

Analyse en composantes indépendantes et identification aveugle ⁽¹⁾

Independent component analysis and blind identification



P. COMON

Laboratoire Traitement du Signal,
THOMSON-SINTRA, Parc de Sophia
Antipolis, BP 138, 06561 Valbonne
Cedex, France

Pierre Comon a obtenu le Doctorat INPG en 1985, il est affilié au laboratoire CEPHAG de 1983 à 1986, puis en 1987 il visite le laboratoire Information Systems à l'Université de Stanford. En 1988, il quitte le CNRS pour entrer à Thomson-Sintra dans le service d'Études Amont, département de Sophia Antipolis. Activités : théorie du signal, algorithmique numérique adaptative, détection et localisation de signaux sonar, réseaux de neurones. Il peut être joint par courrier électronique à l'adresse comon@mirsainria.fr.

RÉSUMÉ

L'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI) consiste en la recherche d'une transformation linéaire permettant l'obtention d'un résumé (exhaustif ou comprimé) des données sous forme de composantes statistiquement indépendantes. Ce concept peut être vu comme une extension de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) par le recours aux statistiques d'ordre supérieur à deux. Après avoir défini l'ACI et décrit un moyen pour l'obtenir, nous montrons comment ce nouvel outil

peut être utilisé pour la séparation de signaux linéairement mélangés et la déconvolution aveugle.

MOTS CLÉS

Composantes indépendantes, Composantes principales, Séparation de signaux, Egalisation aveugle, Détection bayésienne, Indépendance statistique, Classification.

SUMMARY

Independent Component Analysis (ICA) consists of searching a linear transformation that provides us with an exhaustive (or compressed) summary of the data in the form of statistically independent components. This concept may be seen as an extension of Principal Component Analysis, which only imposes independence up to the second order. ICA is first defined, and then algorithms for its calculation are proposed. It is

shown how this new tool can be used in various applications, such as separation of signals, Bayesian detection, or blind deconvolution.

KEY WORDS

Independent components, Principal components, Signal separation, Equalization, Bayesian detection, Blind deconvolution, Mutual independence.

Introduction

TERMINOLOGIE

Le problème que nous nous proposons d'étudier dans cet article est parfois appelé « séparation de sources », ou « séparation de mélanges ». Il s'agit en réalité d'un problème de déconvolution, qualifié d'« aveugle » car seule la sortie du filtre linéaire est observée. Pour fixer les idées notons $\mathbf{x}(t)$ un processus aléatoire stationnaire de dimen-

sion M , \mathbf{B} une transformation linéaire stationnaire, et $\mathbf{y}(t)$ le processus observé de dimension N défini par :

$$(1) \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{B} \{ \mathbf{x}(t) \} + \mathbf{b}(t).$$

Le terme $\mathbf{b}(t)$ est un bruit additif, que l'on peut passer sous silence s'il est gaussien grâce à l'utilisation de cumulants d'ordre supérieur à deux. Nous nous placerons tout d'abord dans ce cas, avant d'aborder le problème du bruit additif non gaussien. En d'autres termes, puisque nous nous intéresserons dans toute la suite uniquement aux processus à temps discret où $t \in \mathbb{Z}$, la relation (1) s'écrit :

⁽¹⁾ Ce travail a été en partie financé par un contrat DRET en 1989.

$$(2) \quad y(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_i x(t-i),$$

où chaque coefficient B_i est une matrice $N \times M$. Chacun des N processus observés est donc un mélange linéaire des composantes du processus dit « source », $x(t)$; d'où la terminologie employée. Afin que le problème soit soluble, on suppose en outre que les composantes $x_m(t)$ du processus source sont statistiquement indépendantes, et que la matrice B_0 est de rang plein. Le problème le plus simple est celui où la transformation B est réduite à une transformation instantanée, en présence de bruit gaussien ou non :

$$(3) \quad y(t) = B_0 x(t).$$

Ce problème sera résolu dans les deuxième et troisième parties pour M inférieur à N . Si M est supérieur à N , les $M - N$ sources les plus faibles seront vues comme du bruit additif. Dans le cas d'une transformation convolutive, la complexité est similaire si les processus $y(t)$ ou $x(t)$ sont à bande étroite, puisque la relation entrée-sortie reste de la forme (3). En revanche, pour des processus à bande large, il faudra partir de la relation (2); ce cas sera abordé ensuite dans la partie 3. L'utilisation de fonctions de contraste permet en outre de traiter les observations entâchées de bruit non gaussien.

CONTEXTE HISTORIQUE

La séparation de signaux est un problème qui a été soulevé à l'origine par Jutten dans sa thèse d'État [1], sous l'hypothèse d'un mélange instantané. La technique envisagée était basée sur un réseau d'automates linéaires neuro-mimétiques totalement interconnectés; on peut voir ce réseau comme un réseau stratifié (perceptron) à une seule couche et à connexions latérales récurrentes [2]. En analysant la règle d'évolution des poids des interconnexions, il a été montré que ce réseau tend à annuler en parallèle plusieurs fonctionnelles à l'aide d'un algorithme stochastique de type Robbins-Monro [3]. Un certain nombre de méthodes de séparation ont été répertoriées deux ans plus tard dans le cadre d'applications aux radiocommunications [4]; les méthodes de séparation étaient essentiellement basées sur l'exploitation des différences (réalistes) existant entre les propriétés statistiques des sources; ce sont donc des méthodes de type plus classique.

L'analyse en composantes indépendantes, ainsi que les autres techniques que nous mentionnons dans ce paragraphe, n'exploitent pas les différences éventuelles existant entre les propriétés statistiques des sources, mais sont mêmes capables de séparer des sources indépendantes de statistiques strictement identiques. La première approche du problème sous un angle statistique est présentée peu après dans [5], [5b]; dans ces travaux, Lacoume et Ruiz proposent de minimiser une fonction objectif basée sur les cumulants croisés des sorties du filtre inverse, qui sont les outils naturels de mesure d'indépendance. Cette fonction est multimodale et il faut faire appel à une recherche exhaustive pour déterminer les minima absolus, ce qui limite l'utilisation pratique de cette approche pour des raisons de complexité numérique.

En 1989, Cardoso et Comon proposent indépendamment deux nouvelles techniques d'identification basées sur les cumulants des observations [6], [7]. La première fait appel à la décomposition en éléments propres du tenseur cumulant d'ordre 4, considéré comme opérateur linéaire hermitien sur l'espace des matrices $N \times N$; la deuxième paramétrise la transformation par des rotations planes et exploite une relation intrinsèque liant les cumulants des observations (résultant de la linéarité de la transformation). Seules, les deux dernières approches permettent de séparer $M = N$ sources à l'aide de T observations en un temps polynomial⁽²⁾, même si elles ont des propriétés statistiques strictement identiques. Le premier de ces deux algorithmes, décrit également dans ce numéro, est plus coûteux que le second de plusieurs ordres de grandeur mais permet en revanche d'identifier la transformation B_0 même si $M > N$, ce qu'aucune autre approche ne permettait d'imaginer jusqu'alors. Nous décrivons le second dans cet article.

1. Préliminaires

Dans cette partie, on s'intéresse au problème du mélange instantané (3) dans les circonstances où $M \leq N$. On définit tout d'abord l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI), concept déjà évoqué informellement par Jutten et Héroult dans [2]. Puis après avoir montré la suffisance de l'indépendance par paires, nous présentons un algorithme spécifique de diagonalisation capable de calculer l'ACI et requérant de l'ordre de N^3 multiplications. La convergence de cet algorithme est ensuite analysée en détail.

1.1. CUMULANTS STANDARDISÉS

(4) DÉFINITION : Soit \mathbb{E} un ensemble de variables aléatoires de dimension N stable⁽³⁾ par transformation linéaire régulière. Soit \mathbb{E}_2 le sous-ensemble de \mathbb{E} des variables aléatoires ayant une matrice de covariance finie et régulière. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_2$, on définit les variables standardisées :

$$\bar{\mathbf{x}} = L^{-1} \mathbf{x},$$

où L est le facteur triangulaire inférieur dans la factorisation de Cholesky $\mathbb{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = LL^H$. En d'autres termes, les composantes \bar{x}_i de la variable aléatoire $\bar{\mathbf{x}}$ sont toutes décorrélatées et de variance unité.

(5) DÉFINITION : Soit \mathbb{E}_4 le sous-ensemble de \mathbb{E}_2 des variables aléatoires d'ordre 4 (i.e. ayant des moments finis jusqu'à l'ordre 4). Pour toute v.a. $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_4$, on définit des cumulants standardisés d'ordre 4 par :

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{x}) = \text{cum}(\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}^*, \bar{x}_{i_3}, \bar{x}_{i_4}^*);$$

$$\forall (i_1, \dots, i_4) \in \{1, 2, \dots, N\}^4.$$

⁽²⁾ La complexité de l'approche [2] n'admet pas de borne supérieure théorique. L'approche [5] est de complexité exponentielle; en effet elle nécessite de l'ordre de $\alpha\beta^N$ opérations, α et β étant des constantes. La complexité de la méthode [6] est de l'ordre de N^6 , mais peut être ramenée à N^5 , comme nous le soulignons dans [28].

⁽³⁾ Stabilité : si $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$ et A régulière, alors $A\mathbf{u} \in \mathbb{E}$.

(6) LEMME : Soit Q une matrice unitaire, et ${}^{2r}Q$ la matrice obtenue en élevant le module de chaque terme de la matrice Q à la puissance $2r$: ${}^{2r}Q_{ij} = |Q_{ij}|^{2r}$, $r \in \mathbb{N}^*$. Alors le rayon spectral ⁽⁴⁾ de la matrice M , $M = {}^{2r}Q^H {}^{2r}Q$, est inférieur à 1.

La démonstration de ce lemme est donnée en annexe.

(7) THÉORÈME : Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_4$, la quantité

$$\Omega(\mathbf{x}) = \sum_{h,i,j,k} |\gamma_{hijk}(\mathbf{x})|^2$$

reste constante par transformation linéaire régulière.

Démonstration : Soit A une matrice $N \times N$ régulière, et $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_4$; posons $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Par définition des cumulants standardisés, $\gamma(\mathbf{x}) = \text{cum}(\bar{\mathbf{x}}) = \text{cum}(H^{-1}\mathbf{x})$, avec $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = HH^H$. D'où la relation $\mathbf{y} = AH\bar{\mathbf{x}}$. Soit GQ la factorisation LQ de la matrice AH . Alors nous avons $\mathbf{y} = GQ\bar{\mathbf{x}}$, et par conséquent, $\gamma(\mathbf{y}) = \text{cum}(Q\bar{\mathbf{x}})$. Il reste à montrer que la somme des modules carrés des cumulants est invariante par transformation unitaire.

Utilisons pour cela la relation générale liant les statistiques d'ordre supérieur après transformation linéaire [10] :

$$\gamma_{ijkl}(\mathbf{y}) = \sum_{a,b,c,d} Q_{ia} Q_{jb}^* Q_{kc} Q_{ld}^* \gamma_{abcd}(\mathbf{x}).$$

On déduit immédiatement de cette relation que :

$$\Omega(\mathbf{y}) = \sum_{a,b,c,d} \sum_{e,f,g,h} \sum_{i,j,k,l} Q_{ia} Q_{jb}^* Q_{kc} Q_{ld}^* Q_{ie}^* Q_{jf} Q_{kg}^* Q_{lh} \gamma_{abcd}(\mathbf{x}) \gamma_{efgh}(\mathbf{x})^*.$$

Or $\sum_i Q_{ia} Q_{ie}^* = \delta_{ae}$ puisque $QQ^H = I$. Donc dans la somme ci-dessus ne subsistent que les termes pour lesquels $a = e$, $b = f$, $c = g$, et $d = h$, ce qui entraîne :

$$\Omega(\mathbf{y}) = \sum_{a,b,c,d} |\gamma_{abcd}(\mathbf{x})|^2 = \Omega(\mathbf{x}).$$

Ceci prouve que Ω est invariant. \square

1.2. CONTRASTE

(8) DÉFINITION : Soit \mathbb{E} défini conformément à (4). Une application Ψ de \mathbb{E} dans \mathbb{R} est baptisée « contraste » si elle satisfait les 3 conditions suivantes :

- Ψ ne dépend que de la densité de probabilité conjointe de la variable aléatoire considérée,
- Ψ est invariant par changement d'échelle : $\Psi(\Lambda\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x})$, $\forall \Lambda$ matrice diagonale régulière,
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$, et $\forall A$ matrice $N \times N$, si les composantes x_i de \mathbf{x} sont statistiquement indépendantes, alors $\Psi(A\mathbf{x}) \leq \Psi(\mathbf{x})$.

Ces fonctions de contraste ont été introduites récemment dans le cas scalaire pour étudier les filtres à réponse

⁽⁴⁾ Le rayon spectral d'une matrice est le module de sa valeur propre de plus grand module.

impulsionnelle finie dans la thèse [8]. La définition plus générale (8) reste compatible avec cette dernière.

(9) THÉORÈME : L'application de \mathbb{E}_4 dans \mathbb{R}^+ définie par :

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_i |\gamma_{iiii}(\mathbf{x})|^2$$

est un contraste.

Démonstration : La première condition exigée par (8) résulte de la définition même des cumulants [10]. L'invariance par changement d'échelle est un corollaire de la standardisation des variables (4). Examinons la troisième condition. Soit A une matrice carrée régulière et LQ sa factorisation LQ (transposée de la factorisation QR [11], où Q est unitaire et L triangulaire), et soit \mathbf{x} une v.a. de composantes statistiquement indépendantes. Alors le changement de variable $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ entraîne une variation des cumulants standardisés qui s'écrit, grâce à la propriété de multilinéarité des cumulants [10] :

$$\gamma_{abcd}(\mathbf{y}) = \sum_i Q_{ai} Q_{bi}^* Q_{ci} Q_{di}^* \gamma_{iiii}(\mathbf{x}).$$

On obtient immédiatement d'après le lemme (6) que

$$\sum_{i,j} \sum_a |Q_{ai}|^4 |Q_{aj}|^4 \gamma_{iiii}(\mathbf{x}) \gamma_{jjjj}(\mathbf{x})^* \leq \sum_k |\gamma_{kkkk}(\mathbf{x})|^2$$

puisque cela peut s'écrire aussi $\mathbf{g}^H M \mathbf{g} \leq \mathbf{g}^H \mathbf{g}$. Donc $\Psi(\mathbf{y}) \leq \Psi(\mathbf{x})$. Plus précisément, si Q est une permutation, ou si les $\gamma_{iiii}(\mathbf{x})$ sont tous nuls (dans le cas gaussien par exemple), on a l'égalité $\Psi(\mathbf{y}) = \Psi(\mathbf{x})$; en revanche, si Q n'admet pas la valeur propre 1, l'inégalité est stricte. \square

Le théorème (7) montre que la maximisation de la fonction de contraste $\Psi(\mathbf{z})$, $\mathbf{y} = A\mathbf{z}$, revient à la minimisation de l'ensemble des cumulants croisés de \mathbf{z} . Ceci nous donne une interprétation simple de ce critère d'optimisation, dont l'intérêt apparaîtra plus clairement dans le théorème de convergence (34) lorsque $N > 2$.

2. Analyse en composantes indépendantes

2.1. DÉFINITION DE L'ACI

(11) DÉFINITION : Soient $\mathbf{y}(t)$ un processus stationnaire quelconque de dimension N centré, et V_y sa matrice de covariance. L'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI) de $\mathbf{y}(t)$ est définie par le couple de matrices (A, Δ) tel que :

- A est $N \times M$ de rang plein, $N \geq M$,
- les M colonnes de A sont de norme unité,

$$(12) \quad V_y = A\Delta^2 A^H;$$

où $\Delta = \text{Diag}\{\Delta_{ii}\}$, $\Delta_{ii} > 0$, $1 \leq i \leq M$,

- la matrice Δ^2 est la covariance d'un processus $\mathbf{z}(t)$ dont les M composantes sont « les plus indépendantes possible », au sens de la maximisation d'une fonctionnelle de contraste.

Si $y(t)$ satisfait une relation telle que (3), alors tout vecteur $z(t)$ de la forme

$$z(t) = \Lambda P B_0^{-1} y(t),$$

P étant une matrice de permutation et Λ une matrice diagonale dont les éléments sont de module 1, possède une fonction de contraste maximale d'après la définition (8). En effet, les composantes de $z(t)$ étant indépendantes, tous ses cumulants croisés sont nuls, ce qui montre d'après le théorème (7) que le contraste atteint sa borne supérieure. Dans ce cas, $z(t)$ et $x(t)$ coïncident à une matrice multiplicative près de la forme ΛP , et l'ACI est définie avec cette indétermination :

$$z(t) = \Lambda P x(t).$$

Notons que les cumulants standardisés ne sont pas affectés par la matrice Λ , et que la somme de leurs modules carrés (9) est inchangée par une permutation des indices.

Réciproquement, il est nécessaire que $y(t)$ émane linéairement d'un processus de composantes indépendantes, $x(t)$, pour qu'il existe une matrice A satisfaisant exactement :

$$(13) \quad y(t) = A z(t).$$

Cette condition nécessaire est représentée par l'équation (3). La preuve est immédiate en raisonnant par l'absurde. L'indétermination de l'ACI à une matrice ΛP près n'a rien de gênant. Signalons d'ailleurs que strictement la même indétermination existe dans la factorisation spectrale d'une matrice hermitienne. Si nécessaire, on peut par conséquent s'affranchir de cette indétermination à l'aide des mêmes moyens, à savoir :

- classer les éléments de Δ par ordre décroissant (ceci fixe P),
- imposer des éléments réels positifs dans la première ligne de A (ceci fixe Λ).

D'après le théorème (7), la perturbation de la relation (3) par un bruit additif non gaussien va diminuer la valeur maximale atteignable par le contraste (9), tout en augmentant les cumulants croisés résiduels $\{\gamma_{ijkl}(z), (i, j, k, l) \neq (i, i, i, i)\}$, et en perturbant la solution A . Ce n'est que dans ce cas (toujours rencontré en pratique) que l'ACI obtenue peut dépendre du contraste adopté.

Pour éviter toute confusion, il semble opportun de souligner la différence fondamentale entre la factorisation (12) de l'ACI et la décomposition en éléments propres de V_y . La factorisation (12) est une diagonalisation de V_y par transformation congruente, où la matrice de passage A n'est pas nécessairement unitaire, contrairement à la décomposition spectrale de V_y . Les éléments diagonaux de Δ n'ont donc aucune relation particulière avec les valeurs propres de V_y . Nous reviendrons plus en détail sur ces différences dans la section 2.7.

2.2. PRINCIPE D'OBTENTION

Supposons que l'on observe une variable aléatoire y , dont on sait qu'elle émane linéairement d'une variable x de

composantes indépendantes ($\exists B/y = Bx$). Le principe de l'algorithme que nous allons décrire et utiliser est basé sur la recherche d'une matrice A telle que le vecteur z ait des composantes deux à deux indépendantes, $y = Az$. Le théorème énoncé ci-après montre que le critère d'indépendance par paires est nécessaire et suffisant, et que B se déduit de A par une permutation de colonnes ($B = PA$). Rappelons que généralement l'indépendance par paires n'entraîne pas l'indépendance globale [12].

(14) **THÉORÈME** : Soient x un vecteur de dimension N dont les composantes x_i sont des variables aléatoires statistiquement indépendantes de densité de probabilité (ddp) non réduite à une masse ponctuelle, A une matrice $N \times N$ régulière dont les colonnes sont de norme unité, et z le vecteur aléatoire $z = Ax$. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) Les composantes z_i de z sont indépendantes deux à deux.
- (ii) Les composantes z_i de z sont indépendantes dans leur ensemble.
- (iii) La matrice A est une permutation.

Démonstration : Les implications (iii) \Rightarrow (ii) et (ii) \Rightarrow (i) sont évidentes. Montrons donc la troisième, à savoir (i) \Rightarrow (iii). Notons Φ_z la fonction caractéristique de z et Φ_x celle de x . L'indépendance des x_i entraîne que

$$\Phi_x(u_1, \dots, u_N) = \prod_i \Phi_x(0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0).$$

Par ailleurs, la relation $z = Ax$ permet d'écrire

$$\Phi_z(v_1, \dots, v_N) = \Phi_x(A_1^H v, \dots, A_N^H v),$$

où A_i désigne la i -ième colonne de A ; soit, en utilisant l'hypothèse d'indépendance des composantes de x :

$$(15) \quad \Phi_z(v_1, \dots, v_N) = \prod_i \Phi_x(0, \dots, 0, A_i^H v, 0, \dots, 0).$$

D'autre part, en écrivant la définition de l'indépendance des variables z_1 et z_2 on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_z(v_1, v_2, 0, \dots) &= \Phi_z(v_1, 0, 0, \dots) \Phi_z(0, v_2, 0, \dots) \Rightarrow \\ \Phi_z(v_1, v_2, 0, \dots) &= \\ &= \Phi_x(A_{11}^* v_1, \dots, A_{1N}^* v_1) \Phi_x(A_{21}^* v_2, \dots, A_{2N}^* v_2). \end{aligned}$$

Chacun des deux termes dans cette dernière équation peut encore être décomposé en un produit de fonctions caractéristiques marginales ; on peut alors confronter le résultat obtenu et l'expression (15). On doit alors nécessairement vérifier :

$$\begin{aligned} \Phi_x(0, \dots, 0, A_{1i}^* v_1 + A_{2i}^* v_2, 0, \dots, 0) &= \\ &= \Phi_x(0, \dots, 0, A_{1i}^* v_1, 0, \dots, 0) \times \\ &\quad \times \Phi_x(0, \dots, 0, A_{2i}^* v_2, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Or les seules variables aléatoires dont la fonction caractéristique vérifie $\varphi(u+v) = \varphi(u)\varphi(v)$ sont des variables quasi déterministes (c'est-à-

dire ayant une ddp égale à une masse ponctuelle). Donc il est nécessaire que l'un des deux termes, $A_{1i}^* v_1$ ou $A_{2i}^* v_2$, soit nul. Ce résultat doit être vrai quelle que soit la valeur du couple (v_1, v_2) , ce qui entraîne :

$$\{A_{1i} = 0 \text{ ou } A_{2i} = 0\}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Le même raisonnement pouvant être à l'évidence repris pour toutes les paires de variables, on en déduit aussi :

$$(16) \quad \{A_{ji} = 0 \text{ ou } A_{ki} = 0\}, \\ \forall i, j, k \in \{1, \dots, N\}, \quad j \neq k.$$

Or, la condition de régularité sur A lui interdit d'avoir tous ses éléments nuls dans une même ligne ou colonne ; les seuls éléments pouvant être non nuls sont par conséquent $A_{\sigma(i)i}$, où σ est une permutation quelconque. La normalisation des colonnes de A entraîne finalement que A est une permutation. \square

2.4. ALGORITHMES D'OBTENTION DE L'ACI POUR N = 2

Rappelons les notations utilisées. Nous avons la variable observée, $y = Bx$, et la variable source inconnue, x . L'identification de B nous permet d'obtenir la variable z telle que $y = Az$. Nous avons vu que l'ACI est définie à une matrice ΔP près, de sorte que $z = \Delta Px$. Comme dans la décomposition en éléments propres, on peut fixer cette indétermination en classant dans (12) les éléments diagonaux de Δ^2 (les variances des sorties) par ordre décroissant ; cette permutation peut donc être fixée arbitrairement.

Résumons le principe de la procédure. Dans un premier temps, on décorrèle les observations en les filtrant par L^{-1} , L étant le facteur de Cholesky de la covariance de y : $E\{yy^H\} = LL^H$, $\bar{y} = L^{-1}y$. Dans un second temps, on évalue la transformation unitaire, Q, telle que la variable $s = Q^H \bar{y}$ soit de composantes deux à deux indépendantes. La solution s diffère légèrement de z en ce sens que ses composantes sont de variance 1. La dernière étape consiste à normaliser les colonnes de la matrice obtenue, par multiplication d'une matrice diagonale qui n'est autre que Δ . Le schéma synoptique résume les opérations successives. Nous avons finalement :

$$(17) \quad A = LQ\Delta^{-1}, \quad y = Az = LQ\Delta^{-1}z.$$

Il est clair que la factorisation LQ Δ décrite ci-dessus est redondante, et qu'il est possible d'éviter de normaliser à 1 les variances des observations pendant la première phase du traitement. Cependant, ce serait une erreur sur le plan pratique car la normalisation des observations améliore le

conditionnement numérique de l'identification de Q. Il est donc préférable d'effectuer une première normalisation en début de traitement, puis une autre en fin de traitement.

Nous avons introduit dans la section 1.1 une fonction de contraste afin de légitimer l'utilisation des cumulants standardisés ; son usage direct pour l'identification de la matrice Q conduirait à chercher le maximum absolu d'un polynôme de plusieurs variables de degré 8. Comme il n'existe pas de procédure rapide pour ce problème d'optimisation multimodal, nous nous proposons de développer un algorithme spécifique exploitant certaines propriétés fondamentales que les cumulants de y vérifient nécessairement, à cause du caractère linéaire de la transformation.

Notons γ_{hijk} les cumulants standardisés de y et κ_{hijk} ceux de z ; dorénavant on omettra de spécifier explicitement les variables puisque cela ne présente plus d'ambiguïté. Supposons dans un premier temps que N = 2.

(18) LEMME : pour N = 2 : Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Alors les cumulants de $y = Az$ satisfont toujours les relations entrée-sortie suivantes, puisque les composantes de z sont indépendantes :

$$(19a) \quad \gamma_{1111} = \kappa_{1111} \alpha^4 + \kappa_{2222} |\beta|^4 \\ (19b) \quad \gamma_{1112} = -\kappa_{1111} \beta \alpha^3 + \kappa_{2222} \beta |\beta|^2 \alpha \\ (19c) \quad \gamma_{1122} = (\kappa_{1111} + \kappa_{2222}) |\beta|^2 \alpha^2 \\ (19d) \quad \gamma_{1222} = -\kappa_{1111} \beta |\beta|^2 \alpha + \kappa_{2222} \beta \alpha^3 \\ (19e) \quad \gamma_{2222} = \kappa_{1111} |\beta|^4 + \kappa_{2222} \alpha^4.$$

Notons que cette relation est vérifiée aussi bien par les cumulants ordinaires de y, que par les cumulants standardisés γ_{hijk} lorsque $\alpha^2 + |\beta|^2 = 1$. La démonstration est immédiate. \square

Soit Q une matrice unitaire, $Q = \alpha \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -\theta^* & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\theta = \beta/\alpha$, $\alpha^2 + |\beta|^2 = 1$. On peut déduire de (19) que

$$(20a) \quad \gamma_{1111} + \gamma_{2222} = (|\theta|^4 + 1)(\kappa_{1111} + \kappa_{2222}) \alpha^4, \\ (20b) \quad \gamma_{1112} - \gamma_{1222} = \theta(|\theta|^2 - 1)(\kappa_{1111} + \kappa_{2222}) \alpha^4, \\ (20c) \quad \gamma_{1122} = |\theta|^2 (\kappa_{1111} + \kappa_{2222}) \alpha^4.$$

Cas 1 : Si $\gamma_{1122} \neq 0$, alors nous pouvons poser

$$(21) \quad \rho = \frac{\gamma_{1112} - \gamma_{1222}}{\gamma_{1122}},$$

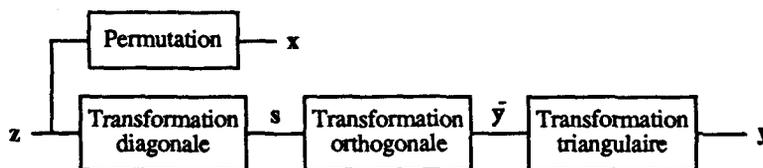


Fig. 1. — Synoptique de l'identification de A, $y = L\bar{y}$, $\bar{y} = Qs$, $s = \Delta^{-1}z$.

et éliminer les inconnues κ_{1111} et κ_{2222} dans (20) pour obtenir :

$$(22) \quad \theta\theta^* - \rho\theta^* - 1 = 0.$$

Ce trinôme a deux racines doubles, θ_0 et $\theta_1 = -1/\theta_0^*$, où $|\theta_0| \leq 1$:

$$(23) \quad |\theta_k| = (-1)^{k-1} \frac{|\rho|}{2} + \sqrt{\frac{\rho\rho^*}{4} + 1},$$

$$\arg\{\theta_k\} = \arg\{\rho\} + (k-1)\pi, k \in \{0, 1\}.$$

Dans la solution (23), les cumulants γ_{1111} et γ_{2222} ne sont pas requis, ce qui peut représenter une économie de calculs.

Cas 2 : Si $\gamma_{1122} = 0$ et $(\gamma_{1112}, \gamma_{1222}) \neq (0, 0)$.

Alors d'après (20), θ et α ne peuvent être nuls, ce qui entraîne que $(\kappa_{1111} + \kappa_{2222}) = 0$, et accessoirement $\gamma_{1112} = \gamma_{1222}$ et $\gamma_{1111} = -\gamma_{2222}$. Comme $\gamma_{1112} \neq 0$, on peut poser alors

$$(24) \quad \rho = \frac{\gamma_{1111}}{\gamma_{1112}},$$

de sorte que la solution est de nouveau régie par (22) et (23).

Cas 3 : En revanche, si $\gamma_{1122} = 0$ et si $(\gamma_{1112}, \gamma_{1222}) = (0, 0)$, alors tous les cumulants croisés sont nuls et les solutions sont $\theta = 0$ ou $\alpha = 0$ ($\theta = \infty$). On conviendra de prendre la solution de $]-1, 1]$, $\theta = 0$ (i.e. pas de transformation à appliquer), puisque les observations sont déjà indépendantes.

Ces résultats sont les éléments constitutifs de l'algorithme de séparation lorsque $N = 2$ et lorsque le bruit est gaussien :

(25) ALGORITHME, POUR $N = 2$: L'algorithme d'identification de Q lorsque $N = 2$ se résume comme suit :

- calculer les trois cumulants standardisés croisés, γ_{1222} , γ_{1122} et γ_{1112} ;
- si γ_{1122} est suffisamment grand, — on calcule θ_0 conformément à (21) et (23) ;
- si γ_{1122} est proche de zéro, — on estime en outre les cumulants γ_{1111} et γ_{2222} — puis on calcule θ_0 conformément à la procédure ci-dessous :
 - si $|\gamma_{1112} + \gamma_{1222}|$ suffisamment grand, θ_0 est donné par (23) où ρ vaut

$$(26) \quad \rho = \frac{\gamma_{1111} - \gamma_{2222}}{\gamma_{1112} + \gamma_{1222}},$$

- si $|\gamma_{1112} + \gamma_{1222}| \approx 0$, alors $\theta_0 = 0$.

La rotation de Givens Q ainsi identifiée permet de rendre les sorties (les composantes de $Q^H \bar{y}$) statistiquement indépendantes. Bien que ce ne soit pas détaillé ici, le même principe permet d'identifier Q à l'aide des cumulants d'ordre 3 ou 5, ce qui peut avoir un intérêt notamment si tous les cumulants croisés d'ordre 4 sont petits.

2.5. PRÉSENCE DE BRUIT NON GAUSSIEN

Dans tout ce qui a été présenté jusqu'à présent dans la section 2.4, on a toujours supposé que le tenseur cumulant émanait linéairement d'un tenseur diagonal, à un bruit additif gaussien près. A partir des équations (20), il est possible de voir que si le tenseur de dimension 2, noté γ_{abcd} avec $a, b, c, d \in \{i, j\}$, est diagonalisable par une transformation linéaire, alors ses éléments doivent appartenir à la variété non linéaire définie par :

$$(27) \quad |\gamma_{1112} - \gamma_{1222}|^2 - [\gamma_{1111} + \gamma_{2222}] \gamma_{1122} + 2 |\gamma_{1122}|^2 = 0.$$

En testant simplement cette condition on peut constater facilement la possibilité ou l'impossibilité de diagonaliser exactement un tenseur $2 \times 2 \times 2 \times 2$ par transformation linéaire. Si cette quantité est suffisamment faible, alors l'algorithme (25) fournira une solution approchant celle qui maximiserait le contraste ; en revanche si elle est trop élevée, l'algorithme (25) échouera. Le problème est similaire si le nombre M de sources est supérieur au nombre N de capteurs : M - N sources seront en effet vues comme du bruit. Il conviendrait alors de maximiser la fonction contraste, qui est en réalité un polynôme de degré 8 sur le disque unité. De plus, comme les valeurs θ_0 et $\theta_1 = -1/\theta_0^*$ donnent des solutions équivalentes correspondant à des angles différant de $\pi/2$, on peut descendre le degré de la fonction objectif en posant $\xi = \theta - 1/\theta^*$. Montrons-le dans le cas réel à titre illustratif.

Dans le cas réel, les indices des cumulants peuvent être permutés, ce qui allège notablement les écritures. On choisira d'ordonner les indices par ordre croissant. Alors, les cumulants standardisés marginaux après rotation plane, notés Γ_{1111} et Γ_{2222} , s'expriment en fonction des cumulants standardisés des observations de la manière suivante :

$$(28a) \quad \Gamma_{1111}/c^4 = \gamma_{2222} \theta^4 + 4 \gamma_{1222} \theta^3 + 6 \gamma_{1122} \theta^2 + 4 \gamma_{1112} \theta + \gamma_{1111},$$

$$(28b) \quad \Gamma_{2222}/c^4 = \gamma_{1111} \theta^4 - 4 \gamma_{1112} \theta^3 + 6 \gamma_{1122} \theta^2 - 4 \gamma_{1222} \theta + \gamma_{2222}.$$

La fonction de contraste $\Psi(\theta)$ s'écrit en fonction de la variable auxiliaire ξ :

$$(29) \quad \Psi(\theta) = \psi(\xi) = \frac{\left[\sum_{i=0}^4 b_i \xi^i \right]}{[\xi^2 + 4]^2}.$$

Les points stationnaires de $\psi(\xi)$ sont les racines du polynôme de degré 4 ci-dessous :

$$(30) \quad \omega(\xi) = \sum_{i=0}^4 c_i \xi^i, \quad \text{avec } ({}^{\circledast}) :$$

$$c_4 = \gamma_{1111} \gamma_{1112} - \gamma_{2222} \gamma_{1222},$$

$$c_3 = \gamma_{1111}^2 + \gamma_{2222}^2 - 4(\gamma_{1112}^2 + \gamma_{1222}^2) - 3 \gamma_{1122}(\gamma_{1111} + \gamma_{2222}),$$

$$c_2 = 3(\gamma_{1222} - \gamma_{1112})(\gamma_{1111} + \gamma_{2222} - 6 \gamma_{1122}),$$

$$c_1 = 3(\gamma_{1111}^2 + \gamma_{2222}^2) - 2 \gamma_{1111} \gamma_{2222} - 32 \gamma_{1112} \gamma_{1222} - 36 \gamma_{1122}^2,$$

(${}^{\circledast}$) L'auteur remercie son stagiaire Denis Cren pour le calcul explicite de ces coefficients.

$$c_0 = 4(\gamma_{1112} \gamma_{2222} - \gamma_{1222} \gamma_{1111} - 3 \gamma_{1112} \gamma_{1111}) + 3 \gamma_{1222} \gamma_{2222} - 6 \gamma_{1122} \gamma_{1112} + 6 \gamma_{1122} \gamma_{1222}.$$

Ce résultat est une surprise car nous nous attendions à un polynôme de degré 5. Ceci est important car les polynômes de degré 4 admettent une solution analytique explicite (que nous n'écrivons pas pour des raisons évidentes de légèreté). Autrement dit, les extréma de (29) peuvent être obtenus exactement de manière *non itérative*. De plus, nous avons constaté que le polynôme $\omega(\xi)$ n'admet en pratique que deux racines réelles, l'une d'entre elles correspondant à un maximum. Ce résultat de nature expérimentale nous porte à croire qu'il n'existe qu'un seul maximum, ξ_0 , à la fonction $\psi(\xi)$, produisant donc une seule solution θ_0 dans l'intervalle $]-1, 1]$ puisqu'alors $\theta^2 - \xi\theta - 1 = 0$. L'algorithme suivant est proposé dans le cas bruité :

(31) ALGORITHME, pour $N = 2$ (donné ici dans le cas réel) :

- calculer les 5 cumulants standardisés des observations : γ_{1111} , γ_{1112} , γ_{1122} , γ_{1222} et γ_{2222} ,
- calculer les coefficients du polynôme $\omega(\xi)$ défini par (30),
- calculer les racines de (30), et sélectionner celle maximisant $\Psi(\theta)$.
- Si la concavité de $\Psi(\theta)$ est trop faible en ce maximum, prendre $\theta = 0$.
- En déduire la rotation plane Q à appliquer :

$$Q_{11} = 1/\sqrt{1+\theta^2}, \quad Q_{12} = \theta/\sqrt{1+\theta^2}, \\ Q_{21} = -Q_{12} \quad \text{et} \quad Q_{22} = Q_{11}.$$

2.6. ALGORITHME D'OBTENTION DE L'ACI POUR $N > 2$

Balayages

Les algorithmes (25) et (31) permettent de traiter de manière optimale une paire quelconque de composantes, en présence de bruit gaussien et de bruit non gaussien respectivement. Or toute matrice unitaire $N \times N$ peut se décomposer en produit de $N(N-1)/2$ matrices unitaires planes de cosinus réels positifs (rotations de Givens) et d'une matrice diagonale formée de nombres complexes de module 1. Ceci suggère de traiter successivement les $N(N-1)/2$ paires, ce que nous appellerons un « balayage », par analogie au vocabulaire utilisé dans les algorithmes de calcul des éléments propres. La figure 2 montre le schéma d'une telle procédure dans le cas $N = 4$.

Calcul des cumulants

On notera k le numéro du balayage et n le numéro de la paire traitée ; notons que $1 \leq n \leq N(N-1)/2$. Lorsque l'ordre de description des paires est préétabli, à chaque n correspond une paire bien déterminée. Lorsqu'on applique une rotation plane dans le plan $\{i, j\}$, on minimise les cumulants croisés de la forme γ_{abcd} avec $a, b, c, d \in \{i, j\}$. En revanche, ce ne sont pas les seuls cumulants modifiés par cette rotation plane. En effet, tous les

cumulants dont un indice au moins est dans $\{i, j\}$ sont affectés :

$$\gamma_{abcd}(\bar{y}) \text{ avec } \{a, b, c, d\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset.$$

Il sera donc utile, pour le traitement de la paire suivante, de recalculer les cumulants nécessaires.

Deux possibilités s'offrent à nous pour le calcul des cumulants. La première est de calculer explicitement les sorties $\{\bar{y}_i, \bar{y}_j\}$ après détermination de chaque rotation plane, puis de calculer les cumulants à partir de leur définition. La deuxième possibilité consiste à utiliser une nouvelle fois la relation multilinéaire des cumulants [10], après chaque rotation plane Q dans le plan $\{\bar{y}_i, \bar{y}_j\}$:

$$(32) \quad \gamma_{abcd}(Q\bar{y}) = \sum_{e,f,g,h} Q_{ae} Q_{bf}^* Q_{cg} Q_{dh}^* \gamma_{efgh}(\bar{y}) \\ \text{si } \{a, b, c, d\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset.$$

Le choix de l'une ou l'autre de ces deux possibilités dépendra de (i) de leur coût de calcul, (ii) du caractère récursif ou non du calcul (important dans un contexte temps réel), et (iii) de la stabilité numérique de l'ensemble. Plaçon-nous dans le cas d'un calcul non récursif, c'est-à-dire que l'on dispose de T échantillons de l'observation $y(t)$, $1 \leq t \leq T$, et T fixé. Alors le seul critère important est le coût des calculs, et le tableau de complexité présenté un peu plus loin donne des éléments appuyant ce choix.

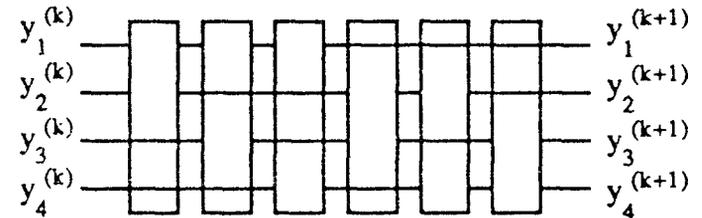


Fig. 2. — Le balayage cyclique naturel consiste en la détermination puis en l'application de $N(N-1)/2$ rotations planes, dans un ordre préétabli.

Stratégies de balayage

A l'instar des procédures de diagonalisation de matrices, notre algorithme de diagonalisation tensorielle peut être utilisé suivant différentes stratégies de balayage [13, ch5] [14].

Balayage cyclique naturel : On décrit une par une toutes les paires, en suivant l'ordre des lignes ou celui des colonnes.

Balayage des éléments dominants : On ne traite que la paire pour laquelle la fonction objectif est la plus élevée. C'est cette stratégie qui avait été proposée à l'origine par Jacobi [13].

Balayage avec seuil : On traite à chaque balayage les paires dont la fonction objectif dépasse un seuil, lui-même décroissant avec le nombre de balayages.

Pour des raisons de simplicité d'analyse, on retiendra le balayage cyclique naturel dans la suite. L'algorithme complet de calcul de l'ACI est résumé ci-dessous.

(33) ALGORITHME, pour $N > 2$

- Blanchir spatialement les données $\mathbf{y}(t)$ à l'ordre 2, conformément à (4).
- Initialiser $\mathbf{A} = \mathbf{L}$.
- Boucle sur les balayages : $k = 1, 2, \dots$
- Boucle sur les paires : $n = 1, 2, \dots, N(N-1)/2$.

A chaque n correspond une et une seule paire $\{i, j\}$ dans le balayage cyclique naturel.

- Calculer les cumulants de la paire $\{\bar{y}_i, \bar{y}_j\}$,
- calculer l'angle θ maximisant le contraste de la paire $\{\bar{y}_i, \bar{y}_j\}$, conformément à (25) ou (31),
- accumuler $\mathbf{A} := \mathbf{A}\mathbf{Q}(n, k)$, où $\mathbf{Q}(n, k)$ est la rotation d'angle θ dans le plan $\{i, j\}$.

Fin de la boucle sur n lorsque $n = N(N-1)/2$.

Fin de la boucle sur les balayages si $k = K_{\max}$, ou si tous les angles estimés dans le dernier balayage ont été très petits.

- Calculer la norme des colonnes de \mathbf{A} , i.e., $\Delta_{ii} = \|\mathbf{a}_i\|$.
- Ordonner les éléments de Δ par ordre décroissant : $\Delta := \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}$, et $\mathbf{A} := \mathbf{A}\mathbf{P}$,
- puis normaliser les colonnes de \mathbf{A} : $\mathbf{A} := \mathbf{A}\Delta^{-1}$.
- Enfin, fixer la phase de \mathbf{A} en imposant des éléments réels positifs dans la première ligne de \mathbf{A} : $\mathbf{A} := \mathbf{A}\Lambda$.

Complexité

Le tableau ci-dessous résume l'ordre de grandeur du nombre de multiplications requis pour l'exécution de K balayages dans l'algorithme (33). Deux totaux figurent, suivant que l'on recalcule directement les cumulants ou que l'on utilise (32).

Tableau de Complexités

	Cas réel	Cas complexe
Nombre de cumulants	5	6
Total en direct dont :	6 KN ² T	13 KN ² T/2
Filtrage de y	4 T	4 T
Accumulation de \mathbf{A}	N	N
Total avec (32)	TN ⁴ /8+5 KN ⁶ /12	3 TN ⁴ /4+3 KN ⁶

L'application d'une rotation plane dans le plan (\bar{y}_i, \bar{y}_j) détruit a priori l'indépendance des paires (\bar{y}_i, \bar{y}_n) ou $(\bar{y}_j, \bar{y}_n) \forall n \notin \{i, j\}$. C'est pourquoi le théorème qui va suivre a pour objet de prouver la convergence d'un tel algorithme.

(34) THÉORÈME DE CONVERGENCE : Lorsque l'algorithme (33) est appliqué pour un nombre croissant de balayages cycliques naturels, k , alors la somme des modules carrés des cumulants croisés des sorties décroît monotoniquement (vers zéro en l'absence de bruit).

Démonstration : Posons $E(k)$ la somme des modules des cumulants croisés et $S(k)$ celle des cumulants diagonaux après le balayage k :

$$S(k) = \sum_i |\gamma_{iiii}|^2; \quad E(k) = \sum_{(a,b,c,d) \neq (a,a,a,a)} |\gamma_{abcd}|^2.$$

Compte tenu du lemme (7), $S(k) + E(k)$ est une constante Ω . Définissons également pour toute paire (i, j) fixée :

$$S_{ij}(k) = \sum_{p \in \{i,j\}} |\gamma_{pppp}|^2 \quad \text{et} \quad \Omega_{ij} = \sum_{a,b,c,d \in \{i,j\}} |\gamma_{abcd}|^2.$$

Lorsqu'une rotation plane est appliquée, par exemple dans le plan $\{i, j\}$, tous les cumulants dont les indices contiennent i ou j sont modifiés (e.g. γ_{icde}), alors que ceux ne contenant que les indices i et j sont minimisés (e.g. γ_{ijij}). Il convient donc d'étudier d'abord le comportement de $S_{ij}(k)$. Par une démarche strictement identique à celle suivie dans la démonstration du lemme (7), on montre aisément que Ω_{ij} est constante. Donc par une rotation élémentaire dans le plan $\{i, j\}$, on augmente les cumulants diagonaux : $S_{ij}(k+1) > S_{ij}(k)$; l'inégalité est en effet stricte si la paire est effectivement traitée ($\theta \neq 0$). On en déduit que $S(k)$ augmente puisque par ailleurs les cumulants γ_{pppp} d'indice $p \notin \{i, j\}$ ne sont pas affectés par la rotation dans le plan $\{i, j\}$. Cette constatation reste valable lorsque $\{i, j\}$ décrit un balayage complet. Il vient finalement, par invariance de Ω , que $E(k)$ diminue. La suite $E(k)$ est monotone décroissante dans \mathbb{R} , et bornée par zéro ; elle est donc convergente. La limite est nécessairement zéro. Montrons-le par l'absurde. Si la limite $E(\infty)$ n'est pas nulle, c'est qu'il existe un cumulants croisés non nul, contenant par exemple les indices $\{i, j\}$; alors la paire (i, j) est automatiquement traitée par construction de l'algorithme (25), ce qui entraîne une diminution stricte de $E(k)$. Ceci est contraire à l'hypothèse. \square

Le théorème ci-dessus prouve la convergence, mais ne dit cependant rien sur la vitesse de convergence. Ceci fait l'objet d'études en cours.

2.7. LA COMPRESSION DE DONNÉES : UN EXEMPLE

Si $M < N$, on a affaire à un problème de compression de données. Nous montrons dans cette section comment l'ACI peut être comparée avec des techniques classiques de compression de données telles que l'Analyse en Composantes Principales (ACP) et l'Analyse de Facteurs (AF).

Définissons tout d'abord la Décomposition en Eléments Propres (DEP) de V_y :

$$V_y = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^H, \quad \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{U}^H.$$

Les composantes principales du vecteur de données \mathbf{y} sont les projections

$$z_i = \mathbf{u}_i^H \mathbf{y}, \quad \text{où } \mathbf{u}_i \text{ désigne la } i\text{-ième colonne de la matrice } \mathbf{U}.$$

Si les valeurs propres de V_y (toutes réelles ≥ 0 par construction) sont ordonnées par ordre décroissant, les composantes z_i sont classées par importance décroissante.

On comprime les données en ne retenant que les M composantes dominantes :

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^M z_i \mathbf{u}_i = \mathbf{U}_{1:M} \mathbf{z} = \mathbf{U}_{1:M} \mathbf{U}_{1:M}^H \mathbf{y}$$

où $\mathbf{U}_{1:M}$ est la matrice $N \times M$ formée des M premières colonnes de \mathbf{U} , \mathbf{u}_i . La matrice de covariance de \tilde{y} s'écrit

$$\mathbf{V}_{\tilde{y}} = \mathbf{U} \tilde{\Lambda} \mathbf{U}^H \quad \text{avec} \quad \tilde{\Lambda}_{ii} = \Lambda_{ii} \quad \text{pour} \quad i \leq M$$

$$\text{et} \quad \tilde{\Lambda}_{ii} = 0 \quad \text{pour} \quad i > M.$$

En présence de bruit, l'Analyse de Facteurs est plus adaptée car elle tient compte de l'anisotropie du bruit. Si \mathbf{V}_b désigne la covariance du bruit et $\mathbf{V}_b^{-1/2}$ la racine carrée hermitienne positive de \mathbf{V}_b , rappelons que les facteurs communs sont alors les composantes principales de la matrice $\mathbf{V}_b^{-1/2} \mathbf{V}_y \mathbf{V}_b^{-1/2}$.

$$(35) \quad z_i = \mathbf{u}_i^H \mathbf{V}_b^{-1/2} \mathbf{y},$$

$$\tilde{y} = \mathbf{V}_b^{1/2} \sum_{i=1}^M z_i \mathbf{V}_b^{-1/2} \mathbf{u}_i = \mathbf{U}_{1:M}^H \mathbf{V}_b^{-1} \mathbf{y}.$$

L'ACP et l'AF consistent essentiellement à approximer la matrice de covariance \mathbf{V}_y par une autre de rang plus faible, la covariance de \tilde{y} . L'ACI effectue aussi cette approximation si $M < N$ mais la transformation congruente n'est plus unitaire. En effet, les colonnes de la matrice \mathbf{A} ne sont plus des vecteurs propres de \mathbf{V}_y mais correspondent à des directions physiques qui ne sont pas obligatoirement orthogonales. Soit la décomposition ACI :

$$\mathbf{V}_y = \mathbf{A} \mathbf{\Delta}^2 \mathbf{A}^H.$$

On peut toujours classer les éléments Δ_{ii} par ordre décroissant, et ne conserver que les éléments dominants. De la même manière que dans l'ACP, on peut obtenir les composantes dominantes en définissant le vecteur de dimension $M < N$:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{y}.$$

Le vecteur \tilde{y} peut s'obtenir par la projection oblique :

$$(36) \quad \tilde{y} = \mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{y}.$$

Dans les deux approches ACP ou AF, les composantes z_i sont décorréées, alors qu'elles sont indépendantes statistiquement dans l'ACI. Cette dernière propriété est beaucoup plus forte. De plus, même si $\mathbf{U}_{1:M}$ et \mathbf{A} engendrent le même espace vectoriel en l'absence de bruit, l'ACI a l'avantage de fournir une signification physique aux directions obtenues : les colonnes de \mathbf{A} correspondent aux directions réelles d'où vient l'énergie.

Dans le cadre limité de la compression de données qui fait l'objet de cette digression, l'ACI sera meilleure que l'AF si le bruit est très localisé ; en revanche, l'AF sera préférable si le bruit remplit l'espace entier. Ceci est illustré par la simulation ci-dessous.

Simulation

Dans cet exemple, nous observons $\mathbf{y} = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$, où $\mathbf{a} = (2,1)^T/\sqrt{5}$, x est une variable aléatoire scalaire uniformément répartie dans $[-0,5, 0,5]$, et \mathbf{b} est un bruit additif uniformément réparti dans $[-0,5, 0,5] \times [-0,1, 0,1]$. Sur la figure 3 on a représenté à gauche 500 réalisations indépendantes de $\mathbf{a}x$ et \mathbf{b} , superposées. Sur la partie droite, les 500 réalisations correspondantes de \mathbf{y} . L'AF et l'ACI fournissent comme axes principaux :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0,9751 & 0,2217 \\ 0,2217 & -0,9751 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,9961 & 0,8994 \\ 0,0878 & 0,4371 \end{pmatrix}.$$

En projetant le bruit \mathbf{b} sur ces axes, on trouve des bruits d'écart-type, pour l'AF et l'ACI respectivement :

- bruit sur l'axe signal, $\mathbf{u}1 : 0,2767$
- bruit sur l'axe bruit, $\mathbf{u}2 : 0,0901$
- bruit sur l'axe signal, $\mathbf{a}1 : 0,1207$
- bruit sur l'axe bruit, $\mathbf{a}2 : 0,2628$

Ces résultats se voient aisément sur le premier tracé de la figure 3 : la projection oblique (horizontalement sur la figure) du bruit sur l'axe signal est beaucoup plus faible que sa projection orthogonale. Cet exemple est extrêmement simpliste mais résume bien la philosophie de cette approche.

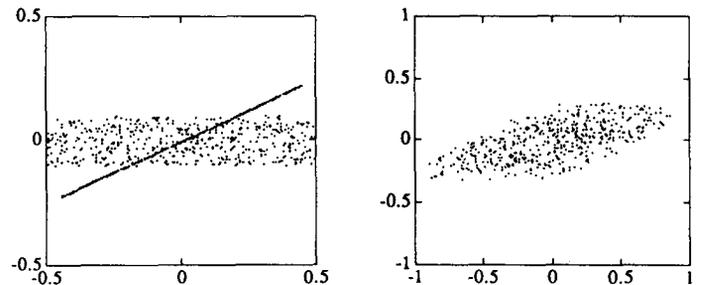


Fig. 3. — Exemple où l'ACI est supérieure à l'AF pour la réduction de bruit par compression de données.

Nous venons de voir une application possible de l'ACI lorsque $M < N$. L'objet du chapitre qui va suivre est de décrire une application de l'ACI lorsque $N = M$, à savoir la séparation de signaux par déconvolution aveugle.

2.8. REMARQUES

Pour conclure, signalons deux faits un peu insolites. Il est clair que nous ne pouvons pas séparer des sources dont les cumulants marginaux sont identiquement nuls à l'ordre considéré ; c'est le cas par exemple de N sources gaussiennes. En revanche, si $N - 1$ d'entre elles ont des cumulants non nuls, la dernière contiendra la contribution gaussienne. Autrement dit, on peut séparer $N - 1$ sources non gaussiennes et une source gaussienne. Similairement, on

peut séparer des signaux statistiquement dépendants. Cela a déjà été signalé dans [6] et [20]. Il suffit pour ce faire que certains cumulants croisés des sources (connus à l'avance) soient nuls. Par exemple, si h est une fonction paire et x une v.a. centrée symétriquement distribuée, alors les sources x et $h(x)$ sont dépendantes mais peuvent être séparées en cherchant à annuler simultanément les cumulants γ_{1112} et γ_{1222} , pourvu que les cumulants marginaux κ_{1111} et κ_{2222} soient non nuls.

3. Identification aveugle

Dans ce chapitre, on s'intéresse surtout aux aspects opérationnels de l'utilisation des résultats présentés suffisamment en détail dans la partie 2. Nous allons illustrer dans la section 3.1 l'utilisation des algorithmes (33) et (25) dans un cas très simpliste et académique. Dans les sections 3.3 et 3.4, on propose deux approches possibles de la déconvolution. La première décompose l'observation en contributions à Bande Etroite (BE), et utilise l'ACI complexe sur chacune de ces bandes. La seconde est une approche paramétrique, et permet de réaliser une déconvolution en utilisant une seule fois l'ACI réelle. Avantages et inconvénients de ces deux approches sont discutés.

3.1. MÉLANGE INSTANTANÉ EN L'ABSENCE DE BRUIT

D'un point de vue pratique, on *estimera* les moments d'ordre deux et quatre, puis les cumulants correspondants. On pourra utiliser à cet effet les k -statistiques, à partir desquelles on obtient directement des estimateurs non biaisés [26]. Dans la simulation qui va suivre, on a utilisé un estimateur biaisé, dont l'expression est donnée ci-dessous dans le cas réel :

$$(37) \quad \hat{\gamma}_{abcd} = \hat{\mu}_{abcd} - \hat{\mu}_{ab} \hat{\mu}_{cd} - \hat{\mu}_{ac} \hat{\mu}_{bd} - \hat{\mu}_{ad} \hat{\mu}_{bc}$$

$$\hat{\mu}_{abcd} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T x_a(k) x_b(k) x_c(k) x_d(k);$$

$$\hat{\mu}_{ab} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T x_a(k) x_b(k).$$

Nous savons qu'alors

$$(38) \quad \frac{\text{Covar} \{ \hat{\mu}_{hi}, \hat{\mu}_{jk} \}}{\hat{\mu}_{hi} \hat{\mu}_{jk}} = \frac{1}{T} \left[\frac{\mu_{hijk}}{\mu_{hi} \mu_{jk}} - 1 \right],$$

$$\frac{E \{ \hat{\gamma}_{hijk} \}}{\gamma_{hijk}} - 1 = -\frac{3}{T} - \frac{2}{T} \frac{\mu_{hi} \mu_{jk} + \mu_{hj} \mu_{ik} + \mu_{hk} \mu_{ij}}{\gamma_{hijk}}.$$

Cette dernière relation nous montre que l'estimateur adopté dans notre simulation est biaisé, et nous permettrait aisément de définir un estimateur non biaisé. Mais pour prouver le bon fonctionnement de l'algorithme (25), conservons cet estimateur peu performant. Nous allons en outre nous servir de cette estimation du biais pour fixer un critère pratique nous permettant de décider si un cumulante

est nul ou non. Dans l'algorithme (25), un cumulante sera considéré non nul si :

$$(39) \quad |\gamma_{iijj}| > \frac{100 \mu_{ii} \mu_{jj} + 2 \mu_{ij}^2}{T \cdot 3}.$$

Ce critère est certainement très grossier, mais a l'avantage de dépendre de T ; plus précisément, on ne traitera pas les paires pour lesquelles le biais relatif d'estimation est trop grand. Ici, le dernier terme de (38) doit être inférieur à 6%.

Simulation

La simulation que nous présentons concerne un mélange de 4 signaux centrés de variance unité. Les deux premiers sont des sinusoïdes de fréquence différentes, le troisième est un bruit uniforme, et le quatrième une rampe (fig. 4). Bien que certains de ces signaux soient déterministes, les « statistiques » de ces signaux peuvent être décrites par les histogrammes suivants, fortement non gaussiens :

$$p_{x_i}(x_i) = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x_i^2/2}}, \quad i \in \{1, 2\}, x_i \in [-\sqrt{2} \sqrt{2}];$$

$$p_{x_i}(x_i) = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad i \in \{3, 4\}, x_i \in [-\sqrt{3} \sqrt{3}].$$

On vérifie également que les cumulants croisés empiriques de ces sources sont asymptotiquement nuls lorsque la

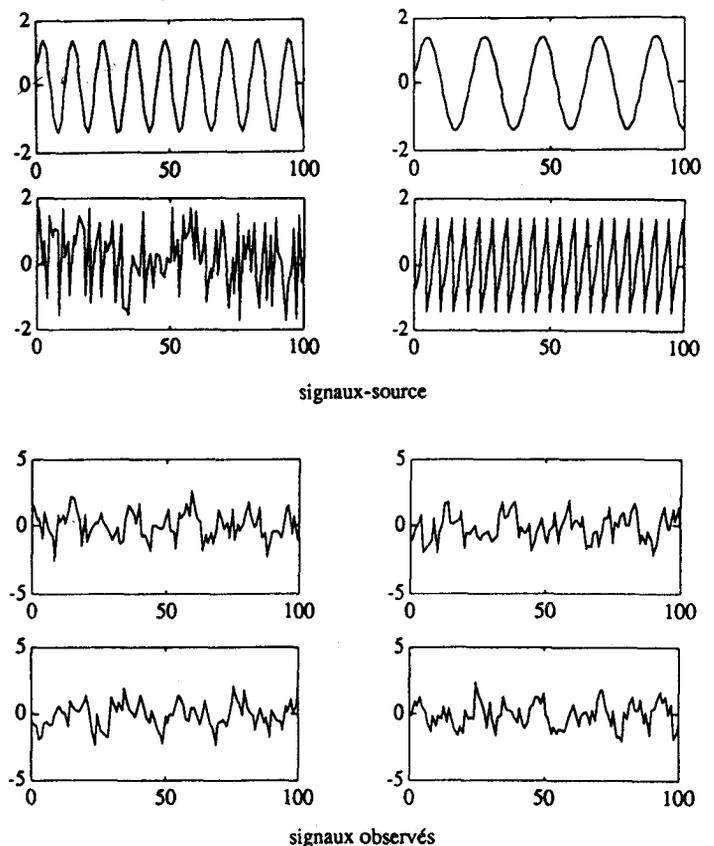


Fig. 4. — Signaux source et observations dans la simulation du § 3.1.

durée d'intégration, T , tend vers l'infini. L'avantage de l'utilisation de signaux déterministes est exclusivement visuel.

On utilise un balayage cyclique naturel, et on obtient les résultats de la figure 5. Après un premier balayage, les signaux émergent presque (toutes les paires sont traitées). Le second balayage améliore deux des estimations, et semble détruire les deux autres (seules les paires (1, 2) et (3, 4) sont traitées). C'est le troisième balayage qui conclue en ne traitant que la paire (3, 4). Notons au passage la permutation des signaux et le changement de signe de trois d'entre eux. Le critère (39) arrête les itérations à ce troisième balayage.

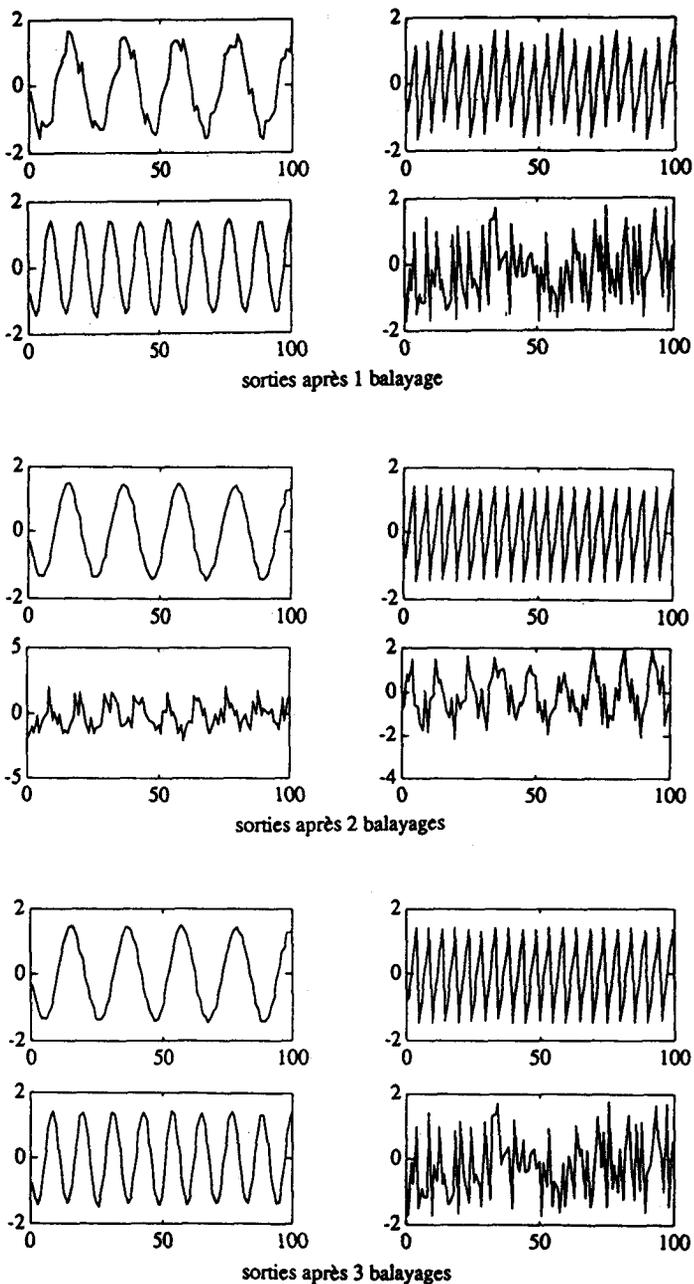


Fig. 5. — Sorties obtenues après plusieurs balayages de l'algorithme (25).

3.2. RÉSULTATS EN PRÉSENCE DE BRUIT NON GAUSSIEN

Nous présentons ici deux illustrations de l'effet du bruit non gaussien. Sur la figure 6, on a représenté l'allure d'une fonction de contraste, obtenue dans les conditions suivantes :

- les sources x_1 et x_2 sont de kurtosis $-1,2$ et $-1,5$ respectivement ;
- l'observation est de la forme $e = Ax + \eta b$, où b est vecteur contenant deux bruits centrés indépendants uniformément répartis dans $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, et η est un facteur d'atténuation valant $0,1$;
- la matrice de mélange vaut $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

• on utilise un échantillon de taille $T = 2000$, et les cumulants sont approximés par leurs estimations non biaisées, i.e., basées sur les κ -statistiques [26]. Ici, puisque les variables sont centrées, nous avons avec les mêmes notations qu'en (37) :

$$\hat{\gamma}_{abcd} = \frac{T+2}{T-1} \hat{\mu}_{abcd} - \frac{T}{T-1} (\hat{\mu}_{ab} \hat{\mu}_{cd} + \hat{\mu}_{ac} \hat{\mu}_{bd} + \hat{\mu}_{ad} \hat{\mu}_{bc}) .$$

La rotation idéale (que l'on obtiendrait en l'absence de bruit est définie par $\theta = -0,5$ ou $\theta = 2$. Au vu de la figure 6, les valeurs optimales de θ obtenues sont $\theta = \{-0,48, 2,08\}$, ce qui est très acceptable. Le bruit additif a aussi une influence sur la valeur du contraste final. Afin de mesurer les performances de séparation, il est peu réaliste d'adopter le contraste des sources, $\Psi_s = 3,690$, comme borne supérieure, il semble plus approprié de considérer le contraste de sources fictives bruitées, définies par

$$x_b = x + \eta A^{-1} b .$$

Ce sont en effet les sorties que l'on obtiendrait si A était parfaitement estimée. Le contraste de ces sources fictives peut être estimé et vaut ici $\Psi_{\max} = 3,210$. On constate (fig. 6) que le maximum atteint par le contraste vaut $3,208$. Bien qu'éloignée de Ψ_s , cette valeur est acceptable car proche de Ψ_{\max} .

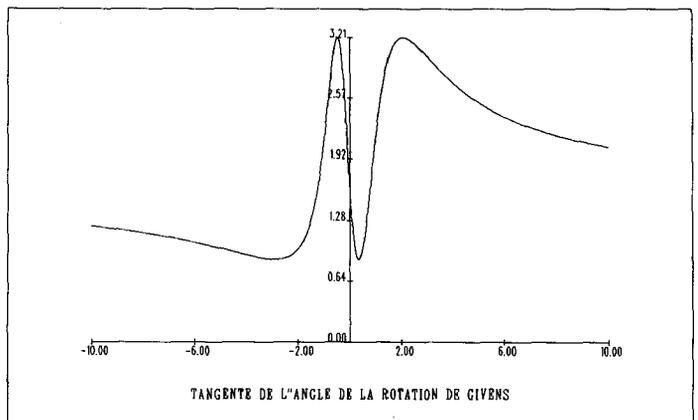


Fig. 6. — Fonction de contraste obtenue lors du traitement de 2 sources en présence de bruit uniforme.

Comme nous l'avons dit plus haut, même en l'absence de bruit non gaussien, l'intérêt de l'algorithme (31) sur l'algorithme (25) se fait sentir dès que le nombre de sources devient important. En effet, lorsqu'une paire est traitée, les autres composantes jouent le rôle d'un bruit non gaussien, d'autant plus fort qu'elles sont nombreuses. Sur la figure 7, il s'agit d'un problème à 10 sources sans bruit additif, consistant en des processus blancs uniformément distribués dans l'intervalle $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. La matrice de mélange est pour cet exemple :

$$A(i, i) = 2, A(i, j) = 1, \quad i \neq j, 1 \leq i, j \leq 10.$$

Le contraste croît jusqu'à une valeur correspondant au contraste des sources elles-mêmes ($10 \times 1,2^2$), ce qui témoigne du bon fonctionnement de l'algorithme (31). La convergence est atteinte autour de la centième rotation, par conséquent au cours du troisième balayage.

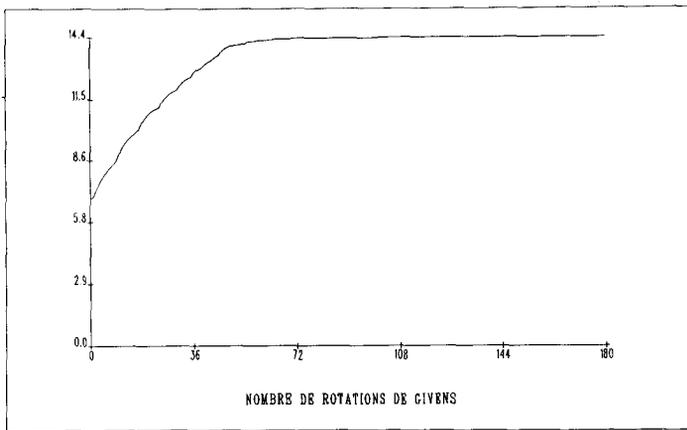


Fig. 7. — Evolution du contraste lors de la séparation de 10 sources uniformes.

3.3. POLYSPECTRES MULTIVARIABLES

(40) DÉFINITIONS : Si \mathbf{x} est un processus stationnaire d'ordre r , on définit [10] sa polycorrélation d'ordre r :

$$\gamma_{12\dots r} \{ \mathbf{x} \} (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1}) = \text{cum} \times \\ \times \{ x_1(t + \tau_1), x_2(t + \tau_2), \dots, x_{r-1}(t + \tau_{r-1}), x_r(t) \},$$

et son polyspectre d'ordre r par la transformée de Fourier de la polycorrélation :

$$\Gamma_{12\dots r} \{ \mathbf{x} \} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}) = \\ = \sum_{\tau_1 \in \mathbb{Z}} \gamma_{12\dots r} \{ \mathbf{x} \} (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1}) \exp \left[-j\pi \sum_{p=1}^{r-1} \lambda_p \tau_p \right].$$

Dans le problème de déconvolution, nous n'avons pas besoin de toute la puissance du polyspectre à cause du caractère linéaire de la transformation. C'est pourquoi nous proposons de n'utiliser qu'une « tranche » de cette fonction de plusieurs variables :

$$\Gamma_{1234} \{ \mathbf{x} \} (\lambda) = \Gamma_{1234} \{ \mathbf{x} \} (\lambda, -\lambda, \lambda).$$

(41) PROPRIÉTÉ : Cette tranche particulière du trispectre peut être rapprochée du cumulatif d'ordre 4 des variables spectrales. En effet, si les variables $dX_i(\lambda)$ sont obtenues par transformée de Fourier-Stieltjes de signaux réels, alors on peut en déduire que pour toute fréquence réduite λ , telle que $\lambda \neq 0$ modulo 1 (continu et fréquence de Shannon) :

$$\Gamma_{hijk} \{ \mathbf{x} \} (\lambda, -\lambda, \lambda) d\lambda^4 = \\ = E \{ dX_h(\lambda) dX_i(\lambda)^* dX_j(\lambda) dX_k(\lambda)^* \} \\ - E \{ dX_h(\lambda) dX_i(\lambda)^* \} E \{ dX_j(\lambda) dX_k(\lambda)^* \} \\ - E \{ dX_h(\lambda) dX_k(\lambda)^* \} E \{ dX_i(\lambda) dX_j(\lambda) \}.$$

Autrement dit, si on a affaire à un problème de déconvolution, il suffit de prendre la transformée de Fourier des observations, et de traiter le problème de séparation instantanée pour chaque fréquence λ indépendamment.

Exemple, N = 2

Nous nous proposons d'illustrer ce principe à l'aide d'un exemple, qui a été traité par G. Favre dans le cadre de son DEA à Thomson [15]. Nous disposons de deux capteurs ($N = 2$), et les observations vérifient

$$(42) \quad y_1(t) = x_1(t) + |\alpha| x_2(t - a); \\ y_2(t) = |\beta| x_1(t - b) + x_2(t).$$

Les amortissements $|\alpha|$ et $|\beta|$ sont réels constants et positifs, et les retards a et b n'affectent qu'une des deux composantes (formulation toujours possible). Nous avons pris $(|\alpha|, |\beta|) = (0,9, 0,95)$, et $(a, b) = (2, 3)$. Ce modèle admet donc deux solutions possibles. On pose $\alpha = |\alpha| z^{-a}$ et $\beta = |\beta| z^{-b}$, où $z = \exp(j\pi\lambda)$. Les sources sont des processus Auto-Régressifs (AR) d'ordre 2 pilotés par deux bruits blancs uniformes. Les amortissements ont été choisis indépendants de la fréquence pour faciliter la lecture des gains complexes bruités obtenus, et permettre une régression affine le cas échéant. Mais rien ne s'oppose en principe à l'identification d'amortissements variables avec la fréquence dans cette approche, si ce n'est qu'un moyennage des canaux n'est plus possible sans le recours à un modèle de variation en fonction de la fréquence ; c'est ce que nous avons implicitement dans l'approche paramétrique de la section suivante.

Dans cette simulation, on a découpé l'observation en 300 tranches de 128 échantillons (chaque échantillon étant un vecteur réel 2×1). Les moments ont été estimés par périodogramme moyenné sur ces 300 tirages, après avoir pris la FFT de chacune des tranches préalablement complétée de 128 zéros. Nous avons donc 128 canaux de fréquence (positive), et les résultats sont présentés en fréquence réduite, c'est-à-dire en fonction de $\lambda = f/f_{\max} \in [0, 1]$.

Un des problèmes spécifiques à l'approche spectrale est celui de la détermination de la phase de la tangente θ . Elle est en effet définie à π près. Dans des cas idéaux, il est facile de lever cette indétermination en postulant la continuité de la phase en fonction de la fréquence (principe du déroulement de la phase, connu aussi sous le nom de « phase unwrapping »).

Par ailleurs, la transformation $A(\lambda)$ ne peut être déterminée qu'à une permutation près. En la normalisant de manière à ce que sa diagonale soit formée de « 1 », cette dernière peut prendre les valeurs :

$$A(\lambda) = B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1/\beta \\ 1/\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous poserons

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & u(\lambda) \\ v(\lambda) & 1 \end{pmatrix}.$$

Le fait que cette permutation, $P(\lambda)$, puisse dépendre de la fréquence λ pose également un problème préoccupant sur le plan pratique. La figure 8 représente le module et la phase de $v(\lambda)$. A cause de cette indétermination, la pente de la phase de $v(\lambda)$ vaut soit $+a$ soit $-b$, et son module soit $1/|\alpha|$ soit $|\beta|$. Bien sûr, sur ce cas d'école, il est facile de repérer une cassure de la phase autour de $\lambda = 0,4$ (fig. 8). Cette cassure peut s'expliquer par le fait qu'il existe une ambiguïté pour toutes les fréquences pour lesquelles la cohérence des observations avoisine 1 ; la matrice $A(\lambda)$ devient en effet singulière et l'hypothèse de continuité de la phase ne permet certes pas de lever l'ambiguïté (on a simplement une chance sur deux). Dans notre exemple, ceci peut se produire pour des fréquences de la forme :

$$(43) \quad \lambda\pi = 2k\pi/(a+b),$$

lorsque $|\alpha|$, et $|\beta|$ sont proches de 1. Pour les valeurs numériques adoptées dans la figure 8, ces fréquences « singulières » valent justement 0,4 et 0,8.

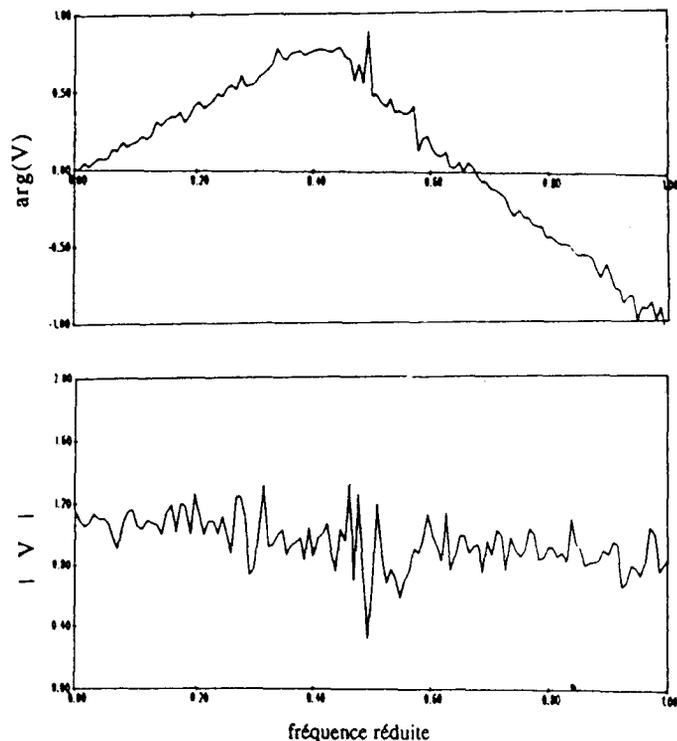


Fig. 8. — Fonction de transfert estimée.

Concluons cette section en disant qu'il est facile de déterminer une des transformations répondant au problème de déconvolution en faisant appel à une tranche du trispectre, et en traitant les fréquences discrètes séparément. En revanche, il sera nécessaire dans la pratique de faire une régression entre les résultats obtenus pour chacune de ces fréquences, car l'intégration n'est jamais assez longue. Le principal obstacle est alors que les indéterminations de phase et de permutation sont présentes indépendamment les unes des autres pour chaque fréquence. En l'absence du modèle très particulier (retard pur, amortissement constant) que nous avons dans notre exemple, et pour des intégrations plus courtes, nous n'aurions pas pu conclure. De manière générale, il faut donc faire appel à un modèle paramétrique polyvalent. L'adoption d'un modèle paramétrique tel que le modèle ARMA multivariable convient, et il nous dispense en outre de faire appel explicitement au trispectre comme nous le montrons ci-après.

3.4. MODÉLISATION PARAMÉTRIQUE

On suppose dans cette section que l'observation est régie par un modèle ARMA vectoriel (réel) :

$$(44) \quad y(t) + \sum_{j=1}^r A_j y(t-j) = \sum_{k=0}^q B_k x(t-k).$$

Contrairement à ce qui est admis en général, on ne suppose pas que la matrice B_0 est égale à l'identité, mais seulement qu'elle est régulière. Posons

$$(45) \quad \tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^q B_i x(t-i).$$

Alors d'après (44), $\tilde{y}(t)$ s'obtient par filtrage MA des observations :

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \sum_{j=1}^r A_j y(t-j).$$

Il est connu que les coefficients A_j peuvent être identifiés à partir des équations de Yule-Walker pour des retards supérieurs à l'ordre du modèle MA. Cette identification peut être faite dans un premier temps, de sorte qu'on est ramené au problème d'identification (45). On note $\tilde{x}(t) = B_0 x(t)$ et $\tilde{B}_k = B_k B_0^{-1}$, alors $\tilde{y}(t)$ satisfait le modèle MA monique :

$$(46) \quad \tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) + \sum_{k=1}^q \tilde{B}_k \tilde{x}(t-k).$$

Notre dénomination « monique » est basée sur le fait que le polynôme $z^q y(z)$ est monique, autrement dit qu'il a l'identité comme coefficient de plus haut degré. Autrement dit, l'équation (46) définit un problème d'identification MA classique. La détermination de la matrice de mélange, B_0 , est différée à la fin de la procédure d'identification, comme l'indique schématiquement la figure 9.

Ce procédé a été proposé par l'auteur dans [17]. La conséquence fondamentale dans cette procédure est que

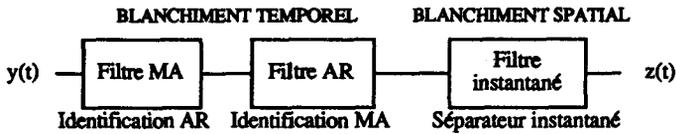


Fig. 9. — Identification-déconvolution en trois étapes.

l'indétermination signe-permutation est rejetée en bout de chaîne, et s'applique donc globalement à toutes les matrices-coefficient, ce qui résout le problème soulevé dans la section précédente par l'utilisation des polyspectres. En réalité, nous procédons implicitement à l'estimation paramétrique des polyspectres. A présent, la seule étape qu'il convient de détailler quelque peu est la seconde.

Le problème consiste à identifier les coefficients \tilde{B}_k intervenant dans (46), lorsqu'on observe $\tilde{y}(t)$. Pour cela, nous supposons que le processus $\tilde{x}(t)$ est temporellement blanc, comme dans tout modèle ARMA. Pour simplifier les notations, nous allons poser :

$$(47) \quad C(i, j) = \text{cum} \{ \tilde{y}(t+i) \otimes \tilde{y}(t+j) \otimes \tilde{y}(t+q) \otimes \tilde{y}(t) \}$$

et, puisque nous savons que $\tilde{x}(t)$ est temporellement blanc, nous pouvons nous contenter de définir le cumulants des sources pour le retard nul :

$$(48) \quad C_x = \text{cum} \{ \tilde{x}(t) \otimes \tilde{x}(t) \otimes \tilde{x}(t) \otimes \tilde{x}(t) \}.$$

D'après (46), nous avons donc :

$$(49) \quad C(i, j) = [B_i \otimes B_j \otimes B_q \otimes B_0] C_x.$$

En outre, si \mathbf{c} est un vecteur à PN lignes, on convient de noter $\text{unvec}_N\{\mathbf{c}\}$ la matrice à P lignes et N colonnes obtenue en prélevant les colonnes de la matrice une par une dans le vecteur \mathbf{c} . Il s'agit en fait de l'inverse de l'opération plus usitée, généralement notée vec , consistant à ranger une matrice $P \times N$ dans un vecteur de taille PN. Avec cette notation, posons également :

$$\bar{C}(i, j) = \text{unvec}_N \{ C(i, j) \} \quad \text{et} \quad \bar{C}_x = \text{unvec}_N \{ C_x \}.$$

Ces deux matrices sont par conséquent de dimension $N^3 \times N$. Il existe une propriété remarquable faisant intervenir le produit de Kronecker et l'opérateur vec [18] :

$$[B \otimes G] \text{vec} \{ \bar{C} \} = \text{vec} \{ G \bar{C} B^T \}.$$

En vertu de cette propriété, nous pouvons déduire de (49) que :

$$(51) \quad \bar{C}(i, k) = [B_k \otimes B_q \otimes B_0] \bar{C}_x B_i^T, \quad \xi i, k, 0 \leq \{i, k\} \leq q.$$

Cette relation nous fournit le système complet d'équations liant les matrices inconnues B_k et les cumulants des observations, $\bar{C}(i, k)$. La matrice \bar{C}_x est aussi une inconnue qu'il nous faut éliminer. Une des solutions (et c'est en vérité la seule que nous ayons trouvée) consiste à écrire d'abord toutes ces relations pour $i = 0$, puis à remarquer

que grâce à la régularité de B_0 on peut éliminer \bar{C}_x :

$$(52) \quad \bar{C}(j, k) = \bar{C}(0, k) B_0^{-T} B_j^T, \quad 0 < j \leq q, 0 \leq k \leq q.$$

Nous avons obtenu maintenant un système de $q(q-1)(q+1)/2$ équations matricielles, dont l'inconnue est B_j^T . Ce système est évidemment surdéterminé, et nous pouvons le résoudre au sens des moindres carrés totaux. Prélever autant d'équations que d'inconnues avait été proposé récemment dans [19], mais a le désavantage d'augmenter la sensibilité du système au bruit. Sur cet exemple précis, il a été constaté expérimentalement que ce système de $q(q-1)(q+1)/2$ équations est celui qui donne les meilleurs résultats dans le cas scalaire [17]. Une étude complète de robustesse et de performances sur simulations est différée à un article ultérieur.

4. Perspectives

Les simulations qui ont été présentées dans les sections 2.7 et 3 sont des illustrations simples de ce à quoi peut servir l'ACI. Ces trois exemples ne sauraient pourtant en limiter le champ d'application. En effet, telle qu'elle est définie en (11), l'ACI est un outil très général, et on peut parfaitement envisager de la substituer à la décomposition spectrale de la matrice de covariance (ACP) pratiquement à chaque fois qu'elle se présente. Dans un certain nombre de cas, l'ACI fera preuve de meilleures performances que l'ACP. Nous avons relevé quelques domaines de prédilection d'ores et déjà identifiés.

A titre indicatif, voici quelques autres applications dans lesquelles l'ACI peut être utilisée profitablement. Nous avons parlé de la compression de données dans la section 2.6, et de ses avantages éventuels sur l'ACP. Nous avons également cité la séparation de signaux dans la section 2, donnant lieu à une déconvolution aveugle. Cette dernière utilisation de l'ACI peut être particulièrement utile pour l'égalisation de canaux de transmission lorsque les signaux transmis sont inconnus (téléphonie par exemple). En outre, l'ACI peut se rendre utile sur d'autres terrains.

En traitement d'antenne notamment, il est fréquent de détecter le nombre de sources à partir du nombre de valeurs propres significatives de la matrice de covariance. Sous hypothèse gaussienne, ce test est en effet celui de la détection bayésienne [21], [22], et peut être construit à partir d'une suite de tests binaires parfois connus sous le nom de « tests de sphéricité » [23]. On pourrait aussi bien baser la détection du nombre de sources sur le nombre de valeurs significatives de la matrice Δ dans l'ACI. Autrement dit, le nombre de sources détectées serait égal au nombre de processus-source séparés de variance significative. Toutefois, cette idée nécessiterait une étude statistique plus approfondie.

Par ailleurs, la classification Bayésienne d'une observation en M classes requiert théoriquement la connaissance des

densités de probabilité de l'observation sous chacune des classes. L'identification de telles densités multivariées est très coûteuse en place mémoire et de plus n'est possible que lorsque les données disponibles sont suffisamment longues. Par exemple, l'histogramme d'une observation de dimension N nécessite ω^N compteurs si chacune des dimensions est divisée en ω intervalles. En revanche, l'ACI permet un prétraitement des données fournissant des sorties dont la dépendance statistique est minimisée. Ainsi, au lieu d'avoir à identifier une fonction de N variables pour chaque classe, on est amené à identifier en sortie de l'ACI N fonctions d'une seule variable, la densité conjointe en étant le produit. Si chacune des dimensions est divisée en ω intervalles le coût mémoire passe alors de ω^N à $N\omega$ pour cette classe. La densité conjointe peut alors être estimée valablement à partir de données beaucoup plus courtes.

L'ACI peut être également utilisée à des fins de localisation de sources. En effet, dans un modèle tel que $y = Ax + b$, où x désigne le vecteur source et y l'observation, les colonnes de la matrice A représentent les « directions d'arrivée » de chacune des sources x_i en traitement d'antenne. La direction physique d'une source x_i peut être obtenue dans un second temps à partir de la colonne a_i par identification paramétrique. En d'autres termes, lorsque l'antenne est de forme connue, les colonnes a_i sont censées être d'une forme particulière paramétrisée par la direction physique d'arrivée. Dans les méthodes de localisation haute résolution dénommées « goniomètre » ou « MUSIC », la localisation se fait également en deux temps : dans un premier temps, on calcule l'ACP de l'observation dont on ne retient que les M composantes dominantes, et dans un second temps on identifie les directions physiques en effectuant une recherche exhaustive. Toutefois, l'ACI a deux importants avantages sur l'ACP dans ce contexte. D'abord, l'ACP ne définit que l'espace engendré par les M directions d'arrivée significatives, et non ces directions individuellement. La recherche exhaustive est rendue obligatoire pour cette raison, pénalisant beaucoup l'utilisation des méthodes haute résolution sur des antennes à deux ou trois dimensions (le coût d'une recherche exhaustive est fonction exponentielle de la dimension). L'usage de l'ACI ne présente pas cet inconvénient, puisque les directions d'arrivée sont individuellement estimées. Ensuite, l'ACP est sensible aux déviations de l'antenne réelle par rapport à sa structure idéale adoptée dans la recherche. On peut attendre de l'ACI une plus grande robustesse vis-à-vis de ces déviations. En effet, dans le cas d'antennes linéaires uniformes en particulier, il est possible d'estimer les directions physiques des sources par une régression affine à partir des directions d'arrivée a_i . Une telle solution est optimale au sens des moindres carrés totaux, plus robuste aux erreurs de mesure que les moindres carrés ordinaires [24]. Notons que la méthode « Esprit » bénéficie aussi de ces deux qualités mais n'est applicable que pour une classe bien particulière d'antennes [25], contrairement à la méthode que nous proposons. Des études sont en cours pour vérifier ces deux conjectures.

Notons pour terminer qu'une approche originale du problème de localisation est abordée dans un article de ce

numéro, et peut être vue plutôt comme une extension des méthodes haute résolution classiques au cas où le nombre de sources présentes est supérieur au nombre de capteurs.

5. Annexe

Démonstration du lemme (6)

Montrons que $\|{}^2rQw\|^2 \leq \|w\|^2$, pour tout vecteur w . La matrice $M = {}^2rQ^H {}^2rQ$ est à éléments positifs ; donc d'après le théorème de Perron-Frobenius [9], sa valeur propre de plus grand module est réelle positive, et on peut lui associer un vecteur propre n'ayant que des composantes réelles positives. Il suffit donc de montrer l'inégalité pour ce vecteur w . Comme Q est unitaire, tout élément vérifie $|Q_{pq}|^2 \leq 1$, et par conséquent $|Q_{pq}|^{2r} \leq |Q_{pq}|^2$, il vient donc

$$\sum_{i,j} \sum_k w_i {}^2rQ_{ki} {}^2rQ_{kj} w_j \leq \sum_{i,j} \sum_k w_i {}^2Q_{ki} {}^2Q_{kj} w_j ; w_i \in \mathbb{R}^+ .$$

Or la matrice 2Q est bistochastique (i.e. la somme des éléments d'une ligne ou d'une colonne quelconque est égale à 1), et on sait d'après le théorème de Birkhoff [27] que l'ensemble des matrices bistochastiques est un polyèdre convexe dont les sommets sont des permutations. Autrement dit, la matrice 2Q peut se décomposer comme suit :

$${}^2Q = \sum_q \alpha_q P_q ; \alpha_q \geq 0, \sum_q \alpha_q = 1 ,$$

où les P_q désignent des matrices de permutation. D'où finalement en utilisant la convexité de la norme :

$$\begin{aligned} \|{}^2Qw\| &= \left\| \sum_q \alpha_q P_q w \right\| \leq \sum_q \alpha_q \|P_q w\| \\ &= \sum_q \alpha_q \|w\| = \|w\| . \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que $\|{}^2rQw\|^2 \leq \|w\|^2$. \square

Remerciements

Le chapitre 1 n'aurait pas été si développé dans cet article si Jean-Louis Vernet n'avait pas été aussi outré de son absence dans mes rapports antérieurs. Pascal Laurent-Gengoux a eu une influence certaine sur la rédaction de cet article par le biais de quelques discussions sur le sujet, et en particulier en m'indiquant l'existence du théorème de Birkhoff utilisé dans la démonstration du lemme (6). Certaines simulations ont bénéficié du concours direct ou indirect de Gilles Favre et Denis Cren, stagiaires à Thomson. Je remercie enfin le comité de lecture pour ses critiques constructives.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. JUTTEN, *Calcul Neuromimétique et Traitement du Signal, Analyse en Composantes Principales*, Thèse d'État, INPG-USMG, Grenoble, 1987.
- [2] C. JUTTEN, J. HERAULT, « Une Solution Neuromimétique au Problème de Séparation de Sources », *Traitement du Signal*, vol. 5, n° 6, 1988, 389-403.
- [3] P. COMON, « Statistical Approach to the Jutten-Herault Algorithm », *NATO Workshop on Neuro-Computing*, Les Arcs, France, February 27-March 3, 1989.
- [4] L. FETY, « Méthodes de Traitement d'Antenne Adaptées aux Radiocommunications », *Thèse de Doctorat ENST*, juin 1988.
- [5] J. L. LACOUME, P. RUIZ, « Sources Identification : A Solution Based on the Cumulants », *IEEE ASSP Woprkshop*, Minneapolis, August 1988.
- [5b] J. L. LACOUME, P. RUIZ, « Extraction of Independent Sources from Correlated Inputs, a Solution based on Cumulants », *ONR-NSF-IEEE Workshop on Higher-Order Spectral Analysis*, Vail, Colorado, June 28-30, 1989, 146-151.
- [6] J. F. CARDOSO, « Blind Identification of Independent Components with Higher-Order Statistics », *ONR-NSF-IEEE Workshop on Higher-Order Spectral Analysis*, Vail, Colorado, June 28-30, 1989, 157-162.
- [7] P. COMON, « Separation of Stochastic Processes », *ONR-NSF-IEEE Workshop on Higher-Order Spectral Analysis*, Vail, Colorado, June 28-30, 1989, 174-179.
- [8] E. GASSIAT, « Déconvolution Aveugle », *Thèse de doctorat*, Université de Paris Sud, janvier 1988.
- [9] F. R. GANTMACHER, *Théorie des Matrices*, tome 2, Dunod, 1966.
- [10] D. R. BRILLINGER, *Time Series, Data Analysis and Theory*, Holden Day, 1981.
- [11] G. H. GOLUB, C. VAN LOAN, *Matrix Computation*, Hopkins, 1983.
- [12] S. KOTZ, N. L. JOHNSON, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Wiley, 1982.
- [13] J. H. WILKINSON, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, 1965.
- [14] P. LAURENT-GENGOUX, D. TRYSTRAM, *Comprendre l'Informatique Numérique*, Tec & Doc Lavoisier, 1989.
- [15] G. FAVRE, « Identification d'un mélange de processus aléatoires », *Rapport de stage de DEA*, Thomson Sintra, INPG, septembre 1989.
- [16] E. LLANO, « Analyse en Composantes Complexes Indépendantes Appliquée à la Détection Radar », *Rapport de DEA*, Thomson CSF SDC, INPG, septembre 89.
- [17] P. COMON, « Separation of Sources using High-Order Cumulants », *SPIE Conference on Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing*, vol. Real-time signal processing XII, San Diego, California, August 8-10, 1989, 170-181.
- [18] J. W. BREWER, « Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory », *IEEE Trans. CAS*, vol. 25, n° 9, September 1978, 772-781.
- [19] A. SWAMI, G. B. GIANNAKIS and J. M. MENDEL, « A Unified Approach to Modeling Multichannel ARMA Processes », *Conférence ICASSP*, 1989, Glasgow, 2182-2185.
- [20] P. COMON, C. JUTTEN, J. HERAULT, « Separation of Sources, a Statistical Interpretation », soumis en janvier 1990 à la revue *Signal Processing*.
- [21] L. C. ZHAO *et al.*, « On the Detection of Number of Signals in the Presence of White Noise », *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 20, 1986.
- [22] I. TAS et C. LATOMBE, « Détection Multiple par les Valeurs Propres de la Matrice Spectrale », *Traitement du Signal*, vol. 3, n° 2, 1986, 79-90.
- [23] J. M. PASSERIEUX, L. KOPP, « Detection Methods using the Eigenvalues : Theoretical Performances and Practical Limits in Underwater Passive Listening », *Conference Eusipco 86*, Elsevier, La Haye, 1047-1050.
- [24] S. VAN HUFFEL, « Analysis of the Total Least Squares Problem and its Uqze in Parameter Estimation », *PhD thesis*, Katholieke Universiteit Leuven, June 1987.
- [25] R. ROY and T. KAILATH, « ESPRIT », Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques », *IEEE Trans. on ASSP*, July 1989, vol. 37, n° 7, 984-995.
- [26] M. G. KENDALL and A. STUART, *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 1, 1960, Griffin.
- [27] I. GLAZMAN et Y. LIUBITCH, *Analyse Linéaire dans les Espaces de Dimension Finie*, Editions MIR, 1986.
- [28] J. F. CARDOSO and P. COMON, « Tensor-Based Independent Component Analysis », *Conference EUSIPCO*, Barcelona, september 18-21, 1990.

Manuscrit reçu le 13 mars 1990