

Approximation simultanée de l'amplitude et du temps de propagation de groupe des filtres numériques récurrents

Amplitude and group-delay simultaneous approximation for IIR digital filters



H. LEICH

Faculté Polytechnique de Mons,
31, bd Dolez, B-7000 Belgique
Tél. 65374128

H. LEICH est né à Quaregnon, Belgique. Ingénieur civil électricien de la Faculté Polytechnique de Mons (F.P.Ms.), Belgique en 1964, et Docteur en Sciences Appliquées en 1970 de la même faculté. Professeur depuis 1977, il travaille depuis 1964 dans le service de Théorie des Circuits et de Traitement du Signal de la F.P.Ms. qu'il dirige depuis octobre 1990. Co-auteur du livre « Les Filtres Numériques », il a reçu le « EURASIP Award 1981 ». Spécialiste des problèmes d'approximation et de synthèse des filtres analogiques et numériques, ses recherches actuelles portent sur le traitement de la parole (reconnaissance et codage).

RÉSUMÉ

Ce texte présente l'approximation simultanée de l'affaiblissement et de la distorsion du temps de propagation de groupe pour les filtres numériques récurrents (à réponse impulsionnelle infinie). La méthode développée est caractérisée par l'utilisation de deux étapes successives : l'approximation portant sur l'affaiblissement seul, faisant appel à un algorithme itératif n'exigeant que la résolution d'un système d'équations linéaires et donc très rapide, suivie par l'approximation simultanée, basée sur la résolution

à chaque itération d'un problème de programmation linéaire. La convergence des deux algorithmes est garantie ; leur efficacité est démontrée par application à un exemple test.

MOTS CLÉS

Approximation, filtres numériques RII, programmation linéaire

SUMMARY

This paper describes the attenuation and group-delay distortion approximation for IIR digital filters. The developed method is characterized by the use of two successive steps: the attenuation approximation by an iterative algorithm asking the solution of a set of linear equations (very fast), followed by the simultaneous approximation based on the solution of a linear programming problem at each iteration. The convergence of the

two algorithms is guaranteed and their efficiency is proved by solving a classical example.

KEY WORDS

Approximation, IIR digital filters, linear programming

1. Introduction

Le but de cet article est de décrire un ensemble de méthodes d'approximation utilisables sur ordinateur personnel pour des filtres numériques récurrents (à réponse impulsionnelle infinie RII). L'objectif consiste à déterminer la fonction de transfert $T(z) = F(z)/D(z)$ d'un filtre RII passe-bas, passe-bande, passe-haut ou réjecteur de bande et ce pour des contraintes simultanées portant sur l'affaiblissement et le temps de propagation de groupe.

Ce problème est abordé en deux étapes essentiellement différentes. Lors de la première étape, on ne considère que des spécifications portant sur l'affaiblissement et telles que les zéros de ce dernier se situent obligatoirement sur le cercle unité. Dans la seconde étape, on abordera l'approximation pour des spécifications simultanées sur l'affaiblissement (sans aucune contrainte) et la distorsion de temps de propagation de groupe. La première étape produit des résultats qui servent de point de départ à la seconde : elle est donc obligatoire. Les algorithmes développés dans

chaque étape sont basés sur l'algorithme d'échange de REMES [1].

2. L'approximation de l'affaiblissement

2.1. PRINCIPE

La fonction amplitude pour un filtre RII est donnée par :

$$(1) \quad A^2(\varphi) = T(z) \cdot T(z^{-1}) \Big|_{z = \exp(j\varphi)}$$

où $\varphi = \omega \cdot T_e$ et T_e est la période d'échantillonnage.

On pose :

$$(2) \quad A^2(\varphi) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot R(z) \cdot R(z^{-1})} \Big|_{z = \exp(j\varphi)}$$

avec

$$(3) \quad R(z) = H(z) / \varepsilon \cdot F(z).$$

L'affaiblissement en dB s'écrit donc :

$$(4) \quad A_f(\varphi) = -10 \cdot \log(A^2(\varphi)) = 10 \cdot \log\left(1 + \frac{H^2(\varphi)}{F^2(\varphi)}\right)$$

L'examen de (4) montre que les racines du polynôme $H(z)$ situées sur le cercle unité sont les zéros de l'affaiblissement.

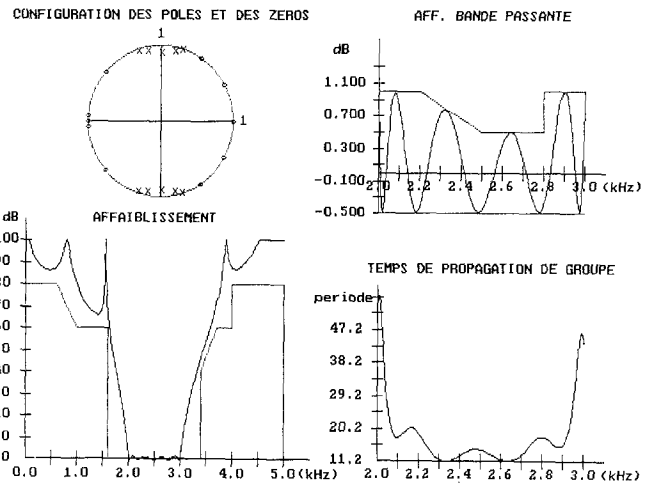
Lors de cette première étape, l'approximation des spécifications portant sur l'affaiblissement est réalisée de façon que les pôles et les zéros de ce dernier soient tous localisés sur le cercle unité. Cette condition est classique pour les pôles de l'affaiblissement (les racines de $F(z)$) mais pas pour ses zéros. En effet, la relation (4) montre que les zéros de $H(z)$ sur le cercle unité conduisent à des zéros doubles de l'affaiblissement ce qui implique que les spécifications inférieures de l'affaiblissement dans la (les) bande(s) passante(s) soient 0 dB. On pourra évidemment admettre des spécifications horizontales qui seront ramenées à 0 dB par multiplication par une constante (fig. 1). Ce qui va être développé s'applique aux différents types de filtres (passe-bas, passe-bande, passe-haut ou réjecteur de bande).

Des équations (1) à (3), on peut déduire que les pôles de la fonction de transfert sont les racines (à l'intérieur du cercle unité) de la fonction :

$$(5) \quad D(z) \cdot D(z^{-1}) = F(z) \cdot F(z^{-1}) + H(z) \cdot H(z^{-1}).$$

La relation (4) montre de façon évidente que l'affaiblissement A_f est complètement défini par les racines de $F(z)$ et de $H(z)$ si elles sont toutes situées sur le cercle unité. La position de ces racines (excepté celles situées en +1 et en -1) constituera l'ensemble des paramètres inconnus de notre problème.

Le paramètre ε est calculé pour vérifier exactement



a_1	a_2	b_1	b_2
-1,750244	1	-0,386459	0,882813
-1,113523	1	-0,022408	0,832597
1,521994	1	-0,597490	0,961424
1,994328	1	0,345041	0,865826
0	-1	0,592362	0,952990
$A_k = 8,007652E-004$			

Fig. 1. — Spécifications en affaiblissement d'un filtre passe-bande et les courbes de réponse.

l'affaiblissement à la fin (ou au début) de la bande passante :

$$\varepsilon^2 = 10^{\text{spec}/10} - 1$$

où spec représente la spécification en dB à la fréquence considérée.

On pose :

$$(6) \quad \varepsilon \cdot F(z) = K \cdot (1 - z^{-1})^{n_0} \cdot (1 + z^{-1})^{m_n} \times \prod_{i=1}^n (1 - 2 \cdot \cos \varphi_{pi} \cdot z^{-1} + z^{-2})$$

$$H(z) = (1 - z^{-1})^{m_0} \cdot (1 + z^{-1})^{m_n} \times \prod_{i=1}^m (1 - 2 \cdot \cos \varphi_{zi} \cdot z^{-1} + z^{-2})$$

où les φ_{pi} , φ_{zi} sont les positions (inconnues) des pôles et des zéros de l'affaiblissement.

Les spécifications en affaiblissement données (spec $A_f(\varphi)$) et le type de filtre (BUTTERWORTH, CHEBYSHEV, Inverse CHEBYSHEV, CAUER, autres types de filtre y compris des filtres pour lesquels le degré de $F(\varphi)$ peut être différent de celui de $H(z)$) supposé imposé, on va rechercher, pour le degré optimal, l'ensemble des pôles et zéros de l'affaiblissement à partir desquels on pourra par (5) calculer les pôles de $T(z)$.

2.2. LE PROBLÈME

Le problème est défini par les conditions suivantes :

$$(7) \quad \begin{aligned} \min A_f(\varphi) &= 0 \\ \max A_f(\varphi) &= \text{spec}_{A_f}(\varphi) \quad \text{bande(s) passantes} \\ \min A_f(\varphi) - \text{spec}_{A_f}(\varphi) &= \delta \quad \text{bande(s) atténuées} \end{aligned}$$

La solution de cet ensemble d'équations non linéaires conduit à un affaiblissement qui vérifie exactement les spécifications dans la (les) bande(s) passante(s) et les spécifications dans la (les) bande(s) atténuées(s) à une constante δ près. Cette constante δ doit être positive si le degré du filtre a été correctement choisi ; elle représente la « réserve » du filtre ; celle-ci sera utilisée judicieusement en fonction du problème posé pour améliorer l'affaiblissement dans la (les) bande(s) passante(s) ou dans la (les) bande(s) atténuée(s) ou dans les deux, et ce par modification du paramètre ε .

Le système non linéaire (7) est transformé en définissant une nouvelle fonction liée à $A_f(\varphi)$:

$$(8) \quad L(\varphi) = \ln [R(z) \cdot R(z^{-1})] \Big|_{z = \exp(j\varphi)}$$

$$(9) \quad L(\varphi) = (m_0 + m_n + 2m - n_0 - n_n - 2n) \times \ln 2 + m_0 \cdot \ln(1 - \cos \varphi) + m_n \cdot \ln(1 + \cos \varphi) + \sum_{i=1}^m \ln(\cos \varphi_{zi})^2 - \ln K + \ln \varepsilon - n_0 \cdot \ln(1 - \cos \varphi) - n_n \cdot \ln(1 + \cos \varphi) + \sum_{i=1}^n \ln(\cos \varphi - \cos \varphi_{pi})^2.$$

L'apparition d'un logarithme dans la fonction $L(\varphi)$ permet de séparer les différentes inconnues (voir (9)) et conduira ainsi à une mise en équation aisée d'un problème linéaire avec des fonctions ($S_{xj}(\varphi)$ voir (11) et (12)) faciles à calculer.

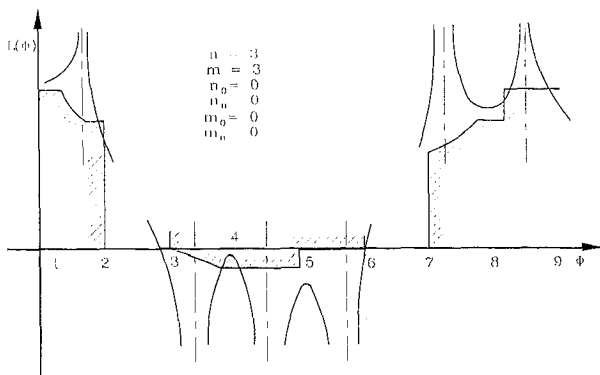


Fig. 2. — Spécifications d'un filtre passe-bande sur $L(\varphi)$.

Les spécifications en affaiblissement d'un filtre passe-bande sont transformées par (8) en des spécifications sur $L(\varphi)$ ($\text{spec}_L(\varphi)$) comme le montre la figure 2.

Si la fonction d'erreur est définie par $E(\varphi) = L(\varphi) - \text{spec}_L(\varphi)$, le nouveau problème à résoudre s'écrit :

$$(10) \quad \begin{aligned} \max E(\varphi) &= 0 \quad \text{dans la (les) bande(s) passante(s)} \\ \min E(\varphi) &= \delta_L \quad \text{dans la (les) bande(s) atténuée(s)} \end{aligned}$$

où δ_L représente la « réserve » par rapport aux spécifications modifiées $\text{spec}_L(\varphi)$.

Pour un degré fixé (voir § 2.3), on définit un ensemble de fréquences dites « essentielles » ; ce sont les fréquences des minima de $E(\varphi)$ dans la (les) bande(s) atténuée(s) et des maxima dans la (les) bande(s) passante(s) (on notera que l'on y inclut les limites des bandes de fréquence et que l'on tient compte des discontinuités des spécifications, comme illustré à la fig. 2).

L'examen de divers types de filtres (passe-bas, passe-bande, BUTTERWORTH, CHEBYSHEV, CAUER, ...) montre que le nombre de fréquences essentielles est $n + m + 2$ dans le cas des filtres passe-bas ou passe-haut et $n + m + 3$ pour les filtres passe-bande ou réjecteur de fréquence. Ceci s'explique par le fait qu'il n'y a qu'un seul minimum ou maximum entre 2 pôles ou 2 zéros auxquels on doit ajouter les limites des bandes de fréquence. Le nombre de paramètres est de $n + m + 2(n\varphi_{pi}, m\varphi_{zi}, K \text{ et } \delta_L)$.

Afin déviter la résolution d'un ensemble d'équations non linéaires, on remplace la fonction $L(\varphi)$ par son développement en série de TAYLOR limité aux termes du premier ordre :

$$(11) \quad \begin{aligned} L^{i+1}(\varphi) &= L^i(\varphi) + \sum_{j=1}^{n+m+2} \frac{\delta L^i(\varphi)}{\delta x_j} \cdot D_{x_j}^{i+1} \\ &= L^i(\varphi) + \sum_{j=1}^{n+m+2} S_{x_j}(\varphi) \cdot D_{x_j}^{i+1}. \end{aligned}$$

Dans cette équation, $L^i(\varphi)$ représente la fonction $L(\varphi)$ à l'itération i ,

$$D_{x_j}^{i+1} = x_j^{i+1} - x_j^i$$

et

$$x = [\varphi_{p1}, \dots, \varphi_{pn}, \varphi_{z1}, \dots, \varphi_{zm}, K, \delta_L]^t.$$

Le problème à résoudre est maintenant linéaire et il s'écrit :

$$(12) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_{\varphi_{zj}}(\varphi_k) \cdot D_{\varphi_{zj}}^{i+1} + \sum_{j=1}^m S_{\varphi_{pj}}(\varphi_k) \cdot D_{\varphi_{pj}}^{i+1} + S_K(\varphi_k) \cdot D_K^{i+1} + S_{\delta_L}(\varphi_k) \cdot D_{\delta_L}^{i+1} - X &= \\ &= \text{spec}_L(\varphi_k) - L^i(\varphi_k) \end{aligned}$$

où φ_k appartient soit à l'ensemble des fréquences essentielles situées dans la (les) bande(s) passante(s) ($X = 0$ dans (12)), soit dans la (les) bande(s) atténuée(s) ($X = \delta_L$ dans (12)).

Dans le cas des filtres passe-bande ou réjecteur de fréquence, on doit éliminer une des fréquences essentielles dans (12) puisque le nombre d'équations est supérieur

d'une unité au nombre des paramètres. On choisit entre les deux fréquences essentielles les plus voisines de 0 et $F_c/2$, celle pour laquelle les spécifications sont le mieux vérifiées (par exemple, à la fig. 2, on élimine la fréquence essentielle 1).

La fonction $L(\varphi)$ ayant été remplacée par son développement tronqué (11), la résolution de (10) est réalisée par une méthode itérative : à chaque étape, on calcule les fréquences essentielles et on résout (12). La convergence est garantie si les conditions suivantes sont satisfaites [2] :

$$\text{si } \varphi_1 < \varphi_{zj}^i(\varphi_{pj}^i) < \varphi_{l+1}$$

alors, on doit avoir :

$$\varphi_1 < \varphi_{zj}^{i+1}(\varphi_{pj}^{i+1}) < \varphi_{l+1}.$$

2.3. LES CHOIX INITIAUX

L'objectif de ce travail est de développer un algorithme entièrement automatique pour le calcul des filtres RII ; pour obtenir le filtre optimal pour des spécifications données, il faut pouvoir estimer le degré initial et être capable de le modifier durant le déroulement de l'algorithme de calcul.

Pour les filtres passe-bas de type BUTTERWORTH et CHEBYSHEV des formules analytiques existent [3] ; pour les autres filtres (passe-haut, passe-bande, réjecteur de fréquence) le degré est obtenu par des formules de transformation de fréquence [3].

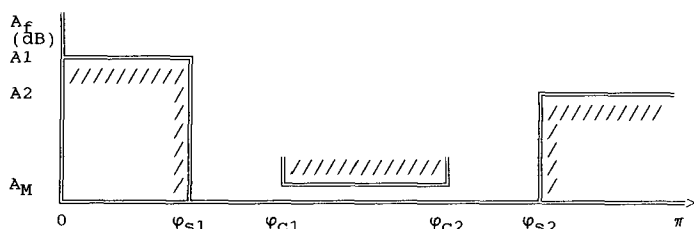


Fig. 3. — Spécifications moyennes d'un filtre passe-bande.

Pour les filtres de CAUER (elliptique), on estime des spécifications moyennes dans la (les) bande(s) passante(s) dont on déduit la valeur de ε^2 ; dans la (les) bande(s) atténuée(s), on estime deux paramètres liés aux spécifications et qui représentent des spécifications moyennes (A_1 , A_2 : voir fig. 3) et deux autres paramètres liés à la largeur des bandes dans un plan transformé [8] :

$$(13) \quad D_{1,2} = 1/2 \cdot \frac{\cos \varphi_{s1,2} - \cos \varphi_{c2}}{\cos \varphi_{s1,2} - \cos \varphi_{c1}} - 1/2 \\ \times \frac{\cos \varphi_{1,2} - \cos \varphi_{c2}}{\cos \varphi_{1,2} - \cos \varphi_{c1}} \quad \varphi_{1,2} = 0, \pi$$

Le nombre de pôles d'affaiblissement dans chaque bande atténuée est estimé à partir de l'expression [8] :

$$N_{1,2} = \left\lceil \frac{0,115 \cdot A_{1,2} + 1,39 - 1/2 \cdot \ln \varepsilon^2}{\ln (\coth (D_{1,2}/4)) + 0,693} \right\rceil$$

où $[x]$ représente la partie entière de x . On en déduit $n = m = N_1 + N_2$. Les zéros et les pôles d'affaiblissement (φ_{zi} et φ_{pi}) sont uniformément répartis dans les différentes bandes de fréquence.

2.4. L'ALGORITHME ITÉRATIF

Ayant estimé les valeurs initiales des différents paramètres et calculé les fréquences essentielles, la solution du système d'équations linéaires (12) fournit les paramètres inconnus (les φ_{zj} , les φ_{pj} , K et δ_L), éventuellement modifiés pour vérifier les tests de convergence ; on calcule ensuite le nouvel ensemble des fréquences essentielles et on recommence le processus jusqu'à la solution du problème. On a ainsi défini un algorithme du type d'échange de REMES [1] pour lequel les conditions d'optimalité sont bien connues : le nombre de fréquences essentielles pour lesquelles la fonction d'erreur vérifie les conditions (10) doit au moins être égal au nombre d'inconnues plus une, ce qui est évidemment le cas du système (12). En cours du processus itératif, on teste la valeur de δ_L : si après quelques itérations cette valeur est négative, on augmente le degré ; au contraire, si δ_L est positif, on diminue le degré et ce jusqu'au degré optimal (en veillant bien entendu à ne pas entrer en oscillation entre deux degrés tels que δ_L soit positif pour l'un et négatif pour l'autre).

A la fin du processus itératif, les φ_{zj} , les φ_{pj} , K et δ_L sont connus et on choisit une répartition de la réserve (δ'_L) entre les différentes bandes de fréquence par modification du paramètre ε :

$$\varepsilon'^2 = \varepsilon^2 \cdot \exp (\delta'_L - \delta_L)$$

où δ'_L vaudra 0 si la réserve est entièrement placée dans la (les) bande(s) passante(s), $\delta'_L = \delta_L$ si la réserve est placée entièrement dans la (les) bande(s) atténuée(s) et $\delta'_L < \delta_L$ si on répartit la réserve entre les différentes bandes (passante et atténuée).

A ce stade, le filtre est entièrement défini et on calcule les pôles de la fonction de transfert par la recherche des racines de l'équation (5) (par une méthode de type Newton-Raphson ou un algorithme de Laguerre [4]).

Ce premier algorithme permet donc de résoudre la plupart des problèmes d'approximation qui ne portent que sur des spécifications en affaiblissement. Il ne demande que la résolution d'un système d'équations linéaires à chaque itération et les tests de convergence sont établis, ce qui explique son extrême rapidité. On verra en outre que les résultats fournis par cet algorithme constituent le point de départ de l'algorithme d'approximation simultanée.

La figure 1 présente les spécifications d'un filtre passe-bande ainsi que les courbes de réponse du filtre optimal de CAUER de degré 10.

3. Approximation simultanée de l'affaiblissement et du temps de propagation de groupe

3.1. LE PROBLÈME

Dans une seconde étape, on va considérer des spécifications tout à fait quelconques sur l'affaiblissement (tolérances supérieures et inférieures autour d'une courbe donnée dans la (les) bande(s) passante(s)). Dans la (les) bande(s) atténuée(s) on désire couvrir les mêmes possibilités que celles décrites pour la première méthode. En outre dans la (les) bande(s) passante(s) des spécifications sur la distorsion du temps de propagation de groupe sont imposées ; il s'agit de spécifications autour d'une constante τ_0 inconnue a priori (fig. 4). Ces spécifications peuvent couvrir l'entièreté de la (des) bande(s) passante(s) ou seulement une partie de celle(s)-ci.

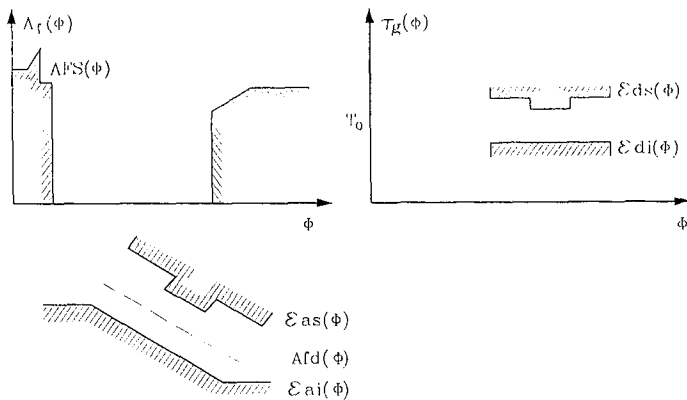


Fig. 4. — Spécifications simultanées dans la bande passante.

La fonction de transfert (dont le degré est fixé) est maintenant considérée sous sa forme factorisée :

$$(14) \quad T(z) = A_k \cdot \frac{\prod_{i=1}^M (1 + a_{1i} \cdot z^{-1} + a_{2i} \cdot z^{-2})}{\prod_{i=1}^N (1 + b_{1i} \cdot z^{-1} + b_{2i} \cdot z^{-2})}$$

L'affaiblissement $A_f(\varphi)$ est donné par

$$(15) \quad A_f(\varphi) = -10 \times \left(\log A_k^2 + \sum_{i=1}^M \log N_i(\varphi) - \sum_{i=1}^N \log D_i(\varphi) \right)$$

avec

$$(16) \quad N_i(\varphi) = 1 + a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + 2 a_{1i}(1 + a_{2i}) \cos(\varphi) + 2 a_{2i} \cos 2\varphi$$

$$D_i(\varphi) = 1 + b_{1i}^2 + b_{2i}^2 + 2 b_{1i}(1 + b_{2i}) \cos(\varphi) + 2 b_{2i} \cos 2\varphi.$$

Le temps de propagation de groupe $\tau_g(\varphi)$ (dérivée de la phase) se calcule par :

$$(17) \quad \tau_g(\varphi) = \sum_{i=1}^M \frac{E_i}{N_i} - \sum_{i=1}^N \frac{F_i}{D_i}$$

avec

$$(18) \quad E_i = a_{1i}^2 + 2 a_{2i}^2 + a_{1i}(1 + 3 a_{2i}) \cos \varphi + 2 a_{2i} \cos 2\varphi$$

$$F_i = b_{1i}^2 + 2 b_{2i}^2 + b_{1i}(1 + 3 b_{2i}) \cos \varphi + 2 b_{2i} \cos 2\varphi.$$

Comme pour la première méthode, on définit un ensemble de fréquences essentielles pour l'affaiblissement et pour le temps de propagation de groupe ; toutefois, en l'occurrence les zones de transition doivent être contrôlées pour éviter des valeurs importantes du gain dans ces zones. En effet, les spécifications sur le temps de propagation de groupe conduisent à une prolongation de la (des) bande(s) passante(s) dans les zones de transition. Dans le but de contrôler l'affaiblissement dans les zones de transition, on lui impose d'être supérieur aux spécifications inférieures de la (des) fin(s) de bande(s) passante(s) (cf. fig. 4).

La solution doit vérifier les conditions suivantes :

* $A_{fs}(\varphi_i) \leq A_f(\varphi_i)$, $\varphi_i \in$ l'ensemble des minima de $A_f - A_{fs}$ dans la (les) bande(s) atténuées(s) : D_1

* $A_{fd}(\varphi_i) - d_1 \cdot \varepsilon_{ai}(\varphi_i) \leq A_f(\varphi_i)$, $\varphi_i \in$ l'ensemble des minima de $A_f - A_{fd}$ dans la (les) bande(s) passante(s) : D_2

* $A_{fd}(\varphi_i) + d_1 \cdot \varepsilon_{as}(\varphi_i) \geq A_f(\varphi_i)$, $\varphi_i \in$ l'ensemble des maxima de $A_f - A_{fd}$ dans la (les) bande(s) passante(s) : D_3

(19) * $A_{fd}(\varphi_i) - \varepsilon_{ai}(\varphi_i) \leq A_f(\varphi_i)$, $\varphi_i \in$ l'ensemble des minima de $A_f - A_{fd}$ dans la (les) zone(s) de transition : D_6

* $\tau_0 - d_2 \cdot \varepsilon_{di}(\varphi_i) \leq \tau_g(\varphi_i)$, $\varphi_i \in$ l'ensemble des minima de τ_g dans la (les) bande(s) passante(s) : D_4

* $\tau_0 + d_2 \cdot \varepsilon_{ds}(\varphi_i) \geq \tau_g(\varphi_i)$, $\varphi_i \in$ l'ensemble des maxima de τ_g dans la (les) bande(s) passante(s) : D_5 .

La minimisation des paramètres τ_0 , d_1 and d_2 conduit à la solution optimale. Si $d_1 = d_2 = d$ on réalise l'optimisation simultanée de l'affaiblissement et du temps de propagation de groupe, si $d_1 = d$ et $d_2 = 1$, l'affaiblissement est optimisé et les spécifications de distorsion de temps de propagation de groupe vérifiées, tandis que si $d_1 = 1$ et $d_2 = d$, les spécifications en affaiblissement sont vérifiées et le temps de propagation de groupe optimisé.

On se trouve de nouveau devant un algorithme d'échange de type REMES où à chaque itération on calcule un nouvel ensemble de fréquences essentielles ; la solution sera donc optimale si le nombre d'inégalités de (19) exactement vérifiées est au moins égal au nombre d'inconnues plus une [1].

3.2. L'ALGORITHME

Comme dans la section 2, on linéarise les inégalités (19) en remplaçant $A_f(\varphi)$ et $\tau_g(\varphi)$ par leur développement en séries de Taylor tronqué :

$$A_f^{i+1}(\varphi) = A_f^i(\varphi) + \sum_{j=1}^n \frac{\delta A_f^i(\varphi)}{\delta x_j} \cdot D_{x_j}^{i+1} \quad (20)$$

$$\tau_g^{i+1}(\varphi) = \tau_g^i(\varphi) + \sum_{j=1}^n \frac{\delta \tau_g^i(\varphi)}{\delta x_j} \cdot D_{x_j}^{i+1}$$

où $x = [(a_{1i}, a_{2i}), i = 1 \dots M; (b_{1i}, b_{2i}), i = 1 \dots N; A_k]^t$.

Le problème à résoudre peut donc s'écrire : « minimiser d sous les contraintes linéaires suivantes » :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\delta A_f^i}{\delta x_j} \cdot D_{x_j}^{i+1} \geq A_{fs}(\varphi_i) - A_f^{i+1}(\varphi_i) \quad \varphi_i \in (D_1 + D_6)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\delta A_f^i}{\delta x_j} \cdot D_{x_j}^{i+1} + \varepsilon_{ai}(\varphi_i) \cdot d \geq A_{fd}(\varphi_i) - A_f^{i+1}(\varphi_i) \quad \varphi_i \in D_2$$

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\delta A_f^i}{\delta x_j} \cdot D_{x_j}^{i+1} + \varepsilon_{as}(\varphi_i) \cdot d \geq A_{fd}(\varphi_i) - A_f^{i+1}(\varphi_i) \quad \varphi_i \in D_3$$

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\delta \tau_g^i}{\delta x_j} \cdot D_{x_j}^{i+1} + \varepsilon_{ds}(\varphi_i) \cdot d + \tau_0 \geq \tau_g^{i+1}(\varphi_i) \quad \varphi_i \in D_5$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\delta \tau_g^i}{\delta x_j} \cdot D_{x_j}^{i+1} + \varepsilon_{di}(\varphi_i) \cdot d - \tau_0 \geq -\tau_g^{i+1}(\varphi_i) \quad \varphi_i \in D_4.$$

Le problème (21) n'est rien d'autre qu'un problème de programmation linéaire qui sera résolu sous sa forme directe ou duale [5]; on en déduit un algorithme itératif similaire à celui de la section 2 (la recherche des fréquences essentielles et la résolution de (21) à chaque itération) dont le résultat fournira les paramètres optimaux d , τ_0 et x . La convergence sera garantie par les contraintes suivantes :

$$|D_{x_j}| \leq V_{x_j} \quad j = 1 \dots n$$

$$A_k > 0$$

où la borne de variation des inconnues V_{x_j} est différente pour chaque paramètre (par exemple pour b_{2i} : $(1 - b_{2i})/20$) et sert non seulement à assurer la convergence (puisque la limitation des variations des paramètres assure que la linéarisation est valable) mais aussi à garantir la stabilité du filtre (puisque partant d'un filtre stable on interdit à chaque itération des variations des paramètres susceptibles de conduire à un filtre instable).

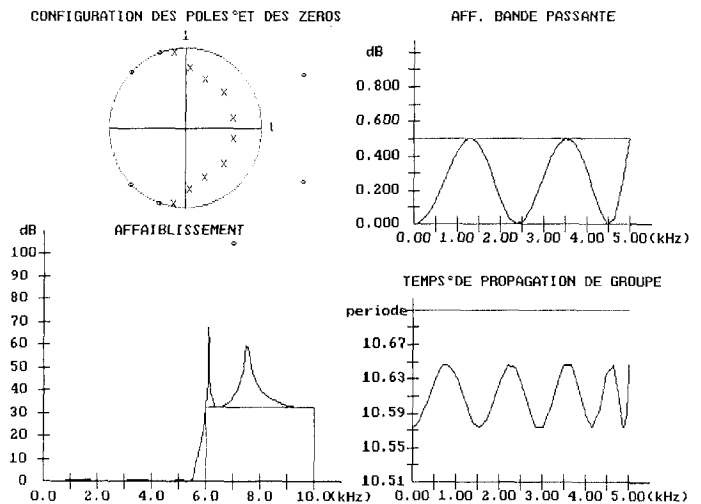
3.3. APPLICATION DE L'ALGORITHME

Dans le cas de spécifications simultanées sur l'affaiblissement et sur le temps de propagation de groupe, le point de départ de l'algorithme sera la solution qui satisfait les spécifications sur l'affaiblissement seules. Cette solution est fournie par la première méthode ; on peut être amené à modifier les spécifications dans la (les) bande(s) passante(s) pour satisfaire aux contraintes de cette méthode. Le second algorithme est appliqué à la fonction de transfert $T(z)$ ainsi obtenue pour prendre en compte les spécifications complètes d'affaiblissement et pour minimiser la distorsion de temps de propagation de groupe.

Il est évident que la vérification simultanée de spécifications en affaiblissement et en temps de propagation de groupe impose une augmentation du degré de la fonction de transfert $T(z)$. Afin d'éviter une modification de l'affaiblissement, on augmente le degré en ajoutant des sections du premier ou du second degré de type « passe-tout » comme point de départ :

$$(23) \quad T(z) \Rightarrow T(z) \cdot \prod_{i=1}^l \frac{b_{2i} + b_{1i} \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 + b_{1i} \cdot z^{-1} + b_{2i} \cdot z^{-2}}$$

La solution optimale au sens de REMES sera obtenue en libérant les paramètres de ces sections supplémentaires de toutes contraintes : la structure « passe-tout » sera détruite durant l'algorithme itératif.



a_1	a_2	b_1	b_2
0,675627	1	0,310268	0,900411
1,426598	1	-0,520099	0,428304
-6,985210	15,722559	-1,246241	0,404932
-3,116443	2,873927	-1,002215	0,452674
-1,274241	2,637391	-1,232476	0,577994
$A_k = 1,430793E-003$			

Fig. 5. — Optimisation simultanée du filtre passe-bas de DECZKY.

Le choix comme point de départ de la fonction de transfert solution du premier algorithme appliqué aux spécifications en affaiblissement est très important car il permet d'assurer la stabilité de la solution finale et facilite le choix des paramètres des sections de type « passe-tout » qu'il faut ajouter pour l'approximation simultanée.

3.4. EXEMPLES

L'efficacité de l'algorithme est illustrée par l'application de plusieurs méthodes au même exemple : le filtre passe-bas du 4^e ordre de DECZKY [6] :

$$\begin{aligned} 0 \leq A_f \leq 0,5 \text{ dB} & & 0 \leq f \leq 5 \text{ kHz} \\ 32 \leq A_f \text{ dB} & & 6 \leq f \text{ kHz} \end{aligned}$$

avec une fréquence d'échantillonnage de 20 kHz.

Après l'optimisation du temps de propagation de groupe par addition de 4 sections « passe-tout », DECZKY obtient une distorsion de 1,32 périodes. INUKAI [7] obtient pour le même degré 12 une distorsion de 0,16 période (amélioration considérable due au fait que les structures « passe-tout » sont détruites). L'algorithme décrit, pour un filtre du 10^e ordre, conduit à une distorsion de temps de propagation de groupe de 0,07 période (fig. 5) ce qui montre son efficacité.

La figure 6 présente les résultats obtenus pour un filtre passe-bas pour lequel les spécifications en affaiblissement se situe autour d'une droite dans la bande passante.

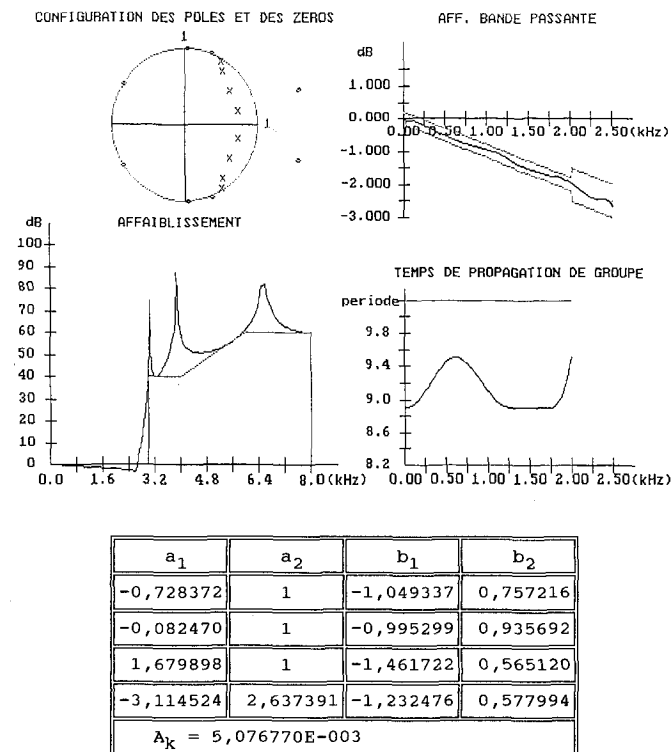


Fig. 6. — Filtre passe-bas.

4. Conclusions

Deux méthodes itératives d'approximation pour filtres RII ont été présentées ; la première s'applique à la vérification des spécifications en affaiblissement pour différents types de filtres (passe-bas, passe-bande, passe-haut et réjecteur de fréquence) et différentes caractéristiques d'approximation (BUTTERWORTH, CHEBYSHEV, INVERSE-CHEBYSHEV, CAUER, ...). Le problème a été linéarisé pour pouvoir être résolu aisément par un algorithme itératif. La seconde a été développée pour pouvoir vérifier des spécifications simultanées sur l'affaiblissement et sur le temps de propagation de groupe en utilisant la solution fournie par la première méthode comme point de départ ; à chaque itération on doit résoudre un problème de programmation linéaire. La convergence des deux algorithmes est assurée et ils fournissent la solution optimale au sens de REMES du problème.

Il est clair qu'une méthode semblable peut être développée pour l'approximation de spécifications simultanées en affaiblissement et en phase (au lieu du temps de propagation de groupe).

Les deux algorithmes présentés ont été développés en Turbo-Pascal sur un ordinateur de type IBM PC compatible ; ils sont entièrement automatiques et ne demandent à l'utilisateur que la description des données. La première méthode est très rapide : le temps de calcul est de l'ordre de quelques secondes (la majorité de ce temps est constitué par le stockage des résultats) ; pour l'approximation simultanée, l'utilisation des techniques de programmation linéaire conduit à des temps de calcul d'une dizaine de secondes. Le programme associé à la première méthode (affaiblissement seul) comporte environ 2 500 lignes et occupe 140 kbytes de mémoire ; le second programme (approximation simultanée) comporte 1 000 lignes et demande 75 kbytes de mémoire. Les versions exécutable de ces deux programmes sont disponibles pour toutes utilisations non commerciales.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. R. RICE, *The approximation of functions*, Reading Mass. Addison-Wesley Publ. C 1964.
- [2] H. J. ORCHARD, G. C. TEMES, « An iterative procedure for automatic filter synthesis », *IEEE Trans. on Circuit Theory*, V. CT-12, March 1965, pp. 107-112.
- [3] R. BOITE, H. LEICH, *Les filtres numériques*, Masson 1990.
- [4] H. J. ORCHARD, « The Laguerre method for finding the zeros of polynomials », *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, V. 36, n° 11, nov. 1989, pp. 1377-1381.
- [5] G. HADLEY, *Linear programming*, Addison-Wesley Publ. 1963.
- [6] A. G. DECZKY, « Synthesis of recursive digital filters using the minimum p-error criterion », *IEEE Trans. on audio and elec.*, V. AU-20, n° 4, oct. 1972, pp. 257-263.
- [7] T. INUKAI, « A unified approach to optimal recursive digital filter design », *IEEE Trans. on circuits and systems*, V. CAS-27, n° 2, July 1980, pp. 646-649.

- [8] B. R. SMITH and G. C. TEMES, « An iterative approximation procedure for automatic filter synthesis », *IEEE Trans. on Circuit Theory*, V. CT-12, March 1965, pp. 107-112.
- [9] A. T. CHOTTERA and G. A. JULIEN, « A linear programming approach to recursive digital filter design with linear phase », *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, V. CAS-29, n° 3, March 1982, pp. 139-149.
- [10] T. P. LEE, W. T. NYE and A. L. TITS, « Design of digital filters using interactive optimization », *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, V. CAS-30, n° 11, nov. 1983, pp. 821-824.
- [11] G. CORTELAZZO and M. R. LIGHTNER, « Simultaneous design in both magnitude and group-delay of IIR and FIR filters based on multiple criterion optimization », *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Proc.*, V. ASSP-32, n° 5, oct. 1984, pp. 949-967.
- [12] T. SARAMAKI and Y. NEUVO, « Digital filters with equiripple magnitude and group-delay », *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Proc.*, V. ASSP-32, n° 6, déc. 1984, pp. 1194-1200.

Manuscrit reçu le 14 mai 1990.