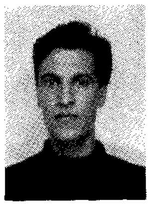
Localisation et identification par la quadricovariance

Localization and identification with the quadricovariance



Jean-François CARDOSO

TÉLÉCOM PARIS, Dept SIGNAL et CNRS-URA 820, 46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13, France

Jean-François Cardoso est né en 1958. Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure de Saint Cloud, il est Agrégé de Physique. Il est actuellement Chargé de Recherche du CNRS à Télécom Paris (URA 820). Principal domaine de recherche : exploitation des statistiques d'ordre supérieur pour le traitement des signaux multidimensionnels.

RÉSUMÉ

Cet article est consacré à l'utilisation des statistiques d'ordre quatre en Traitement d'Antenne. Après avoir rappelé brièvement les propriétés des moments et cumulants, on propose un formalisme algébrique pour exprimer commodément les statistiques d'ordre deux et quatre de variables aléatoires vectorielles. Nous définissons ainsi la « quadricovariance » qui est une représentation exhaustive des cumulants du quatrième ordre, et ses « matrices propres » qui en fournissent une décomposition orthogonale. Dans notre écriture, il y a une forte analogie entre la covariance et la quadricovariance, ce qui suggère une extension au quatrième ordre des méthodes développées pour exploiter le second ordre. On décrit ainsi brièvement une formation de voies au quatrième ordre puis une extension de la méthode MUSIC. Ces deux extensions ont l'avantage d'être insensibles à tout bruit gaussien additif puisqu'un tel bruit présente une quadricovariance nulle quelle que soit sa structure spatiale. On obtient aussi avec « 4-MUSIC » une capacité théorique de détection supérieure au nombre de capteurs. Elle passe de $N-1$ pour 2-MUSIC à $2(N-1)$ pour 4-MUSIC sur une antenne linéaire de N capteurs équidistants. Cette capacité peut être portée jusqu'à $N(N-1)$ sources en choisissant une antenne non uniforme. La notion de matrice propre permet aussi d'obtenir une solution directe au problème de « séparation de sources » où il s'agit de séparer un mélange vectoriel de composantes statistiquement indépendantes. On montre que les séparateurs ne sont autres que les matrices propres de la quadricovariance des données blanchies.

MOTS CLÉS

Non gaussien, Cumulants, Ordres Supérieurs, Traitement d'Antenne, Séparation de Sources, Localisation, Détection, Tenseurs.

SUMMARY

This paper is devoted to Array Processing with fourth-order statistics. After a brief review of the cumulant properties, we introduce an algebraic formalism for easy handling of higher-order multivariate statistics. We define the « quadricovariance », which is an exhaustive representation of the fourth-order cumulants, and its orthogonal decomposition into « eigenmatrices ». In this notation, the strong formal analogy between the quadricovariance and the usual covariance is an indication that second-order methods may be directly extended to fourth-order statistics. We briefly describe a « 4-Beamformer » and a « 4-MUSIC » which both show better resolution abilities than their second order analogs and are also insensitive to any additive gaussian noise, regardless of its spatial structure. We also show that the source detection limit is higher with fourth-order statistics. It goes from $N-1$ *sources with 2-MUSIC to* $2(N-1)$ *with 4-MUSIC operating on a linear equispaced array. Using a non uniform linear array, it goes up to* $N(N-1)$ *sources. The notion of eigenmatrix is then shown to provide a direct algebraic solution to the « blind source separation problem » which may be seen as an Array Processing problem where no information is available about the array manifold.*

KEY WORDS

Non Gaussian, Cumulants, Higher-Order Statistics, Array Processing, Localisation, Detection, Independent Component Analysis, Tensor Algebra.

1. Introduction

Depuis une dizaine d'années, les techniques de traitement d'antenne se sont enrichies de méthodes dites « à haute résolution » qui ont renouvelé l'approche des problèmes de localisation. On peut distinguer deux ingrédients à la base de ces avancées. D'une part, le traitement de la matrice interspectrale (matrice de covariance des observations à une fréquence donnée) bénéficie d'une approche géométrique : on parle de la « variété » décrite par les « vecteurs directionnels », du « sous-espace signal » qu'ils engendrent, etc... D'autre part, les capacités résolutives des algorithmes sont accrues par un modèle paramétrique des données qui permet d'intégrer tout ou partie de l'information disponible a priori. On commence ici par un rapide rappel sur ces deux points et on indique brièvement la place et les potentialités des statistiques d'ordre supérieur dans ce contexte.

1.1. LA DOUBLE PARAMÉTRISATION. LE MODÈLE VECTORIEL EN BANDE ÉTROITE

Le modèle vectoriel standard en bande étroite impose une structure de données par une **double paramétrisation.** La première paramétrisation consiste à supposer que le champ de sources à analyser est discret, c'est-à-dire composé d'un nombre fini de sources ponctuelles. Ceci s'oppose à l'approche des techniques dérivées de l'imagerie classique, lesquelles cherchent à imager un champ continu de sources. La première paramétrisation réduit donc l'analyse à la recherche d'un nombre fini de paramètres : les seules positions des sources. La seconde paramétrisation consiste à intégrer l'information de nature physique décrivant l'action d'une source sur le réseau. En effet, en l'absence d'effets non linéaires, la contribution d'une source au signal reçu à toute fréquence est décrite par un « vecteur directionnel » qui est une fonction de transfert spatiale entre la source et la sortie de l'antenne. Si les conditions de propagation, la géométrie de l'antenne, et le comportement de l'électronique de réception sont connus, on sait alors exprimer le vecteur directionnel en fonction de la position de la source : ceci réalise la seconde paramétrisation.

Les deux paramétrisations se traduisent en équations de la façon suivante. Une source discrète, indicée par p, émet un signal représenté par une variable aléatoire scalaire complexe notée α_p. La position de la source p étant repérée par θ_p, un paramètre de position (généralement un angle), on note $\underline{\theta}_p$ le vecteur directionnel correspondant. La contribution d'une source au signal mesuré à la sortie de l'antenne est alors $\alpha_p\, \underline{\theta}_p$. Le signal total reçu est une variable aléatoire vectorielle $\underline{x}$, somme des contributions de chaque source à laquelle s'ajoute un éventuel bruit additif représenté par une variable aléatoire vectorielle $\underline{b}$. Le modèle linéaire à identifier s'écrit donc

$$\underline{x} = \sum_p \alpha_p\, \underline{\theta}_p + \underline{b} \qquad (1.1)$$

où le **vecteur** directionnel $\underline{\theta}_p$ est une fonction supposée connue de la **direction** θ_p. Cette expression prend en compte les deux paramétrisations mais ne préjuge pas toutefois du principe de l'algorithme qui doit en tirer parti.

1.2. TRAITEMENT D'ANTENNE AU SECOND ORDRE

En bande étroite, la plupart des méthodes classiques reposent sur l'exploitation de l'information contenue dans la matrice interspectrale qui n'est autre que la covariance $\underline{R}$ des observations à une fréquence donnée. Une formation de voie estime la distribution de puissance des sources dans la direction θ par la quantité $\underline{\theta}^*\, \underline{R}\underline{\theta}$ où $\underline{\theta}^*$ désigne le vecteur dual du vecteur directionnel $\underline{\theta}$. On exploite ainsi la seconde paramétrisation mais pas la première : il est possible d'imager un champ quelconque (non nécessairement discret) de sources mais en revanche on n'en obtient pas une estimée à haute résolution. A cette fin, il faut utiliser explicitement la double paramétrisation.

Une méthode telle que MUSIC [1, 14] présuppose des sources discrètes en nombre strictement inférieur aux capteurs. Dans ce cas, le « sous-espace signal », sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs directionnels des sources, n'est pas de dimension maximale. On peut donc former l'opérateur $\underline{\Pi}_2$, projecteur sur le « sous-espace bruit », sous-espace orthogonal au sous-espace signal. La fonction de localisation définie par

$$d_2(\theta) = \left|\underline{\Pi}_2\, \underline{\theta}\right|^{-2} \qquad (1.2)$$

fournit alors une résolution asymptotiquement infinie grâce au fait que seuls les vecteurs directionnels associés aux sources appartiennent strictement au sous-espace signal. Pratiquement, le projecteur $\underline{\Pi}_2$ est obtenu à partir de la covariance $\underline{R}$. En l'absence de bruit additif, le sous-espace bruit s'identifie simplement au noyau de la covariance et on le calcule donc aisément comme la somme des projecteurs sur les vecteurs propres de $\underline{R}$ associés aux valeurs propres nulles. Un bruit additif spatialement blanc de puissance σ^2 ajoute à la covariance le terme σ^2 I (ou I désigne l'identité), ce qui a pour effet d'ajouter la valeur σ^2 à l'ensemble du spectre de $\underline{R}$ sans en affecter les vecteurs propres. Le projecteur $\underline{\Pi}_2$ sur le sous-espace bruit se construit donc encore de façon exacte en sélectionnant les sous-espaces propres associés aux plus petites valeurs propres. Lorsque le bruit n'est pas spatialement blanc, la connaissance de sa structure spatiale permet de le blanchir et de se ramener au cas précédent.

Cette méthode peut être perturbée en plusieurs circonstances. Un bruit additif de structure spatiale inconnue rend impossible l'estimation exacte de $\underline{\Pi}_2$ tandis que des sources en surnombre réduisent le sous-espace bruit au vecteur nul et donc $\underline{\Pi}_2$ à zéro, le rendant ainsi inopérant. Enfin, des conditions de propagation entre les sources et l'antenne mal modélisées ou, d'une manière plus générale, une seconde paramétrisation approximative ou inexacte, ont pour effet de gravement perturber ce type de méthode à haute résolution. On verra dans cet article comment le recours aux statistiques d'ordre supérieur peut apporter des réponses à ces problèmes.

1.3. TRAITEMENT D'ANTENNE AUX ORDRES SUPÉRIEURS

Lorsque les signaux captés à la sortie de l'antenne sont conjointement gaussiens, on sait que les statistiques du second ordre, exprimées dans la covariance, décrivent complètement le signal aléatoire. Mais il peut exister de nombreuses circonstances, notamment en Communications, où les signaux émis par les sources n'obéissent pas à une loi gaussienne. Dans ce cas, il est souhaitable de compléter l'information disponible en considérant les corrélations triples, quadruples etc... ou autrement dit, de considérer les statistiques d'ordre supérieur à deux.

Les ordres supérieurs ont déjà reçu des applications remarquables dans le traitement des séries temporelles où ils donnent la solution de problèmes que la seule connaissance du second ordre laissent indéterminés (l'identification en amplitude et phase d'un système linéaire [2, 3] ou la détection de couplages de phase [4]). Leur utilisation en traitement d'antenne a reçu moins d'attention jusqu'à présent. L'utilisation conjointe des deux paramétrisations et des moments d'ordre supérieur est considérée dans [11, 12] où toutefois seule une fraction des moments d'ordre quatre est utilisée pour former une matrice à laquelle on peut adapter les méthodes du type MUSIC ou ESPRIT pour la localisation de sources.

Le but de cet article est double : présenter un formalisme et en montrer des applications. On souhaite d'abord introduire un formalisme algébrique pour exprimer les statistiques d'ordre supérieur pour les variables aléatoires vectorielles. L'algèbre naturelle pour le second ordre est une algèbre de matrices ; l'algèbre naturelle pour les ordres supérieurs est une algèbre d'ordre supérieur c'est-à-dire une algèbre tensorielle (dans [9] on utilise un formalisme tensoriel général avec des quantités multi-indicées, mais comme le présent article se limite en fait au quatrième ordre, on y adopte plutôt un formalisme sans indices, qui semblera peut-être plus familier, tout en étant mathématiquement équivalent pour les questions traitées ici). Un avantage essentiel d'une algèbre d'ordre supérieur est de permettre une extension directe de la notion d'élément propre dont l'utilisation est si fructueuse dans les méthodes modernes de traitement d'antenne. Après avoir rappelé les propriétés des cumulants, on définit dans les deux prochaines sections la « quadricovariance » — tenseur cumulant du quatrième ordre — extension directe de la covariance et ses « matrices propres » qui permettent d'étendre aux ordres supérieurs la notion de sous-espace signal.

Ces notions sont tout à fait générales, la suite de l'article est consacrée à leur application au traitement d'antenne pour des sources non gaussiennes indépendantes. Grâce à leur analogie formelle avec le second ordre, on obtient très simplement à la section 4 une formation de voies au quatrième ordre (basée sur la quadricovariance et la seconde paramétrisation) puis un « 4-MUSIC » (basé sur la quadricovariance et la double paramétrisation). On peut trouver au moins deux motivations pour ces extensions qui répondent aux problèmes évoqués plus haut à propos de MUSIC. Tout d'abord, tout bruit additif gaussien présente des cumulants nuls au quatrième ordre et disparaît donc purement et simplement des statistiques, au moins asymptotiquement. Ensuite, l'espace des tenseurs étant plus « vaste » que celui des matrices, on montre que la capacité théorique de détection s'accroît en conséquence.

Enfin, nous montrons dans la section 5, et c'est là un avantage « absolu » des ordres supérieurs, qu'il est possible d'identifier les vecteurs directionnels « en aveugle » (c'est-à-dire sans disposer de la seconde paramétrisation : sans modèle de propagation ni d'antenne). Il n'est pas possible, sans information supplémentaire, d'en déduire alors une localisation, mais il est possible de séparer les signaux émis par chacune des sources (séparation aveugle). Cette technique se base sur la seule première paramétrisation et l'exploitation conjointe de la covariance et de la quadricovariance. Le problème de la séparation de sources a déjà reçu plusieurs solutions (voir l'article de synthèse de P. Duvaut et d'autres dans ce numéro ainsi que les références [5-10]), mais l'usage des matrices propres en fournit une solution simple et directe.

2. Tenseurs cumulants

Cette section rappelle la définition des moments et cumulants conjoints de variables aléatoires scalaires puis introduit nos notations pour l'algèbre du quatrième ordre ce qui permet de conclure par la définition de la quadricovariance.

2.1. MOMENTS ET CUMULANTS DE VARIABLES SCALAIRES

Les moments conjoints d'ordre n d'un ensemble $(x_i)_{(i=1,s)}$ de s variables aléatoires scalaires sont simplement les n-uples corrélations :

$$(2.1) \quad \mathrm{M}^{(n)}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = \overline{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}} \quad i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, s$$

où la barre qui surmonte une expression indique qu'on en prend l'espérance. Les moments conjoints d'ordre quelconque sont manifestement linéaires et symétriques en chacune de leurs variables. On voit que si les variables aléatoires peuvent être séparées en deux groupes statistiquement indépendants, cette partition induit une factorisation correspondante des moments. On sait aussi que pour des variables aléatoires gaussiennes dans leur ensemble, les moments d'ordre supérieur à deux s'expriment en fonction des seuls moments du premier et second ordre.

Ces propriétés sont certes agréables, mais en vue des problèmes qui nous concernent — problèmes de superposition de signaux — il manque une propriété d'additivité. Le moment du second ordre, par exemple, de la somme de deux variables indépendantes n'est pas égal à la somme des deux moments tandis que la variance de la somme est la somme des variances. On obtient ici une statistique additive pour des variables indépendantes en considérant des variables centrées. Les cumulants [13] généralisent cette idée à tous les ordres en fournissant des statistiques qui sont toujours additives pour des variables indépendantes (ce qui leur vaut parfois la dénomination de « semi-invariants »).

La façon la plus simple de définir les cumulants utilise la fonction caractéristique, c'est-à-dire la transformée de Fourier de la densité de probabilité conjointe des variables. Son développement autour de l'origine fait apparaître comme coefficient du terme de degré n le moment d'ordre n des variables considérées (à une constante près). En développant de la même façon la seconde fonction caractéristique, définie comme le logarithme de la première, on fait apparaître les cumulants. Cette définition des cumulants permet d'obtenir la propriété fondamentale d'additivité. Soient $(x_i)_{(i=1,s)}$ et $(y_i)_{(i=1,s)}$ deux ensembles indépendants de variables aléatoires, et soit $(z_i)_{(i=1,s)} = (x_i + y_i)_{(i=1,s)}$ leur somme, alors :

$$\mathrm{Cum}\,(z_{i_1}, \dots, z_{i_n}) = \mathrm{Cum}\,(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) + \mathrm{Cum}\,(y_{i_1}, \dots, y_{i_n}) \quad \forall i_1, i_2, \dots, i_n \in [1, s]\,.$$

Les cumulants conservent les propriétés de linéarité et de symétrie des moments. Les autres propriétés citées prennent une forme plus simple. Si les variables aléatoires peuvent être séparées en deux groupes statistiquement indépendants, les cumulants conjoints sont nuls à tout ordre. Si les variables aléatoires sont gaussiennes dans leur ensemble, leurs cumulants d'ordre supérieur à deux sont nuls. La covariance est le cumulant du second ordre, les cumulants d'ordre supérieur peuvent être vus comme la généralisation de la covariance. A titre indicatif, le cumulant d'ordre quatre pour les variables aléatoires **centrées** v, w, x, y est égal à $\overline{vwxy} - \overline{vw}\,\overline{xy} - \overline{vx}\,\overline{wy} - \overline{vy}\,\overline{wx}$. On remarque un premier terme qui est le moment d'ordre quatre, suivi de termes « correctifs » d'ordre inférieur qui assurent l'additivité pour des variables indépendantes et la nullité pour des variables gaussiennes.

Considérons maintenant $\underline{x}$ un vecteur aléatoire dans un espace de dimension N. Ses coordonnées dans une base orthonormée $(e_i)_{(i=1,\mathrm{N})}$ sont des variables aléatoires complexes notées $(x_i)_{(i=1,\mathrm{N})}$. Nous définissons les tenseurs des moments du second et quatrième ordre comme les quantités à deux et quatre indices :

$$m_{ij}^{(2)} = \mathrm{M}^{(2)}(x_i, x_j^*) \tag{2.2}$$

$$m_{ijkl}^{(4)} = \mathrm{M}^{(4)}(x_i, x_j^*, x_k^*, x_l) \tag{2.3}$$

et les tenseurs cumulants du second et quatrième ordre comme les quantités à deux et quatre indices :

$$r_{ij} = \mathrm{Cum}\,(x_i, x_j^*) \tag{2.4}$$

$$q_{ijkl} = \mathrm{Cum}\,(x_i, x_j^*, x_k^*, x_l)\,. \tag{2.5}$$

Dans un formalisme strictement tensoriel, il serait nécessaire de distinguer indices covariants et contravariants et de démontrer le caractère tensoriel de ces quantités. Puisque dans cet article nous n'utilisons que les cumulants d'ordre deux et quatre, nous allons nous contenter d'un formalisme plus simple et représenter les tenseurs dans une notation sans indice où le tenseur cumulant du second ordre prend sa forme familière d'opérateur de covariance tandis que le cumulant du quatrième ordre apparaîtra comme un « super-opérateur ».

2.2. ALGÈBRE D'ORDRE QUATRE. QUADRICOVARIANCE

Dans cette section nous montrons comment utiliser les notations traditionnelles des espaces vectoriels normés pour représenter des quantités à un, deux et quatre indices.

On considérera des espaces vectoriels sur le corps des complexes, munis d'un produit scalaire qui sera noté $\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle$. L'existence d'un tel produit est fondamentale puisqu'elle permet d'associer canoniquement à tout vecteur $\underline{x}$ son dual, noté $\underline{x}^*$, forme linéaire sur E définie par $\underline{x}^*\,\underline{y} = \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle$ pour tout y, et à tout endomorphisme $\underline{\mathrm{A}}$ son adjoint, endomorphisme noté $\underline{\mathrm{A}}^\dagger$, défini pour tous $\underline{x}$, $\underline{y}$ de E par $\underline{x}^*(\underline{\mathrm{A}}\underline{y}) = (\underline{\mathrm{A}}^\dagger\,\underline{x})^*\,\underline{y}$. Cette multiplication à droite d'une forme par un vecteur pour donner un nombre complexe se complète sans ambiguïté d'une multiplication à gauche qui produit un endomorphisme. Ainsi, l'écriture $\underline{\mathrm{A}} = \underline{x}\underline{y}^*$ définit l'endomorphisme $\underline{\mathrm{A}}$ par $\underline{\mathrm{A}}\underline{z} = \underline{x}\underline{y}^*\,\underline{z} = \underline{x}\langle \underline{y} | \underline{z} \rangle$. Si les x_i, $i = 1$, N sont les coordonnées du vecteur $\underline{x}$ sur la base orthonormée $(\underline{e_i})_{(i=1,\mathrm{N})}$ de E de dimension N, alors les coordonnées de $\underline{x}^*$ sont les x_i^*, $i = 1$, N sur la base orthonormée $(\underline{e_i^*})_{(i=1,\mathrm{N})}$ de l'espace de dimension N des formes linéaires sur E. (On peut sans confusion utiliser le même symbole pour noter le dual d'un vecteur et le conjugué d'un complexe puisque le corps des complexes est un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même : en utilisant le module pour norme, le dual d'un nombre complexe est son conjugué).

Les endomorphismes sur l'espace vectoriel E forment à leur tour un espace vectoriel noté F, de dimension N^2, qu'on munit canoniquement d'une base orthonormée, associée à celle de E : $(\underline{e_i}\,\underline{e_j^*})_{(i,j=1,\mathrm{N})}$. Dans cette base, les coordonnées de l'endomorphisme $\underline{x}\underline{y}^*$ sont $x_i\,y_j^*$, et le produit scalaire de deux endomorphismes $\underline{\mathrm{A}}$ et $\underline{\mathrm{B}}$ est $\langle \underline{\mathrm{A}} | \underline{\mathrm{B}} \rangle = \underline{\mathrm{A}}^*\,\underline{\mathrm{B}} = \mathrm{Trace}\,(\underline{\mathrm{B}}\underline{\mathrm{A}}^\dagger)$. Il est ici important de faire la distinction, pour un endomorphisme $\underline{\mathrm{A}}$, entre son adjoint $\underline{\mathrm{A}}^\dagger$ qui est un autre endomorphisme et son dual $\underline{\mathrm{A}}^*$ qui est une forme linéaire sur F : multipliée à droite par un endomorphisme, elle produit un nombre complexe. Comme pour les vecteurs, on peut aussi définir la multiplication à gauche d'une telle forme par un endomorphisme.

Soient $\underline{\mathrm{A}}$ et $\underline{\mathrm{B}}$ deux endomorphismes sur E, l'entité notée $\underline{\mathrm{A}}\underline{\mathrm{B}}^*$ définit sans ambiguïté un endomorphisme sur F (espace des endomorphismes sur E), opérant sur tout $\underline{\mathrm{C}}$ de F selon :

$$(\underline{\mathrm{A}}\underline{\mathrm{B}}^*)\,\underline{\mathrm{C}} = \underline{\mathrm{A}}\,(\underline{\mathrm{B}}^*\,\underline{\mathrm{C}}) = \underline{\mathrm{A}}\,\langle \underline{\mathrm{B}} | \underline{\mathrm{C}} \rangle = \underline{\mathrm{A}}\,\mathrm{Trace}\,(\underline{\mathrm{C}}\underline{\mathrm{B}}^\dagger)\,.$$

Dans la suite, le terme de « tenseur » sera en fait (abusivement) réservé aux endomorphismes sur les endomorphismes de E qu'on notera en majuscules doublement soulignées. Les « tenseurs » forment un espace vectoriel de dimension N^4, qu'on munit canoniquement de la base orthonormée : $((\underline{e_i}\,\underline{e_j^*})(\underline{e_k}\,\underline{e_l^*})^*)_{i,j,k,l=1,\mathrm{N}}$. Dans cette base, les coordonnées du tenseur $\underline{\underline{\mathrm{C}}} = \underline{\mathrm{A}}\underline{\mathrm{B}}^*$ sont $c_{ijkl} = a_{ij}\,b_{kl}^*$.

Avec ces notations, les moments conjoints d'ordre deux et quatre (2.2, 2.3) de la variable aléatoire vectorielle $\underline{x}$ apparaissent respectivement comme les coordonnées dans les bases canoniques de l'endomorphisme $\underline{\mathrm{M}}^{(2)} = \overline{\underline{x}\underline{x}^*}$ et du tenseur $\underline{\underline{\mathrm{M}}}^{(4)} = \overline{(\underline{x}\underline{x}^*)(\underline{x}\underline{x}^*)^*}$. L'opérateur usuel de covariance $\underline{\mathrm{R}}$ est celui dont les coordonnées sont les $\mathrm{Cum}\,(x_i, x_j^*)$ et on définit naturellement le tenseur de **quadricovariance** comme le tenseur $\underline{\underline{\mathrm{Q}}}$ de coordonnées $\mathrm{Cum}\,(x_i, x_j^*, x_k^*, x_l)$. Remarquons que, comme endomorphisme, le tenseur des moments est par définition toujours non négatif, ce qui n'est pas vrai de la quadricovariance.

3. Structures de la quadricovariance

Comme on l'a rappelé dans l'introduction, les méthodes haute résolution au second ordre s'appuient sur deux décompositions distinctes de la covariance. On peut, d'une part, exprimer la covariance comme somme des covariances de chaque source grâce à l'hypothèse d'indépendance statistique. Il en résulte une **structure statistique** de la covariance. D'autre part, la covariance étant auto-adjointe, elle se décompose en éléments propres révélant ainsi une **structure algébrique.** Nous montrons dans cette section comment l'utilisation des tenseurs cumulants permet une extension directe de ces notions au quatrième ordre.

3.1. STRUCTURE STATISTIQUE POUR UN MÉLANGE

La représentation des statistiques du quatrième ordre du signal par les cumulants plutôt que par les moments permet l'exploitation directe de l'hypothèse d'indépendance. Il suffit de rappeler que les cumulants sont additifs dans la superposition de variables aléatoires indépendantes. Les contributions de chaque source et du bruit, postulées indépendantes au moins jusqu'au quatrième ordre, se superposent donc, non seulement au niveau du signal lui-même, mais aussi au niveau de ses statistiques cumulantes. Ainsi, si l'on note $\underline{\underline{Q}}_p$ le tenseur cumulant du vecteur aléatoire pour la p-ième source, et $\underline{\underline{Q}}_b$ le tenseur cumulant du vecteur aléatoire du bruit additif, on obtient simplement la quadricovariance des observations par :

$$\underline{\underline{Q}} = \sum_p \underline{\underline{Q}}_p + \underline{\underline{Q}}_b \, . \tag{3.1}$$

Rappelons que si le bruit additif est gaussien (resp. : proche de gaussien), sa quadricovariance $\underline{\underline{Q}}_b$ est nulle (resp. : proche de zéro). L'hypothèse de bande étroite permet de voir le signal reçu de la source p comme toujours proportionnel au vecteur directionnel $\underline{\theta}_p$, de telle sorte que sa partie aléatoire est de nature purement scalaire : c'est le signal α_p émis par la source. Notons k_p le kurtosis (cumulant scalaire du quatrième ordre) de ce signal :

$$k_p = Cum\,(\alpha_p, \alpha_p^*, \alpha_p^*, \alpha_p) \, . \tag{3.2}$$

Grâce à la linéarité des cumulants en chacune de leurs variables, la quadricovariance de la contribution $\alpha_p\, \underline{\theta}_p$, signal reçu de la source p est simplement :

$$\underline{\underline{Q}}_p = k_p(\underline{\theta}_p\, \underline{\theta}_p^*)(\underline{\theta}_p\, \underline{\theta}_p^*)^* \, . \tag{3.3}$$

Au total, la quadricovariance des observations est :

$$\underline{\underline{Q}} = \sum_p k_p(\underline{\theta}_p\, \underline{\theta}_p^*)(\underline{\theta}_p\, \underline{\theta}_p^*)^* + \underline{\underline{Q}}_b \, . \tag{3.4}$$

Cette expression est l'analogue directe de celle exprimant les statistiques du second ordre par la covariance :

$$\underline{R} = \sum_p \sigma_p^2\, \underline{\theta}_p\, \underline{\theta}_p^* + \underline{R}_b \, .$$

Cette analogie structurelle ne repose que sur deux propriétés des cumulants — additivité pour des processus indépendants et linéarité — et peut donc être étendue à n'importe quel ordre pair autre que deux (covariance) ou quatre (quadricovariance).

3.2. STRUCTURE ALGÉBRIQUE. MATRICES PROPRES

La structure que nous voulons mettre en évidence dans ce paragraphe étend aux tenseurs la notion de décomposition en éléments propres des matrices. Elle est toutefois plus forte au quatrième ordre qu'au second car les symétries y sont plus nombreuses.

Rappelons qu'un endomorphisme $\underline{A}$ jouissant de la symétrie hermitienne possède N (dimension de l'espace) vecteurs propres orthonormés et N valeurs propres réelles. La symétrie hermitienne peut se définir de façon externe : « $\underline{A}$ est auto-adjoint », « $\underline{A} = \underline{A}^\dagger$ » ou bien de façon interne au moyen des coordonnées a_{ij} par $a_{ij} \underset{\mathrm{N}}{=} a_{ji}^*$. La décomposition en éléments propres s'écrit $\underline{A} = \sum_\nu \lambda_\nu\, \underline{\nu}\,\underline{\nu}^*$.

Lorsque les valeurs propres sont toutes distinctes, les vecteurs propres ne sont déterminés qu'à une phase près (i.e. un facteur complexe de module 1) qui disparaît quand on forme les projecteurs $\underline{\nu}\,\underline{\nu}^*$ qui sont donc définis sans ambiguïté. Si une même valeur propre est associée à plusieurs vecteurs propres, ceux-ci dégénèrent, mais la somme des projecteurs associés reste définie de façon unique. Cette décomposition s'applique « telle quelle » à la quadricovariance car on l'a précisément définie comme endomorphisme. Cet endomorphisme est bien auto-adjoint puisque $q_{ijkl} = q_{klij}^*$, cette égalité résultant d'une symétrie des cumulants, en l'occurrence :

$$\mathrm{Cum}\,(x_i, x_j^*, x_k^*, x_l) = \mathrm{Cum}\,(x_k, x_l^*, x_i^*, x_j)^* \, .$$

On en déduit la décomposition de la quadricovariance en N^2 valeurs propres réelles et N^2 endomorphismes orthonormés (formant une base orthonormée de l'espace de dimension N^2 des endomorphismes), ce qui s'écrit :

$$\underline{\underline{Q}} = \sum_m^{\mathrm{N}^2} \mu_m\, \underline{\mathrm{M}}\,\underline{\mathrm{M}}^* \, . \tag{3.5}$$

Par abus de langage, les endomorphismes propres seront appelés « matrices propres ». Sous la seule symétrie hermitienne, ils sont définis à une phase près, mais on va voir que cette ambiguïté se réduit à celle du signe lorsque l'on considère les autres symétries de la quadricovariance.

La quadricovariance n'est pas un endomorphisme quelconque mais un endomorphisme d'endomorphismes : il peut subir des opérations de symétrie plus nombreuses. Ceci s'exprime plus clairement en termes d'indices : il y a plus de permutations sur un quadruplet que sur une paire. En exploitant ces symétries supplémentaires, on fait apparaître des propriétés nécessairement inédites au second ordre. La seconde opération de symétrie que nous voulons exploiter est celle qui transforme génériquement un tenseur $\underline{\underline{T}} = \underline{A}\,\underline{B}^*$ en $\underline{\underline{T}}' = \underline{A}^\dagger\, \underline{B}^{\dagger\,*}$. On vérifiera sans peine que cette opération équivaut, au niveau des indices, à transformer t_{ijkl} en t^*_{jilk}. Appliquée au tenseur cumulant, cette opération transforme Cum (x_i, x_j^*, x_k^*, x_l) en Cum $(x_j, x_i^*, x_l^*, x_k)^*$ qui lui est identique ce qui montre que la quadricovariance est invariante sous cette opération. En l'appliquant alors à la décomposition en matrices propres (3.5), on obtient une relation sur celles-ci :

$$\underline{\underline{Q}} = \sum_m \mu_m \underline{M}\,\underline{M}^* = \sum_m \mu_m \underline{M}^\dagger\, \underline{M}^{\dagger\,*} .$$

Les matrices propres associées à une valeur propre isolée ne peuvent différer que par un facteur de phase. Dans ce cas, l'identité précédente implique $\underline{M}^\dagger = e^{i\phi}\underline{M}$ qu'on réécrit en $e^{i\phi/2}\underline{M} = e^{-i\phi/2}\underline{M}^\dagger = (e^{i\phi/2}\underline{M})^\dagger$. La matrice $e^{i\phi/2}\underline{M}$, qui est aussi matrice propre, est donc hermitienne. Par conséquent, pour un tenseur qui satisfait aux deux symétries précédentes, on peut choisir une décomposition en matrices propres **hermitiennes** et ce choix ne laisse alors indéterminés que leurs signes. Dans le cas de valeurs propres dégénérées, tout ceci reste valide mais se démontre alors plus facilement dans une notation indicée.

Il existe enfin une dernière opération de symétrie sous laquelle la quadricovariance est invariante. Elle correspond à la transformation des coordonnées t_{ijkl} en t_{ikjl}. On peut vérifier que cette permutation, associée aux deux précédemment considérées, engendre l'ensemble (le sous-groupe) des permutations qui laissent invariantes ou conjuguent les coordonnées de la quadricovariance. Utiliser cette dernière invariance permettrait donc d'exploiter l'ensemble des propriétés élémentaires de symétrie d'un tenseur comme celui des moments ou des cumulants. Nous n'avons malheureusement pu obtenir de résultats significatifs dans cette direction. L'origine de cette difficulté est claire : à l'inverse des deux premières permutations considérées, la permutation $j \leftrightarrow k$ brise l'appariement naturel $((ij)(kl))$ qui est implicite dans l'approche où les tenseurs sont vus comme des endomorphismes d'endomorphisme.

Terminons cette section par deux remarques de nature différente. La première concerne le cas où l'on considère des variables aléatoires réelles. Tout ce qui vient d'être dit s'applique encore intégralement mais on bénéficie du fait que l'ensemble des matrices auto-adjointes forme alors un sous-espace vectoriel de dimension $N(N+1)/2$ sur le corps des réels. La quadricovariance, ou tout tenseur possédant les deux premières symétries, est alors identique à sa restriction sur ce sous-espace ce qui autorise, entre autres, des gains d'implantation en taille mémoire et corrélativement en coût de calcul. La seconde remarque concerne l'implantation de la décomposition d'un tenseur en matrices propres. Un tel calcul n'exige bien sur aucun algorithme nouveau : toute méthode de décomposition d'une matrice en vecteurs propres s'applique à un tenseur puisque ceux-ci ont été définis comme endomorphismes. On peut forcer l'algorithme de décomposition à produire des matrices propres hermitiennes en choisissant pour F une base orthonormée de matrices hermitiennes au lieu de la base canonique $(\underline{e}_i\, \underline{e}_j^*)_{(i,j=1,N)}$. Sur une base hermitienne, les coordonnées de la quadricovariance sont réelles, et on utilisera donc un algorithme de décomposition de tableaux réels, au bénéfice de la simplicité, de la vitesse de calcul, et de la taille mémoire (voir à ce sujet la référence [16]).

4. Localisation au quatrième ordre

Connaissant désormais les structures de la covariance et de la quadricovariance pour un champ de sources indépendantes, les idées employées pour la localisation au second ordre peuvent s'étendre facilement au quatrième ordre grâce à l'analogie formelle des structures algébriques et statistiques. Cependant, il faut remarquer d'emblée qu'une localisation au quatrième ordre ne peut détecter que des sources non gaussiennes, les sources gaussiennes étant strictement invisibles aux ordres supérieurs à deux. Commençons par une généralisation de la formation de voies traditionnelle.

4.1. FORMATION DE VOIES AU QUATRIÈME ORDRE

On considère des sources indépendantes indexées par l'entier p, situées sous des directions θ_p, de puissance σ_p^2 et de kurtosis k_p. Pour ne pas alourdir cette brève discussion, le bruit additif est supposé négligeable. La puissance du champ de sources dans la direction θ peut donc s'écrire

$$\sigma^2(\theta) = \sum_p \sigma_p^2\, \delta(\theta - \theta_p) . \tag{4.1}$$

La puissance du champ dans une direction θ est estimée par une formation de voie classique par

$$\widehat{\sigma^2}(\theta) = \underline{\theta}^*\, \underline{\underline{R}}\, \underline{\theta} . \tag{4.2}$$

Cette estimée est donc liée au champ par

$$\widehat{\sigma^2}(\theta) = \underline{\theta}^* \left(\sum_p \sigma_p^2\, \underline{\theta}_p \underline{\theta}_p^* \right) \underline{\theta} = \sum_p \sigma_p^2 |\underline{\theta}^*\, \underline{\theta}_p|^2 . \tag{4.3}$$

La comparaison des équations (4.1) et (4.3) montre que la distribution angulaire de puissance du champ de sources est estimée, dans la formation de voie, par l'intermédiaire d'un lissage, opération linéaire déterminée par le noyau $|\underline{\theta}^*\, \underline{\theta}_p|^2$. Pour une antenne linéaire équirépartie, cette relation devient une convolution si l'on travaille avec la variable sin (θ) en lieu de θ car le noyau est dans ce cas une fonction de sin (θ_p) – sin (θ).

L'extension au quatrième ordre consiste à imager le champ de kurtosis : $k(\theta) = \sum_p k_p\, \delta(\theta - \theta_p)$ en formant l'estimateur :

$$\hat{k}(\theta) = (\theta\theta^*)^*\, Q\, (\underline{\theta}\underline{\theta}^*) . \tag{4.4}$$

Bien entendu, ceci est équivalent à construire pour chaque direction θ le kurtosis du signal vectoriel reçu filtré (spatialement) par $\underline{\theta}$ soit, en posant $y = \underline{\theta}^*\, \underline{x}$,

$$\hat{k}(\theta) = \mathrm{Cum}\, (\underline{y}, \underline{y}^*, \underline{y}^*, \underline{y}) .$$

L'estimée $k(\theta)$ de la distribution angulaire de kurtosis est reliée à la distribution vraie par :

$$(4.5)\quad \hat{k}(\theta) = (\underline{\theta}\,\underline{\theta}^*)^* \left[\sum_p k_p (\underline{\theta}_p \underline{\theta}_p^*)(\underline{\theta}_p \underline{\theta}_p^*)^* \right] (\underline{\theta}\,\underline{\theta}^*) = \\ = \sum_p k_p |\underline{\theta}^* \underline{\theta}_p|^4 .$$

Ainsi le noyau qui intervient au quatrième ordre dans l'estimation du champ de kurtosis est le carré de celui qui intervient au second ordre dans l'estimation du champ de puissance. On peut en déduire essentiellement deux conséquences quant à la directivité au quatrième ordre de l'antenne relativement au second. D'abord, l'effet sur le lobe principal de l'antenne se comprend aisément en considérant un développement limité du noyau autour de la direction d'une source. Si la largeur du lobe principal est notée γ, ce développement est de la forme $|\underline{\theta}^* \underline{\theta}_p|^2 \approx 1 - \left[\frac{\theta - \theta_p}{\gamma} \right]^2$ qui, élevé au carré, donne $|\underline{\theta}^* \underline{\theta}_p|^4 \approx 1 - \left[\frac{\theta - \theta_p}{2^{-1/2}\gamma} \right]^2$. Par conséquent la largeur du lobe principal au quatrième ordre est divisée par un facteur $\sqrt{2}$. C'est une amélioration sensible mais l'élévation au carré produit son effet le plus important sur les lobes secondaires. Pour un lobe secondaire de niveau relatif α au second ordre, on passe à un niveau relatif α^2 au quatrième ordre. Rappelons enfin qu'un champ de bruit gaussien n'a asymptotiquement aucun effet sur la quadricovariance, ce qui, conjointement à l'abaissement du niveau de lobes secondaires, ne peut qu'améliorer le contraste. Ceci est illustré par la figure 1 pour laquelle on a considéré une antenne de quatre capteurs régulièrement espacés d'une demie longueur d'onde, en présence de trois sources de puissances 1.0, 0.6 et 0.1 (en unités arbitraires) et situées respectivement aux angles 0.0, 25.0 et – 45.0 degrés. La partie supérieure de la figure montre le résultat d'une formation de voie au second ordre (imagerie de puissance). Nous avons volontairement choisi une configuration critique : le lobe principal est trop large pour résoudre les deux sources de plus forte puissance, tandis que celle de faible puissance est sous l'influence d'un lobe secondaire. Pour des sources situées sous les mêmes angles et avec des kurtosis dans un rapport identique à celui des puissances, la formation de voie au quatrième ordre offre ici un gain de résolution suffisant pour résoudre les deux sources principales et retrouver correctement la source faible. Bien entendu, il n'est pas vraiment possible de comparer les formations de voie aux ordres deux et quatre puisque chacune donne du champ de sources une image différente : celle de sa puissance au second ordre et celle de son kurtosis au quatrième. Il faut plutôt considérer la « 4-Formation de voie » comme une source d'information distincte donnant de la non-gaussianité (au quatrième ordre) du champ une image de résolution supérieure à celle du second ordre.

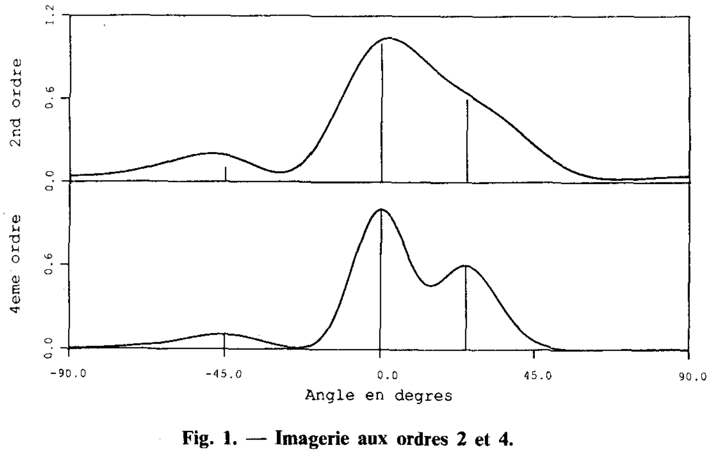


Fig. 1. — Imagerie aux ordres 2 et 4.

4.2. 4-MUSIC

Il est certainement plus significatif de comparer 2-MUSIC et son extension au quatrième ordre « 4-MUSIC » puisqu'il ne s'agit pas ici de construire un estimateur d'une densité qui ne peut être que différente aux ordres deux et quatre (densité de puissance et densité de kurtosis), mais plutôt de construire une méthode de détection et de localisation de sources discrètes.

Pour décrire l'extension de MUSIC au quatrième ordre, commençons par raisonner sur le cas sans bruit. L'équation (3.4) montre que l'espace image de la quadricovariance, espace d'endomorphismes, est engendré par les $\underline{\theta}_p\ \underline{\theta}_p^*$. Cet espace sera naturellement appelé « espace signal d'ordre quatre » et, après décomposition de la quadricovariance en matrices propres, on en obtient une base orthonormée en sélectionnant les matrices propres associées à des valeurs propres non nulles. Il est donc facile de construire le projecteur orthogonal sur cet espace en sommant les projecteurs sur chacune des matrices propres associées à une valeur propre non nulle, ou bien de construire le projection $\underline{\underline{\Pi}}_4$ sur le sous-espace orthogonal, « sous-espace bruit d'ordre 4 », en sommant sur les valeurs propres nulles :

$$(4.6)\qquad \underline{\underline{\Pi}}_4 = \sum_{\mu_m = 0} \underline{\text{M}}\,\underline{\text{M}}^* .$$

Si l'antenne n'est pas sous-échantillonnée, les seuls endomorphismes de la forme $\underline{\theta}\,\underline{\theta}^*$ qui soient strictement inclus dans le sous-espace signal eu quatrième ordre sont ceux tels que θ soit la direction d'une source, ou encore, ceux qui sont orthogonaux au sous-espace bruit d'ordre quatre. On obtient donc un détecteur de sources en formant la fonction de localisation :

$$(4.7)\qquad d_4(\theta) = |\underline{\underline{\Pi}}_4(\underline{\theta}\,\underline{\theta}^*)|^{-2}$$

où, en analogie avec le second ordre (voir eq. 1.2), on voit la dyade $(\underline{\theta}\,\underline{\theta}^*)$ jouer le rôle d'une « matrice directionnelle ». Remarquons que cette fonction de localisation peut se réécrire à partir des matrices propres sans faire apparaître de tenseurs, en utilisant la propriété élémentaire $\underline{\text{A}}^*(\underline{x}\,\underline{x}^*) = \underline{x}^* \underline{\text{A}}^{\dagger}\, \underline{x}$:

$$(4.8)\qquad d_4(\theta) = \left[\sum_{\mu_m = 0} |\underline{\theta}^* \underline{\text{M}}\,\underline{\theta}|^2 \right]^{-1} .$$

Un avantage décisif que peut apporter l'emploi du quatrième ordre dans le traitement du bruit apparaît quand celui-ci est gaussien. On a déjà souligné que dans ce cas, sa contribution à la quadricovariance est nulle **quelle que soit sa structure spatiale :** un bruit additif gaussien indépendant des sources n'affecte pas 4-MUSIC. Ceci n'est bien sur vrai qu'asymptotiquement : il serait nécessaire de faire une étude en fonction du volume de données utilisé dans l'estimation de la quadricovariance.

4.3. STRUCTURE DE L'ANTENNE ET CAPACITÉ DE DÉTECTION

Dans cette section, on étudie la capacité de détection de la quadricovariance. Nous allons nous intéresser exclusivement au nombre de sources dont on peut théoriquement détecter la présence dans la quadricovariance, indépendamment du problème fondamental mais non traité ici de l'élaboration de tests statistiques de rang. Il s'agit donc d'une étude purement algébrique où l'on ignore le bruit et les erreurs d'estimation.

Commençons par l'illustration de la méthode en présence de deux sources de kurtosis identiques. La fonction de localisation de 4-MUSIC est tracée (*fig.* 2) en trait plein pour une antenne de quatre capteurs régulièrement espacés d'une demie longueur d'onde. Les deux sources sont placées sous un même lobe et leurs positions repérées par des asymptotes verticales. On observe une fonction de localisation similaire à celle tracée en pointillés obtenue avec 2-MUSIC (à ceci près que le quatrième ordre donne des pics plus fins pour des raisons analogues à celles discutées dans la section précédente). On ne s'en étonnera pas puisque dans ce cas idéal, la résolution de ce type de méthodes est théoriquement infinie. Dans la figure 3 le nombre de sources est porté à 6. On voit que **le nombre de sources détectables par 4-MUSIC est supérieur au nombre de capteurs.** Cependant, une expérience avec 7 sources donne une projection toujours nulle du vecteur directionnel sur le sous-espace bruit, ce qui rend évidemment chimérique toute tentative de détection. Quel est alors, dans un cas général, le nombre maximum de sources théoriquement détectables par 4-MUSIC ?

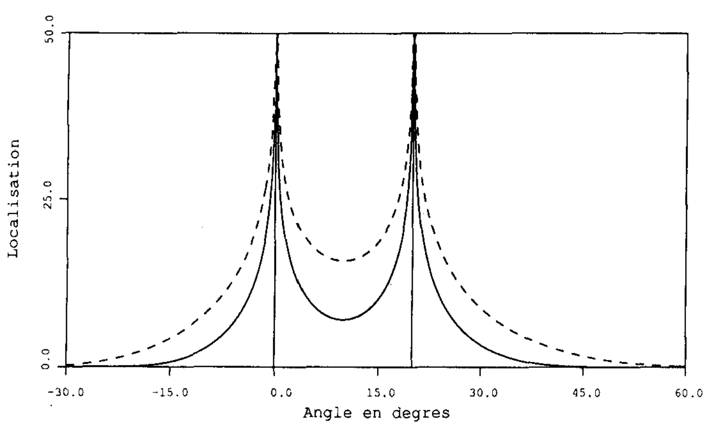


Fig. 2. — MUSIC en pointillés, 4-MUSIC en trait plein. Deux sources de puissances et kurtosis identiques.

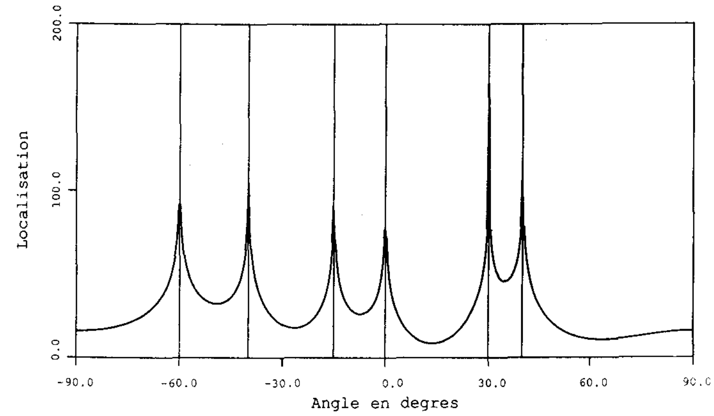


Fig. 3. — 4-MUSIC, 4 capteurs équirépartis, 6 sources.

La réponse à cette question se trouve dans l'examen de la structure du sous-espace signal. Lorsqu'une source prend toutes les positions possibles, le vecteur directionnel d'une antenne raisonnablement conçue balaye toutes les directions possibles de l'espace (des données). En conséquence, l'existence du sous-espace bruit du **second** ordre est réellement significative : elle ne résulte pas de l'impossibilité structurelle pour le vecteur directionnel de pointer dans certaines directions. Tant que ce sous-espace existe on peut donc détecter des sources par une technique de projection. Pour M sources dans des positions quelconques, le sous-espace signal du second ordre est de dimension M ce qui laisse subsister le sous-espace bruit tant que $M < N$. Considérons maintenant la situation au quatrième ordre. A priori, on peut espérer que lorsqu'une source prend toutes les positions possibles, sa « matrice directionnelle » $\underline{\theta}\,\underline{\theta}^*$ balaye tout l'espace des endomorphismes. Cette proposition est cependant évidemment fausse pour une antenne linéaire équirépartie devant un champ de sources à l'infini. On sait que dans ce cas la phase du vecteur directionnel est linéaire (croit linéairement d'un capteur au suivant) et par conséquent, la matrice directionnelle possède une structure de Toeplitz. Or l'ensemble des matrices de Toeplitz sur un espace complexe de dimension N est un sous-espace vectoriel de dimension $2N-1$. Puisque la matrice directionnelle ne peut visiter qu'un espace de dimension $2N-1$, il est impossible avec une antenne équirépartie de détecter par une méthode de projection plus de $2(N-1)$ sources. Ceci correspond bien à la limite de 6 sources observée sur l'antenne de quatre capteurs.

Ces remarques suggèrent qu'une conception particulière de l'antenne, l'utilisation d'un pas variable entre les capteurs, permettrait à la matrice directionnelle de visiter l'espace tout entier des endomorphismes, espace de dimension N^2. En nous basant sur l'examen du rang d'une « quadricovariance moyenne », considérations que nous ne reproduisons pas ici, nous avons obtenu une antenne bien équilibrée en choisissant d'espacer d'une demie longueur d'onde les deux premiers capteurs et en doublant l'écartement entre capteurs en passant d'une paire à la suivante. Cette « antenne exponentielle » permet à la matrice directionnelle d'explorer un espace de dimension

$N^2 - N + 1$. On en déduit qu'une antenne exponentielle de N capteurs permet théoriquement à 4-MUSIC de détecter jusqu'à N(N − 1) sources indépendantes. Ceci est illustré par la figure 4 où 12 sources sont détectées par une antenne dont les capteurs sont situés aux positions 1, 2, 4, 8 comptées en demies longueurs d'onde.

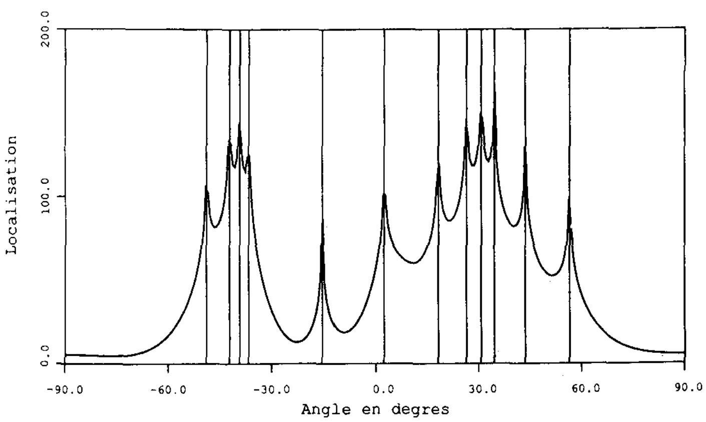


Fig. 4. — 4-MUSIC avec antenne exponentielle, 4 capteurs, 12 sources.

5. Identification aveugle, séparation de sources

5.1. POSITION DU PROBLÈME

Le problème de la séparation aveugle d'un mélange de composantes non gaussiennes indépendantes ne peut être résolu qu'en recourant aux statistiques d'ordre supérieur. Ce problème est généralement formulé comme celui de l'estimation d'une « matrice de mélange » mais si l'on considère les vecteurs colonnes de cette matrice, il prend la forme classique d'un problème de traitement d'antenne en bande étroite comme dans la formule (1.1). L'identification « aveugle » consiste alors à estimer les vecteurs directionnels **en l'absence de tout modèle de propagation,** c'est-à-dire en s'appuyant uniquement sur la première paramétrisation. Dans ce contexte, la dénomination « vecteur directionnel » perd son sens puisqu'il n'est précisément plus possible de relier la direction ou la position d'une source au vecteur qui caractérise sa contribution aux données. On appelle alors, de façon plus neutre, « signature » de la source un tel vecteur et on note $\underline{s}_p$ la signature de la p-ième source. Une matrice de séparation des sources se déduit directement des signatures. Dans cette section, on traite un modèle simplifié des données (modèle canonique) où l'on suppose un nombre identique N de sources et de capteurs, un bruit négligeable, des signatures linéairement indépendantes, et des sources de kurtosis distincts. Il s'agit donc d'identifier le modèle :

$$x = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p \underline{s}_p . \tag{5.1}$$

Les références [9] et [15] indiquent comment lever les restrictions précédentes ; il s'agit surtout ici de montrer comment la notion de matrice propre donne une solution algébrique très simple à ce problème pour le modèle canonique.

5.2. IDENTIFICATION PAR LES MATRICES PROPRES

Si l'on choisit d'utiliser l'information d'ordre deux et quatre pour l'identification, le problème algébrique de la détermination des signatures $\underline{s}_p$ à partir des statistiques $\underline{R}$ et $\underline{\underline{Q}}$ (supposées parfaitement estimées) revient donc à résoudre le système :

$$\underline{R} = \sum_{p=1}^{N} \sigma_p^2 \, \underline{s}_p \underline{s}_p^* \tag{5.2 a}$$

$$\underline{\underline{Q}} = \sum_{p=1}^{N} k_p (\underline{s}_p \underline{s}_p^*) (\underline{s}_p \underline{s}_p^*)^* . \tag{5.2 b}$$

L'extraction se fait en deux étapes : blanchiment et diagonalisation. La première étape de blanchiment consiste à multiplier les données par l'inverse d'une racine carrée quelconque de la covariance. Si l'on « prime » toutes les quantités obtenues après blanchiment ($\underline{x}' = \underline{R}^{-1/2} \underline{x}$, $\underline{s}_p' = \underline{R}^{-1/2} \underline{s}_p$, $\underline{R}'$: covariance de la variable $\underline{x}'$, etc.), le système (5.2) devient

$$\underline{R}' = \sum_{p=1}^{N} \sigma_p^2 \, \underline{s}_p' \underline{s}_p'^* = I \tag{5.3 a}$$

$$\underline{\underline{Q}}' = \sum_{p=1}^{N} k_p (\underline{s}_p' \underline{s}_p'^*) (\underline{s}_p' \underline{s}_p'^*)^* . \tag{5.3 b}$$

L'équation relative au second ordre (5.3 *a*) montre que les signatures sont orthogonales après blanchiment. Remarquons alors que si $(\underline{s}_p')_{p=1,N}$ est un jeu de vecteurs orthogonaux, alors $(\underline{s}_p' \underline{s}_p'^*)_{p=1,N}$ est un jeu d'endomorphismes orthogonaux. Ainsi la seconde équation (5.3 *b*) est elle une décomposition d'une quadricovariance en endomorphismes orthogonaux. Mais l'on sait que la décomposition en matrices propres (orthogonales !) est unique : donc (5.3 *b*) **est** cette décomposition. On en déduit l'identification des signatures :

La quadricovariance du modèle (5.1) après blanchiment ne contient que N matrices propres associées à des valeurs propres non nulles. Chacune de ces matrices propres est de rang un, construite sur la signature (blanchie) d'une composante. La valeur propre associée est le kurtosis de la composante. On voit ici ce qu'il advient des sources gaussiennes : leur kurtosis nul ne permet pas de les distinguer des $N^2 - N$ autres valeurs propres nulles de la quadricovariance.

Le fait que la plupart des valeurs propres de la quadricovariance soient nulles suggère aussi la possibilité de concevoir des méthodes rapides pour l'extraction des signatures. On peut réaliser une diagonalisation partielle de la quadricovariance qui n'extrait que les valeurs propres non nulles : on utilisera alors une méthode de Lanczos. On peut ne travailler que sur une fraction de l'information contenue dans le tenseur de quadricovariance : en sélectionnant une tranche bidimensionnelle du tenseur ou bien en le contractant (ce qui revient dans notre écriture à considérer la matrice résultant de son application sur l'identité), on transforme l'équation tensorielle (5.3 *b*) en une équation matricielle aux vecteurs propres. On obtient alors la méthode FOBI (Fourth Order Blind Identification) [10]. Ces idées concernant la réduction du coût calcul, ainsi que des indications pour une implémentation efficace, sont exposées dans [16].

Signalons enfin une application possible de l'identification aveugle à la localisation de sources. Il est notoire que les méthodes à haute résolution sont sévèrement affectées par les erreurs de modélisation (seconde paramétrisation inexacte). Il peut alors être judicieux d'estimer les positions des sources en deux phases distinctes : une estimation aveugle des signatures puis interprétation des signatures comme vecteurs directionnels (voir par exemple [10] où l'on travaille en situation de champ proche : sur les signatures estimées en aveugle, on ajuste le modèle de vecteur directionnel, ce qui permet d'estimer les gisements et les distances à l'antenne des sources).

Conclusion

Nous avons introduit la notion de quadricovariance d'une variable vectorielle aléatoire. Cette quantité, qui contient l'ensemble des cumulants du quatrième ordre, est tensorielle par nature mais peut s'exprimer sans indices en utilisant une extension du formalisme vecteur-matrice usuel au second ordre. Nous avons montré comment cette analogie formelle permet aussi l'extension directe à la quadricovariance de méthodes de Traitement d'Antenne basées sur la covariance. Ceci a été illustré par la définition d'une « 4-Formation de voie » et d'un « 4-MUSIC ». Les bénéfices potentiels de l'emploi du quatrième ordre portent sur le pouvoir de résolution, la suppression de tout bruit additif gaussien, l'accroissement des capacités de détection. Une voie de recherche intéressante concerne l'utilisation d'antennes de capteurs non régulièrement espacés, permettant d'accroître, à nombre de capteurs égal, la dimension effective de l'espace de représentation et donc de dépasser les limites classiques de détection. Dans le domaine de l'identification aveugle, la méthode proposée repose sur une analyse de la structure de la quadricovariance plutôt que sur la recherche d'une matrice de séparation. Or, si il n'est pas possible d'obtenir plus de composantes indépendantes que de signaux (et donc que de capteurs), il est par contre possible d'identifier un nombre de « tétrades » dans (5.2 *b*) qui soit supérieur à la dimension de l'espace des signaux. C'est dans cette perspective que se poursuivent nos travaux.

Dans cet article, nous avons surtout voulu présenter un formalisme et les premières propriétés algébriques qui en résultent. La robustesse des méthodes proposées reste à évaluer de façon complète.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. O. Schmidt, « Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation », *Proc. RADC Spectral Estimation Workshop*, pp. 243-258, 1979.

[2] J. K. Tugnait, « Identification of Linear Stochastic Systems via Second- and Fourth-Order Cumulant Matching », *IEEE Trans. on I.T.*, Vol. IT-33, No. 3, pp. 393-407, May 1987.

[3] A. Benveniste, M. Goursat, G. Ruget, « Robust Identification of a Nonminimum Phase System : Blind Adjustement of a Linear Equalizer », *IEEE Trans. on A.C.*, Vol. AC-25, No. 3, pp. 385-399, June 1980.

[4] A. L. Swindlehurst, T. Kailath, « Detection and Estimation Using the Third Moment Matrix », *Proc. ICASSP-87*, pp. 2235-2328.

[5] C. Jutten, J. Herault, « Une solution Neuro-Mimétique au Problème de Séparation de Sources », *Traitement du Signal*, Vol. 5, No. 6, 1988, pp. 389-403.

[6] J. L. Lacoume, P. Ruiz, « Source Identification : A Solution Based on the Cumulants », *Proc. of the 4-th ASSP Workshop on Spectral Estimation and Modeling*, pp. 199-203, August 1988.

[7] P. Comon, « Separation of Stochastic Processes », *Proc. of the Workshop on Higher-Order Spectral Analysis*, Vail, June 89, pp. 174-179.

[8] L. Fety, « Méthodes de Traitement d'Antenne Adaptées aux Radio-Communications », Thèse de Docteur Ingénieur, Juin 1988.

[9] J. F. Cardoso, « Blind Identification of Independent Components with Higher-Order Statistics », *Proc. of the Workshop on Higher-Order Spectral Analysis*, Vail, June 89, pp. 157-160.

[10] J. F. Cardoso, « Source Separation using Higher-Order Moments », *Proc. ICASSP-89*, pp. 2109-2112.

[11] R. Pan, L. Nikias, « Harmonic Decomposition Methods in Cumulant Domains », *Proc. ICASSP-88*, pp. 2356-2359, 1988. *Proc. ICASSP-89*, pp. 2109-2112.

[12] H. H. Chiang, C. L. Nikias, « The ESPRIT Algorithm with Higher-Order Statistics », *Proc. of the Workshop on Higher-Order Spectral Analysis*, Vail, June 89, pp. 163-166.

[13] D. R. Brillinger, « Time Series Data Analysis and Theory », Holden Day, 1981.

[14] G. Bienvenu, L. Kopp, « Optimality of high resolution processing using the eigensystem approach », *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, ASSP 31, October 1983, 1235-1248.

[15] J. F. Cardoso, « Eigen structure of the fourth-order cumulant tensor with application to the blind source separation problem », *Proc. ICASSP-90*, Albuquerque, April 1990.

[16] J. F. Cardoso, P. Comon, « Tensor based independent component analysis », *Proc. Eusipco*, Barcelone, September 1990.

Manuscrit reçu le 2 janvier 1990.