

Etude théorique d'une récursivité sur l'ordre

de la prédiction linéaire-quadratique.

Extension de l'algorithme de Levinson

A recursive approach to linear quadratic prediction ;

extension of Levinson algorithm



P. DUVAUT

Laboratoire de Traitement des Images et du Signal, ENSEA, les Chênes Pourpres, 95000, CERGY-PONTOISE. Tél. : 30 73 66 66.

Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Cachan, agrégé de Sciences Physiques en 1981, il dirige le Département Mathématiques et Traitement du Signal de l'École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses applications, ENSEA, à Cergy-Pontoise. Il poursuit des activités de recherche au Laboratoire des Signaux et Systèmes, de l'École Supérieure d'Électricité, où il a acquis sa thèse de Doctorat sous la direction du Pr. B. Picinbono en Février 1987, en Détection Estimation et Filtrage de Volterra. Il participe également aux activités de recherche du Laboratoire de Traitement des Images et du Signal de l'ENSEA. Il a enseigné et effectué des recherches pour la DRET, au Laboratoire d'Electrical Engineering de l'Université de Rhode Island, Kingston, E.U., durant l'année 1988. Depuis Juin 1989, il exerce une activité de conseil auprès du Département RCM de la Thomson, (centre de Malakoff). Ses principales activités de recherche concernent les problèmes de Détection d'Estimation, de Quantification, de Filtrage non linéaire optimal et adaptatif.

RÉSUMÉ

Cet article propose une étude théorique, de la récursivité sur l'ordre d'un prédicteur linéaire-quadratique, qui s'apparente à une extension de l'algorithme de Levinson. Les développements sont fondés sur le concept d'espaces observation linéaire-quadratiques. Leurs spécificités conduisent à une procédure d'orthogonalisation qui se ceinde en deux filtres treillis. Le premier est mixte au sens où il fait intervenir simultanément des innovations scalaires et vectorielles. Il est de plus dissymétrique vis-à-vis des prédictions futures et rétrogrades. Le second est multidimensionnel, et présente de fortes analogies avec l'algorithme de Levinson vectoriel et les équations de Chandrasekhar.

MOTS-CLÉS : Prédiction, linéaire-quadratique, espace observation, filtrage treillis, algorithme de Levinson, équations de Chandrasekhar, récursivité, non linéaire.

SUMMARY

A theoretical study of an order update of a linear-quadratic predictor is considered. This work may be viewed as an extension of the Levinson algorithm to a non linear case. The derivation is based on the idea of linear-quadratic observation spaces. Their particularities leads to an orthogonalization procedure that is splitted into two ladder processing filters. The first one involves simultaneously scalar and vector innovations. Moreover, forward and backward linear-quadratic predictions play different roles. The second kind of ladder processing is multidimensionnal and exhibits features related to the Chandrasekhar equations and the generalized Levinson algorithm.

KEY WORDS : Prediction, linear-quadratic, observation space, ladder filtering, Levinson algorithm, Chandrasekhar equations, recursivity, non linear.

1. Introduction

Nous avons consacré un précédent article, [1], à l'étude de la prédiction linéaire-quadratique, considérée comme un filtrage de Wiener de même nature à horizon fini. Il a été vu, en particulier, que si les moments d'ordre trois du processus prédit sont nuls, la partie quadratique du prédicteur s'annule ce qui enlève, bien sûr, tout intérêt à ce genre de démarche. Les équations normales étendues du prédicteur optimal ont été obtenues puis résolues dans une situation particulière. Si le processus sous jacent n'est pas gaussien, il a été prouvé qu'un filtrage quadratique améliore toujours les performances de prédiction, la chute de la variance de l'erreur en résultant ayant été calculée explicitement.

Le propos du présent article constitue, éventuellement, une suite de ce travail de base. On cherche, en effet, ici, dans quelles mesures, il est possible d'introduire une récursivité exacte sur l'ordre du prédicteur linéaire-quadratique, s'apparentant, à celle que révèle l'algorithme de Levinson, [2], [3], [4], dans le cas linéaire. On est en droit de s'interroger sur l'intérêt d'une telle démarche, en dehors, c'est entendu, de son strict aspect spéculatif. L'argumentation vient finalement du cas linéaire : les algorithmes de Levinson direct et inverse classiques ont considérablement amélioré la connaissance des modèles AR linéaires, [5], [2], en permettant de les caractériser par le jeu des coefficients de réflexion, [6], [7], éléments déterminants de la représentation treillis, [8], [9], jouant parfois aussi un rôle clef de voûte en analyse spectrale « moderne », [10], [11]. Plus récemment encore, ces algorithmes ont conduit à des critères « récursifs » de stabilité, [12], des filtres linéaires à réponse impulsionnelle infinie, beaucoup plus simples d'utilisation que les critères traditionnels, comme, pour ne citer que le plus connu, le critère de Jury, [13]. L'extension de l'algorithme de Levinson, devrait donc déboucher, dans de prochains articles, sur des applications analogues à celles du cas linéaire, citées plus haut.

Pour l'instant notre ambition est moindre, dans la mesure où l'on va seulement apporter une contribution aux réponses à la question cruciale suivante : existe-t-il un jeu de paramètres analogues aux coefficients de réflexion classiques, pour la prédiction lq ? Nos développements sont fondés sur le cadre de travail de l'article [1], aussi invitons nous le lecteur à consulter le § 2 de celui-ci. Après avoir formulé notre problème comme la décomposition orthogonale récursive d'espaces observation « adéquats », nous mettons à jour ses spécificités, par rapport au cas linéaire, liées notamment au fait que l'incrémement de l'ordre du prédicteur s'accompagne de l'addition d'un nouveau vecteur observation « linéaire-quadratique », voir [1] § 2, dont la taille dépend de l'ordre. Cette difficulté se contourne en considérant la question connexe de « prédiction linéaire-quadratique vectorielle à rebours ». L'algorithme final obtenu comporte des liens étroits avec l'algorithme de Levinson vectoriel, [14], [15], et les équations de Chandrasekhar, [16].

De nombreux travaux existent déjà, concernant,

tout d'abord, la prédiction non linéaire stricto-sensu, mais sous des hypothèses restrictives à propos de la nature de la non-linéarité ou encore les propriétés statistiques des données, [17], [18], [19], [20], et ensuite, la récursivité d'une telle démarche, [21], [22]. La référence [22] est, sans aucun doute la plus proche de notre étude, la procédure finale s'en détachant néanmoins considérablement, dans la mesure où elle intervient dans un espace de matrices isomorphe à l'espace observation, alors que la notre prend directement place dans l'espace observation.

2. Problèmes liés à la décomposition orthogonale d'un espace observation linéaire-quadratique

2.1. NOTATIONS

On utilise, ici, les notations du § 2.22 de la référence [1]. Dans la mesure où l'ensemble de l'article est consacré à la prédiction de l'échantillon $x(t)$, la variable $x(t-1)$ est la « plus récente » de l'espace observation aussi, l'indice b de la formule (3) de [1] sera toujours égal à $t-1$, et sera omis, afin d'alléger l'écriture. De plus, la prédiction linéaire-quadratique présentant un intérêt quelconque seulement lorsque les moments d'ordre trois sont non nuls, on adoptera la représentation couplée, voir § 2.22 [1]. On note, dans ces conditions,

$$(1) \quad \mathbf{x}_{lq}(t-i) = [x(t-i) \ x^2(t-i) \times \\ x(t-i) \ x(t-i+1) \dots x(t-i) \ x(t-1)]^T_C$$

un vecteur observation linéaire-quadratique élémentaire de taille $i+1$, et de rang i .

2.2. MISE À JOUR DES ESPACES OBSERVATIONS, FORMULATION RÉCURSIVE DE LA PRÉDICTION

Comme il a déjà été indiqué dans l'introduction, le système d'équations donnant le meilleur prédicteur linéaire quadratique au sens des moindres carrés, a été obtenu dans la référence [1], sous le numéro (52) ; pour un nombre donné d'observations « linéaires », soit m ce nombre, dans la suite de l'article, (dans l'article [1], pour des raisons de cohérence P avait été utilisé à la place de m , la substitution s'avère immédiate). On s'intéresse, ci-après, au calcul récursif du prédicteur lorsque l'on passe de l'ordre m à l'ordre $m+1$, avec $0 \leq m$, cette démarche constituant une extension naturelle de l'algorithme de Levinson [2], [3], [4], lorsque l'on utilise, en plus des moments d'ordre deux les moments d'ordre trois et quatre pour prédire, de façon récursive, un échantillon, $x(t)$, extrait d'un processus aléatoire. Le prédicteur optimal de rang m , s'obtenant à partir de la projection orthogonale de $x(t)$ sur l'espace, noté, voir [1],

$$(2) \quad \mathbf{X}_{lqm}(t-1)$$

dont les éléments constitutifs sont les composantes des vecteurs $\mathbf{x}_{lq}(t-1)$, $\mathbf{x}_{lq}(t-2)$, ..., $\mathbf{x}_{lq}(t-i)$, ..., $\mathbf{x}_{lq}(t-m)$, la détermination récursive de ce prédic-

teur passe inévitablement par la décomposition orthogonale de $X_{lqm+1}(t-1)$, à l'instar des procédures qui conduisent aux algorithmes récurrents classiques de Kalman [16] et de Levinson [2]. En notant le prédicteur rétrograde linéaire-quadratique, d'ordre m , de $x_{lq}(t-m-1)$,

$$(3) \quad \mathbf{ex}_{lq|m}^b(t-m-1) = \text{PROJ} [x_{lq}(t-m-1) | X_{lqm}(t-1)]$$

et

$$(4) \quad \mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m-1) = x_{lq}(t-m-1) - \mathbf{ex}_{lq|m}^b(t-m-1)$$

l'innovation correspondante, il vient

$$(5) \quad X_{lqm+1}(t-1) = X_{lqm}(t-1) \oplus \{\mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m-1)\}.$$

La somme, dans (5), fait référence à des espaces supplémentaires, autrement dit, orthogonaux, ceci provient des propriétés de l'innovation (4). La projection de $x(t)$ sur l'espace $X_{lqm+1}(t-1)$ débouche ensuite sur ce qu'il convient d'appeler la *formulation récurrente de la prédiction linéaire-quadratique*

$$(6) \quad \mathbf{ix}_{lq|m+1}^f(t) = \mathbf{ix}_{lq|m}^f(t) - \mathbf{k}_{m+1}^T \mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m-1)$$

où $\mathbf{ix}_{lq|m}^f(t)$ désigne l'innovation future d'ordre m de la prédiction de $x(t)$. Le vecteur \mathbf{k}_{m+1} s'avère être l'analogue du gain de Kalman [16], ou des matrices de réflexion dans l'algorithme de Levinson multidimensionnel [15]. Sa forme se déduit de propriétés élémentaires d'estimation en moyenne quadratique [2], [3],

$$(7) \quad \mathbf{k}_{m+1}^T = \mathbf{E} \{ \mathbf{ix}_{lq|m}^f(t) \mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m-1)^T \} \mathbf{E}^{-1} \times \{ \mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m-1) \mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m-1)^T \}$$

sous réserve, évidemment, que la matrice intervenant dans (7) est inversible. La relation (7) ne nécessite pas d'hypothèse particulière sur la stationnarité du processus prédit.

Discussion :

Au vu de (6) et (7), on remarque que la taille du vecteur \mathbf{k}_{m+1} , égale à $m+2$, dépend de l'ordre du prédicteur. De plus, la récursivité complète de la procédure exige la mise à jour de l'innovation $\mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m-1)$, dans (6); La difficulté de ce dernier rafraîchissement, provient du fait que la taille de l'innovation (4), égale aussi à $m+2$, d'après (1), est conditionnée par l'ordre. Dans ces conditions, exprimer l'innovation $\mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m-1)$, vecteur de taille $m+2$, en fonction de l'innovation de même ordre à l'instant précédent, $\mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m)$, de taille $m+1$, ne peut être le seul fruit d'une cellule retard z^{-1} ! Pour finir, on peut légitimement s'interroger sur le sens de $\mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m)$. En effet, d'après (2), (3) et (4), la quantité $\mathbf{ix}_{lq|m-1}^b(t-m)$ s'obtient en considérant les éléments de $X_{lqm-1}(t-1)$.

L'introduction de $\mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m)$, exigerait que l'on complète $X_{lqm-1}(t-1)$, « vers le futur », par une nouvelle observation linéaire-quadratique, afin de rester cohérent avec (2). D'autre part la nouvelle observation suggérée par (6) ne serait autre que $x(t)$, qui ne satisfait pas les contraintes évoquées. On conclut de tout ceci, que pour une valeur de m donnée, supérieure à 1, les seules innovations qui ont un sens s'écrivent

$$(8) \quad \mathbf{ix}_{lq|n}^b(t-m), \text{ avec } 0 \leq n \leq m-1, \text{ et } 1 \leq m$$

avec, par convention,

$$(9) \quad \mathbf{ix}_{lq|0}^b(t-m) = x_{lq}(t-m).$$

Le schéma de principe illustrant la relation (6) est représenté sur la figure 1, on a posé

$$(10) \quad x_{lq|0}^f(t) = x(t).$$

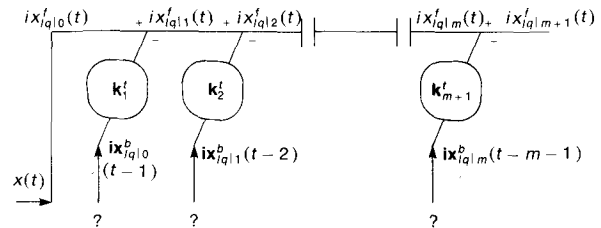


Fig. 1.

La question cruciale consiste désormais à remplacer les points d'interrogation par une procédure de génération récurrente des innovations rétrogrades $\mathbf{ix}_{lq|m-1}^b(t-m)$, avec $1 \leq m$, ceci est l'objet du paragraphe suivant.

3. Mise à jour des innovations vectorielles rétrogrades

3.1. FILTRAGE TREILLIS LINÉAIRE-QUADRATIQUE

On s'intéresse, ici, à une procédure récurrente de génération de l'innovation $\mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m-1)$ à partir du vecteur observation linéaire-quadratique $x_{lq}(t-m-1)$, considéré comme innovation de rang zéro. Pour ce faire, on considère les quantités

$$(11) \quad \mathbf{ex}_{lq|n}^f(t-m-1+n) = \text{PROJ} [x_{lq}(t-m-1+n) | \{x_{lq}(t-m-1+n-1) \dots x_{lq}(t-m-1)\}]$$

et

$$(12) \quad (\mathbf{ix}_{lq|n}^f(t-m-1+n)) = x_{lq}(t-m-1+n) - \mathbf{ex}_{lq|n}^f(t-m-1+n)$$

avec $1 \leq n \leq m$. D'après (1) les vecteurs (11) et (12) sont de taille commune $m-n+2$. Pour $n=0$, on a,

comme à l'accoutumée, l'estimateur donné par (11) nul et

$$(13) \quad \mathbf{ix}_{lq|0}^f(t-m-1) = \mathbf{x}_{lq}(t-m-1).$$

Une démarche semblable en tout point à celle du § 2.22, conduit aux deux relations de récurrence

$$(14) \quad \mathbf{ix}_{lq|n}^f(t-m-1+n) = \mathbf{ix}_{lq|n-1}^f(t-m-1+n) - \mathbf{K}_n^b(m+1) \mathbf{ix}_{lq|n-1}^b(t-m-1)$$

$$(15) \quad \mathbf{ix}_{lq|n}^b(t-m-1) = \mathbf{ix}_{lq|n-1}^b(t-m-1) - \mathbf{K}_n^f(m+1-n) \mathbf{ix}_{lq|n-1}^f(t-m-1+n)$$

avec

$$(16) \quad \mathbf{K}_n^f(m+1-n) = \mathbf{R}_{n-1}(m+1-n) [\mathbf{E}_{n-1}^f(m+1-n)]^{-1}$$

$$(17) \quad \mathbf{R}_{n-1}(m+1-n) = \mathbf{E} \{ \mathbf{ix}_{lq|n-1}^b(t-m-1) \times \mathbf{ix}_{lq|n-1}^f(t-m-1+n)^T \}$$

$$(18) \quad \mathbf{E}_{n-1}^f(m+1-n) = \mathbf{E} \{ \mathbf{ix}_{lq|n-1}^f(t-m-1+n) \times \mathbf{ix}_{lq|n-1}^b(t-m-1+n)^T \}$$

et symétriquement

$$(19) \quad \mathbf{K}_n^b(m+1) = \mathbf{R}_{n-1}^T(m+1-n) [\mathbf{E}_{n-1}^b(m+1)]^{-1}$$

$$(20) \quad \mathbf{E}_{n-1}^b(m+1) = \mathbf{E} \{ \mathbf{ix}_{lq|n-1}^b(t-m-1) \mathbf{ix}_{lq|n-1}^b(t-m-1)^T \}.$$

Les relations (16) à (20) se déduisent de propriétés élémentaires d'estimation en moyenne quadratique [2]. Les relations (14) et (15) quant à elles, correspondent à un filtrage treillis vectoriel, dont la cellule du rang n est représentée sur la figure 2.

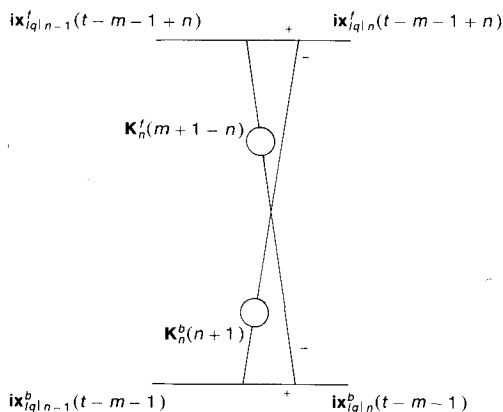


Fig. 2.

Ce filtrage, appelé *filtrage treillis linéaire-quadratique*, présente des spécificités qu'il convient de

commenter. Sa singularité essentielle vient du fait que les innovations futures $\mathbf{ix}_{lq|n}^f(t-m-1+n)$ ont une taille décroissante avec l'ordre n , alors que les innovations rebours, $\mathbf{ix}_{lq|n}^b(t-m-1)$ gardent la même taille, voir (1), (4), (11) et (12).

Se manifeste, ici, la dissymétrie des espaces observations linéaire-quadratiques dont on a supprimé les observations redondantes. La mise bout à bout des cellules du type de celle de la figure 2, qui permettra de passer progressivement de $\mathbf{x}_{lq}(t-m-1)$ à $\mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m-1)$ nécessite encore un éclaircissement, celui du passage du « sous produit » de la cellule de rang $n-1$, $\mathbf{ix}_{lq|n-1}^f(t-m-1+n-1)$, de taille $m-n+3$, à l'entrée de la cellule de rang n , $\mathbf{ix}_{lq|n-1}^f(t-m-1+n)$, de taille $m-n+2$.

3.2. PASSAGE D'UNE CELLULE TREILLIS À L'AUTRE, RAFFRAÎCHISSEMENT TEMPOREL DES INNOVATIONS VECTORIELLES FUTURES

Soit l'écriture développée

$$(21) \quad \mathbf{ix}_{lq|n-1}^f(t-m-1+n-1) = \sum_{j=0, n-1} \mathbf{A}_{m+2-n|n-1}(j) \mathbf{x}_{lq}(t-m-1+n-1-j)$$

où $\mathbf{A}_{m+2-n|n-1}(0) = \mathbf{I}_{m+3-n}$, matrice identité de taille $m+3-n$. Il suffit de remplacer $m-2+n$ par $m-1+n$, pour obtenir l'expression de $\mathbf{ix}_{lq|n-1}^f(t-m-1+n)$. Les matrices $\mathbf{A}_{m+1-n|n-1}(j)$, pour une valeur donnée de j présentent alors une ligne et une colonne de moins que les $\mathbf{A}_{m+2-n|n-1}(j)$. On montre, dans l'appendice 1, que la stationnarité du processus prédit, jusqu'à l'ordre 4, permet de calculer les $\mathbf{A}_{m+1-n|n-1}(j)$, (resp. les $\mathbf{E}_{n-1}^f(m-n+1)$), en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne des $\mathbf{A}_{m+2-n|n-1}(j)$, (resp. des $\mathbf{E}_{n-1}^f(m+2-n)$), à un terme complémentaire après,

$$(22) \quad \mathbf{A}_{m+1-n|n-1}(j) = \mathbf{U}_{m+2-n} \mathbf{A}_{m+2-n|n-1}(j) \mathbf{U}_{m+2-n}^T + \mathbf{D}_{m+1-n|n-1}(j)$$

$$(23) \quad \mathbf{E}_{n-1}^f(m-n+1) = \mathbf{U}_{m+2-n} \mathbf{E}_{n-1}^f(m-n+2) \mathbf{U}_{m+2-n}^T - \mathbf{W}_{n-1}(m+1-n)$$

où les termes « complémentaires » sont détaillés dans l'annexe 1, et où la matrice $\mathbf{U}_\alpha = [\mathbf{I}_\alpha \mathbf{0}_\alpha]$ désigne la matrice de « troncature », (\mathbf{I}_α désigne la matrice identité d'ordre α et $\mathbf{0}_\alpha$, le vecteur colonne dont les α composantes sont nulles). En notant symboliquement

$$(24) \quad \mathbf{ix}_{lq|n-1}^f(t-m-1+n) = \mathbf{Z}_{lq} [\mathbf{ix}_{lq|n-1}^f(t-m-1+n-1)]$$

l'opération de mise à jour temporelle déterminée par (22) et (23), on obtient le schéma de principe global de la procédure récursive de détermination de $\mathbf{ix}_{lq|m}^b(t-m-1)$ à partir de $\mathbf{x}_{lq}(t-m-1)$, explicité sur la figure 3, et symbolisé sur la figure 4.

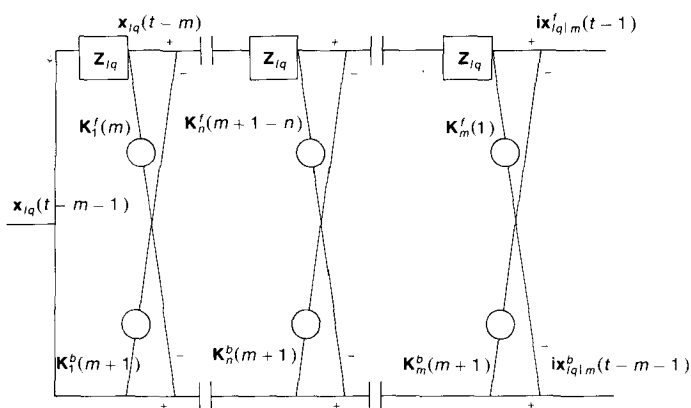


Fig. 3.



Fig. 4.

4. Algorithme de Levinson linéaire-quadratique

4.1. PRINCIPE

En mettant bout à bout les schémas de principe des figures 1 et 4, et en tenant compte du fait que la cellule retard z^{-1} associée à tout vecteur $x_{lq}(t-m)$ son passé immédiat « linéaire-quadratique », $x_{lq}(t-m-1)$, voir (1), on obtient le schéma global de fonctionnement de la procédure récursive, qui a donc été décomposée en deux « sous procédures » élémentaires expliquées respectivement aux paragraphes 2 et 3.

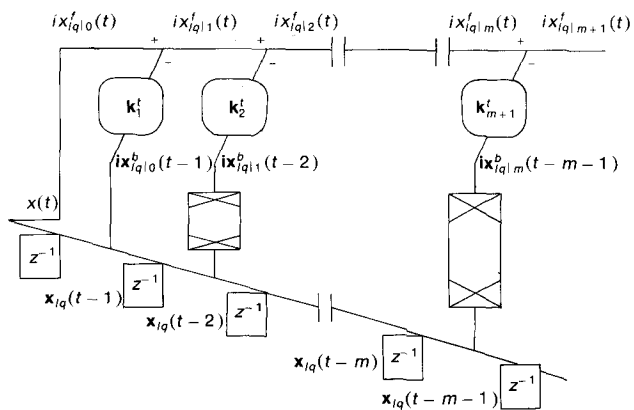


Fig. 5.

4.2. DIFFÉRENTES ÉTAPES DE L'ALGORITHME

La procédure complète de mise à jour du meilleur prédicteur de $x(t)$ est donnée dans ce paragraphe. Nous utilisons essentiellement la figure 5, qui illustre les principes des différentes étapes. On constate, en particulier, qu'il est nécessaire d'obtenir une innovation vectorielle à rebours avant de pouvoir écrire l'innovation future de $x(t)$ de rang m en fonction de celle de rang $m-1$. Par conséquent, pour toute valeur de l'ordre de l'innovation de $x(t)$, $h+1$, où $0 \leq h \leq m$, il est indispensable de réaliser d'abord la procédure des figures 2, 3, pour l'ordre h . On note

$$(25) \quad ix_{lq|m}^b(t-m-1) = \sum_{j=1, m+1} \mathbf{B}_{m+1|m}(j) x_{lq}(t-j)$$

avec $\mathbf{B}_{m+1|m}(m+1) = \mathbf{I}_{m+2}$.

On appelle f_{lqh} le prédicteur linéaire-quadratique optimal, solution du système (52) de [1], de rang h et ϵ_{lqh} la variance associée.

Initialisation

$$(26) \quad x(t) = ix_{lq|0}^f(t)$$

$$(27) \quad x_{lq}(t-1) = ix_{lq|0}^b(t-1)$$

$$(28) \quad x_{lq}(t-h-1) = ix_{lq|0}^b(t-h-1)$$

$$(29) \quad x_{lq}(t-h) = ix_{lq|0}^f(t-h)$$

pour $1 \leq h \leq m$.

(Nous décrivons ici l'étape $h+1$ de la procédure globale donnée figure 5.)

$0 \leq h \leq m$, le pas h a été accompli, f_{lqh} et ϵ_{lqh} sont disponibles.

Étape $h+1$

(La réalisation de l'étape $h+1$ requiert la mise en œuvre de la procédure donnée figure 2, à l'ordre h . Cette dernière étant aussi récursive, nous décrivons seulement le passage de l'ordre $n-1$ à l'ordre n , sachant que l'initialisation est précisée plus haut.)

$1 \leq n \leq h$, l'étape $n-1$ a été accomplie, $\mathbf{A}_{h+2-n|n-1}(i)$, $\mathbf{B}_{h+1|n-1}(i)$ où $1 \leq i \leq n-1$, et $\mathbf{E}_{n-1}^f(h+2-n)$, $\mathbf{E}_{n-1}^b(h+1)$ sont disponibles.

Étape n

Mise à jour temporelle des innovations futures, voir l'Annexe 1.

$$(30) \quad \mathbf{A}_{h+1-n|n-1}(i) = \mathbf{U}_{h+2-n} \mathbf{A}_{h+2-n|n-1}(i) \times \times \mathbf{U}_{h+2-n+i} + \mathbf{D}_{h+1-n|n-1}$$

$$(31) \quad \mathbf{E}_{n-1}^f(h+1-n) = \mathbf{U}_{h+2-n} \times \times \mathbf{E}_{n-1}^f(h+2-n) \mathbf{U}_{h+2-n} - \mathbf{W}_{n-1}(h+1-n)$$

$\mathbf{D}_{h+1-n|n-1}$, $\mathbf{W}_{n-1}(h+1-n)$ sont respectivement donnés par (A1.9) et (A1.14).

Mise à jour de l'ordre, voir l'Appendice 2.

$$(32) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n^f(h+1-n) & \mathbf{0}_{h+2-n, h+2} \\ \mathbf{A}_{h+1-n|n}^t(0) & \mathbf{B}_{h+1|n}^t(1) \\ \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{h+1-n|n}^t(i) & \mathbf{B}_{h+1|n}^t(i+1) \\ \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{h+1-n|n}^t(n) & \mathbf{B}_{h+1|n}^t(n+1) \\ \mathbf{0}_{h+2, h+2-n} & \mathbf{E}_n^b(h+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{n-1}^f(h+1-n) & \mathbf{R}_{n-1}^t(h+n-1) \\ \mathbf{A}_{h+1-n|n-1}^t(0) & \mathbf{0}_{h+2-n, h+2} \\ \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{h+1-n|n-1}^t(i) & \mathbf{B}_{h+1|n-1}^t(i) \\ \dots & \dots \\ \mathbf{0}_{h+2, h+2-n} & \mathbf{B}_{h+1|n-1}^t(n) \\ \mathbf{R}_{n-1}(h+n-1) & \mathbf{E}_{n-1}^b(h+1) \end{bmatrix} \times \mathbf{G}_{n-1}(h+1-n)$$

où

$$(33) \mathbf{G}_{n-1}(h+1-n) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{h+2-n, h+2-n} \\ -[\mathbf{E}_{n-1}^b(h+1)]^{-1} \mathbf{R}_{n-1}(h+1-n) \\ \dots \\ -[\mathbf{E}_{n-1}^f(h+1-n)]^{-1} \mathbf{R}_{n-1}^t(h+1-n) \\ \dots \\ \mathbf{I}_{h+2, h+2} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{R}_{n-1}(h+1-n)$ donné par (17) se réécrit après substitutions

$$(34) \mathbf{R}_{n-1}(h+1-n) = \mathbf{C}_{lq}(h+1-n, h+1) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{C}_{lq}(h+1-n, h+1-n+i) \mathbf{B}_{h+1|n-1}^t(i)$$

avec

$$(35) \mathbf{C}_{lq}(i, j) = \mathbf{E} \{ \mathbf{x}_{lq}(t-i) \mathbf{x}_{lq}^T(t-j) \}$$

l'ordre h a été atteint pour la prédiction vectorielle $\mathbf{B}_{h+1|h}(i) \ 1 \leq i \leq h$, et $\mathbf{E}_h^b(h+1)$ sont disponibles.

Calcul de \mathbf{f}_{lqh+1} et ε_{lqh+1}^f

Les formules (37) et (38) sont obtenues en remplaçant les innovations de (6) et en identifiant les termes correspondants. L'identité (39) quant à elle est une simple conséquence de (6) et [1], (52).

$$(36) \mathbf{k}_{h+1}^t = (\mathbf{c}_{lq}^t(0, h+1) + \sum_{i=1}^h \mathbf{c}_{lq}^t(0, i) \mathbf{B}_{h+1|h}^t(i)) [\mathbf{E}_h^b(h+1)]^{-1}$$

$$(37) \mathbf{f}_{lqh+1}(h+1) = \mathbf{k}_{h+1}.$$

Remarque : Dans (36)

$$\mathbf{c}_{lq}(0, i) = \mathbf{E} \{ x(t) \mathbf{x}_{lq}(t-i) \}.$$

$$(38) \mathbf{f}_{lqh+1}(i) = \mathbf{f}_{lqh}(i) - \mathbf{B}_{h+1|h}(i) \mathbf{k}_{h+1} \quad 1 \leq i \leq h$$

$$(39) \varepsilon_{lqh+1}^f = \varepsilon_{lqh}^f - \mathbf{r}_{h+1}^t [\mathbf{E}_h^b(h+1)]^{-1} \mathbf{r}_{h+1}$$

où \mathbf{r}_{h+1}^t est le premier terme de (36).

Étape $h+1$ réalisée etc...

Il est clair que (32) est semblable à l'algorithme de Levinson relatif à la prédiction linéaire des processus vectoriels, [15], ou encore aux équations de Chandrasekhar, [15], [16]. Cette similitude est, somme toute, naturelle dans la mesure où toutes ces procédures visent finalement à déterminer une base orthogonale de l'espace observation.

5. Conclusion

Cet article propose une étude théorique de la récursivité sur l'ordre d'un prédicteur linéaire-quadratique, qui s'apparente à une extension de l'algorithme de Levinson. Les développements sont fondés sur un cadre de travail nouveau, déjà utilisé dans [1], qui consiste à introduire des espaces observations linéaire-quadratiques adaptés lorsque les moments d'ordre trois sont non nuls, ce qui est nécessaire si l'on veut que la prédiction retenue présente un intérêt quelconque. Notre approche conduit à une procédure récursive exprimée directement dans ces espaces observations, à la différence de celle de [22] qui est confinée à des espaces de matrices isomorphes d'espaces observations multilinéaires. En cela, elle reste conceptuellement semblable, à l'obtention de l'algorithme de Levinson classique, [2]. Elle affiche, néanmoins, d'importantes spécificités fondées sur le fait que le rafraîchissement, sur l'ordre, d'un espace linéaire-quadratique, suppose l'addition d'un vecteur tout aussi linéaire-quadratique, dont la taille dépend de l'ordre. Ce trait caractéristique conduit en quelque sorte à une dissymétrie des prédictions future et rétrograde lq . En conséquence, l'algorithme final se scinde en deux filtrages treillis multidimensionnels. Le premier est « mixte », en ce sens qu'il fait intervenir simultanément les innovations scalaires d'ordre successifs de l'échantillon à prédire et les innovations vectorielles des vecteurs observations lq qui de proche en proche composent l'espace observation sur lequel s'opèrent les projections requises. Il est, de plus « dissymétrique », au vu de la figure 1. Le second filtre treillis, uniquement vectoriel, élabore, de façon récursive, les dernières innovations. L'introduction de telles structures de filtrage cristallise une analogie avec la prédiction linéaire vectorielle, [11], [15], et les équations de Chandrasekhar classiques, [16]. L'étape suivante de ce travail, qui sera d'ailleurs envisagée dans un prochain article, consiste à examiner, dans quelles mesures, l'algorithme proposé permet de préciser les conditions de stabilité ainsi que d'autres propriétés des modèles AR linéaire-quadratiques.

Manuscrit reçu le 10 mai 1989.

APPENDICE 1

Mise à jour temporelle de l'innovation future lorsque le processus est stationnaire d'ordre 4

Nous justifions ici les formules (34) et (35) en commençant par examiner les conséquences de la stationnarité du processus.

A1.1. CONSÉQUENCES DE LA STATIONNARITÉ DU PROCESSUS

Si le processus est stationnaire d'ordre 4 nous savons que, voir [2],

$$(A1.1) \quad m_\alpha(t_1, \dots, t_\alpha) = m_\alpha(t_1 - t_0, \dots, t_\alpha - t_0)$$

pour tout réel t_0 et avec $1 \leq \alpha \leq 4$. En conséquence, tous les moments revêtent des symétries explicitées dans la référence [23] pour un processus réel et dans la référence [24], pour un processus complexe. En tenant compte de la définition,

$$(A1.2) \quad C_{lq}(i, j) = E \{ \mathbf{x}_{lq}(t-i) \mathbf{x}_{lq}^T(t-j) \}$$

sans oublier le fait qu'ici,

$$(A1.3) \quad \text{Taille} [\mathbf{x}_{lq}(t-i)] = i + 1$$

on établit, sans peine, les deux identités

$$(A1.4) \quad C_{lq}(i, j) = C_{lq}^t(j, i)$$

et

$$(A1.5) \quad C_{lq}(i, j) = U_{i+1} C_{lq}(i+1, j+1) U_{j+1}^t$$

où U_α est la matrice de troncature, voir (22), (23) et (24). Par conséquent, (A1.5) signifie que $C_{lq}(i, j)$ se déduit de $C_{lq}(i+1, j+1)$, en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne, c'est une manifestation de la stationnarité d'ordre 4.

A1.2. MISE À JOUR TEMPORELLE DES INNOVATIONS FUTURES

En écrivant que l'innovation (21) est orthogonale à tout vecteur $\mathbf{x}_{lq}(t-m-2+n-j)$, pour $1 \leq j \leq n-1$ il vient

$$(A1.6) \quad C_{lq}(m+2-n, m+2-n+j) + \sum_{i=1}^{n-1} A_{m+2-n|n-1}(i) \times C_{lq}(m+2-n+i, m+2-n+j) = \mathbf{0}_{m+3-n, m+3-n+j}$$

$$1 \leq j \leq n-1.$$

Soit encore, en prémultipliant (A1.6) par U_{m+2-n} , et en multipliant à droite le résultat obtenu par $U_{m+2-n+j}^t$, il reste compte tenu de (A1.5)

$$(A1.7) \quad C_{lq}(m+1-n, m+1-n+j) + \sum_{i=1}^{n-1} U_{m+2-n} A_{m+2-n|n-1}(i) \times$$

$$\times C_{lq}(m+2-n+i, m+2-n+j) U_{m+2-n+j}^t = \mathbf{0}_{m+2-n, m+2-n+j}$$

$$1 \leq j \leq n-1.$$

Si l'on applique l'égalité (A1.6) pour $m+1-n$ au lieu de $m+2-n$ on déduit que l'identité suivante doit être vraie quel que soit $(i, j) \in [1, 2, \dots, n-1]^2$,

$$(A1.8) \quad A_{m+1-n|n-1}(i) \times C_{lq}(m+1-n+i, m+1-n+j) = U_{m+2-n} A_{m+2-n|n-1}(i) \times C_{lq}(m+2-n+i, m+2-n+j) U_{m+2-n+j}^t.$$

En écrivant que la relation (A1.8) est vraie, en particulier pour $j = n-1$, en tenant compte de la version partitionnée de $A_{m+2-n|n-1}(i)$ et du fait que, d'après (A1.5)

$$(A1.9) \quad C_{lq}(m+2-n+i, m+1) U_{m+1}^t = C_{lq}(m+2-n+i, m)$$

on obtient la relation de récurrence suivante

$$(A1.10) \quad A_{m+1-n|n-1}(i) C_{lq}(m+1-n+i, m) = U_{m+2-n} A_{m+2-n|n-1}(i) U_{m+2-n+i}^t \times C_{lq}(m+1-n+i, m) + \mathbf{a}_{m+1-n|n-1}(i) \mathbf{r}_{lq}^t(m+1-n+i)$$

où

$$(A1.11) \quad \mathbf{a}_{m+1-n|n-1}(i) = U_{m+2-n} A_{m+2-n|n-1}(i) \mathbf{1}_{m+3-n+i}$$

$$(A1.12) \quad \mathbf{r}_{lq}^t(m+1-n+i) = \mathbf{1}_{m+3-n+i}^t C_{lq}(m+2-n+i, m)$$

où aussi, $\mathbf{1}_\alpha$ désigne le vecteur de taille α dont toutes les composantes sont nulles, sauf la dernière qui vaut 1. Tout ceci conduit à la relation (22) avec

$$(A1.13) \quad D_{m+1-n}(i) = \mathbf{a}_{m+1-n|n-1}(i) \mathbf{r}_{lq}^t(m+1-n+i) \times C_{lq}^*(m+1-n+i, m)$$

où C^* est la pseudoinverse de C . La relation (23) s'obtient pratiquement de la même façon en notant d'après la définition, (18), que

$$(A1.14) \quad E_{n-1}^f(m+n-2) = C_{lq}(m+2-n, m+2-n) + \sum_{i=1}^{n-1} A_{m+2-n|n-1}(i) \times C_{lq}(m+2-n+i, m+2-n)$$

et en multipliant respectivement à gauche et à droite par U_{m+2-n} et U_{m+2-n}^t , retranchant le résultat de (18) considérant (22) on trouve (23) avec

$$(A1.15) \quad W_{n-1}(m+1-n) = \sum_{i=1}^{n-1} U_{m+2-n} A_{m+2-n|n-1}(i) H(m+1-n+i) + V_{n-1}(m+1-n)$$

$$H(m+1-n+i) = C_{lq}(m+2-n+i, m+2-n) U_{m+2-n}^t - U_{m+2-n+i}^t C_{lq}(m+1-n+i, m+1-n)$$

où

$$(A1.16) \quad V_{n-1}(m+1-n) = D_{m+1-n}(i) C_{lq}(m+1-n+i, m+1-n)$$

APPENDICE 2

Mise à jour de la cellule treillis multidimensionnelle.

Nous justifions ici (32) en partant des figures 2 et 3 et des équations (14) et (15). Une fois de plus, la symétrie du problème conduit à ne considérer que les matrices intervenant dans la prédiction future. Pour ce faire, il suffit de remplacer les innovations de (14) et (15) par leur forme développée, voir (21) et (25), de transposer le résultat obtenu et d'identifier les matrices de rang correspondant.

$$(A2.1) \quad A_{m+1-n|n}(0) = I_{m+2-n, m+2-n}$$

$$(A2.2) \quad A_{m+1-n|n}^t(n) = [E_{n-1}^b(m+1)]^{-1} R_{n-1}(m+1-n)$$

$$(A2.3) \quad A_{m+1-n|n}^t(i) = A_{m+1-n|n-1}^t(i) - B_{m+1|n-1}^t(i) A_{m+1-n|n}^t(n)$$

$$1 \leq i \leq n-1.$$

Finalement, partant de (18) et utilisant le principe d'orthogonalité il reste

$$(A2.4) \quad E_n^f(m+1-n) = E_{n-1}^f(m+1-n) + R_{n-1}^t(m+1-n) A_{m+1-n|n}^t(n)$$

qui mène à (32) si de plus le même travail est accompli pour la prédiction à rebours et en introduisant une présentation matricielle plus compacte.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P. DUVAUT, Le Filtrage de Wiener Linéaire-quadratique à horizon fini, application à la Prédiction, *Traitement du Signal*, novembre 1989.
- [2] A. BLANC-LAPIERRE & B. PICINBONO, *Fonctions Aléatoires*, Masson, Paris, 1981.
- [3] A. PAPOULIS, *Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York, 1984.
- [4] B. FRIEDLANDER & T. KAILATH, Extended Levinson Algorithm and Chandrasekhar equations, *IEEE trans. on Automatic Control*, Vol. AC-23, pp. 653-659, 1978.
- [5] S. HAYKIN, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, New York, 1986.
- [6] B. PICINBONO, *Éléments de Théorie du Signal*, Dunod, Paris, 1977.
- [7] J. M. MAKHOUL, Linear Prediction, a tutorial review, *Proc. IEEE*, Vol. 63, N° 4, April 1975.
- [8] M. BELLANGER, *Traitement Numérique du Signal*, Masson, Paris, 1988.
- [9] R. BOITE & H. LECH, *Les Filtrés Numériques*, Collection du CNET, Masson, Paris, 1980.
- [10] S. KAY & J. MARPLE, Spectrum Analysis, a modern perspective, *Proc. of IEEE*, Vol. 69, p. 1380-1419, 1981.
- [11] S. KAY, *Spectrum Analysis*, Prentice Hall, New York, 1987.
- [12] J. BENDIR & B. PICINBONO, *Critères de Stabilités des Filtrés Linéaires Discrets*, Rapport Interne, LSS, ESE, 1987.
- [13] H. FREEMAN, *Discret time Systems*, John Wiley, 1963.
- [14] H. LEV-HARI & T. KAILATH, Schur and Levinson algorithms for non stationary processes, *Proc. ICASSP 81*, Atlanta, p. 860-864, 1981.
- [15] G. DEMOMENT, *Le filtrage Rapide*, polycopié de Cours de l'ESE, 1988.
- [16] T. KAILATH, Some alternatives in recursive estimation, *Int. Journal of Aut. Control*, Vol. 32, p. 311-328, 1980.
- [17] D. TJUSTHEIM, *Recent Developments in non linear time series models*, by I. Blacke and V. Poor, Springer, New York, 1986.
- [18] D. A. JONES, Non linear Autoregressive processes, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. 360, p. 71-95, 1978.
- [19] T. E. McCANNON, On a class of random processes, exhibiting optimal non linear one step predictors, *IEEE trans. on Inf. Theory*, Vol. IT-27, N° 5, p. 652-655, sept. 1981.
- [20] T. E. McCANNON, On the design of non linear discrete time predictors, *IEEE trans. on Inf. Theory*, Vol. IT-28, N° 2, p. 366-371, March 1982.
- [21] K. K. AASE, Recursive Estimation in non linear time series models, *J. Roy. Soc. Ser. B*, Vol. 45, p. 228-237, 1983.
- [22] J. ZARZICKI, *Orthogonal ladder form of non linear predictors of Volterra types*, in theory and applications of non linear control systems, Elsevier Publishers, North Holland, 1986.
- [23] B. PICINBONO & P. DUVAUT, Linear-quadratic filters for Detection and Estimation, *IEEE trans. on Inf. Theory*, Vol. IT-34, N° 2, p. 304-311, March 1988.
- [24] P. CHEVALIER & B. PICINBONO, Optimal linear-quadratic array for Detection, *Proc. of ICASSP*, Glasgow, 1989.