

# Comparaison de deux méthodes d'estimation du gain complexe d'un filtre optimal au sens de Wiener

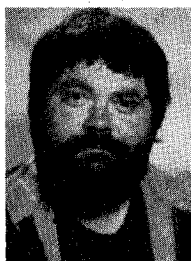
Comparison between two estimation methods  
of the complex gain of an optimal Wiener filter



## Christine SERVIÈRE

Centre d'Étude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques (CEPHAG), BP n° 46, 38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES.

Ingénieur ENSIEG (1986). Thèse de doctorat INPG (1989). Domaines de recherche : filtrage adaptatif, soustraction de bruit.



## Daniel BAUDOIS

Centre d'Étude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques (CEPHAG), BP n° 46, 38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES.

Ingénieur électricien, diplômé de l'École Nationale Supérieure des Ingénieurs Électriciens de Grenoble (1970), est Maître de Conférences à l'ENSIEG (Institut National Polytechnique de Grenoble). Il anime au CEPHAG un groupe de recherche concernant la réduction de bruit à l'aide d'algorithmes adaptatifs.



## André SILVENT

Centre d'Étude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques (CEPHAG), BP n° 46, 38502 SAINT-MARTIN-D'HÈRES.

Ingénieur ENSIEG. Attaché au service technique des Armées (DCN).

## RÉSUMÉ

Cet article traite de l'estimation adaptative du gain complexe d'un filtre linéaire et stationnaire appliqué à la soustraction de bruit. Le filtre optimal est déterminé au sens de la minimisation d'un critère quadratique statistique : son gain complexe est solution de l'équation de Wiener-Hopf. En pratique, il est nécessaire d'estimer les densités spectrales des signaux observés à l'aide, par exemple, de périodogrammes moyennés.

La mise en œuvre du soustracteur de bruit, réalisée sans précaution, peut entraîner des erreurs d'estimations importantes liées à l'opération de filtrage linéaire dans le domaine fréquentiel. Deux techniques, connues sous les noms de « Overlap-add-method » et « Overlap-save-method », ont pour but de diminuer ces erreurs. Celles-ci conduisent à deux estimateurs différents du gain complexe du filtre. Nous les comparons en étudiant les propriétés statistiques au second ordre des estimateurs. Les résultats obtenus sont validés par des simulations.

## MOTS CLÉS

Estimation adaptative, filtrage de Wiener, soustraction de bruit.

## SUMMARY

This paper deals with the adaptive estimation of a linear and stationary filter in noise cancelling. The optimal Wiener filter is solution of the minimization of a quadratic criterion. It needs the estimation of the power spectra of the observed signals. Filtering operation in the frequency-domain may produce estimation errors if we take no precaution. We compare in this paper two methods called « Overlap-add-method » and « Overlap-save-method » which aim is to reduce these errors.

## KEY WORDS

Adaptive estimation, Wiener filtering, noise cancelling.

## Introduction

Le filtrage adaptatif est un sujet très actuel par l'importance de ses domaines d'application. Les méthodes adaptatives permettent d'optimiser, vis-à-vis d'un critère choisi, les paramètres d'un filtre et d'assurer cette optimisation en présence des fluctuations du milieu. Les domaines d'application sont aussi divers que les communications, la détection radar ou sonar, ou les traitements de signaux de parole ou d'images. Nous nous intéresserons dans la suite à l'estimation adaptative, appliquée à la soustraction de bruit, d'un filtre supposé linéaire et homogène  $\mathcal{F}$  par un filtre transverse à temps discret.

L'approche classique consiste à estimer le filtre  $\mathcal{F}$  en minimisant un critère quadratique : il en résulte des calculs simples qui ne font appel qu'à des moments du second ordre (fonctions de corrélations ou densités spectrales). Le filtre  $\mathcal{F}$  peut être caractérisé soit dans la représentation temporelle par les coefficients de sa réponse impulsionnelle soit dans la représentation fréquentielle par ceux de son gain complexe. Ceci conduit à élaborer des algorithmes dans l'un ou l'autre des domaines.

Dans la représentation temporelle, la méthode qui consiste à renouveler l'estimation de la réponse impulsionnelle du filtre pour chaque échantillon des signaux a déjà été largement étudiée. Elle conduit à des algorithmes maintenant très connus, optimaux de type Moindres-Carrés-Rapides [1, 2] ou Treillis [3, 4], ou sous-optimaux de type Gradient [5, 6].

Dans la représentation fréquentielle, la méthode fait appel à la transformation de Fourier et consiste à itérer l'estimation du gain complexe du filtre à chaque nouvelle tranche de signal. Elle conduit aussi à des algorithmes optimaux, au sens des moindres-carrés, de type Wiener [7, 8], ou sous-optimaux de type Gradient [9, 10].

Le résultat du filtrage linéaire d'un signal, dans le domaine fréquentiel, utilisant les transformées de Fourier de tranches adjacentes de ce signal est, par essence, entaché d'un défaut systématique lié aux discontinuités induites par le découpage.

Les études faites pour pallier ce défaut ont abouti à deux types, maintenant classiques, de mise en œuvre des méthodes de filtrage dans le domaine fréquentiel et connus sous les dénominations suivantes :

- « Overlap-add-method », ou addition de blocs.
- « Overlap-save-method », ou recouvrement de blocs.

Ces deux types de mise en œuvre induisent cependant des erreurs d'estimations du gain complexe du filtre. L'objet du travail présenté est précisément l'étude comparative de ces erreurs d'estimation, c'est-à-dire des propriétés statistiques au second ordre de l'estimateur du gain complexe dans l'un et l'autre cas.

Après avoir brièvement replacé l'estimateur du gain complexe d'un filtre dans le cadre de la soustraction de bruit, nous précisons le type de défaut inhérent aux effets de la convolution circulaire et les deux palliatifs classiquement utilisés. Nous donnons ensuite l'expression générale du biais et de la variance de l'estimateur du gain complexe d'un filtre, puis, dans le cas gaussien, la forme particulière de la variance de cet estimateur pour les deux types de palliatifs : addition de blocs et recouvrement de blocs. L'étude théorique de cet estimateur montre que la méthode utilisant le recouvrement des blocs est plus performante. Ces résultats sont validés à l'aide de simulations.

## 1. Estimation du gain complexe d'un filtre linéaire utilisé pour la soustraction de bruit

### 1.1. PRINCIPE DE LA SOUSTRACTION DE BRUIT

Un problème important du traitement du signal est l'estimation d'un signal  $S$  à partir d'une observation bruitée  $X = S + B$ . La soustraction de bruit est l'une des techniques utilisées lorsque l'on a accès, en plus de  $X$ , à un signal  $b$  indépendant du signal utile  $S$  et corrélé avec  $B$ . Ce signal  $b$  est appelé « référence-bruit ».

La soustraction de bruit consiste alors à construire un filtre  $\mathcal{F}$ , choisi dans la classe des filtres linéaires. L'estimation des paramètres de ce filtre linéaire et homogène est telle que, excité par le signal aléatoire  $b$  stationnaire au second ordre et centré, la sortie de  $\mathcal{F}$ , notée  $\hat{B}$ , approche au sens de l'écart quadratique moyen minimal le signal aléatoire  $X$  (fig. 1). Le signal  $X$  est supposé lui-même stationnaire au second ordre et centré.

Nous nous intéressons donc ci-dessous, à l'estimation des paramètres du filtre linéaire et homogène  $\mathcal{F}$ .

### 1.2. FORME DE L'ESTIMATEUR DU GAIN COMPLEXE

Dans la suite, nous supposons les signaux à temps discret  $[S(k), X(k), b(k)]$  et  $B(k)$ . Le filtre  $\mathcal{F}$  est un

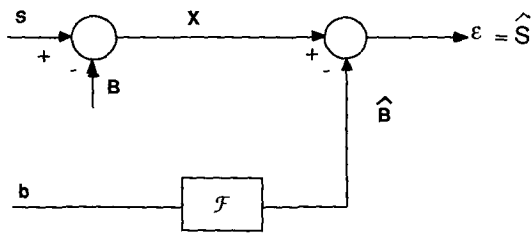


Fig. 1. - Schéma de principe du soustracteur de bruit.

filtre transverse à temps discret à réponse impulsionnelle finie (RIF) et caractérisé par  $N$  valeurs  $w_0, \dots, w_{N-1}$  de sa réponse impulsionnelle. Son gain complexe  $W(v)$  est défini pour les  $N$  valeurs discrètes  $v_0, \dots, v_{N-1}$  de la fréquence  $v$ , obtenues par transformation de Fourier discrète des échantillons  $w_0, \dots, w_{N-1}$ .  $W(v)$  est obtenu par application de la formule de Wiener-Hopf [7] :

$$(1) \quad W(v) = \frac{\gamma_{xb}(v)}{\gamma_{bb}(v)},$$

expression dans laquelle  $\gamma_{xb}(v)$  [resp. :  $\gamma_{bb}(v)$ ] est couramment appelée densité spectrale de puissance d'interaction entre  $X$  et  $b$  [resp. : densité spectrale de puissance de  $b$ ].

En pratique, l'estimation de  $W(v)$  est obtenue en remplaçant  $\gamma_{xb}(v)$  et  $\gamma_{bb}(v)$  par leurs estimations  $\hat{\gamma}_{xb}(v)$  et  $\hat{\gamma}_{bb}(v)$  calculées pendant une durée d'estimation finie  $T$ . Cette substitution a pour conséquence de ne pas conduire au filtre optimal au sens du critère quadratique choisi. Cependant, cette approximation est satisfaisante lorsque la durée  $T$  devient suffisamment grande [8].

Ainsi l'estimation  $\hat{W}(v)$  de  $W(v)$  sera définie de la manière suivante :

$$(2) \quad \hat{W}(v) = \frac{\hat{\gamma}_{xb}(v)}{\hat{\gamma}_{bb}(v)}$$

L'adaptativité du traitement n'est assurée que si les estimations  $\hat{\gamma}_{xb}(v)$  et  $\hat{\gamma}_{bb}(v)$  de  $\gamma_{xb}(v)$  et  $\gamma_{bb}(v)$  sont renouvelées au cours du temps en tenant compte de tranches de signal successives. Nous supposons avoir accès à un instant donné à  $L$  tranches, adjacentes ou non, de chacune  $N$  échantillons temporels où  $N$  est égal au nombre de coefficients du filtre choisi. Nous utilisons la méthode du périodogramme moyenné pour estimer  $\hat{\gamma}_{xb}(v)$  et  $\hat{\gamma}_{bb}(v)$  en introduisant un facteur d'oubli  $\lambda$  pour tenir compte d'éventuelles non-stationnarités lentes des signaux  $b$  et  $X$  :

$$(3) \quad \begin{cases} \hat{\gamma}_{xb}(v) = \frac{1-\lambda^L}{1-\lambda} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{1}{N} \lambda^{L-i} \mathcal{X}^i(v) \overline{\mathcal{B}^i(v)} \\ \hat{\gamma}_{bb}(v) = \frac{1-\lambda^L}{1-\lambda} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{1}{N} \lambda^{L-i} b^i(v) \overline{b^i(v)} \end{cases}$$

où  $\mathcal{X}^i(v)$  et  $b^i(v)$  sont respectivement les transformées de Fourier discrètes calculées sur la  $i$ -ième tranche temporelle de  $N$  échantillons des signaux  $b(k)$  et  $X(k)$  et où  $\overline{b^i(v)}$  représente le complexe conjugué de  $b^i(v)$ .

Le gain  $\hat{W}(v)$  estimé à l'aide de  $L$  tranches sera noté  $\hat{W}^L(v)$  et calculé par (4) :

$$(4) \quad \hat{W}^L(v) = \frac{\sum_{i=1}^L \lambda^{L-i} \mathcal{X}^i(v) \overline{\mathcal{B}^i(v)}}{\sum_{i=1}^L \lambda^{L-i} b^i(v) \overline{b^i(v)}}$$

## 2. Problèmes liés au filtrage fréquentiel

### 2.1. ILLUSTRATION DU DÉFAUT DE FILTRAGE

Le défaut de filtrage fréquentiel est ici mis en évidence par la courbe d'apprentissage d'une simulation du système soustracteur de bruit, courbe qui représente après retour dans le domaine temporel, l'évolution de  $[S(k) - \hat{S}(k)]^2$  en fonction de  $k$ .  $S$  et  $b$  sont des bruits blancs;  $B$  est issu de  $b$  par application d'un filtre récursif du premier ordre [12]. L'expression (4) est calculée en effectuant les transformées de Fourier discrètes de tranches temporelles adjacentes de  $X$  et  $b$ . Une estimation du gain  $\hat{W}^i(v)$  est réalisée à chaque tranche de rang  $i$ . Elle conduit, pour chacune, à une estimation du signal utile calculée par (5) :

$$(5) \quad \hat{\mathcal{S}}^i(v) = \mathcal{X}^i(v) - \hat{W}^i(v) \cdot b^i(v)$$

Après transformation de Fourier inverse, nous calculons tranche après tranche l'expression de la puissance de l'erreur  $[\hat{S}(k) - S(k)]^2$ . La courbe d'apprentissage qui devrait être à décroissance monotone présente des discontinuités régulières dont la périodicité correspond au découpage temporel des signaux  $X$  et  $B$ .

Ces discontinuités de la courbe d'apprentissage traduisent le fait que les premiers échantillons de chaque tranche de longueur  $N$  traitée sont mal estimés. En effet, l'application sans précaution de la transformée de Fourier discrète au bloc isolé de rang  $i$  conduit à une périodisation des signaux  $b^i(v)$  et  $\mathcal{X}^i(v)$ . Le filtrage d'expression (4) du bloc  $b^i(v)$  par le filtre de gain complexe  $\hat{W}^i(v)$  est alors le résultat d'une convolution circulaire où n'interviennent que les échantillons du bloc temporel de la référence de rang  $i$  [12]. Cela induit des transitoires dont la longueur est sensiblement égale au support de la réponse impulsionnelle du filtre  $\mathcal{F}$ .

Au contraire, un filtrage dans la représentation temporelle [Algorithmes M-C-R, Treillis ou LMS] est le résultat d'une convolution linéaire qui fait intervenir des échantillons du bloc temporel de la référence de rang  $(i-1)$ .

Il est clair que l'application d'une convolution linéaire et d'une convolution circulaire conduisent à des résultats différents. Cependant les résultats des deux convolutions concernant les points situés au-delà du support temporel du filtre sont identiques, tandis que les premiers points de chaque bloc correspondant au support de  $\mathcal{F}$  sont mal estimés. Nous présentons dans la suite (§ 2.2) les deux méthodes usuelles ayant pour but d'éviter cet écueil.

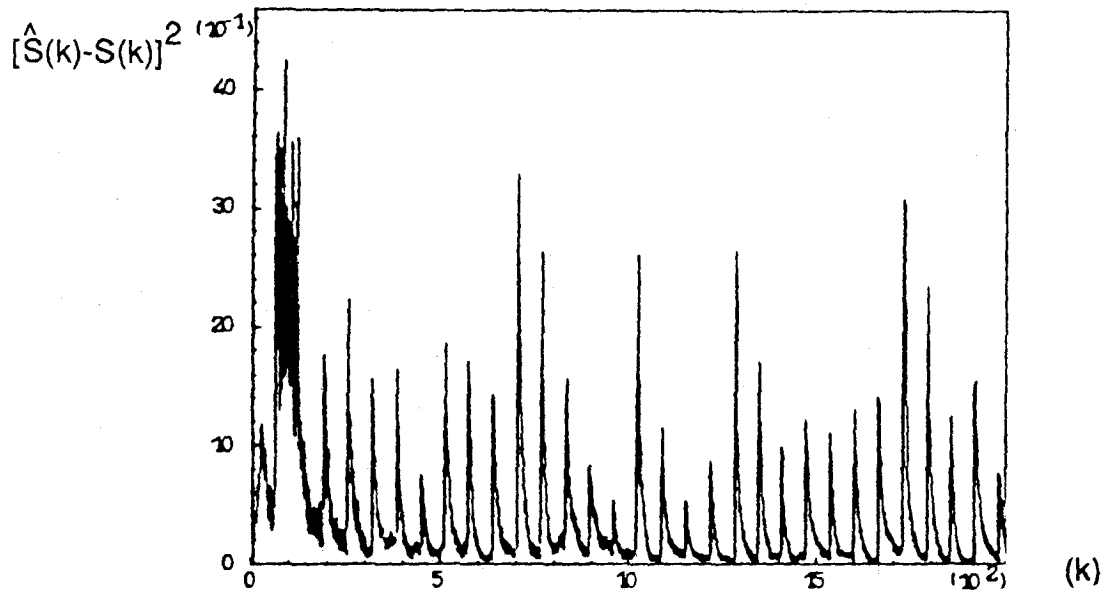


Fig. 2. - Courbe d'apprentissage du système pour un filtre de N=64 coefficients.

2.2. ÉLIMINATION DES EFFETS DE LA CONVOLUTION CIRCULAIRE

2.2.1. Méthode par addition de blocs

Cette méthode consiste à réaliser artificiellement une convolution linéaire. Elle s'appuie sur le fait [11] que le résultat, de longueur 2N, de la convolution linéaire de deux blocs isolés de longueur N est identique à celui de la convolution circulaire de ces deux mêmes blocs auxquels sont ajoutés N zéros.

Cette technique décrite par Oppenheim et Schafer [11] sous le nom de « Overlap-add-method » consiste, pour chaque bloc de rang i constitué de N échantillons temporels complétés par N zéros, à reconstruire le bruit perturbateur  $\hat{\mathcal{B}}^i(v)$  dans le domaine fréquentiel à l'aide de l'expression (6) :

$$(6) \quad \hat{\mathcal{B}}^i(v) = \hat{W}^i(v) \cdot b^i(v)$$

Après transformation de Fourier discrète inverse, le résultat du filtrage de chacun de ces blocs,  $\hat{B}^i(k)$ , est composé de 2N échantillons. Pour obtenir ensuite le résultat du filtrage sur l'ensemble des blocs de  $b(k)$ , il suffit de sommer terme à terme (en respectant leur rang) les blocs de longueur 2N contenant les échantillons de  $\hat{B}^i(k)$ . Les transitoires de début et de fin de blocs seront ainsi éliminés deux à deux. Il ne subsistera, bien sûr, que les transitoires correspondant au début et à la fin du signal.

2.2.2. Méthode par recouvrements de blocs

Le principe de cette méthode connue sous le nom d'« Overlap-save-method » [11] consiste à ne retenir que les estimations significatives, donc situées hors des transitoires, en travaillant sur des blocs se recouvrant partiellement.

Deux blocs successifs de longueur N ont en commun D échantillons. A la suite du traitement d'un bloc, ne seront conservées que les estimations correspondant aux (N-D) derniers échantillons temporels de ce

bloc. Si D est suffisamment grand (en tout cas supérieur au support de la réponse du filtre  $\mathcal{F}$ ), les estimations retenues seront situées hors du transitoire et donc correctes.

2.2.3. Conclusions

Alors que la première méthode permet à l'utilisateur d'effectuer une véritable convolution linéaire, la seconde a pour objectif de ne conserver que les points correctement estimés. Cependant, la mise en œuvre de ces deux techniques impose un estimateur du gain  $\hat{W}(v)$  du filtre  $\mathcal{F}$  spécifique à chacune : l'estimation des densités spectrales est effectuée soit sur des tranches adjacentes, soit sur des tranches se recouvrant partiellement. Pour comparer les performances du système soustracteur de bruit (qui inclut l'estimation du filtre et le filtrage fréquentiel) pour les deux méthodes présentées dans les paragraphes 2.2.1 et 2.2.2, il faut tenir compte des erreurs d'estimation différentes dans les deux cas, commises sur l'estimation du gain  $\hat{W}(v)$ .

Nous étudions dans la suite ces erreurs d'estimations en évaluant le biais et la variance du gain complexe estimé (§ 3).

3. Comparaison théorique

Nous nous proposons d'étudier les propriétés statistiques au second ordre de l'estimateur. Pour cela, nous écrivons les estimations des densités spectrales de la manière suivante :

$$(7) \quad \begin{aligned} \hat{\gamma}_{xb}(v) &= \gamma_{xb}(v) + \delta(\hat{\gamma}_{xb}(v)) \\ &\quad \delta(\hat{\gamma}_{xb}(v)) \text{ complexe} \\ \hat{\gamma}_{bb}(v) &= \gamma_{bb}(v) + \delta(\hat{\gamma}_{bb}(v)) \\ &\quad \delta(\hat{\gamma}_{bb}(v)) \text{ réel} \end{aligned}$$

où  $\delta(\hat{\gamma}_{xb}(v))$  et  $\delta(\hat{\gamma}_{bb}(v))$  sont les erreurs de l'estimateur  $\hat{\gamma}_{xb}(v)$  et  $\hat{\gamma}_{bb}(v)$ .

Les quantités

$$\mathcal{B}(\hat{\gamma}_{xb}(v)) = E\{\delta(\hat{\gamma}_{xb}(v))\}$$

et

$$\mathcal{B}(\hat{\gamma}_{bb}(v)) = E\{\delta(\hat{\gamma}_{bb}(v))\}$$

sont les erreurs de biais des deux estimateurs  $\hat{\gamma}_{xb}(v)$  et  $\hat{\gamma}_{bb}(v)$ .

L'expression (2) s'écrit alors :

$$(8) \quad \hat{W}(v) = \frac{\gamma_{xb}(v) + \delta(\hat{\gamma}_{xb}(v))}{\gamma_{bb}(v) + \delta(\hat{\gamma}_{bb}(v))}$$

En supposant une durée d'estimation assez longue, les quantités  $\delta(\hat{\gamma}_{xb}(v))$  et  $\delta(\hat{\gamma}_{bb}(v))$  sont faibles vis-à-vis de  $\gamma_{xb}(v)$  et  $\gamma_{bb}(v)$ .

### 3.1. BIAIS DE L'ESTIMATEUR

Dans ces conditions, le biais de l'estimateur est obtenu en développant l'expression (8) au premier ordre.

$$(9) \quad \hat{W}(v) \approx \frac{\gamma_{xb}(v)}{\gamma_{bb}(v)} - \frac{\gamma_{xb}(v)}{[\gamma_{bb}(v)]^2} \delta(\hat{\gamma}_{bb}(v)) + \frac{\delta(\hat{\gamma}_{xb}(v))}{\gamma_{bb}(v)}$$

Le biais de l'estimateur  $\mathcal{B}(\hat{W})$  de  $\hat{W}(v)$  est alors :

$$(10) \quad \mathcal{B}(\hat{W}) \approx W(v) \cdot \left[ \frac{\mathcal{B}(\hat{\gamma}_{xb}(v))}{\gamma_{xb}(v)} - \frac{\mathcal{B}(\hat{\gamma}_{bb}(v))}{\gamma_{bb}(v)} \right]$$

En supposant que les estimations des densités spectrales sont réalisées à partir de  $L$  tranches comprenant  $N$  échantillons temporels des signaux respectifs, et en utilisant comme fenêtre d'apodisation la fonction porte (fenêtre naturelle), il vient (11) [13] :

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathcal{B}(\hat{\gamma}_{xb}(v)) &= \gamma_{xb}(v) * \left[ \frac{\sin(\pi v N)}{\pi v N} \right]^2 - \gamma_{xb}(v) \\ \mathcal{B}(\hat{\gamma}_{bb}(v)) &= \gamma_{bb}(v) * \left[ \frac{\sin(\pi v N)}{\pi v N} \right]^2 - \gamma_{bb}(v) \end{aligned}$$

(La période d'échantillonnage  $T_e$  est prise égale à 1.)  
Le symbole  $*$  représente l'opération de convolution linéaire.

Nous constatons que la valeur du biais  $\mathcal{B}(\hat{W})$  est la même pour les méthodes par addition de blocs et par recouvrements. En effet, dans le premier cas, l'adjonction de  $N$  zéros ne modifie pas l'estimation des densités spectrales mais a seulement pour conséquence de réaliser un suréchantillonnage fréquentiel.

Le biais  $\mathcal{B}(\hat{W})$  sera faible, d'après (10) et (11) si les termes de biais de  $\hat{\gamma}_{xb}$  et  $\hat{\gamma}_{bb}$  le sont, c'est-à-dire si  $[\sin(\pi v N)/\pi v N]^2$  a un support très étroit. Il est donc préférable, quelle que soit la méthode choisie, d'utiliser des tranches de longueur  $N$  grande, de manière à diminuer le biais.

### 3.2. VARIANCE DE L'ESTIMATEUR

#### 3.2.1. Expression générale de la variance de l'estimateur du filtre

La variance de l'estimateur  $\hat{W}$  est obtenue en utilisant un développement limité au second ordre de  $\hat{W}(v)$ . Il est détaillé en annexe 1 et conduit à l'expression suivante, indépendamment des estimateurs des densités spectrales utilisés :

$$(12) \quad \frac{\text{VAR}\{|\hat{W}(v)|\}}{|\hat{W}(v)|^2} \approx \frac{\text{VAR}\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\}}{[\gamma_{bb}(v)]^2} + \frac{\text{VAR}\{|\hat{\gamma}_{xb}(v)|\}}{[\gamma_{xb}(v)]^2} - \frac{2}{\gamma_{bb}(v)} \cdot \text{Re} \left\{ \frac{\text{cov}\{\hat{\gamma}_{xb}(v), \hat{\gamma}_{bb}(v)\}}{\gamma_{xb}(v)} \right\}$$

où :

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\hat{\gamma}_{xb}(v), \hat{\gamma}_{bb}(v)\} \\ = E\{[\hat{\gamma}_{xb}(v) - E\{\hat{\gamma}_{xb}(v)\}] \cdot [\hat{\gamma}_{bb}(v) - E\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\}]\} \end{aligned}$$

et  $\text{Re}\{A\}$  représente la partie réelle du complexe  $A$ .  
On constate que cette variance dépend des variances relatives de  $\hat{\gamma}_{bb}(v)$  et  $|\hat{\gamma}_{xb}(v)|$  et de la corrélation entre les erreurs d'estimation de  $\gamma_{bb}(v)$  et  $\gamma_{xb}(v)$ . Lorsque  $X(k)$  et  $b(k)$  sont totalement corrélés [ $X(k) = \alpha b(k)$ ], on vérifie que  $\text{VAR}\{|\hat{W}(v)|\}$  est nulle asymptotiquement, ce qui constitue un résultat classique.

#### 3.2.2. Expression de la covariance des estimateurs des densités spectrales dans le cas gaussien

Les signaux traités sont souvent supposés gaussiens. Nous utilisons cette hypothèse pour développer le terme de covariance de l'expression de la variance (12).

Rappelons que les estimations  $\hat{\gamma}_{xb}(v)$  et  $\hat{\gamma}_{bb}(v)$  de  $\gamma_{xb}(v)$  et  $\gamma_{bb}(v)$  sont calculées sur  $L$  tranches (adjacentes ou non) de  $N$  échantillons temporels chacune. Alors  $\hat{\gamma}_{xb}(v)$  [resp.  $\hat{\gamma}_{bb}(v)$ ] s'écrit (3) :

$$(3) \quad \begin{aligned} \hat{\gamma}_{xb}(v) &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{1}{N} \mathcal{X}^i(v) \bar{b}^i(v) \\ \hat{\gamma}_{bb}(v) &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{1}{N} b^i(v) \bar{b}^i(v) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{X}^i(v)$  et  $b^i(v)$  sont respectivement les transformées de Fourier discrètes calculées sur la  $i$ -ième tranche temporelle de  $X(k)$  et  $b(k)$  composée de  $N$  échantillons.

Le calcul du terme de covariance est détaillé en annexe 2 et conduit à l'expression :

$$(13) \quad \begin{aligned} \text{cov}\{\hat{\gamma}_{xb}(v), \hat{\gamma}_{bb}(v)\} &= \\ \frac{1}{[NL]^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L [E\{\mathcal{X}^i(v) \cdot b^j(v)\} \cdot E\{\bar{b}^i(v) \cdot \bar{b}^j(v)\} \\ &+ E\{\mathcal{X}^i(v) \cdot \bar{b}^j(v)\} \cdot E\{\bar{b}^i(v) \cdot b^j(v)\}] \\ &+ \frac{1}{[NL]^2} \sum_{i=1}^L E\{\mathcal{X}^i(v) \cdot b^i(v)\} \cdot E\{\bar{b}^i(v) \cdot \bar{b}^i(v)\} \\ &+ \frac{1}{L} E\{\hat{\gamma}_{xb}(v)\} \cdot E\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\} \end{aligned}$$

Dans le paragraphe suivant, cette expression va être développée dans le cas particulier des méthodes par addition de blocs (§ 3.3.2) et par recouvrements (§ 3.4.2).

3.3. VARIANCE DE L'ESTIMATEUR DANS LE CAS GAUSSIEN POUR LA MÉTHODE PAR ADDITION DE BLOCS

3.3.1. *Variances relatives des estimateurs des densités spectrales*

Si on choisit des tranches de longueur assez grande vis-à-vis du support de corrélation de  $b$ , alors en supposant  $b$  gaussien [13, 14, 15] :

$$(14) \quad \frac{\text{VAR} \{ \hat{\gamma}_{bb}(v) \}}{\gamma_{bb}^2(v)} = \frac{1}{r}$$

où  $r$  est le nombre de tranches adjacentes de longueur  $N$  constituant l'ensemble du signal sur lequel on effectue l'estimation.

En utilisant les mêmes hypothèses concernant le support d'intercorrélation entre  $X$  et  $b$ , alors :

$$(15) \quad \frac{\text{VAR} \{ |\hat{\gamma}_{xb}(v)| \}}{|\gamma_{xb}(v)|^2} = \frac{1}{2 \cdot r} \left[ 1 + \frac{1}{|C_{xb}(v)|^2} \right]$$

Ces termes (14) et (15) sont d'autant plus petits que  $r$  est grand. A durée totale d'estimation  $T$  des signaux constante, nous remarquons qu'augmenter  $r$  revient à diminuer  $N$ . La variance pourra donc être réduite, mais au prix d'une augmentation du biais.

3.3.2. *Calcul du terme de covariance*

Le terme de covariance (13) se développe facilement, en supposant deux tranches de signal consécutives, indépendantes : le premier terme de (13) alors est nul et  $L$  est égal à  $r$  précédemment défini. Cette hypothèse d'indépendance est réaliste en choisissant des tranches de longueur  $N$  assez grande vis-à-vis du support de corrélation de  $b(k)$  et  $X(k)$  [16] :

$$(16) \quad \text{cov} \{ \hat{\gamma}_{xb}(v), \hat{\gamma}_{bb}(v) \} = \frac{1}{[Nr]^2} \sum_{i=1}^r E \{ \mathcal{X}^i(v) \cdot b^i(v) \} \cdot E \{ \bar{b}^i(v) \cdot \bar{b}^i(v) \} + \frac{1}{r} E \{ \hat{\gamma}_{xb}(v) \} \cdot E \{ \hat{\gamma}_{bb}(v) \}$$

Ce terme de covariance sera faible uniquement si  $r$  est grand. Ceci ne peut être réalisé qu'au prix d'une augmentation du biais.

$$(20) \quad B_e = \frac{1}{N \cdot [(2K+1) + 2 \cdot (1-\alpha)^2 (K(K+1)(2K+1)/6) - 2 \cdot (1-\alpha) K(K+1)]}$$

Pour un taux de recouvrement  $\alpha$  inférieur ou égal à 1/2 (soit  $K=1$ ), l'expression (20) de  $B_e$  se simplifie :

$$(21) \quad B_e = \frac{1}{N \cdot [1 + 2\alpha^2]}$$

Les expressions des variances relatives sont, pour un taux de recouvrement  $\alpha$  inférieur ou égal à 1/2 :

3.4. VARIANCE DE L'ESTIMATEUR DANS LE CAS GAUSSIEN POUR LA MÉTHODE PAR RECOUVERMENTS

3.4.1. *Variances relatives des estimateurs des densités spectrales*

Les expressions des variances relatives des densités spectrales sont, dans le cas de signaux gaussiens et sous l'hypothèse de densités spectrales blanches sur la largeur de bande  $B_e$  du filtre d'analyse [17, 18] :

$$(17) \quad \frac{\text{VAR} \{ \hat{\gamma}_{bb}(v) \}}{[\hat{\gamma}_{bb}(v)]^2} = \frac{1}{B_e T_{in}}$$

$$(18) \quad \frac{\text{VAR} \{ |\hat{\gamma}_{xb}(v)| \}}{|\hat{\gamma}_{xb}(v)|^2} = \frac{1}{2 B_e T_{in}} \left[ 1 + \frac{1}{|C_{xb}(v)|^2} \right]$$

Dans ces expressions,  $C_{xb}(v)$  est le coefficient de cohérence entre  $X(k)$  et  $b(k)$ ,  $T_{in}$  le temps d'intégration des estimateurs et  $B_e$  la bande passante équivalente du filtre d'analyse.

Les densités spectrales sont estimées sur des tranches de longueur finie  $N$  se recouvrant d'un nombre d'échantillons fixe  $D$ . Nous appellerons par la suite  $\alpha = D/N$  le taux de recouvrement.

Le temps d'intégration  $T_{in}$  s'exprime par  $r \cdot N / (1 - \alpha)$  où  $r$  est le nombre de tranches adjacentes de longueur  $N$  constituant l'ensemble du signal de durée  $T$ .

La bande passante équivalente  $B_e$  est telle que (19) [19] :

$$(19) \quad B_e = \frac{[\Gamma_h^i(0)]^2}{N \cdot \sum_p [\Gamma_h^i(p(N-D))]^2}$$

où  $h^i(k) = \Pi_N(k + i(N-D))$  est la fonction porte retardée de  $i(N-D)$  points, et  $\Gamma_h^i$  sa fonction de corrélation.

$$\begin{aligned} \Pi_N(k) &= 0 & \text{si } k \notin [0, N-1] \\ \Pi_N(k) &= 1 & \text{si } k \in [0, N-1] \end{aligned}$$

On appelle  $K$  le nombre de tranches ayant des échantillons communs avec une tranche de longueur  $N$  fixée.  $K$  vérifie les inégalités suivantes :

$$K(N-D) < N \leq (K+1) \cdot (N-D)$$

soit

$$\alpha \leq K(1-\alpha) < 1$$

$B_e$  s'exprime alors en développant (19) (annexe 3) :

$$(22) \quad \frac{\text{VAR} \{ \hat{\gamma}_{bb}(v) \}}{[\hat{\gamma}_{bb}(v)]^2} = \frac{1-\alpha}{r} [1 + 2\alpha^2]$$

$$(23) \quad \frac{\text{VAR} \{ |\hat{\gamma}_{xb}(v)| \}}{|\hat{\gamma}_{xb}(v)|^2} = \frac{1-\alpha}{2r} [1 + 2\alpha^2] \cdot \left[ 1 + \frac{1}{|C_{xb}(v)|^2} \right]$$

et pour un taux de recouvrement  $\alpha$  supérieur à  $1/2$  :

$$(24) \frac{\text{VAR}\{\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\}\}}{[\gamma_{bb}(v)]^2} = \frac{1-\alpha}{r} \left[ (2K+1) + 2 \cdot (1-\alpha)^2 \cdot \frac{K(K+1)(2K+1)}{6} - 2 \cdot (1-\alpha) K(K+1) \right]$$

$$(25) \frac{\text{VAR}\{|\hat{\gamma}_{xb}(v)|\}}{|\gamma_{xb}(v)|^2} = \frac{1-\alpha}{2r} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{|C_{xb}(v)|^2} \right] \left[ (2K+1) + 2 \cdot (1-\alpha)^2 \right]$$

$$\times \frac{K(K+1)(2K+1)}{6} - 2 \cdot (1-\alpha) K(K+1) \Big]$$

Lorsque le taux de recouvrement est maximal ( $D=N-1$  et  $K=N-1$ ), alors :

$$(26) \frac{\text{VAR}\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\}}{[\gamma_{bb}(v)]^2} = \frac{1}{r} \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot N^2} \right]$$

Si  $N$  est assez grand, la variance relative de  $\hat{\gamma}_{bb}(v)$  tend vers  $2/3 \cdot r_2$  et de manière analogue la variance relative de  $|\hat{\gamma}_{xb}(v)|$ . Les expressions (22), (24) et (26) permettent de tracer théoriquement  $r \cdot \text{VAR}\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\}/\gamma_{bb}^2(v)$  en fonction de  $\alpha$  (fig. 3) :

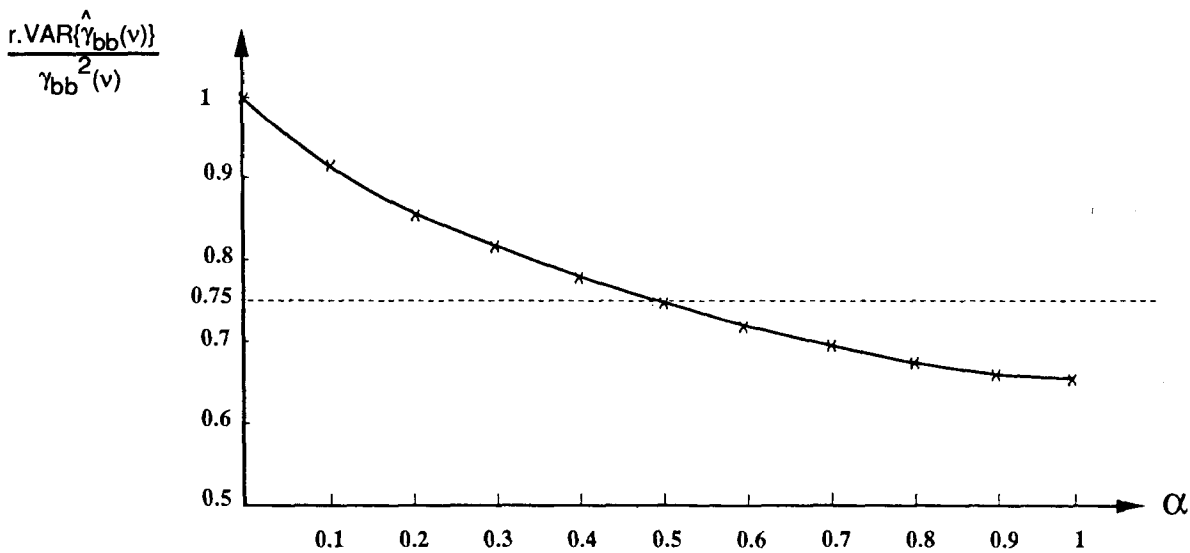


Fig. 3. — Évolution théorique de  $r \cdot \text{VAR}\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\}/\gamma_{bb}^2(v)$  en fonction du taux de recouvrement  $\alpha$ .

Nous remarquons que dans la méthode par recouvrements, les variances relatives de  $\hat{\gamma}_{xb}(v)$  et  $|\hat{\gamma}_{bb}(v)|$  (22) à (26) sont nettement plus petites que dans le cas de la méthode par addition de blocs (14) et (15), si le taux de recouvrement  $\alpha$  est assez faible. Ceci est au prix d'une augmentation du nombre d'opérations nécessaires qui croît avec le taux de recouvrement : un recouvrement de moitié  $\alpha=1/2$  semble un bon compromis entre le volume de calculs et la performance souhaitée.

#### 3.4.2. Calcul du terme de covariance

Le terme de covariance (13) s'écrit :

$$(13) \text{cov}\{\hat{\gamma}_{xb}(v), \hat{\gamma}_{bb}(v)\} = \frac{1}{[NL]^2} \sum_{i=1}^L E\{\mathcal{X}^i(v) \cdot b^i(v)\} \cdot E\{\bar{b}^i(v) \cdot \bar{b}^i(v)\} + \frac{1}{L} E\{\hat{\gamma}_{xb}(v) \cdot E\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\}\} + \frac{1}{[NL]^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L [E\{\mathcal{X}^i(v) \cdot b^j(v)\} \cdot E\{\bar{b}^i(v) \cdot \bar{b}^j(v)\}] + E\{\mathcal{X}^i(v) \cdot \bar{b}^j(v)\} \cdot E\{\bar{b}^i(v) \cdot b^j(v)\}]$$

Les deux premiers termes, communs aux deux méthodes comparées [cf. (16)], sont plus faibles dans cette méthode car  $L$  peut être très supérieur à  $r$ , sans modifier la valeur de  $N$ . Si  $L$  (ou  $N$ ) est grand, le troisième terme sera lui aussi faible.

#### 3.5. CONCLUSIONS

Nous avons montré que, quelle que soit la technique utilisée pour éliminer l'influence perturbatrice des transitoires, le biais de l'estimateur de  $\mathcal{F}$  est faible lorsque le nombre des coefficients  $N$  du filtre est grand. D'autre part, la variance de l'estimateur du filtre fait intervenir les variances relatives des densités spectrales estimées qui sont plus faibles dans le cas de la méthode par recouvrements. Il reste néanmoins qu'un compromis doit être trouvé afin que, ayant choisi une valeur de  $N$  pour que la variance reste faible, le biais qui varie en sens inverse ne soit pas trop grand. En effet, les variances relatives des densités spectrales sont proportionnelles à  $1/r$  où  $r$  est le nombre de tranches adjacentes de  $N$  points. A durée totale des signaux  $T$  constante, les variances relatives de  $\hat{\gamma}_{bb}(v)$  et  $|\hat{\gamma}_{xb}(v)|$  sont donc proportionnelles à  $N$ . On remarque enfin que la cohérence entre  $X(k)$  et  $b(k)$

intervient dans l'expression de la variance relative de  $|\hat{\gamma}_{xb}(v)|$ . La présence de signal utile diminue la valeur de  $|C_{xb}(v)|$  et augmente donc la variance de l'erreur d'estimation.

#### 4. Comparaison sur signaux simulés

##### 4.1. MESURES DES PARAMÈTRES CARACTÉRISTIQUES

Le comportement des systèmes adaptatifs est caractérisé par l'évolution en fonction du temps de  $P_\epsilon(k) = [S(k) - \hat{S}(k)]^2$ , dont l'allure générale est la suivante (fig. 4).

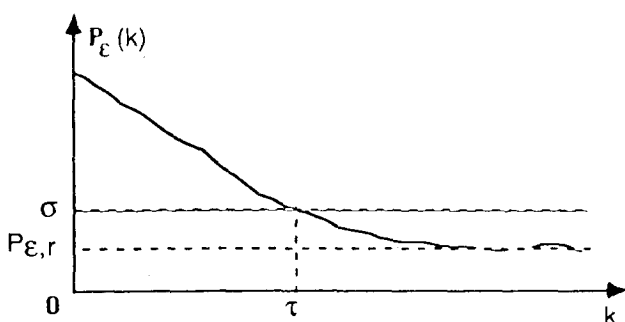


Fig. 4. - Allure générale de l'évolution de la puissance d'erreur d'un soustracteur de bruit.

Cette courbe possède une valeur initiale  $P_\epsilon(0)$  qui dépend des conditions d'expérimentation. Elle converge en un « temps de convergence »  $\tau$  vers une valeur asymptotique  $P_{\epsilon,r}$ , appelée puissance d'erreur résiduelle; le couple de valeurs  $[P_{\epsilon,r}, \tau]$  mesurées dans une situation donnée nous a semblé convenablement approprié pour définir l'efficacité d'une méthode de soustraction de bruit [12].

Pour mesurer correctement la puissance d'erreur résiduelle  $P_{\epsilon,r}$ , la durée de chaque expérience doit être suffisamment longue. Elle est dans notre étude [12] égale à 8 192 échantillons et nous choisissons de prendre pour valeur de  $P_{\epsilon,r}$  la moyenne des 2 000 derniers points de la courbe d'apprentissage. Ainsi le palier de convergence de la courbe est atteint, puis maintenu sur un nombre d'échantillons assez grand pour permettre le calcul d'une moyenne significative. Le temps de convergence  $\tau$  est le temps au bout duquel la courbe d'apprentissage est très proche de son asymptote. Après avoir convenablement lissé cette courbe, nous avons déterminé la valeur de  $\tau$  en tant qu'abscisse de l'intersection de la courbe lissée et de la droite d'ordonnée,

$$(27) \quad \sigma = P_{\epsilon,r} + \frac{P_\epsilon(0) - P_{\epsilon,r}}{10}$$

Les algorithmes utilisés (méthodes par addition de blocs et par recouvrements) seront caractérisés et comparés, dans la suite, à l'aide d'un réseau de courbes tracées dans le plan  $[P_{\epsilon,r}, \tau]$  pour différentes valeurs du paramètre  $N$  (nombre de coefficients du filtre  $\mathcal{F}$ ).

##### 4.2. RÉSULTATS SUR SIGNAUX SIMULÉS

Les courbes dans le plan  $[P_{\epsilon,r}, \tau]$  de la figure 5 ont été établies [12] dans les conditions précédentes en choisissant des signaux  $b(k)$  et  $S(k)$  blancs et gaussiens. Le rapport Signal à Bruit est de  $-6$  dB et  $B$  est issu de  $b$  par un filtre récursif du premier ordre. On constate que les résultats obtenus à l'aide de la méthode par recouvrements (le taux de recouvrement choisi est de 0,75) sont les meilleurs, c'est-à-dire que la puissance d'erreur résiduelle  $P_{\epsilon,r}$  est toujours plus petite pour cette méthode, pour une valeur  $N$  fixée, pour un temps de convergence sensiblement égal.

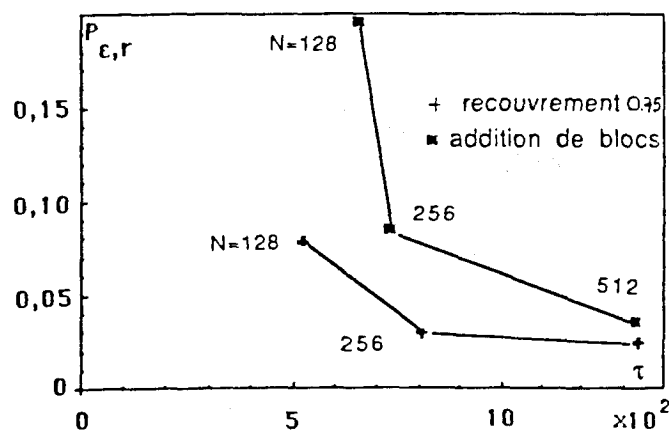


Fig. 5. - Comparaison des méthodes par addition de blocs et par recouvrements sur signaux simulés.

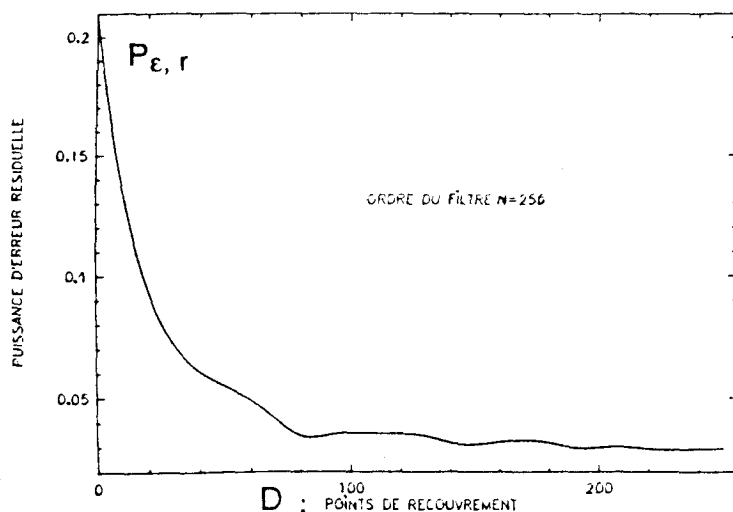


Fig. 6. - Évolution de la puissance d'erreur résiduelle en fonction du nombre de points de recouvrement  $D$  pour un filtre de  $N=256$  coefficients.

Nous validons d'autre part les résultats de la partie 3, § 3-4 en vérifiant que pour une valeur de  $N$  constante (fixée à 256), la puissance d'erreur résiduelle diminue lorsque le taux de recouvrement  $\alpha$  augmente. Nous avons tracé, à partir des mêmes signaux simulés, l'évolution de  $P_{\epsilon,r}$  en fonction du nombre de points de recouvrement  $D$ . On vérifie, conformément à la théorie, § 3-4, qu'au-delà d'une certaine valeur, les performances ne sont pas améliorées alors que le coût de calcul croît rapidement.



Intéressons nous maintenant à l'influence du nombre  $N$  de coefficients du filtre. Pour un taux de recouvrement de 0,9, des résultats de simulation (fig. 7) montre une valeur optimale de  $N$  au-delà de laquelle la puissance d'erreur résiduelle augmente. Ceci s'explique par le fait que les termes de biais et de variance varient en sens inverse en fonction de  $N$  (§ 3.5).

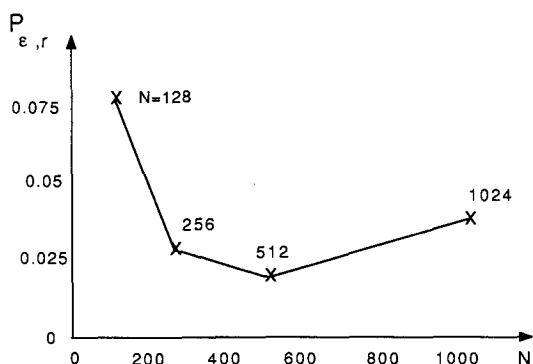


Fig. 7. - Influence du nombre  $N$  de coefficients sur la puissance d'erreur résiduelle sur signaux simulés.

## 5. Conclusion

Nous comparons, dans cet article, les performances de deux méthodes de mise en œuvre (« Overlap-add-method » et « Overlap-save-method ») permettant de résoudre le problème, en étudiant les propriétés statistiques au second ordre de l'estimateur du gain complexe et en les validant sur des signaux simulés.

Nous avons montré que, quelle que soit la technique utilisée pour éliminer l'influence perturbatrice des transitoires, le biais de l'estimateur de  $\mathcal{F}$  est faible lorsque  $N$  est grand. Cependant les deux termes de variances relatives des densités spectrales intervenant dans l'expression de la variance de l'estimateur sont plus faibles dans le cas de la seconde méthode. Celle-ci nous semble la plus intéressante car, en augmentant le nombre d'accumulations équivalentes, elle estime mieux le filtre  $\mathcal{F}$ , même si elle n'effectue pas une convolution linéaire exacte.

On remarque d'autre part, dans cette seconde méthode, que pour une valeur de  $N$  constante, la puissance d'erreur résiduelle  $P_{e,r}$  diminue lorsque le taux de recouvrement  $\alpha$  augmente. Cependant, au-delà d'une certaine valeur, le gain en performances stagne alors que le coût de calcul croît rapidement. Un recouvrement de moitié ( $\alpha=0,5$ ) semble être un bon compromis.

Manuscrit reçu le 12 octobre 1988.

Travail réalisé avec le concours de la Direction des Constructions Navales dans le cadre de la convention DCN-CEPHAG.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] CIOFFI et KAILATH, Fast RLS transversal filters for adaptive filtering, *IEEE Trans. ASSP*, 32, avril 1984, p. 304-337.

[2] CARAYANNIS, MANOLAKIS et KALOUPSIDIS, A fast sequential algorithm for LS filtering and prediction, *IEEE Trans. ASSP*, 31, décembre 1983, p. 1394-1405.

[3] FRIEDLANDER, Lattice filters for adaptive processing, *Proc. IEEE*, 70, août 1982, p. 829-867.

[4] LEE, MORF et FRIEDLANDER, Recursive least-squares ladder estimation algorithms, *IEEE Trans. ASSP*, 29, juin 1981, p. 627-641.

[5] WIDROW *et al.*, Adaptive noise cancelling: principles and applications, *Proc. IEEE*, 63, décembre 1965, p. 1692-1716.

[6] MACCHI et BELLANGER, Le point sur le filtrage adaptatif transverse, 11<sup>e</sup> colloque GRETSI, juin 1987, p. 1G-14G.

[7] VAN TREES, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, Wiley, 1968.

[8] COMON, Traitement de signaux magnétiques multivariés, *Thèse*, INP, Grenoble, décembre 1985.

[9] BERSHAD et FEINTUCH, A normalized Frequency Domain LMS Adaptive Algorithm, *IEEE Trans. ASSP*, 34, juin 1986, p. 452-461.

[10] LEE et MITRA, On frequency-domain LS adaptive algorithms, *ICASSP* 1987, Dallas, p. 411-414.

[11] OPPENHEIM et SCHAFER, *Digital Signal Processing*, Prentice Hall.

[12] SERVIÈRE, BAUDOIS, SILVENT et LORENZINO, Éléments de comparaison entre différentes méthodes de soustraction de bruit, 11<sup>e</sup> colloque GRETSI, juin 1987, p. 113-116.

[13] LATOMBE, Détection et caractérisation des signaux à plusieurs composantes à partir de la matrice interspectrale, *Thèse d'État*, INP, Grenoble, novembre 1982.

[14] BRILLINGER, *Time Series, Data Analysis and Theory*, Holden Day, 1981.

[15] ANDERSON, *An introduction to multivariate Statistical Analysis*, Wiley, 1958.

[16] COMON et LACOUME, Noise Reduction for an Estimated Wiener Filter using Noise References, *IEEE Trans. on Information Theory*, 32, mars 1986, p. 310-313.

[17] BENDAT et PIERSOL, *Random Data: Analysis and measurement procedures*, Wiley, 1971.

[18] MAX *et al.*, *Méthodes et techniques de traitement du signal et application aux mesures physiques*, Masson, 1985.

[19] WELCH, The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 15, juin 1967, p. 70-75.

## Annexe 1

### Calcul de la variance de l'estimateur

Le calcul de la variance de l'estimateur est réalisé en utilisant la formule de Koenig (A1) :

$$(A1) \quad \text{VAR} \{ |\hat{W}(v)| \} = E \{ |\hat{W}(v)|^2 \} - [E \{ |\hat{W}(v)| \}]^2$$

Le développement à l'ordre 2 de  $|\hat{W}(v)|^2$ , calculé à partir de l'expression (8) peut être écrit :

$$(A2) \quad \left| \frac{\hat{W}(v)}{W(v)} \right|^2 = 1 + 2 \cdot \text{Re} \{ \Delta_1(v) \} - 2 \cdot \Delta_2(v) - 4 \cdot \Delta_2(v) \cdot \text{Re} \{ \Delta_1(v) \} + |\Delta_1(v)|^2 + 3 \cdot [\Delta_2(v)]^2$$

expression dans laquelle

$$\Delta_1(v) = \frac{\delta(\hat{\gamma}_{xb}(v))}{\gamma_{xb}(v)}, \quad \Delta_2(v) = \frac{\delta(\hat{\gamma}_{bb}(v))}{\gamma_{bb}(v)}$$

et  $\text{Re}\{A\}$  représente la partie réelle du complexe  $A$ . On peut aussi écrire le développement à l'ordre 2 de  $|\hat{W}(v)/W(v)|$  (A3) :

$$(A3) \quad \left| \frac{\hat{W}(v)}{W(v)} \right| = 1 + \text{Re}\{\Delta_1(v)\} - \Delta_2(v) - \Delta_2(v) \text{Re}\{\Delta_1(v)\} + \frac{1}{2} \cdot |\Delta_1(v)|^2 + [\Delta_2(v)]^2 - \frac{1}{2} \cdot [\text{Re}\{\Delta_1(v)\}]^2.$$

Les expressions (A2) et (A3) permettent de calculer la variance de l'estimateur à l'aide de (A1) et en posant :

$$(A4) \quad \begin{aligned} \text{cov}\{\Delta_2(v), \text{Re}\{\Delta_1(v)\}\} &= \\ &= E\left\{[\Delta_2(v) - E\{\Delta_2(v)\}][\text{Re}\{\Delta_1(v)\} - E\{\text{Re}\{\Delta_1(v)\}\}]\right\} \\ &= \text{VAR}\left\{\left|\frac{\hat{W}(v)}{W(v)}\right|\right\} = \text{VAR}\{\Delta_2(v)\} \\ &+ \text{VAR}\{\text{Re}\{\Delta_1(v)\}\} - 2 \cdot \text{cov}\{\Delta_2(v), \text{Re}\{\Delta_1(v)\}\}. \end{aligned}$$

Cette expression peut être simplifiée en remplaçant  $\Delta_2(v)$  et  $\text{Re}\{\Delta_1(v)\}$  par leurs valeurs en fonction de  $\delta\{\hat{\gamma}_{xb}(v)\}$  et  $\delta\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\}$ . D'après (7), il est clair que :

$$(A5) \quad \text{VAR}\{\Delta_2(v)\} = \frac{\text{VAR}\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\}}{[\gamma_{bb}(v)]^2}.$$

D'autre part, en calculant  $|\hat{\gamma}_{xb}(v)|^2$  à partir de (7) et en le développant au second ordre, il vient :

$$(A6) \quad \frac{\text{VAR}\{|\hat{\gamma}_{xb}(v)|^2\}}{[\gamma_{xb}(v)]^2} \approx \text{VAR}\{\text{Re}\{\Delta_1(v)\}\}.$$

En tenant compte de (A4), (A5) et (A6), on obtient une nouvelle expression de la variance relative de l'estimateur du filtre calculée en (A7).

$$(A7) \quad (12) \quad \frac{\text{VAR}\{|\hat{W}(v)|\}}{|\hat{W}(v)|^2} \approx \frac{\text{VAR}\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\}}{[\gamma_{bb}(v)]^2} + \frac{\text{VAR}\{|\hat{\gamma}_{xb}(v)|^2\}}{[\gamma_{xb}(v)]^2} - \frac{2}{\gamma_{bb}(v)} \text{Re}\left\{\frac{\text{cov}\{\hat{\gamma}_{xb}(v), \hat{\gamma}_{bb}(v)\}}{\gamma_{xb}(v)}\right\}.$$

**Annexe 2**

Les estimations  $\hat{\gamma}_{xb}(v)$  et  $\hat{\gamma}_{bb}(v)$ , calculées sur  $L$  tranches (adjacentes ou non) de  $N$  échantillons temporels

chacune, s'écrivent :

$$(3) \quad \begin{aligned} \hat{\gamma}_{xb}(v) &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{1}{N} x^i(v) \bar{b}^i(v) \\ \hat{\gamma}_{bb}(v) &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \frac{1}{N} b^i(v) \bar{b}^i(v). \end{aligned}$$

Le terme de covariance devient :

$$(A8) \quad \text{cov}\{\hat{\gamma}_{xb}(v), \hat{\gamma}_{bb}(v)\} = \frac{1}{[NL]^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \text{cov}\{x^i(v) \cdot \bar{b}^i(v), b^j(v) \cdot \bar{b}^j(v)\}.$$

En introduisant l'hypothèse de signaux gaussiens, les moments du 4<sup>e</sup> ordre dans l'expression (A8) peuvent être exprimés en fonction des moments du second ordre. Dans ces conditions (A8) devient :

$$\text{cov}\{\hat{\gamma}_{xb}(v), \hat{\gamma}_{bb}(v)\} = \frac{1}{[NL]^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L [E\{x^i(v) \cdot \bar{b}^i(v)\} \cdot E\{\bar{b}^j(v) \cdot b^j(v)\} + E\{x^i(v) \cdot \bar{b}^j(v)\} \cdot E\{\bar{b}^i(v) \cdot b^j(v)\}].$$

En utilisant l'hypothèse de stationnarité des signaux, le calcul du terme de covariance conduit à l'expression (A9) :

$$(A9) \quad (13) \quad \begin{aligned} \text{cov}\{\hat{\gamma}_{xb}(v), \hat{\gamma}_{bb}(v)\} &= \frac{1}{[NL]^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L [E\{x^i(v) \cdot b^j(v)\} \cdot E\{\bar{b}^i(v) \cdot \bar{b}^j(v)\} \\ &+ E\{x^i(v) \cdot \bar{b}^j(v)\} \cdot E\{\bar{b}^i(v) \cdot b^j(v)\}] \\ &+ \frac{1}{[NL]^2} \sum_{i=1}^L E\{x^i(v) \cdot b^i(v)\} \cdot E\{\bar{b}^i(v) \cdot \bar{b}^i(v)\} \\ &+ \frac{1}{L} E\{\hat{\gamma}_{xb}(v)\} \cdot E\{\hat{\gamma}_{bb}(v)\}. \end{aligned}$$

**Annexe 3**

La bande passante équivalente  $B_e$  est telle que (19) :

$$(19) \quad B_e = \frac{[\Gamma_h^i(0)]^2}{N \cdot \sum_{p=0}^K [\Gamma_h^i(p(N-D))]^2}$$

soit :

$$(A10) \quad \begin{aligned} B_e &= \frac{N^2}{N \cdot \left[ N^2 + 2 \cdot \sum_{p=1}^K [N-p(N-D)]^2 \right]} \\ B_e &= \frac{1}{N \cdot \left[ 1 + 2 \cdot \left[ K + (1-\alpha)^2 \sum_{p=1}^K p^2 + (1-\alpha) \sum_{p=1}^K p \right] \right]} \end{aligned}$$

On obtient en développant (A10) l'expression (20) :

$$(20) \quad B_e = [N \cdot [(2K+1) + 2 \cdot (1-\alpha)^2 (K(K+1) + (2K+1)/6) - 2 \cdot (1-\alpha) K(K+1)]]^{-1}.$$