

Étude du spectrofiltre adaptatif multivariable avec facteur d'oubli

Study of the multivariable adaptive spectrofilter with forgetting factor



Jean-François GUERRE-CHALEY
CEPHAG/ENSIEG, BP n° 46, 38402 Saint-
Martin-d'Hères Cedex

Diplôme d'ingénieur de l'INPG-ENSIEG (section automatique 1988).
Thèse de doctorat en automatique et traitement du signal de l'INPG
(1990). Moniteur de l'enseignement supérieur à l'INPG pour l'année
1989-1990. Activités de recherche en soustraction de bruit adaptative
multiréférences au sein du laboratoire CEPHAG.



Daniel BAUDOIS
Centre d'Étude des Phénomènes
Aléatoires et Géophysiques (CEPHAG),
BP n° 46, 38402 Saint-Martin-d'Hères

Ingénieur électricien, diplômé de l'École Nationale Supérieure des
Ingénieurs Électriciens de Grenoble (1970), est Maître de Conférences
à l'ENSIEG (Institut National Polytechnique de Grenoble). Il anime au
CEPHAG un groupe de recherche concernant la réduction de bruit à
l'aide d'algorithmes adaptatifs.

RÉSUMÉ

Après avoir rappelé brièvement le principe de la soustraction de bruit avec références bruit seul, nous analysons l'influence des erreurs d'estimation des différentes composantes du filtre, sur une fenêtre d'intégration de longueur équivalente finie, lorsqu'un facteur d'oubli est employé. Ce dernier est nécessaire pour le traitement de la plupart des signaux réels. La puissance d'erreur en sortie de traitement est exprimée en fonction des différents paramètres et, nous montrons que le rapport signal à bruit en sortie de traitement est uniquement fonction de la valeur du facteur d'oubli (c'est-à-dire de la longueur équivalente de la fenêtre

d'intégration) et du nombre de références-bruit utilisées. Nous déterminons ceci théoriquement et le vérifions par des simulations dont nous présentons les résultats. Le problème de l'efficacité du traitement est abordée et, nous fournissons des critères de sélection des références-bruit.

MOTS-CLÉS

Estimation adaptative multivariable, filtrage de Wiener, soustraction de bruit.

SUMMARY

After a brief survey of noise cancelling using the noise references principle, we analyse the influence of estimation errors, of the various filter components, when a finite integration window equivalent length is used, with a forgetting factor. This one is needful to most real processings. The error power is expressed according to the various parameters. Then we observe that the output signal to noise ratio is solely fonction of the forgetting factor value (length of the integration window) and the number

of the noise references used. We settle this theoretically and we verify our results with simulations. The efficiency of the process is considered and we provide noise references selection criteria.

KEY WORDS

Multivariable adaptive estimation, Wiener filtering, noise cancelling.

1. Introduction

Généralement le signal utile, porteur de l'information, est modélisé comme étant additivement perturbé. Il s'agit, alors, de mettre en œuvre un traitement afin d'éliminer au mieux le bruit perturbateur. L'utilisateur peut parfois acquérir un signal lié à la source de bruit que l'on nomme référence-bruit seul, qui peut être scalaire ou vectorielle. Nous admettons que cette référence-bruit est indépendante du signal utile, mais elle doit être cohérente avec le bruit perturbateur. La soustraction de bruit consiste à identifier, puis à reconstruire, un filtre qui, excité par cette référence-bruit, fournit une estimation du bruit perturbateur. Cette estimation retranchée au signal bruité procure une estimation du signal utile [1].

Les canaux de transmission font subir aux signaux des transformations que l'on peut modéliser par des filtrages qui ne sont pas forcément linéaires. Les méthodes classiques consistent à chercher l'estimateur de ces filtres dans la classe des filtres linéaires.

Une technique particulière d'estimation consiste à reconstituer le filtre dans le domaine fréquentiel à l'aide d'un algorithme nommé spectrofiltre [2], [3], [4]. Il s'agit d'un algorithme adaptatif non bouclé qui est la mise en place canonique de la solution de Wiener [5], relative au critère d'erreur quadratique moyenne minimale, en remplaçant dans son expression les différentes composantes par leurs estimées. Les estimations sont réalisées sur des temps d'intégration finis selon diverses techniques de moyennage et de lissage [6]. On est conduit à mettre en place des estimateurs récursifs. Les signaux réels qui sont amenés à être traités sont rarement stationnaires. Il faut par exemple s'adapter à des dérives en fréquence ou des variations du canal de transmission. Lorsque ces non-stationnarités sont lentes, les algorithmes basés sur la stationnarité des signaux donnent de bons résultats avec l'utilisation d'un facteur d'oubli. Dans cet article, nous nous proposons d'étudier le spectrofiltre adaptatif multivariable avec facteur d'oubli. Cette étude débute par une étude de la puissance d'erreur d'estimation, à partir de laquelle nous analysons le rapport signal à bruit en sortie, l'influence du nombre de références employées et l'efficacité du traitement. Le résultat théorique principal sera ensuite validé par des simulations. Les divers résultats déjà publiés dans la littérature ouverte seront cités.

Cette étude sera conduite en supposant que les différents signaux sont stationnaires au second ordre, ou du moins sur la fenêtre d'intégration équivalente du spectrofiltre avec facteur d'oubli.

2. Modélisation

En préambule nous présentons les différentes notations qui seront utilisées par la suite. Un symbole souligné deux fois représente une matrice, souligné une fois un vecteur et, non souligné un scalaire. Pour une variable \underline{X} scalaire, vectorielle ou matricielle, nous noterons :

\underline{X}^T la transposée de \underline{X}

\underline{X}^* la conjuguée de \underline{X}

\underline{X}^+ la transconjugée de \underline{X} ($\underline{X}^+ = \underline{X}^{T*}$)

L'algorithme du spectrofiltre est élaboré dans la représentation fréquentielle des signaux. Les signaux utilisés par l'algorithme sont discrets, issus des Transformées de Fourier Rapides (TFR) des signaux à temps discret enregistrés (ou d'une nature physique différente, telle que spatiale). De façon générale $\underline{X}_k(\nu)$ représente le résultat de la TFR du bloc de rang k du signal à temps discret $x(i)$, pour la fréquence discrète ν , et par abus de langage nous dirons à l'instant k .

Le signal utile recherché $S_k(\nu)$, à la fréquence ν et au temps k , est additivement perturbé par un bruit $N_k(\nu)$ et, le signal observé $Y_k(\nu)$ est la somme de ces deux termes :

$$(1) \quad Y_k(\nu) = S_k(\nu) + N_k(\nu).$$

L'utilisateur dispose de n références-bruit scalaires, respectivement $R_{1k}(\nu)$, $R_{2k}(\nu)$... $R_{nk}(\nu)$, indépendantes du signal utile $S_k(\nu)$ et qui sont notées sous forme vectorielle :

$$\underline{R}_k(\nu) \triangleq [R_{1k}(\nu) R_{2k}(\nu) \dots R_{nk}(\nu)]^T.$$

Nous appelons $Z_k(\nu)$ l'éventuelle composante du bruit $N_k(\nu)$ non cohérente avec $\underline{R}_k(\nu)$ et, $B_k(\nu)$ la composante de $N_k(\nu)$ totalement cohérente avec $\underline{R}_k(\nu)$. Lorsque la dépendance entre la référence-bruit $\underline{R}_k(\nu)$ et le bruit $B_k(\nu)$ est linéaire, elle peut être modélisée à l'aide d'un filtre $\underline{G}(\nu)$ qui engendre $B_k(\nu)$ à partir de $\underline{R}_k(\nu)$ (fig. 1).

$$(2) \quad N_k(\nu) = Z_k(\nu) + B_k(\nu)$$

$$(3) \quad B_k(\nu) = \underline{G}^T(\nu) \underline{R}_k(\nu)$$

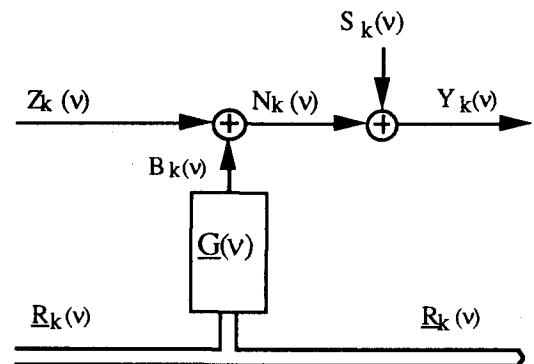


Figure 1. — Modélisation fréquentielle des différents signaux.

Le fait de n'envisager qu'une seule voie signal $Y_k(\nu)$ n'est pas restrictif. En effet, dans le cas de plusieurs voies bruitées, il convient de paralléliser les traitements.

On suppose que tous les signaux sont centrés et suivent une loi normale complexe. Cette hypothèse intervient pour le calcul de moments d'ordre 4 et trouve sa justification dans les propriétés de la TFR [7] lorsque la longueur (ou ordre) des blocs sur lesquels sont réalisées les TFR est suffisamment importante [8].

Les signaux S , \underline{R} et Z sont supposés indépendants, ce qui

est vérifié en pratique. Ces hypothèses entraînent les propriétés suivantes :

- (4) $E[Z_k(\nu)] = E[S_k(\nu)] = 0$ pour tout k
 (5) $E[R_k(\nu)] = \underline{0}$ pour tout k où $\underline{0} \triangleq [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$
 (6) $E[Z_{k1}^*(\nu) R_{k2}(\nu)] = E[Z_{k1}^*(\nu)] E[R_{k2}(\nu)] = 0$

pour tout $k1, k2$

- (7) $E[S_{k2}^*(\nu) R_{k1}(\nu)] = E[S_{k2}^*(\nu)] E[R_{k1}(\nu)] = 0$
 pour tout $k1, k2$

- (8) $E[S_{k1}^*(\nu) Z_{k2}(\nu)] = E[S_{k1}^*(\nu)] E[Z_{k2}(\nu)] = 0$
 pour tout $k1, k2$

où $E[X]$ est l'espérance mathématique de X .

Enfin on suppose que les signaux fréquentiels de rangs différents sont indépendants entre eux, à savoir :

- (9) $E[U_{k1}(\nu) V_{k2}^+(\nu)] = \gamma_{UV}(\nu) \delta_{k1-k2}$

où δ_θ représente le symbole de Kroenecker (égal à 1 si $\theta = 0$, nul sinon) ;

et où $\gamma_{UV}(\nu)$ représente la densité spectrale de puissance d'interaction du signal U avec le signal V , à la fréquence ν .

Cette hypothèse est admissible lorsque la longueur des blocs temporels sur lesquels sont effectués les TFR est grande vis-à-vis du support de corrélation des signaux.

3. Algorithme spectrofiltre adaptatif

L'algorithme du spectrofiltre traite chaque canal de fréquence indépendamment des autres, en utilisant les propriétés de décorrélation de la TFR lorsque son ordre est suffisant.

A partir des signaux d'entrée $Y_k(\nu)$ et $R_k(\nu)$ nous cherchons à estimer $B_k(\nu)$ en filtrant $R_k(\nu)$ à l'aide d'un filtre $\hat{G}(\nu)$ appartenant à la classe des transformations linéaires, qui est un estimateur de $G(\nu)$ quand ce dernier est linéaire. Ensuite l'estimée $\hat{B}_k(\nu)$ du bruit $B_k(\nu)$ est retranchée au signal bruité $Y_k(\nu)$ pour fournir une estimation $\hat{S}_k(\nu)$ du signal utile $S_k(\nu)$.

Pour chaque canal de fréquence ν nous avons le schéma de soustraction suivant, figure 2 :

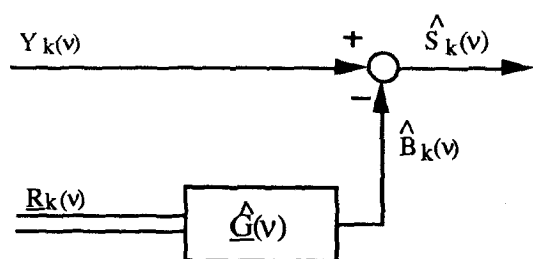


Figure 2. — Soustraction de bruit dans le domaine fréquentiel.

$$(10) \quad \hat{B}_k(\nu) = \hat{G}^T(\nu) R_k(\nu)$$

$$(11) \quad \hat{S}_k(\nu) = Y_k(\nu) - \hat{B}_k(\nu)$$

L'expression $\hat{G}(\nu)$ du gain est obtenue en minimisant l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) en sortie du traitement :

$$EQM_{\text{sortie}} = E[|(\hat{S}_k(\nu) - S_k(\nu))|^2]$$

On obtient alors classiquement la solution de Wiener [2], [5], dans le cas où $\det(\gamma_R(\nu)) \geq 0$ est non nul :

$$(12) \quad \hat{G}_{\text{opt}}^T(\nu) = \gamma_{RY}(\nu) \gamma_R^{-1}(\nu)$$

où $\gamma_R(\nu)$ représente la matrice interspectrale de la référence-bruit R , et $\gamma_{RY}(\nu)$ la matrice interspectrale entre la voie signal bruité Y et la référence-bruit R , à la fréquence ν :

$$(13) \quad \gamma_R(\nu) \triangleq E[R_k(\nu) R_k^+(\nu)]$$

$$(14) \quad \gamma_{RY}(\nu) \triangleq E[Y_k(\nu) R_k^+(\nu)]$$

Dans la mesure où chaque canal de fréquence est traité indépendamment des autres et, pour alléger les notations, nous n'utiliserons plus l'indice fréquentiel mais seulement l'indice de rang de blocs des signaux.

Il vient alors :

$$(15) \quad \hat{B}(k) = \hat{G}^T(k-1) R(k)$$

$$(16) \quad \hat{S}(k) = Y(k) - \hat{B}(k)$$

(estimation du bruit additif à partir de la référence-bruit et de l'estimation du filtre réactualisée grâce au traitement du bloc précédent).

L'estimation de \hat{G} à l'instant $k-1$ est obtenue en substituant aux valeurs vraies (12) les estimées obtenues par :

$$(17) \quad \hat{\gamma}_{RY}(k-1) = \alpha \hat{\gamma}_{RY}(k-2) + (1-\alpha) Y(k-1) R^+(k-1)$$

$$(18) \quad \hat{\gamma}_R(k-1) = \alpha \hat{\gamma}_R(k-2) + (1-\alpha) R(k-1) R^+(k-1)$$

$$(19) \quad \hat{G}^T(k-1) = \hat{\gamma}_{RY}(k-1) \hat{\gamma}_R^{-1}(k-1)$$

α représente le facteur d'oubli de l'algorithme. Le facteur $(1-\alpha)$ n'est pas nécessaire au calcul de $\hat{G}(k-1)$.

Mais il est intéressant malgré tout de le faire apparaître car il permet de définir des estimateurs $\hat{\gamma}_{RY}$ et $\hat{\gamma}_R$ non biaisés, ce qui supprime des étapes intermédiaires lors des calculs présentés en annexe. De plus, en pratique, ce facteur permet d'éviter d'éventuels débordements lorsque le facteur d'oubli est très proche de 1.

4. Expression de la puissance de l'erreur d'estimation du signal

Les calculs suivants ont pour but de déterminer la puissance de l'erreur d'estimation. Des calculs similaires à ceux présentés ont été développés dans [3] pour des techniques d'estimation des densités spectrales par périodogrammes moyennés et lissés. Mais ces techniques d'estimation sont difficilement implantables. Une approche statistique considérant les estimateurs des densités spectrales en tant que variables de Wishart [9] a été menée dans [10] et aboutit à des résultats concordants avec ceux que nous présentons.

L'erreur d'estimation instantanée doit tout d'abord être définie, celle-ci peut être écrite :

$$(20) \quad \varepsilon(k) \triangleq \hat{S}(k) - S(k).$$

Soit encore, en utilisant (10) et (11) :

$$(21) \quad \varepsilon(k) = Z(k) + (\underline{G} - \hat{\underline{G}}(k-1))^T \underline{R}(k).$$

La puissance de l'erreur d'estimation :

$$P_\varepsilon(k) \triangleq E[|\varepsilon(k)|^2]$$

peut s'écrire d'après (21) :

$$(22) \quad P_\varepsilon(k) = E[|Z(k) + (\underline{G} - \hat{\underline{G}}(k-1))^T \underline{R}(k)|^2].$$

Définissons $\delta\underline{G}(k-1) \triangleq \underline{G} - \hat{\underline{G}}(k-1)$.

En développant (22) nous obtenons :

$$(23) \quad P_\varepsilon(k) = E[|Z(k)|^2] + 2 \operatorname{Re} \{E[Z^*(k) \delta\underline{G}^T(k-1) \underline{R}(k)]\} + E[\delta\underline{G}^T(k-1) \underline{R}(k) \underline{R}^+(k) \delta\underline{G}^*(k-1)]$$

D'après la construction du filtre (17), (18), (19) et en utilisant les hypothèses (4), (5) et (6) cette expression se simplifie :

$$(24) \quad P_\varepsilon(k) = \gamma_Z + E[\delta\underline{G}^T(k-1) \underline{R}(k) \underline{R}^+(k) \delta\underline{G}^*(k-1)].$$

où γ_Z représente la densité spectrale du bruit Z :

$$(25) \quad \gamma_Z \triangleq E[Z(k) Z^*(k)].$$

L'utilisation de l'hypothèse (9) conduit à :

$$(26) \quad P_\varepsilon(k) = \gamma_Z + E[\delta\underline{G}^T(k-1) \underline{\gamma}_R \delta\underline{G}^*(k-1)].$$

En posant : $\delta\underline{\gamma}_{RY}(k-1) \triangleq \underline{\gamma}_{RY} - \hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1)$

et $\delta\underline{\gamma}_R(k-1) \triangleq \underline{\gamma}_R - \hat{\underline{\gamma}}_R(k-1)$.

On peut écrire :

$$(27) \quad \underline{G}^T - \delta\underline{G}^T(k-1) = (\underline{\gamma}_{RY} - \delta\underline{\gamma}_{RY}(k-1)) (\underline{\gamma}_R - \delta\underline{\gamma}_R(k-1))^{-1}.$$

En supposant que les variations relatives des estimateurs sont faibles (devant 1), ce qui est réalisé dès que l'intégration est réalisée sur une fenêtre suffisamment longue, un développement limité de $\delta\underline{G}(k-1)$ à l'ordre 1 [2], [6] conduit à l'expression suivante :

$$(28) \quad \delta\underline{G}^T(k-1) \cong \delta\underline{\gamma}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} - \underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \delta\underline{\gamma}_R(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1}$$

Les estimateurs (18) et (19) sont non biaisés (voir annexe), ainsi nous avons :

$$(29) \quad E[\delta\underline{G}(k-1)] \cong 0$$

(ce que l'on retrouve en développant $\delta\underline{G}(k-1)$ à l'ordre supérieur, car les termes supplémentaires s'éliminent entre eux).

Ainsi, le second terme de (26),

$$E[\delta\underline{G}^T(k-1) \underline{\gamma}_R \delta\underline{G}^*(k-1)],$$

dans le cas d'une référence-bruit monodimensionnelle représente la variance de l'estimateur du filtre pondérée par la densité spectrale de la référence.

Cette expression peut être calculée :

$$(30) \quad E[\delta\underline{G}^T(k-1) \underline{\gamma}_R \delta\underline{G}^*(k-1)] \cong E[\delta\underline{\gamma}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \delta\underline{\gamma}_{RY}^+(k-1)] - E[\delta\underline{\gamma}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \delta\underline{\gamma}_R^+(k-1)] \underline{G}^* - \underline{G}^T E[\delta\underline{\gamma}_R(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \delta\underline{\gamma}_{RY}^+(k-1)] + \underline{G}^T E[\delta\underline{\gamma}_R(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \delta\underline{\gamma}_R^+(k-1)] \underline{G}^* - n \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY}^+$$

La détermination de ces 4 espérances, présentée en annexe, nous conduit à :

$$(31) \quad E[\delta\underline{G}^T(k-1) \underline{\gamma}_R \delta\underline{G}^*(k-1)] \cong n \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \gamma_Y - n \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY}^+$$

où γ_Y représente la densité spectrale du signal utile bruité Y .

Enfin, en reportant ce résultat dans l'expression de $P_\varepsilon(k)$ nous obtenons :

$$(32) \quad P_\varepsilon(k) \cong P_\varepsilon \cong \gamma_Z + n \frac{1-\alpha}{1+\alpha} (\gamma_Y - \underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY}^+).$$

Pour α tendant vers 1, c'est-à-dire une fenêtre d'intégration équivalente de longueur tendant vers l'infini, nous obtenons asymptotiquement le terme de puissance d'erreur minimum : γ_Z .

5. Analyse du rapport signal à bruit

Dans le cas où $\gamma_Z = 0$ la formule (32) se simplifie encore et devient :

$$(33) \quad P_\varepsilon \cong n \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \gamma_S \text{ pour chaque canal de fréquence.}$$

où γ_S est la densité spectrale du signal utile S .

Le cas où $\gamma_Z = 0$ revient à considérer comme signal utile l'ensemble des composantes du signal bruité non cohérentes avec la référence-bruit, ou encore à remplacer l'erreur d'estimation

$$\varepsilon(k) = \hat{S}(k) - S(k)$$

par
$$\varepsilon(k) = \hat{B}(k) - B(k).$$

Ainsi, simplifier (32) en (33) peut se ramener à remplacer le rapport signal à bruit par le rapport de ce nouveau signal utile au bruit parfaitement cohérent avec la référence-bruit. Définissons les rapports signal à bruit suivants :

$$(34) \quad \chi_{\text{entrée}} \triangleq \frac{\gamma_S}{\underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY}^+} \quad (\gamma_Z \triangleq 0)$$

$$(35) \quad \chi_{\text{sortie}} \triangleq \frac{\gamma_S}{P_\varepsilon} \quad (\gamma_Z \triangleq 0).$$

L'expression (33) de P_ε entraîne que le rapport signal à bruit en sortie de traitement est uniquement fonction du facteur d'oubli des estimateurs α et du nombre n de références-bruit utilisées.

$$(36) \quad \chi_{\text{sortie}} = -10 \log_{10} \left(n \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right) \text{ (dB).}$$

Cette formulation n'est valable que dans le domaine des hypothèses faites, en particulier si les erreurs relatives des estimateurs interspectraux sont faibles devant 1. C'est-à-dire si α est suffisamment proche de 1 :

$$\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \ll 1.$$

L'utilisation de cette équation $\chi_{\text{sortie}} = f(\alpha, n)$ est simple : en effet elle permet à l'utilisateur du spectrofiltre adaptatif de mettre en œuvre ou non un traitement de soustraction de bruit en fonction de la connaissance a priori du rapport signal à bruit en entrée et, du facteur d'oubli qu'il doit choisir, en tenant compte de la durée de stationnarité locale des signaux traités.

D'une façon générale [10], lorsque l'estimation des composantes (17) et (18) est réalisée sur une fenêtre d'intégration finie [3], ou exponentielle, la puissance d'erreur s'exprime en fonction du nombre de références utilisées (n), de la

puissance du signal non cohérent avec les références-bruit (γ_S avec $\gamma_Z \triangleq 0$) et de l'inverse de la longueur de la fenêtre d'intégration équivalente (L).

$$P_\varepsilon \cong n \frac{1}{L} \gamma_S.$$

Dans le cas présenté, avec facteur d'oubli, la longueur d'intégration équivalente est :

$$L = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.$$

6. Compromis sur le nombre de références-bruit

Un traitement multiréférence implique un choix concernant le nombre de références-bruit utilisées. Nous apportons un élément de réponse, indépendamment du coût calcul, qui sera complété au paragraphe suivant.

A partir de l'expression (32) de P_ε , si nous développons les différents termes, nous obtenons :

$$(37) \quad P_\varepsilon \cong \gamma_Z + n \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha} (\gamma_S + \gamma_Z).$$

Soit encore :

$$(38) \quad P_\varepsilon \cong \frac{n + 1 - \alpha(n - 1)}{1 + \alpha} \gamma_Z + n \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \gamma_S.$$

Le nombre de références traitées a beaucoup d'importance et il convient de bien choisir les références-bruit que l'on utilise. L'emploi d'une nouvelle référence apportant une information non redondante diminue le terme γ_Z mais augmente n . Or la fonction $P_\varepsilon(n; \gamma_Z)$ est croissante selon n et γ_Z . Il s'agit alors d'analyser préalablement les références-bruit afin de réaliser un compromis ($n; \gamma_Z$) minimisant au mieux $P_\varepsilon(n; \gamma_Z)$. En particulier l'utilisation d'une référence non cohérente avec la voie signal bruité ne peut que dégrader le traitement dans son ensemble.

7. Analyse de l'efficacité

L'expression (32) de P_ε peut être comparée à l'expression de l'erreur quadratique moyenne avant traitement :

$$(39) \quad \text{EQM}_{\text{entrée}} \triangleq E[|Y(k) - S(k)|^2] \\ = \gamma_Z - \underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY}^+.$$

Le traitement envisagé est efficace si :

$$\text{EQM}_{\text{sortie}} < \text{EQM}_{\text{entrée}}$$

ou encore d'après (35) si :

$$(40) \quad n \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} (\gamma_Y - \underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY}^+) < \gamma_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY}^+.$$

Soit C_{YR}^2 la cohérence multiple entre le signal bruité et les références-bruit [9] :

$$(41) \quad C_{YR}^2 \triangleq \frac{\gamma_{RY} \gamma_R^{-1} \gamma_{RY}^+}{\gamma_Y}$$

L'inégalité (40) devient alors :

$$(42) \quad C_{YR}^2 > C_0^2$$

où

$$(43) \quad C_0^2 \triangleq \frac{n \frac{1-\alpha}{1+\alpha}}{1+n \frac{1-\alpha}{1+\alpha}} < 1.$$

Ainsi en calculant C_{YR}^2 et en le comparant à un seuil précalculé, ne dépendant que des paramètres de traitement, il est possible de contrôler a priori l'efficacité de celui-ci. Un tel seuil C_0^2 a été déterminé pour d'autres techniques d'estimation dans [3]. Ces conclusions concordent avec celles présentées dans [10].

Ce résultat procure un critère concernant le choix des références-bruit. Celles-ci doivent être telles que le terme de cohérence multiple soit maximal. Mais le seuil (43) est croissant en fonction du nombre n de références, ainsi on ne doit pas utiliser des références en trop grand nombre pour ne pas augmenter ce seuil.

Le test (42) doit être utilisé avec circonspection. Le traitement n'est pas efficace lorsque les composantes auto et interspectrale du filtre de Wiener (19) sont mal estimées. Mais alors le terme de cohérence multiple (41) sera également mal estimé, car on conçoit mal un utilisateur estimer au mieux (41), c'est-à-dire sur une fenêtre d'intégration la plus longue possible, en estimant moins bien (17) et (18). Ainsi en pratique lorsque le traitement n'est pas efficace, (41) est mal estimée et est comparée à un seuil (43) parfaitement défini. Le test (42) perd alors automatiquement sa crédibilité.

8. Simulation

Une simulation numérique va nous permettre de tester et de valider les résultats théoriques dans différents cas. La formation des différents signaux est réalisée à partir de générateurs de signaux aléatoires suivant une loi normale. Les signaux temporels initiaux sont blancs et gaussiens. Le schéma général est le suivant, figure 3 :

L'ordre des TFR envisagées est 256, ce qui constitue une taille suffisante pour que les hypothèses faites lors des précédents paragraphes sur la nature des signaux soient acceptables.

Quatre simulations différentes sont présentées, tout d'abord pour une seule référence puis pour plusieurs.

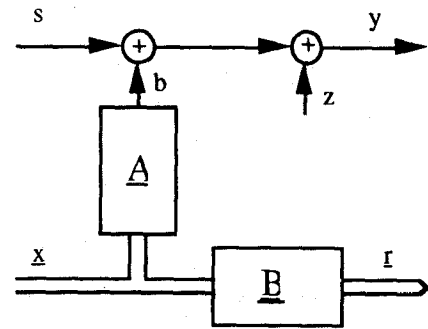


Figure 3. — Formation des différents signaux temporels.

8.1. ÉTUDE DE LA VARIATION DU FACTEUR D'OUBLI α , LES AUTRES PARAMÈTRES ÉTANT FIXES, POUR UNE SEULE RÉFÉRENCE BRUIT

Les signaux temporels initiaux présentent les caractéristiques suivantes :

- Puissance du signal utile $P_S = 1$.
- Puissance de la source de bruit $P_X = 1$.
- Puissance du bruiteur $P_Z = 0$

les filtres générateurs des différents signaux étant :

- filtres A et B identité $A(z^{-1}) = B(z^{-1}) = 1$.

D'où

$$\chi_{\text{entrée}} = 0 \text{ dB}.$$

A la convergence de l'algorithme, la puissance d'erreur résiduelle est estimée (sur 200 000 points) et nous traçons les courbes χ_{sortie} en fonction du facteur d'oubli α . Les résultats sont présentés pour plusieurs simulations et, les courbes sont superposées afin de visualiser également la variance des résultats d'une simulation à une autre, figure 4 :

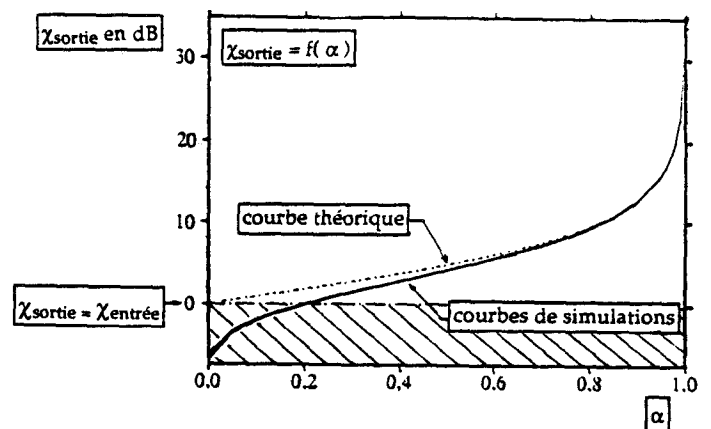


Figure 4. — $\chi_{\text{sortie}} = f(\alpha)$, courbes de simulation et théorique.

Comme il est possible de le voir sur cette figure, les courbes simulées coïncident avec la courbe théorique (36)

dans le domaine des hypothèses, à savoir α proche de 1. La zone hachurée de la figure 4 représente la zone où le traitement n'est pas efficace. Cette non-efficacité est indépendante des résultats du paragraphe précédent, mais est due au fait que les hypothèses théoriques ne sont plus valides. La superposition des traces montre de plus une augmentation de la variance des résultats pour les faibles valeurs de α .

8.2. ÉTUDE DE LA VARIATION DE $\chi_{\text{entrée}}$, LES AUTRES PARAMÈTRES ÉTANT FIXES, POUR UNE SEULE RÉFÉRENCE BRUIT

Les paramètres des signaux sont :

- Puissance du signal utile $P_S = 1$.
- Puissance du bruiteur $P_Z = 0$.
- Filtres A et B identité $A(z^{-1}) = B(z^{-1}) = 1$.

Deux facteurs d'oubli sont utilisés. Ils sont suffisamment proches de 1 pour considérer que les erreurs relatives d'estimation sont effectivement faibles.

- Facteur d'oubli $\alpha = 0,95$ et $\alpha = 0,9$.

Nous traçons les courbes χ_{sortie} en fonction du $\chi_{\text{entrée}}$, superposées pour plusieurs simulations figure 5 :

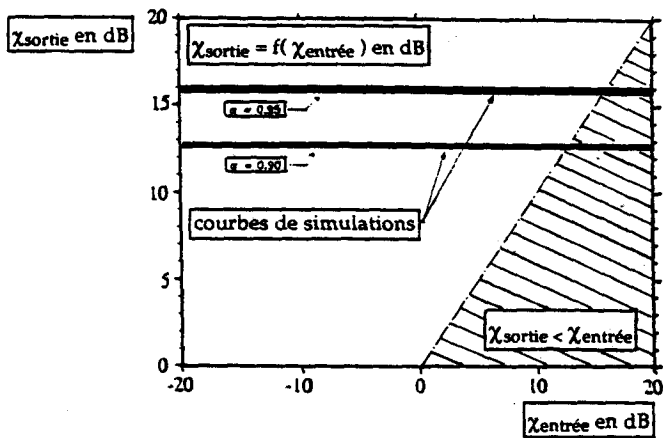


Figure 5. — $\chi_{\text{sortie}} = f(\chi_{\text{entrée}})$, courbes de simulations et théoriques.

Pour $\alpha = 0,95$ le rapport signal à bruit théorique en sortie de traitement est de 15,9 dB, quel que soit le rapport signal à bruit en entrée. C'est bien ce qui est vérifié sur les courbes de simulations. Comme pour la figure 4, la zone hachurée de la figure 5 représente la zone où le traitement n'est pas efficace. Par ailleurs, la transition traitement efficace-traitement non efficace est bien réalisée lorsque C_{YR}^2 est supérieure ou inférieure au seuil 0,25.

Pour $\alpha = 0,9$ les conclusions sont les mêmes, dans la mesure où le rapport signal à bruit en sortie est théoriquement de 12,78 dB et où le traitement est efficace lorsque $C_{\text{YR}}^2 > 0,5$.

8.3. ÉTUDE DE LA VARIATION DU FACTEUR D'OUBLI α , LES AUTRES PARAMÈTRES ÉTANT FIXES, POUR DEUX RÉFÉRENCES BRUIT

Le cas de deux références-bruit est maintenant envisagé. Les signaux initiaux sont créés avec les paramètres suivants :

- Puissance du signal utile $P_S = 1$.
- Puissance de la source de bruit

$$P_{X1} = 1 \quad P_{X2} = 1.$$

- Puissance du bruiteur $P_Z = 0$.
- Filtres A et B

$$\underline{A}(z^{-1}) = [1 \quad 1]$$

$$\underline{B}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,3 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'où $\underline{\gamma}_{\text{RY}} \underline{\gamma}_{\text{R}}^{-1} \underline{\gamma}_{\text{RY}}^+ = 2$

avec

$$\underline{\gamma}_{\text{R}} = \begin{bmatrix} 1,25 & 0,8 \\ 0,8 & 1,09 \end{bmatrix} \quad \underline{\gamma}_{\text{RY}} = [1,5 \quad 1,3].$$

Donc $\chi_{\text{entrée}} = -2$ dB.

A la convergence de l'algorithme nous traçons les courbes χ_{sortie} en fonction du facteur d'oubli α , figure 6 :

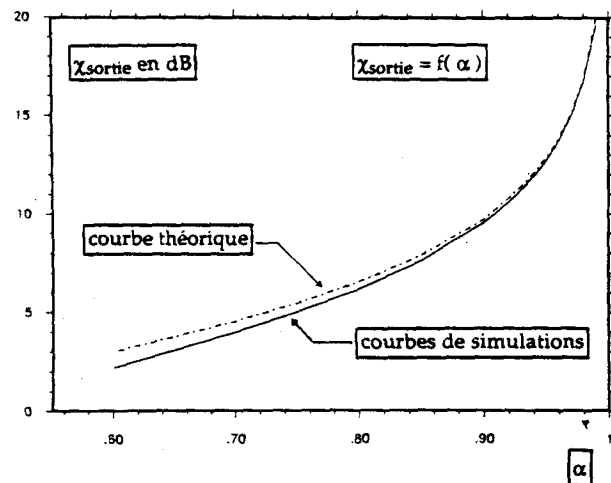


Figure 6. — $\chi_{\text{sortie}} = f(\alpha)$ courbes de simulation et théorique.

Comme cette figure nous le montre, les courbes simulées suivent bien la courbe théorique, dans le domaine des hypothèses.

En effet le calcul théorique (36) nous donne alors :

$$P_{\varepsilon \text{ théo}} = 2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

Avec les paramètres employés, le traitement est théoriquement efficace, ce que l'on constate même pour les faibles valeurs de α ($< 0,7$).

8.4. ÉTUDE DE LA VARIATION DU FACTEUR D'OUBLI α , LES AUTRES PARAMÈTRES ÉTANT FIXES, TROIS RÉFÉRENCES BRUIT

Cette simulation se distingue des autres dans la mesure où la puissance du bruiteur Z n'est plus nulle et, où ce n'est pas χ_{sortie} qui est présenté mais γ_S/P_ε (32).

Les paramètres de formation des signaux sont :

— Puissance du signal utile $P_S = 1$.

— Puissance de la source de bruit

$$P_{X1} = 1 \quad P_{X2} = 1 \quad P_{X3} = 1.$$

— Puissance du bruiteur $P_Z = 1$.

— Filtres \underline{A} et \underline{B}

$$\underline{A}(z^{-1}) = [1 \quad 1 \quad 2]$$

$$\underline{B}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 1 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'où $\underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY}^+ = 6$.

Et donc $\chi_{\text{entrée}} = -4,77$ dB.

A la convergence de l'algorithme nous traçons figure 7 les courbes γ_S/P_ε en fonction du facteur d'oubli α .

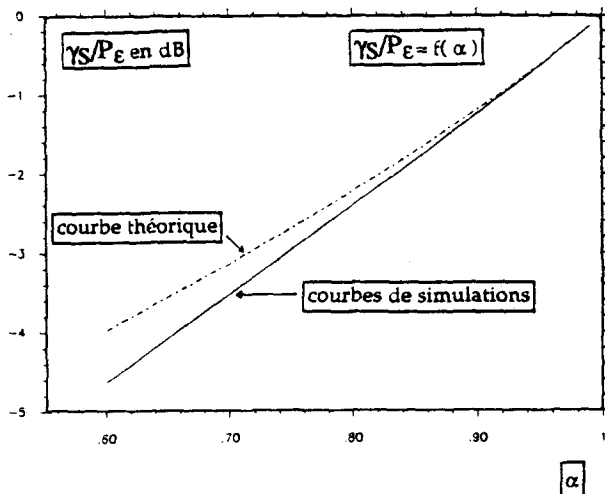


Figure 7. — $\gamma_S/P_\varepsilon = f(\alpha)$ courbes de simulation et théorique.

Les courbes simulées correspondent à la courbe théorique pour les valeurs du facteur d'oubli proches de 1.

En effet le calcul théorique (38) nous donne :

$$P_{\varepsilon \text{ théo}} = 1 + 6 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

9. Conclusion

Nous avons exprimé la puissance d'erreur en sortie de traitement pour le spectrofiltre multivariable adaptatif avec facteur d'oubli, par une technique de calcul faisant intervenir une approximation du premier ordre. Nous

avons montré que le rapport signal à bruit en sortie, qui traduit la qualité de traitement, ne dépendait que du nombre de références-bruit utilisées et de la longueur de la fenêtre d'intégration équivalente, qui dans le cas de moyennage exponentiel est fonction du facteur d'oubli. Ce résultat est extensible pour toute intégration de longueur équivalente finie.

De plus, nous avons montré qu'il existait un seuil sur la cohérence multiple qui détermine théoriquement l'efficacité du traitement. Ce qui se révèle très important en pratique pour savoir si le traitement est utile ou non. Ceci est en accord avec les résultats présentés dans [3] pour d'autres techniques d'estimation, ou dans [10] pour d'autres techniques de calcul. Mais nous avons alors alerté le lecteur sur l'ambiguïté d'un tel contrôle lorsqu'il est mis en place en pratique.

En outre, l'influence du nombre de références utilisées a été mis en évidence et des critères de choix de ces références ont été donnés ; celles-ci devant réaliser un compromis entre : avoir une cohérence multiple avec la voie signal maximale, ou encore être suffisamment nombreuses pour appréhender au mieux le bruit perturbateur total, ne pas être en trop grand nombre pour ne pas augmenter trop fortement le seuil d'efficacité, ou la puissance d'erreur résiduelle.

Enfin, nous avons validé notre résultat théorique fondamental par des simulations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] WIDROW, GLOVER *et al.*, Adaptive noise cancelling : principles and applications *Proceedings IEEE*, décembre 1975, vol. 63 ; p. 1692.
- [2] P. COMON, J.-L. LACOUME, Noise reduction for an estimated Wiener filter using noise references, *IEEE transactions on information theory*, mars 1986.
- [3] P. COMON, J.-L. LACOUME, A robust adaptive filter for noise reduction problems, *International conference ICASSP*, 7-11 avril 1986, Tokyo.
- [4] C. SERVIÈRE, D. BAUDOIS, A. SILVENT, Comparaison de deux méthodes d'estimation du gain complexe d'un filtre optimal au sens de Wiener, *Traitement du Signal*, vol. 6, n° 6, 4^e trimestre 1989.
- [5] N. WIENER, *Extrapolation interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications*, New York Wiley 1949.
- [6] S. M. KAY, *Modern Spectral Estimation. Theory and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1988.
- [7] D. R. BRILLINGER, *Time Serie. Data analysis and Theory*, 1981 Holden Day.
- [8] C. SERVIÈRE, *Eléments de comparaison entre différentes méthodes de soustraction de bruit*, Thèse doctorat INPG Grenoble 1989.
- [9] A. M. KSHIRSAGAR, *Multivariate Analysis*, New York : Dekker, 1972.
- [10] P. COMON, D. T. PHAM, An Error Bound for a Noise Canceller, *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, n° 10, October 1989, pp. 1513-1517.
- [11] I. S. REED, Moment theorems for complex Gaussian processes, *IEEE transactions on information theory*, April 1962, pp. 194-195.
- [12] GANTMACHER, *Théorie des matrices*, Dunod 1966.

Manuscrit reçu le 6 février 1990.

11. Annexe

Calcul du moment

$$E[\delta \underline{\gamma}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \delta \underline{\gamma}_{RY}^+(k-1)]$$

que nous noterons E_1 :

$$E_1 = E[(\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1) - \underline{\gamma}_{RY}) \underline{\gamma}_R^{-1} (\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1) - \underline{\gamma}_{RY})^+]$$

En développant nous avons alors :

$$\begin{aligned} E_1 &= E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-1)] \\ &\quad - \underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-1)] \\ &\quad - E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1)] \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY} + \underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY} \end{aligned}$$

or

$$E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1)] = \alpha E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-2)] + (1-\alpha) \underline{\gamma}_{RY}$$

L'hypothèse sur la stationnarité des signaux entraîne :

$$E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1)] = E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-2)] = \underline{\gamma}_{RY}$$

(estimateur non biaisé) d'où dans une première étape :

$$E_1 = E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-1)] - \underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY}$$

or

$$E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-1)] =$$

$$\begin{aligned} &E[(\alpha \hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-2) + (1-\alpha) Y(k-1) \underline{R}^+(k-1)) \\ &\quad \times \underline{\gamma}_R^{-1} (\alpha \hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-2) + (1-\alpha) \underline{R}(k-1) Y^*(k-1))] \end{aligned}$$

La stationnarité des signaux permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} &(1+\alpha) E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-1)] = \\ &\alpha E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1)] \underline{\gamma}_R^{-1} E[\underline{R}(k-1) Y^*(k-1)] \\ &+ \alpha E[Y(k-1) \underline{R}^+(k-1)] \underline{\gamma}_R^{-1} E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-1)] + (1-\alpha) \\ &\quad \times E[Y(k-1) \underline{R}^+(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{R}(k-1) Y^*(k-1)] \end{aligned}$$

Les signaux \underline{R} et Y suivent une loi normale complexe et la matrice interspectrale $\underline{\gamma}_R$ est hermitienne d'où [11] :

$$\begin{aligned} &(1+\alpha) E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-1)] = \\ &= (1+\alpha) \underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY}^+ \\ &\quad + (1-\alpha) \underline{\gamma}_Y E[\underline{R}^+(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{R}(k-1)] \end{aligned}$$

$$\text{or } E[\underline{R}^+(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{R}(k-1)] = n$$

où n est la dimension de la référence multiple. Ceci est aisé à montrer en décomposant les différents termes et en utilisant une formule de développement des déterminants [12].

Ainsi :

$$E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-1)] = \underline{\gamma}_{RY} \underline{\gamma}_R^{-1} \underline{\gamma}_{RY}^+ + n \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \underline{\gamma}_Y$$

$$\text{d'où } E_1 = n \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \underline{\gamma}_Y$$

Calcul du moment

$$E[\delta \underline{\gamma}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \delta \underline{\gamma}_{RY}^+(k-1)]$$

que nous noterons E_2 :

$$E_2 = E[(\hat{\underline{\gamma}}_R(k-1) - \underline{\gamma}_R) \underline{\gamma}_R^{-1} (\hat{\underline{\gamma}}_R(k-1) - \underline{\gamma}_R)^+]$$

D'où

$$\begin{aligned} E_2 &= E[\hat{\underline{\gamma}}_R(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_R^+(k-1)] - \\ &\quad - \underline{\gamma}_R \underline{\gamma}_R^{-1} E[\hat{\underline{\gamma}}_R^+(k-1)] \end{aligned}$$

or

$$E[\hat{\underline{\gamma}}_R(k-1)] = \alpha E[\hat{\underline{\gamma}}_R(k-2)] + (1-\alpha) \underline{\gamma}_R$$

Les signaux sont stationnaires, ainsi nous avons :

$$E[\hat{\underline{\gamma}}_R(k-1)] = \underline{\gamma}_R$$

(estimateur non biaisé) d'où dans une première étape :

$$E_2 = E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-1)] - \underline{\gamma}_{RY}$$

or

$$\begin{aligned} &E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-1)] = \\ &E[(\alpha \hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-2) + (1-\alpha) Y(k-1) \underline{R}^+(k-1)) \\ &\quad \times \underline{\gamma}_R^{-1} (\alpha \hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-2) + (1-\alpha) \underline{R}(k-1) \underline{R}^+(k-1))] \end{aligned}$$

L'hypothèse sur la stationnarité des signaux, les signaux \underline{R} et Y suivant une loi normale complexe et, la matrice interspectrale $\underline{\gamma}_R$ étant hermitienne permettent d'écrire :

$$E[\hat{\underline{\gamma}}_{RY}(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_{RY}^+(k-1)] = \underline{\gamma}_{RY} + n \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \underline{\gamma}_{RY}$$

d'où

$$E_2 = n \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \underline{\gamma}_{RY}$$

Calcul du moment $E[\delta \underline{\gamma}_R(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \delta \underline{\gamma}_R^+(k-1)]$ que nous noterons E_3 :

$$E_3 = E[(\hat{\underline{\gamma}}_R(k-1) - \underline{\gamma}_R) \underline{\gamma}_R^{-1} (\hat{\underline{\gamma}}_R(k-1) - \underline{\gamma}_R)^+]$$

D'où d'après les calculs précédents :

$$E_3 = E[\hat{\underline{\gamma}}_R(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_R^+(k-1)] - \underline{\gamma}_R$$

or

$$\begin{aligned} E[\hat{\underline{\gamma}}_R(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_R^+(k-1)] = \\ E[(\alpha \hat{\underline{\gamma}}_R(k-2) + (1-\alpha) \underline{R}(k-1) \underline{R}^+(k-1)) \\ \times \underline{\gamma}_R^{-1} (\alpha \hat{\underline{\gamma}}_R(k-2) + (1-\alpha) \underline{R}(k-1) \underline{R}^+(k-1))^+] \end{aligned}$$

Comme pour E_2 , l'hypothèse sur la stationnarité des signaux, le signal \underline{R} suivant une loi normale complexe et, la matrice interspectrale $\underline{\gamma}_R$ étant hermitienne permettent d'écrire :

$$E[\hat{\underline{\gamma}}_R(k-1) \underline{\gamma}_R^{-1} \hat{\underline{\gamma}}_R^+(k-1)] = \underline{\gamma}_R + n \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \underline{\gamma}_R$$

d'où

$$E_3 = n \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \underline{\gamma}_R.$$