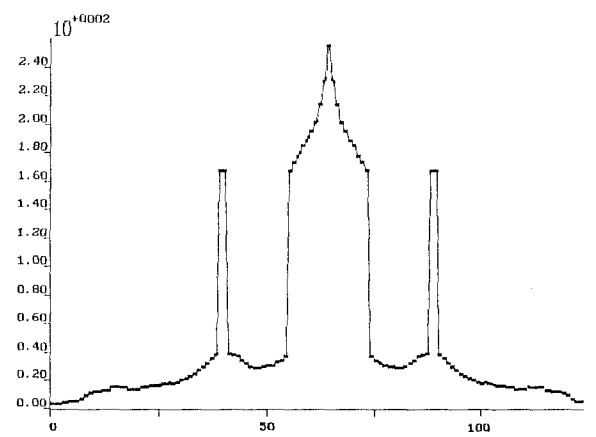
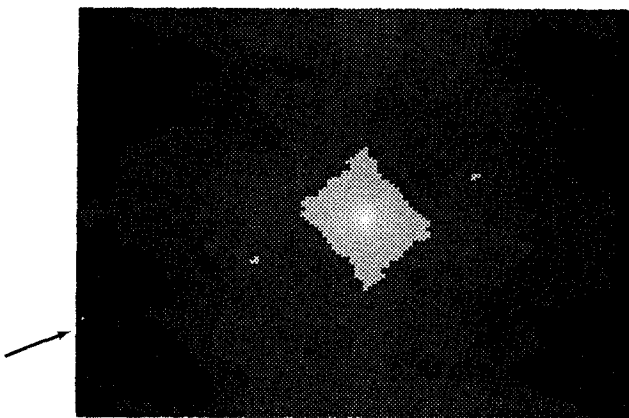


Figure 9 b. — Fonction d'autocorrélation du signal de la figure 9 a.

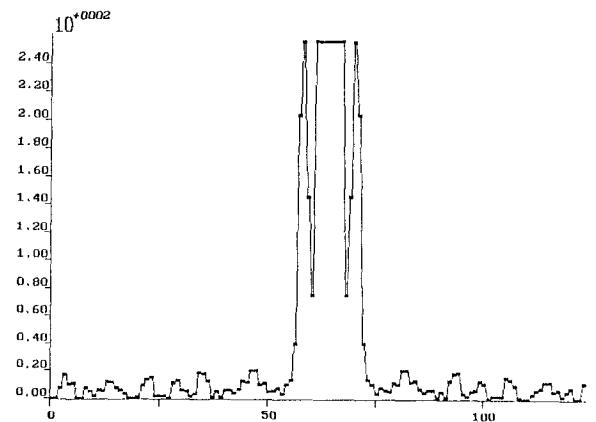


Figure 9 c. — Cepstre d'énergie du signal de la figure 9 a.

Le cinquième exemple est une image bruitée (fig. 10 a). La fonction d'autocorrélation (fig. 10 b), indique le déplacement réel des particules. Le cepstre d'énergie (fig. 10 c) est mis en défaut.

Cependant il existe dans ce cepstre, un couple de pics correspondant au déplacement réel, mais 1,37 fois plus faible que le couple de pics secondaires dus au bruit.

Sur la figure 10 d, le cepstre a été recalculé en intercalant la multiplication par une fenêtre de Blackman, le rapport du pic d'écho sur le premier pic de bruit est 1,03, le cepstre dû au déplacement réel redevient prépondérant. Sur la figure 10 e, le même calcul a été fait avec une fenêtre beaucoup plus étroite, le rapport cepstre sur bruit est encore amélioré (1,32), conformément à ce qui a été dit au paragraphe 2.2.

## 4. Conclusion

Nous avons montré que le cepstre d'énergie se révèle un outil efficace pour la vélocimétrie par images de particules. Parmi les différentes manières d'appréhender le cepstre, nous avons préféré l'approche originelle de Bogert *et al.* pour sa souplesse. Nous avons montré que la contribution de l'écho par rapport à celle du signal initial dans le cepstre est augmentée par l'utilisation d'une fenêtre. Dans le contexte de la VIP, cette fenêtre doit nécessairement être paire puisque l'image d'une particule est un signal de type passe-bas. Nous vérifions également qu'elle permet d'améliorer le rapport cepstre sur bruit. Les quelques exemples traités correspondent tous à des situations expérimentales typiques, et tendent à montrer que le cepstre d'énergie est un outil plus opérationnel que l'autocorrélation, spécialement lorsque les décalages sont inférieurs ou de l'ordre de la taille des particules.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. J. MAREY, 1893. Cf. Rebuffet, *Aérodynamique expérimentale*, tome 1, 3<sup>e</sup> éd., Éd. Dunod, 1969.
- [2] R. MEYNART, *Mesures de champs de vitesse d'écoulements fluides par analyse de suites d'images obtenues par diffusion d'un feuillet lumineux*, thèse, Université Libre de Bruxelles, 1983.
- [3] J. P. SCHON, F. DANIEL, J. P. MELINAND, C. REY, G. CHARNAY, Measurements of lagrangian velocities by mean of a rotating laser, *Sixth biennial, symposium on turbulence*. La Rolla, Missouri, 1979.
- [4] B. P. BOGERT, M. J. R. HEALY, J. W. TUKEY. The frequency analysis of time series for echoes : cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum and saphe cracking, *Proc. Symp. Time series Analysis*, M. Rosenblatt (ed.), New York, Wiley, 1963, pp. 209-243.
- [5] B. D. VAN VEEN, J. C. ROGERS, Measurements of acoustic reflection coefficients using the power cepstrum, *IEEE Trans. Instrum. and Meas.*, vol. IM-35, n° 1, pp. 24-30, 1986.
- [6] M. GRABISCH, J. C. BALLUET, Identification method in echo situation by power cepstrum, *Trait. Signal*, vol. 2, n° 1, pp. 11-27, 1985.
- [7] R. B. RANDALL, The applications of cepstrum analysis to the diagnosis of machine sound and vibration signals, *Vibration and Noise Control engineering*, Sydney, Australia, 1976.
- [8] DAH JYE LEE, S. MITRA, T. F. KRILE, Power cepstrum in registration of noisy images, *Electronic Imaging' 88*, Boston, MA, USA, 1988.
- [9] R. D. KEANE R. J. ADRIAN, Optimization of particle image velocimeters. Part. I : Double pulse systems, *Meas. Sci. technol.*, 1, 1202-1215, 1990.
- [10] F. PRABEL, *Étude de la structure turbulente d'un jet rond par des méthodes d'analyse d'images*, thèse École Centrale Lyon, 1985.
- [11] A. V. OPPENHEIM, *Superposition in a class of non linear systems*, Techn. Rept. 432, Research Laboratory of Electronics, MIT, Cambridge, Mass., March 1965.
- [12] R. KASTURI, M. M. TRIVEDI (Edited by -), *Image analysis applications*, M. Dekkor Inc., New York, pp. 216, 1990.
- [13] J. C. BALLUET, J. L. LACOUME, D. BAUDOIS, Séparation de deux échos rapprochés par le cepstre d'énergie, *Ann. Télécommun.*, vol. 36, n° 7-8, pp. 439-456, 1981.



Figure 10 a. — Image bruitée quatre fois exposée 128 x 128. ►

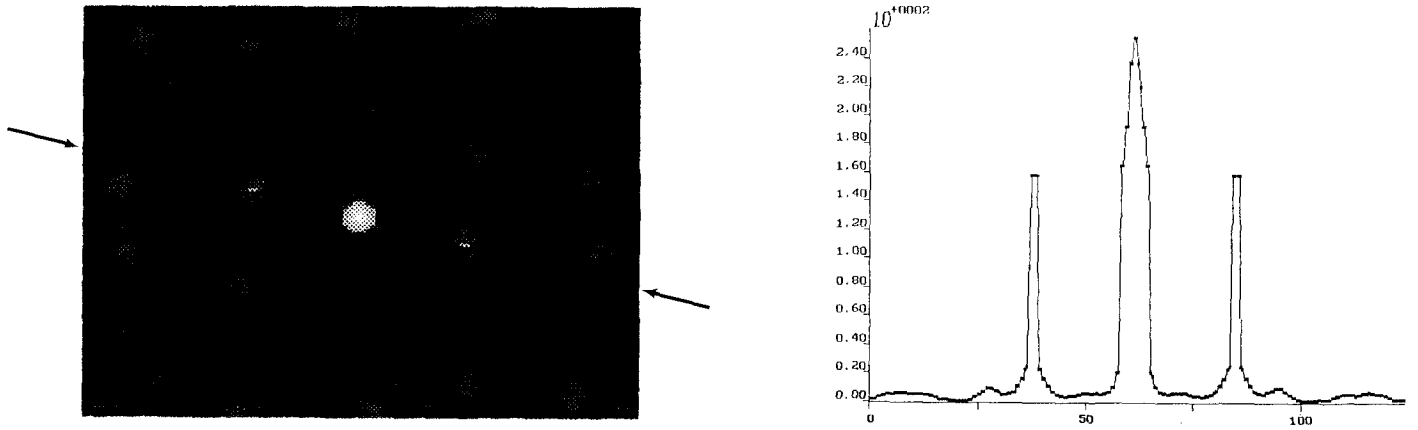


Figure 10 b. — Fonction d'autocorrélation du signal de la figure 10 a.

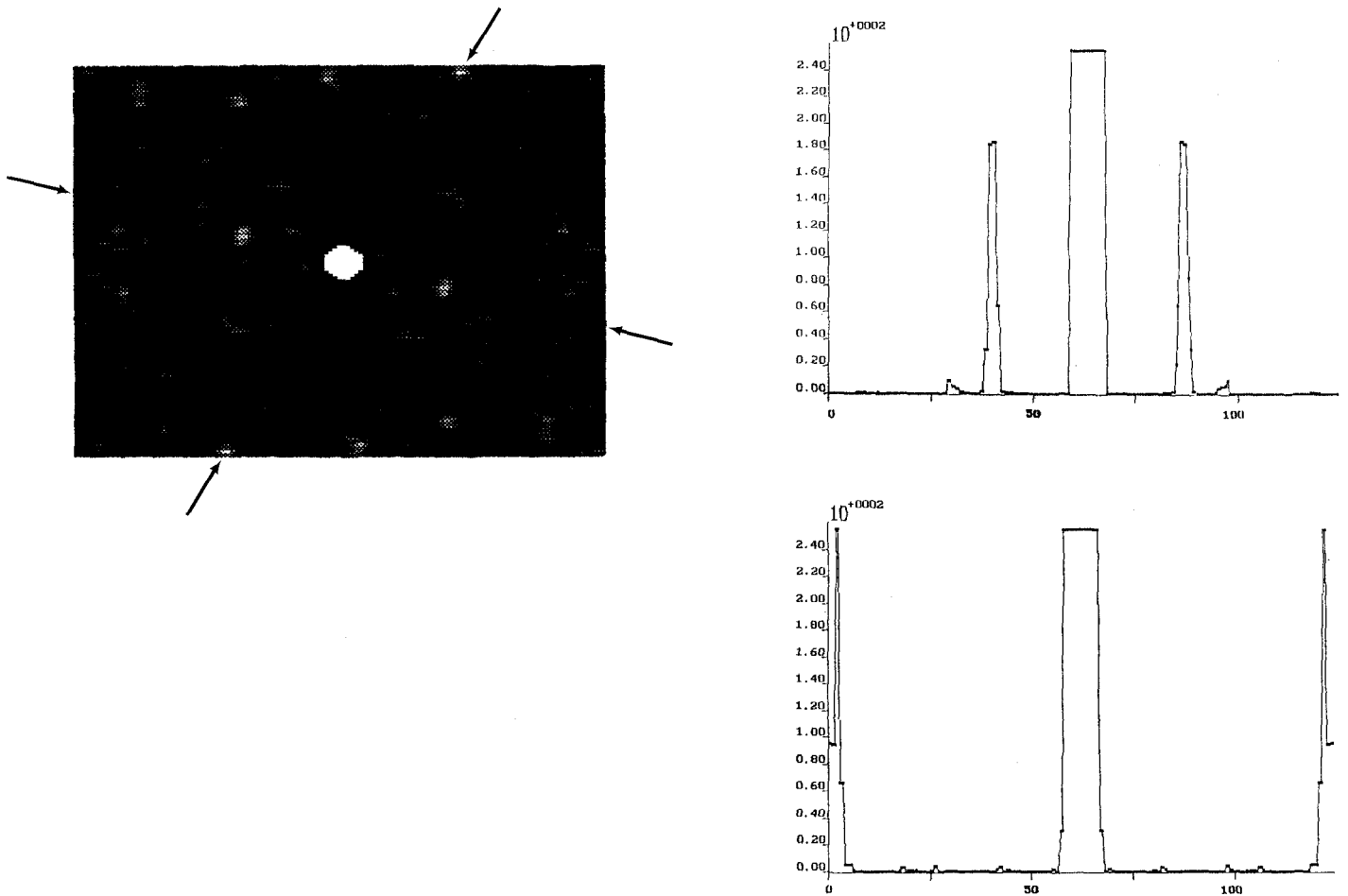


Figure 10 c. — Cepstre d'énergie du signal de la figure 10 a.

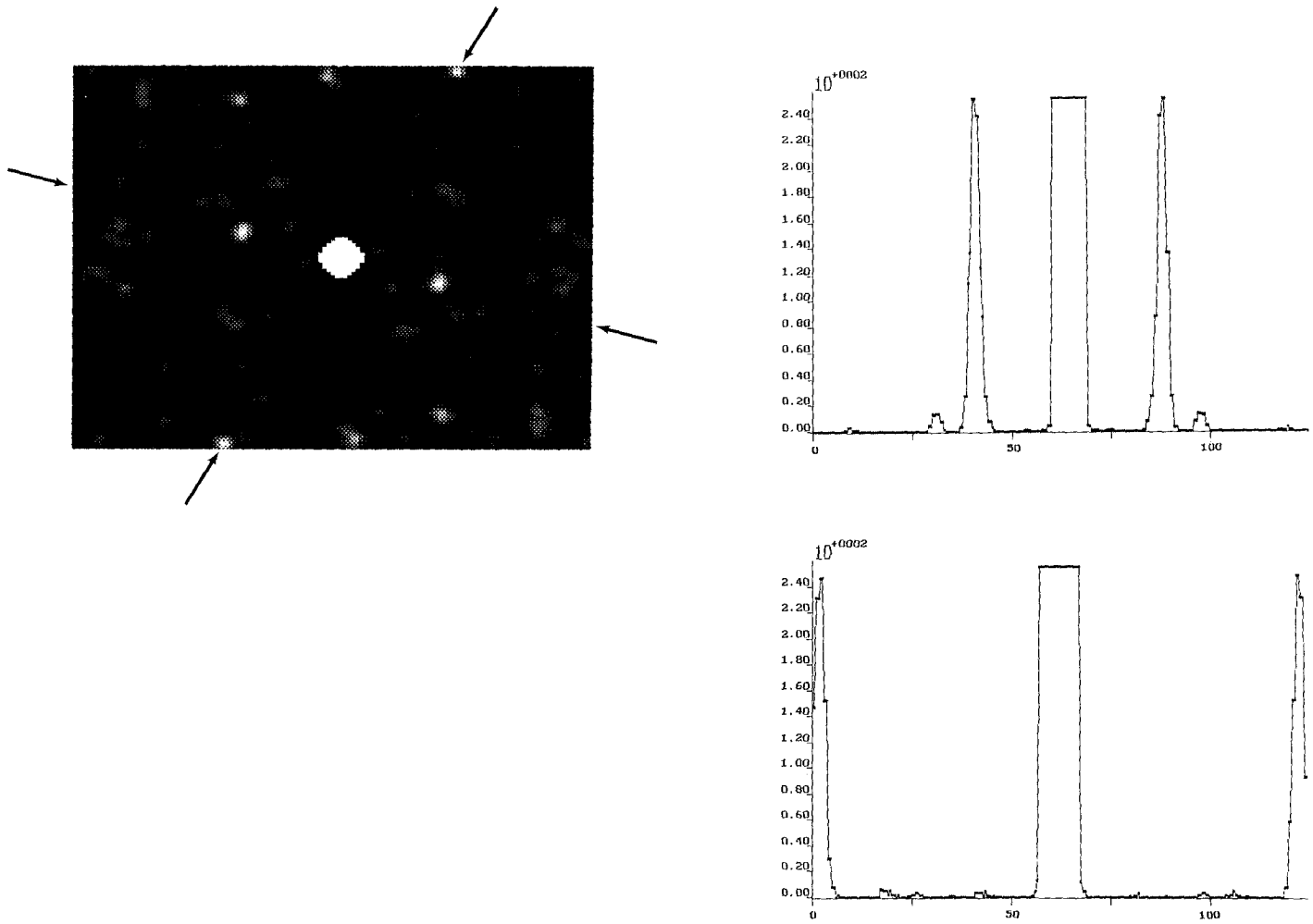


Figure 10 d. — Cepstre doté d'une fenêtre de Blackman de taille 128 du signal de la figure 10 a.

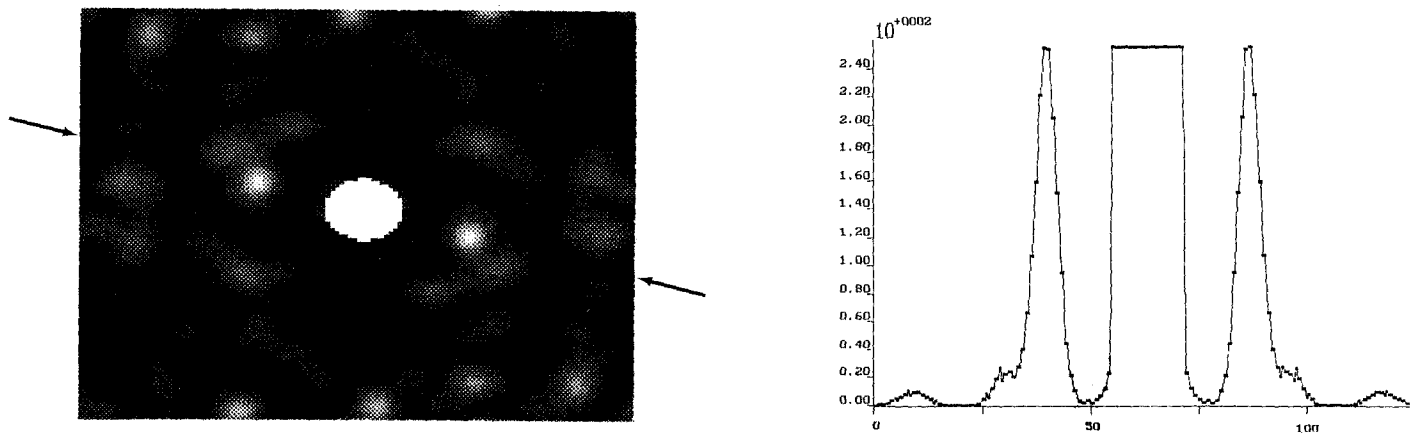


Figure 10 e. — Cepstre doté d'une fenêtre de Blackman de taille 40 du signal de la figure 10 a.