

## Calcul rapide de la transformée en ondelettes

---

### *Fast processing of the wavelet transform*

---



#### Mireille BARRAT

Laboratoire d'Automatique et de Commande des Processus, ENSI de Caen, 14032 Caen Cedex

Mireille BARRAT, ancienne élève de l'ENS de Sèvres, agrégée de Physique (1959), Docteur d'État en Spectroscopie Atomique (1965) a commencé au laboratoire du professeur Kastler à l'ENS des recherches en Spectroscopie atomique qu'elle a poursuivies au laboratoire de Spectroscopie de l'Université de Caen jusqu'en 1980. Professeur de Physique à l'Université depuis 1968, elle a réorienté depuis 1980 ses activités de recherche dans les domaines de l'étude théorique et expérimentale des algorithmes de commande et du traitement du signal.



#### Olivier LEPETIT

Service d'Études Communes des Postes et Télécommunications, 42 rue des Coutures, 14066 Caen Cedex

Olivier LEPETIT a obtenu en 1988 le diplôme d'Ingénieur de l'ENSI Caen et le D.E.A. d'Instrumentation et Commande. Il est actuellement allocataire de recherche au SEPT et effectue un travail de thèse portant sur les différentes méthodes de détection de défauts sur les télécartes.

---

### RÉSUMÉ

La transformation en ondelettes est un outil très intéressant d'analyse des signaux à une ou deux dimensions. Nous présentons un nouveau type d'ondelette analysante qui permet un calcul beaucoup plus rapide et une utilisation plus souple de cette transformation.

#### MOTS CLÉS

Transformations temps-échelle. Ondelettes. Filtrage récursif.

---

### ABSTRACT

*Wavelet transform is a very useful tool for analysing one or two dimensions signals. A new type of analysing wavelet is presented here. It allows a noticeable shortening of the computation time and a larger choice for the analysing scale.*

#### KEY WORDS

*Time Frequency transforms. Wavelets. Recursive filtering.*

## 1. Introduction

La transformée en ondelettes est une représentation du type temps-échelle d'un signal temporel. Elle a été proposée en 1983 par J. Morlet pour étudier des signaux de réflexion sismique [1, 2], puis appliquée à l'analyse des sons [3], des images [4], et de toute forme de signal [5].

Cependant le calcul de cette transformée repose sur celui d'une convolution discrète. Avec les ondelettes analysantes utilisées jusqu'à présent, et malgré l'utilisation d'approximations, les temps de calcul peuvent être considérables. Nous proposons l'emploi d'une ondelette de forme légèrement différente qui permet, en ramenant le calcul de la convolution à l'emploi d'une équation récurrente, de réduire les temps de calcul par un facteur de

l'ordre de 10, sans utiliser d'approximation. Cette ondelette permet d'autre part une analyse plus fine du signal autour d'une fréquence donnée, la fréquence caractéristique de l'ondelette pouvant varier de façon continue.

## 2. Présentation de la transformée en ondelettes

### 2.1. DÉFINITIONS

Si  $s(t)$  est un signal temporel et  $g(t)$  un signal d'analyse, dit « ondelette », tous deux d'énergie finie, on définit la transformée en ondelettes de  $s(t)$  par :

$$S(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty} s(t) g^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1)$$

$g(t)$  est l'ondelette analysante. Le signe \* désigne le complexe conjugué, et  $S(b, a)$  est le coefficient d'ondelette du signal  $s(t)$ . Le paramètre  $b$  est homogène à un temps ;  $a$  est le paramètre de dilatation.

On utilise fréquemment comme ondelette analysante l'ondelette de Morlet :

$$g_1(t) = e^{ict} e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{2}} \quad (2)$$

La figure 1 (à rapprocher de la figure 1 de la référence [10]) montre, en utilisant la partie réelle de  $g_1$ ,

$$g_2(t) = \cos(ct) e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{2}} \quad (3)$$

comment la transformation en ondelettes correspond en quelque sorte à un « zoom » ou effet de loupe sur la partie du signal située autour du temps  $b$  avec un grossissement  $a$  :

— Si  $s(t)$  est pratiquement constant à l'échelle  $a$  autour de  $b$ , le produit de  $s$  par  $g_2$  (d'aire nulle ou pratiquement nulle) est très faible, donc  $S(b, a)$  est faible (cas où  $b = b_1$ ).

— Quand  $s$  présente autour de  $b$  des variations qui coïncident avec celles de  $g_2 \left( \frac{t}{a} \right)$ , le produit de  $s$  par  $g_2$  deviendra important, ainsi que le coefficient d'ondelette (cas où  $b = b_2$ ).

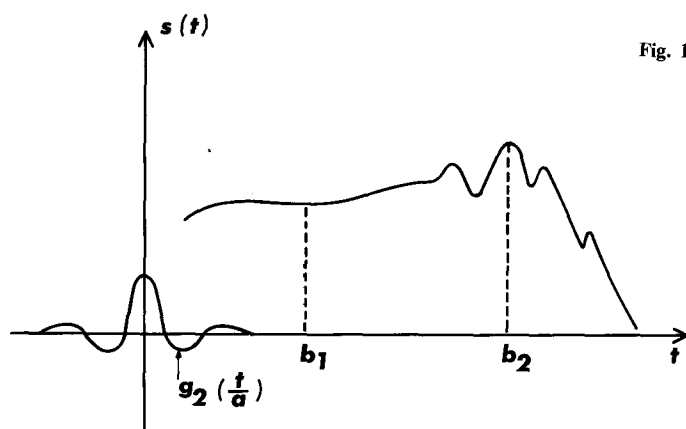


Fig. 1.

### 2.2. ONDELETTES UTILISÉES

Les ondelettes utilisées doivent satisfaire les conditions suivantes [1] :

— être continues, absolument intégrables et de carré intégrable (énergie finie),

— être analytiques : leur transformée de Fourier  $G(\omega)$  doit être nulle pour  $\omega < 0$ ,

— être admissibles : l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega / |\omega|$  doit converger ce qui suppose que  $G(\omega) \sim \omega^n$  avec  $n \geq \frac{1}{2}$  lorsque  $\omega$  tend vers 0.

Si  $G(\omega)$  est différentiable ceci implique que  $g(t)$  soit de moyenne nulle :  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 0$  et que  $G(\omega)$  se comporte comme un filtre passe-bande.

Remarquons que l'ondelette de Morlet ne satisfait pas rigoureusement à ces conditions, puisqu'on a :

$$G_1(\omega) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{2\pi} \exp \left[ -\frac{(\omega - c)^2}{2\alpha^2} \right]$$

ce qui donne  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \frac{1}{\alpha} \sqrt{2\pi} \exp \left( -\frac{c^2}{2\alpha^2} \right)$ .

Mais pour les valeurs de  $c$  et  $\alpha$  utilisées ( $c \approx 5$ ,  $\alpha = 1$ ) cette moyenne restera inférieure à  $10^{-5}$ .

### 2.3. PROPRIÉTÉS INTÉRESSANTES. REPRÉSENTATION

On a :

$$S(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty} s(t) g^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) G^*(a\omega) e^{ib\omega} d\omega \quad (4)$$

$S$  et  $G$  désignant les transformées de Fourier respectives de  $s$  et  $g$ .

Le coefficient  $S(b, a)$  présentera les propriétés suivantes :

(i) Si  $s(t)$  est de la forme  $s(t) = \cos \omega_1 t$ , on aura :

$$S(b, a) = \frac{\sqrt{a}}{2} G^*(a\omega_1) e^{ib\omega_1}$$

$|S|$  est indépendant de  $b$  ( $G$  est réelle) et sera maximal lorsque  $|G(a\omega_1)|$  l'est : par exemple pour  $a = c/\omega_1$  si on utilise l'ondelette de Morlet  $g_1$ .

(ii) Si  $s$  est homogène d'ordre  $\alpha$  autour de  $t = 0$ , c'est-à-dire que  $s[\lambda t] = \lambda^\alpha s(t)$ , on a, en posant  $V(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} S(b, a)$

$$V(\lambda b, \lambda a) = \lambda^\alpha V(b, a).$$

La phase de  $V(b, a)$  (donc celle de  $S(b, a)$ ) sera constante le long de n'importe quelle droite passant par l'origine,

d'équation  $a = Kb$ . En particulier une distribution de Dirac est homogène d'ordre  $(-1)$ , et un échelon est homogène d'ordre  $0$  : il en résulte que si  $s$  ou ses dérivées ont une discontinuité au temps  $t = 0$ , les lignes d'équiphase de  $S$  apparaîtront comme des demi-droites convergeant vers le point  $(b = 0, a = 0)$ . Bien entendu il y aura déformation de ces lignes lorsqu'on utilise une échelle logarithmique pour  $a$ .

Les représentations usuelles de la transformée en ondelettes sont les suivantes : on utilise un plan où  $b$  (temps) est porté en abscisses,  $a$  en ordonnées. L'axe des ordonnées est vertical vers le bas (facteurs d'échelle).

Dans ce plan, on représente sur 2 figures distinctes :

- (i) pour  $a$  fixé (« voix »),  $|S(b, a)|$  fonction de  $b$ . On aura une « résonance » de  $|S(b, a)|$  apparaissant au temps  $b$  pour  $\frac{c}{a} = \omega_1$  lorsque l'harmonique  $\omega_1$  apparaît au temps  $b$  dans le signal ;
- (ii) en chaque point  $(b, a)$ , la valeur avec un code de couleurs ou de niveaux de gris de  $\varphi = \text{Arg } S(b, a)$  allant de  $0$  à  $2\pi$ . Les lignes équiphases apparaissent de même couleur. Lorsque le signal  $s$  subit une discontinuité au temps  $b_0$ , on voit ces lignes équiphases converger vers le point  $(b_0, a = 0)$ .

## 2.4. DISCRÉTISATION ET CALCUL APPROCHÉ

Lorsque  $s$  et  $g$  sont échantillonnés à une période  $T$  autorisée par le théorème de Shannon, l'équation (1) donnant  $S(b, a)$  devient :

$$S(kT, a) = \frac{T}{\sqrt{a}} \sum_n s(nT) g^* \left[ \frac{(n-k)T}{a} \right]. \quad (5)$$

On utilise souvent des valeurs de  $a$  qui croissent par puissances de 2 ( $a = a_0, 2a_0, 4a_0 \dots$ ) pour pouvoir explorer des domaines de fréquences étendus (on sait d'autre part [13] que les fonctions  $g$  correspondantes constituent une base orthonormale). Dans ces conditions, si on utilise  $L$  échantillons de l'ondelette pour calculer la sommation initiale ( $L$  étant de l'ordre de 120) le calcul de  $S$  exigera  $L$  multiplications pour  $a = a_0$ ,  $2L$  pour  $a = 2a_0$  (l'ondelette ayant été dilatée par un facteur 2). Pour le 10<sup>e</sup> octave,  $a = 2^{10} = 1024$ , le nombre de multiplications à effectuer serait  $120 \times 1024 = 122880$ . Le temps de calcul devient rédhibitoire.

On a donc été amené à concevoir des algorithmes permettant de diminuer ces temps de calcul.

— Le plus connu est l'algorithme « à trous » [6] : l'ondelette est tabulée pour la valeur  $a_0$  de  $a$ . Chaque fois qu'on passe d'un octave au suivant, on ne conserve qu'un point sur deux pour l'ondelette dilatée. La perte d'information peut alors être partiellement compensée en remplaçant le signal initial  $s(t)$  par un signal filtré par un filtre moyennneur. On n'a plus que  $L$  multiplications à effectuer quel que soit l'octave.

— L'algorithme « dyadique » [14] consiste à ne calculer les coefficients en ondelettes qu'en certains points du plan  $(b, a)$  :  $S(b, a)$  à l'octave 0,  $S(2b, 2a)$  à l'octave 1,

$S(2^n b, 2^n a)$  à l'octave  $n$ , en utilisant le fait que la transformée en ondelettes de  $\sqrt{\lambda} s(\lambda t)$  est  $S(\lambda b, \lambda a)$ .

## 3. Ondelette pour le calcul rapide

### 3.1. INTRODUCTION

L'étude du filtrage d'images par filtres IIR nous a conduits à formuler le problème de la transformation en ondelettes d'un signal monodimensionnel  $s(t)$  sous un angle légèrement différent : la formule (5) montre que le calcul du coefficient d'ondelette  $S(kT, a)$  revient à faire la convolution discrète de  $s$  par  $g\left(\frac{t}{a}\right) = g(\zeta t)$  en posant  $\zeta = \frac{1}{a}$ . On sait [11, 12] que cette convolution se ramène à une équation récurrente si la transformée en  $z$  de  $g(\zeta t)$  est une fraction rationnelle en  $z^{-1}$ . Nous avons donc essayé de choisir une ondelette admissible (ou plutôt utilisable pour le traitement des signaux), et ayant une transformée en  $z$  se prêtant à ce type de calcul, ce qui n'est pas le cas des ondelettes habituellement utilisées.

### 3.2. ONDELETTE DE CALCUL RAPIDE

Nous avons cherché a priori une fonction paire dont la forme se rapproche de celle de l'ondelette  $g_1(t)$  de Morlet. Notre choix s'est porté sur la fonction

$$h(t) = (1 + \sigma |t|) e^{-\sigma |t|} e^{ic't}. \quad (6)$$

La figure 2 représente les formes respectives des parties réelles de  $g_1(t)$  et de  $h(t)$  pour  $\alpha = 1$ ,  $c' = 5$  et  $\sigma = 1,5$ .

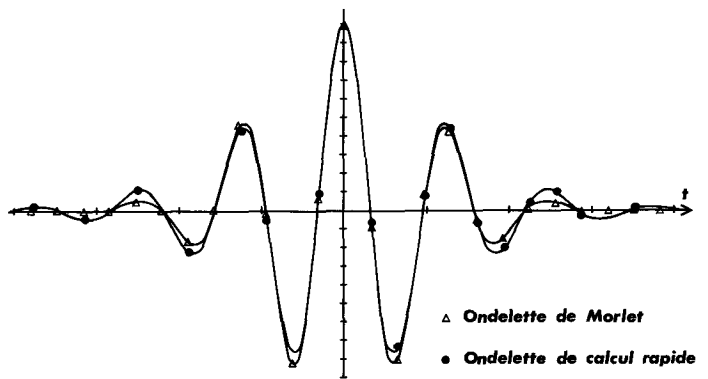


Fig. 2.

Les transformées de Fourier de  $g_1(t)$  et de  $h(t)$  sont respectivement

$$G_1(\omega) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{2\pi} \exp \left[ -\frac{(\omega - c)^2}{2\alpha^2} \right] \quad (7)$$

$$H(\omega) = \frac{4\sigma^3}{[\sigma^2 + (\omega - c')^2]^2}$$

Ni l'une ni l'autre de ces deux ondelettes ne sont admissibles au sens strict du terme. Remarquons cependant que :

$$G_1(0) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{2\pi} \exp - \frac{c^2}{2\alpha^2}$$

et

$$H(0) = \frac{4\sigma^3}{[\sigma^2 + c'^2]^2}$$

- Pour  $c = c' = 5$ ,  $\sigma = 1,5$  et  $\alpha = 1$ , on obtient  $G_1(0) = 9 \times 10^{-6}$  et  $H(0) = 1,8 \times 10^{-2}$ .
- Pour  $c = c' = 8$ ,  $\sigma = 1$ , on obtient  $H(0) = 9 \times 10^{-4}$ ,  $G_1(0) = 3 \times 10^{-14}$ .
- Pour  $c = c' = 8$ ,  $\sigma = 1,5$ , on obtient  $H(0) = 3 \times 10^{-3}$ .

L'ondelette  $h$  est donc beaucoup moins satisfaisante du point de vue de l'admissibilité, ce qui pourra introduire des difficultés si on s'intéresse à la reconstitution des signaux. Nous verrons cependant qu'elle permet une analyse tout à fait satisfaisante des signaux.

### 3.1. TRANSFORMÉE EN $z$ DE L'ONDELETTE

On sait que la transformée en  $z$  bilatérale d'un signal échantillonné  $s(nT)$  est donnée par :

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} s(nT) z^{-n}$$

Pour pouvoir procéder facilement aux changements d'échelle, nous calculons directement la transformée en  $z$  de  $h(\zeta t)$ . On décompose cette fonction en deux contributions :

$$\begin{cases} h_+( \zeta t ) = (1 + \sigma \zeta t) e^{-\sigma \zeta t} e^{i c' \zeta t} & \text{pour } t \geq 0 \\ \quad \quad \quad = 0 & \text{pour } t < 0 \\ h_-( \zeta t ) = 0 & \text{pour } t \geq 0 \\ h_-( \zeta t ) = (1 - \sigma \zeta t) e^{\sigma \zeta t} e^{i c' \zeta t} & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

On peut remarquer qu'on aura  $h_-( -nT ) = h_+^*( +nT )$ . Faire la convolution de  $s(t)$  par  $h_+( \zeta t )$  reviendra à filtrer ce signal par un filtre de réponse impulsionnelle  $h_+( \zeta t )$ . Ce filtre sera causal et le filtrage se ramènera à une équation de récurrence. Par contre  $h_-( t )$  correspond à un filtre non causal. On considèrera donc qu'il correspond au balayage du signal dans le sens des temps décroissants.

Le calcul des transformées en  $z$  donne :

$$\begin{aligned} H_+(z) &= \frac{1 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \\ H_-(z) &= H_+^*(z^{-1}) - h(0) = \frac{a_1' z + a_2' z^2}{1 + b_1^* z + b_2^* z^2} \end{aligned} \quad (8)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1 &= (\sigma \zeta T - 1) e^{-\zeta(\sigma - i c') T} \\ b_1 &= -2 e^{-\zeta(\sigma - i c') T} \\ b_2 &= e^{-2\zeta(\sigma - i c') T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1' &= (a_1^* - b_1^*) \\ a_2' &= -b_2^* \end{aligned}$$

Le coefficient d'ondelette de la formule (5) pourra donc être calculé par la suite d'équations aux différences :

$$\begin{aligned} S_+(k, \zeta) &= s(k) + a_1 s(k-1) - b_1 S_+(k-1) \\ &\quad - b_2 S_+(k-2) \\ S_-(k, \zeta) &= a_1' s(k+1) + a_2' s(k+2) \\ &\quad - b_1^* S_-(k+1) - b_2^* S_-(k+2) \\ S(k, \zeta) &= \sqrt{\zeta} [S_+(k, \zeta) + S_-(k, \zeta)] \end{aligned} \quad (9)$$

Les calculs de  $S_+$  et  $S_-$  pourraient être effectués simultanément en utilisant une implémentation en parallèle, ce qui ferait gagner un facteur 2 en temps de calcul.

#### Complexité de l'algorithme et approximations

A la différence des algorithmes existants, la complexité de l'implantation récursive est indépendante de l'octave  $n$ .

Globalement pour le calcul de  $S(k, \zeta)$  complexe on a :

$$22 \text{ multiplications et } 21 \text{ additions}$$

(complexité de l'ordre de 22).

La complexité de l'algorithme à trous pour l'octave  $n$  est d'après [14] :

$$K_{Tr} = |g| + n(1 + |F|)$$

où  $F$  est le pré-intégrateur (complexité 2) et  $|g|$  la complexité correspondant au produit de convolution par l'ondelette.

Si  $|F| = 2$  et  $|g| = 100$  (50 points conservés pour l'ondelette), on a :

$$K_{Tr} = 100 + 3n$$

pour  $n = 0$ , 100 opérations sont à effectuer  
pour  $n = 10$ , 130 opérations sont à effectuer.

L'algorithme proposé présente donc 5 à 6 fois moins d'opérations à réaliser que l'algorithme à trous. De plus, l'ondelette ne subit aucune troncature.

Si on veut comparer l'algorithme proposé avec l'algorithme dyadique [14] on peut remarquer que la complexité de ce dernier est la même que celle de l'algorithme à trous pour le calcul d'un coefficient d'ondelette. Mais la complexité globale ira en diminuant puisqu'à l'octave  $n$  on ne calcule plus que les coefficients d'ondelettes  $S(2^n b, 2^n a)$ . Si  $N_0$  est le nombre initial d'échantillons de  $s$ ,  $|g_1|$  la complexité de l'algorithme de convolution ordinaire et  $|h_1|$  celle de celui que nous proposons, pour un nombre  $n$  d'octaves, la complexité globale sera :

$$N_0 |g_1| \left[ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right] \# 2 N_0 |h_1|$$

dans le cas de l'algorithme dyadique et  $n N_0 |h_1|$  dans notre cas. Pour  $n = 10$ , les 2 nombres sont comparables mais pour le même temps de calcul on a eu accès à tous les  $S(b, 2^n a)$  dans notre cas. D'autre part, contrairement à

notre algorithme, l'approximation dyadique ne permet pas d'accéder à tous les coefficients.

### 3.4. MISE EN ŒUVRE ET RÉSULTATS

Les calculs ont été réalisés sur un IBM PS/2 équipé d'un microprocesseur 80386.

Les figures 3 et 4 montrent les résultats de l'analyse en ondelettes du même signal d'une part avec l'ondelette de Morlet et un calcul utilisant l'algorithme à trous, d'autre part avec notre ondelette à implémentation récursive. Nous avons utilisé l'ondelette de Morlet comme instrument de comparaison parce qu'elle avait une forme voisine de celle que nous proposons.

Le signal est :

$$s(t) = Y(t - 83 T) \cos(2 \pi f_0 t) + Y(t - 170 T) \cos(4 \pi f_0 t) + Y(t - 250 T) \cos(8 \pi f_0 t).$$

La période d'échantillonnage est :  $T = \frac{1}{32} \times 10^{-3} \text{ s}$  ;

$f_0 = 1\,000 \text{ Hz}$ .

$s(t)$  est donné sur  $N_0 = 500$  points.

$Y$  est la fonction échelon.

Les paramètres des ondelettes analysantes sont les suivants :

- pour l'ondelette de Morlet :  $\alpha = 1 \quad c = 5$
- pour l'ondelette de calcul rapide,  $h : c' = 8 \quad \sigma = 1,5$ .

On représente  $|S(b, a)|$  et  $\text{Arg } S(b, a)$  sous forme de matrice codée avec 10 niveaux de gris. Le paramètre  $b$  varie de 0 à  $N_0 T$ ,  $a$  correspond à l'inverse de la fréquence. On considère 3 « voix » par octave (cf. 2.3), les fréquences de départ sont 10 KHz, 8 KHz, 6 KHz, chaque « voix » correspondra à  $f = \frac{10}{2^n}, \frac{8}{2^n}, \frac{6}{2^n}$  KHz pour le  $n$ -ième octave (échelle non linéaire). De plus, on envisage 6 octaves ( $0 < n < 5$ ).

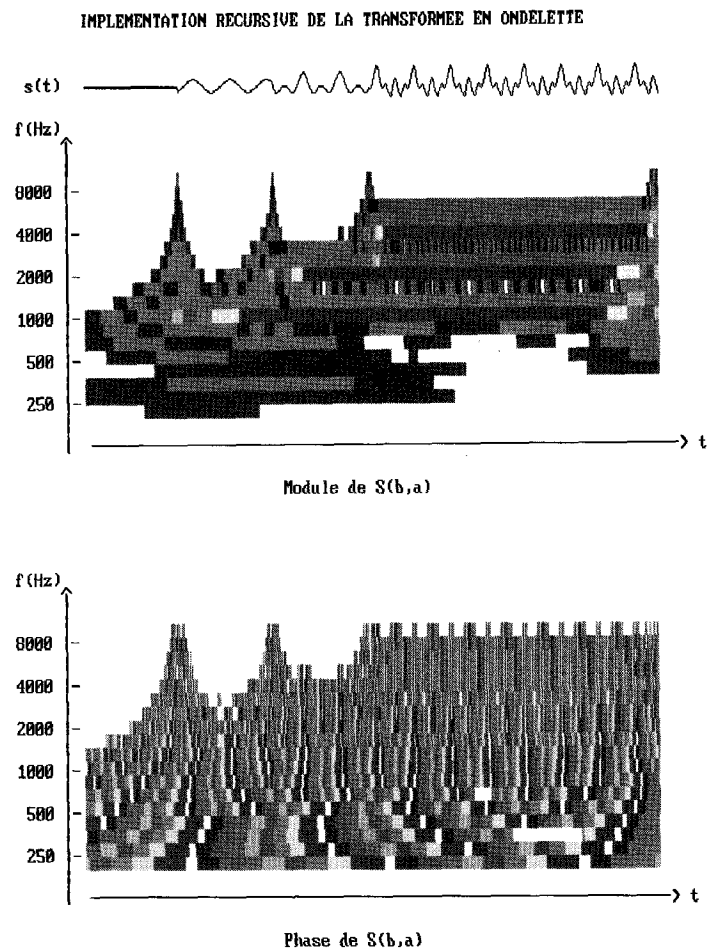
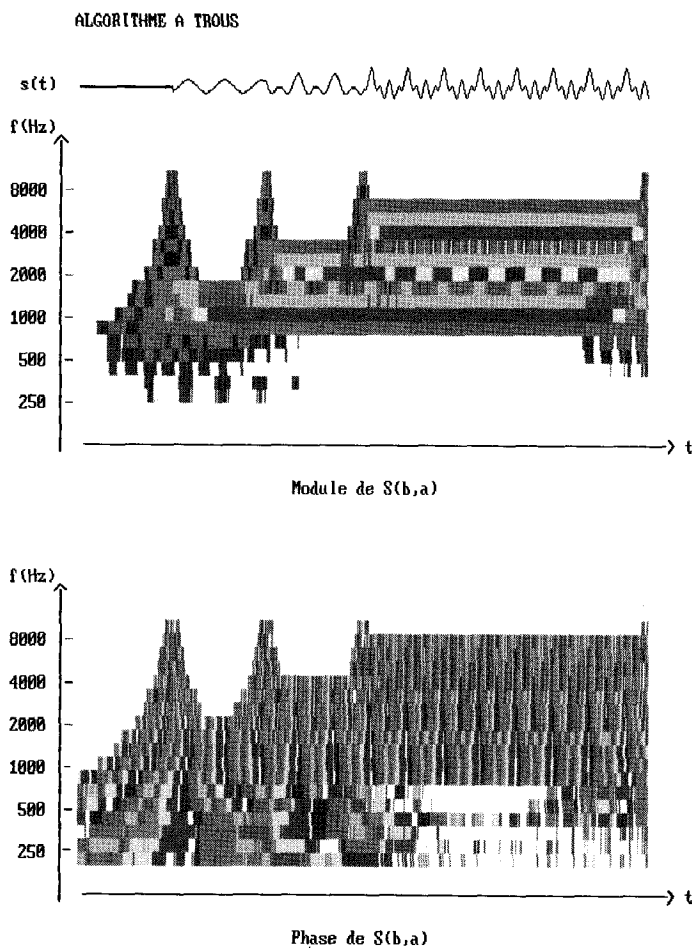


Fig. 3 et 4.

Le démarrage temporel de chacune des fonctions sinusoïdales est indiqué par la présence de « cônes » pour  $|S|$  et  $\text{Arg } S$ . De plus, chaque ligne d'équiphase converge vers les instants de rupture et  $|S(b, a)|$  a des maxima (bandes claires) lorsque  $a$  correspond à la fréquence d'une des sinusoïdes. On constate, par ailleurs, que les deux méthodes donnent des résultats similaires.

La figure 5 donne une représentation différente de  $|S(b, a)|$  pour le même signal  $s(t)$ . Pour une valeur de  $b_0$  fixée, on affiche  $|S(b_0, a)|$  qui correspond à un spectre à l'instant  $b_0$ . On s'est limité à 40 spectres pour des valeurs de  $b_0$  réparties uniformément entre  $50 \cdot T$  et  $(N_0 - 150) \cdot T$ . On retrouve les principaux résultats : les instants de démarrage et les pics correspondant aux différentes fréquences. On peut remarquer que si on observe la figure latéralement, on perçoit une impression de relief (surface  $|S(b, a)|$  dans un espace  $(b, a, |S|)$ ). La valeur des  $|S(b, a)|$  maxima est de l'ordre de 600, le minimum intermédiaire vaut 100 et les valeurs constantes de  $|S|$  correspondant aux  $a$  très faibles ou très élevés sont de l'ordre de 10.

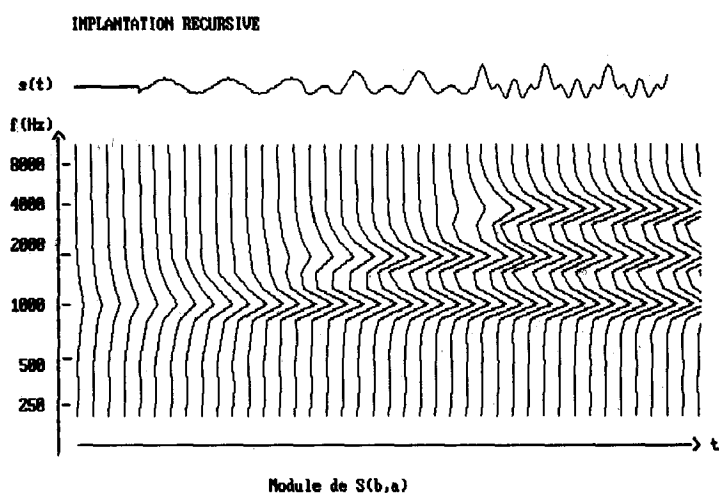


Fig. 5.

Nous avons ensuite choisi un signal composé d'une somme de 2 sinusoïdes bruitées :

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_1 t) + 2R(t)$$

$$f_0 = 1\,000 \text{ Hz} \quad f_1 = 1\,200 \text{ Hz}$$

$R(t)$  est un nombre aléatoire entre  $-0,5$  et  $+0,5$ .

Nous adoptons le même type de représentation que pour la figure 5.

Nous avons effectué l'analyse de ce signal avec l'ondelette de calcul rapide en utilisant un balayage linéaire en fréquences, avec une fréquence maximale de  $1\,500 \text{ Hz}$  et un pas de  $25 \text{ Hz}$ . Les résultats sont donnés figure 6.

Les valeurs des maxima sont d'environ  $1\,300$ , la valeur intermédiaire de  $700$  tandis que les valeurs de  $|S(b, a)|$  correspondant aux valeurs très faibles ou très élevées de  $a$  sont environ de  $200$ . On pourrait donc dire qu'on arrive à un rapport signal sur bruit de  $6,5$  dans ce cas.

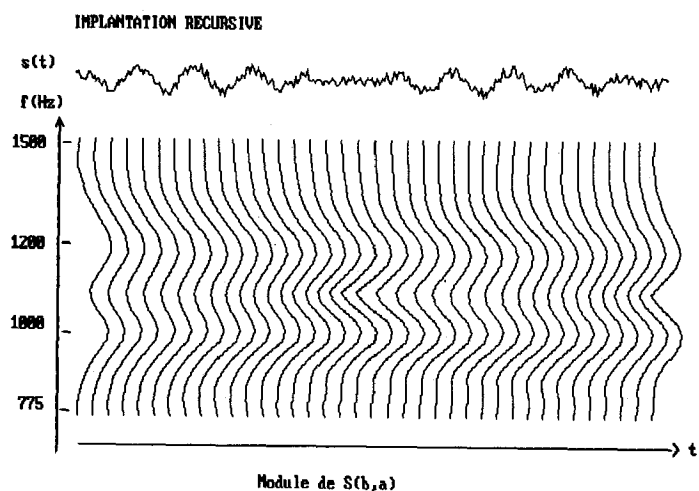


Fig. 6.

Notre algorithme possède une résolution très satisfaisante, puisque les 2 maxima fréquentiels sont parfaitement restitués. Il est évident que l'algorithme à trous n'aurait pu convenir ici, ou aurait exigé d'employer plusieurs voix d'initialisation, choisies en fonction de  $f_0$  et de  $f_1$ . L'algorithme à trous nécessite une bonne connaissance a priori du signal à étudier ; si on ne possède pas cette connaissance, pour éviter de passer à côté d'une fréquence, il faut considérer beaucoup de « voix » par octave, ce qui suppose un temps de calcul très important.

Notre algorithme permet, lui, une utilisation plus souple de la transformée, en considérant des variations linéaires en fréquence autour de n'importe quelle fréquence  $f$ , avec des pas  $\Delta f$  variables. A ce titre, il est comparable au calcul direct de la transformée avec un temps de calcul très réduit.

### 3.5. REMARQUES

L'étude proposée peut être généralisée à des problèmes à 2 dimensions (traitement d'images). L'ondelette proposée est voisine de la réponse impulsionnelle des filtres optimaux proposés par Deriche [7] pour la détection de contours au profil en échelon, ou par Shen [8] pour la détection de « toits » (profils comportant des rampes). Nous envisageons de réaliser une transformée en ondelettes à 2 dimensions en utilisant deux masques successifs de la forme

$$h(x)g(y) = h(x)[\alpha|y| + 1]e^{-\alpha|y|} \quad \text{suivant l'axe } Ox$$

$$h(y)g(x) = h(y)[\alpha|x| + 1]e^{-\alpha|x|} \quad \text{suivant l'axe } Oy$$

La multiplication de  $h(x)$  par  $g(y)$  permet d'adoucir les effets de troncature que provoquerait une coupure brutale [9].

## 4. Conclusion

On constate depuis plusieurs années un regain d'intérêt pour les transformées temps-échelle d'un signal qui peu-

vent être reliées à certaines transformations temps-fréquence en posant  $\nu = \frac{\nu_0}{a}$  où  $\nu_0$  est une fréquence de référence. La transformée en ondelettes permet de visualiser de façon particulièrement intéressante les différentes fréquences intervenant dans un signal ainsi que leurs instants d'apparition. Ses applications devraient donc s'élargir progressivement et toucher de nombreux domaines : signaux biomédicaux (électrocardiogrammes, etc.), sismographie, traitement d'images...

L'implémentation que nous présentons dans cet article diffère des techniques employées jusqu'ici. Le temps de calcul est divisé par un facteur 6 (facteur qui peut être porté à 12 si on réalise en parallèle le calcul de  $S_+$  et  $S_-$ , cf. § 3.3). Le résultat ne comporte pas d'approximation due à une troncature de l'ondelette. Enfin on peut obtenir une utilisation beaucoup plus souple, puisqu'il est facile de faire varier de façon continue la fréquence de l'ondelette analysante, et d'effectuer des exploitations dans n'importe quel domaine de fréquence avec la résolution que l'on souhaite.

La généralisation à deux dimensions sera étudiée ultérieurement.

Premier manuscrit reçu le 6 février 1990.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. GROSSMAN and J. MORLET, *SIAM J. Math. Analysis* 15, 1984, pp. 723-736.
- [2] A. GROSSMAN and J. MORLET, *Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms*. Mathematics and Physics, Lecture on Recent results L. Streit editor. World Scientific Publishing (Singapore) 1985.
- [3] R. KRONLAND-MARTINET, J. MORLET and A. GROSSMAN, *Analysis of sound patterns through wavelet transform*. International journal of pattern recognition and Artificial Intelligence. Vol. 1, No. 2, World scientific publishing company, 1987, pp. 97-126.
- [4] S. MALLAT, *A theory for multiscale signal analysis : the scale change representation*. Tech. Rep., U. of Pennsylvania, 87-22.
- [5] Proceedings of the conference « Ondelettes, méthodes temps fréquence et espace des phases ». Luminy, Marseille, juin 1988, Springer ed., 1989.
- [6] P. DUTILLEUX, A. GROSSMAN, R. KRONLAND-MARTINET, *Application of the wavelet transform to the analysis, transformation and synthesis of musical sounds*. 85th AES Convention, Los Angeles, 1988.
- [7] R. DERICHE, *Optimal edge detection using recursive filtering*, Proc. First International conference on Computer Vision London, June 8-12, 1987.
- [8] J. SHEN and S. CASTAN, *An optimal Linear Operator for edge detection*. Proc. CVPR 1986, Miami.
- [9] R. DERICHE, *Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector*. International journal of computer vision, 1987, pp. 167-187.
- [10] Y. MEYER, S. JAFFARD et O. RIOUL, *L'analyse par ondelettes*. Pour la Science, septembre 1987.
- [11] J. A. CADZOW, *Discrete-Time Systems (chap. 5)*. Prentice-Hall Inc., 1973.
- [12] G. F. FRANKLIN et J. D. POWELL, *Digital Control of dynamic systems (chap. 2)*. Addison-Wesley, 1990.
- [13] S. MALLAT, *A Theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation*. IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, 1989, Vol. 11, No. 7.
- [14] P. DUTILLEUX, *An Implementation of the « algorithme à trous » to compute the wavelet transform*. Wavelets, time frequency Methods and Phase Space, Springer-Verlag, 1989.
- [15] P. FLANDRIN, Colloque National GRETSI, Juan les Pins, 1989, tome 1, p. 5 à 8.