

Une solution neuromimétique  
au problème  
de séparation de sources

A neuromimetic solution for the problem  
of sources discrimination



**Christian JUTTEN**

Institut National Polytechnique de Grenoble, École Nationale Supérieure d'Électronique et de Radioélectricité, Laboratoire de Traitement d'Images et Reconnaissance de Formes, 46, avenue Félix-Viallet, 38031 GRENOBLE CEDEX.

Docteur ès Sciences, Maître de Conférences à l'École Nationale Supérieure d'Électronique et de Radioélectricité de Grenoble (une des écoles de l'INPG). Depuis 1977, il étudie le Traitement de l'Information dans les Systèmes Biologiques, notamment pour des applications en Traitement du Signal. Dans l'étude de ces « Réseaux de neurones », son intérêt se porte principalement sur l'algorithme et sur les VLSI analogiques.

**Jeanny HERAULT**

Institut National Polytechnique de Grenoble, École Nationale Supérieure d'Électronique et de Radioélectricité, Laboratoire de Traitement d'Images et Reconnaissance de Formes, 46, avenue Félix-Viallet, 38031 GRENOBLE CEDEX.

Professeur à l'Institut Joseph-Fourier de Grenoble. Axe principal de recherche depuis 1970 : Modélisation de réseaux de neurones formels, aspects physiologiques et algorithmiques.

**RÉSUMÉ**

Le problème de séparation de sources, très classique en traitement du signal, correspond aussi à une réalité dans les systèmes biologiques. En effet, les capteurs biologiques sont sensibles à de multiples sources, le système nerveux central traite donc des signaux multi-capteurs dont chaque composante est un mélange inconnu de sources inconnues, supposées indépendantes. La solution neuromimétique, proposée dans cet article est fondée sur un réseau récuratif d'opérateurs complètement interconnectés, et dont le poids des connexions évoluent selon une règle d'adaptation, qui opère un test d'indépendance des sorties du réseau. Par rapport aux règles utilisées en filtrage adaptatif, l'incrément d'adaptation fait intervenir nécessairement le produit de deux fonctions non linéaires.

Plusieurs résultats expérimentaux dans le domaine du Traitement du Signal ou du Traitement d'Images illustrent les performances de l'algorithme. La généralisation à des mélanges plus complexes, ou dégénérés est également discutée et illustrée.

Cet algorithme révèle aussi un nouveau concept d'Analyse en Composantes Indépendantes, plus fort que celui d'Analyse en Composantes Principales, applicable dans le cadre général de l'analyse de données.

**MOTS CLÉS**

Réseau de neurones, adaptatif, non linéaire, indépendance, séparation de sources, Analyse en Composantes Indépendantes.

## SUMMARY

The problem of sources discrimination, very classical in Signal Processing field, is also an actual problem in biological systems. Biological sensors are sensitive to many sources, so the Central Nervous System processes typically multidimensional signals, each component of which is an unknown mixture of unknown sources, assumed independent.

The neuromimetic solution, proposed in this paper, is based on a recursive and fully-interconnected network of operators. The weight of the connections are varying according to an adaptation rule, which executes an independence test of the network outputs. With regard to adaptation rules used in adaptive filtering, here the adaptive increment is achieved necessarily by the product of two non-linear functions.

Some experimental results, in Signal Processing and Image Processing fields, show the efficiency of this adaptive algorithm. We prove also the possible generalization of this algorithm in the case of more complex (non-linear, degenerated, etc.) mixtures.

This algorithm points out a new concept of Independent Components Analysis, more powerful than this one of Principal Components Analysis, and applicable in the general frame of data analysis.

## KEY WORDS

Neural network, adaptive, non-linear, independence, sources discrimination, Independent Components Analysis.

## 1. Introduction

Considérons un ensemble de  $n$  sources indépendantes  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$  et un ensemble de  $p$  capteurs sensibles à ces  $n$  sources. A la sortie de chaque capteur  $i$ , on observe un signal  $E_i(t)$ , mélange des signaux  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ . Un modèle assez général de ce mélange peut être décrit par la relation :

$$(1) \quad E_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) * X_j(t), \quad 1 \leq i \leq p$$

où  $*$  est le produit de convolution sur le temps  $t$ .

Dans un tel mélange, les sources  $X_j(t)$  sont, bien entendu, inconnues, ainsi que les fonctions  $a_{ij}(t)$ . Les seuls signaux disponibles sont les  $p$  signaux  $E_i(t)$  observés à la sortie des capteurs.

On veut concevoir un dispositif capable d'extraire simultanément toutes les sources inconnues  $X_j(t)$  intervenant dans les mélanges  $E_i(t)$ .

Ce problème de séparation de sources est un problème fondamental de traitement du signal. En traitement d'antenne, le problème porte sur la séparation de sources sonar, radar, ou radio-astronomiques au moyen de réseau d'antennes. La séparation est généralement résolue partiellement : on se contente d'éliminer les brouilleurs [2], de dénombrer ou de localiser les sources [16]. Dans le domaine biomédical, les enregistrements électro-encéphalographiques sont aussi les résultats de la superposition de signaux émis par de multiples sources quasi ponctuelles; la localisation de ces sources est un problème délicat [15], mais d'un grand intérêt dans la caractérisation d'anomalies ou de pathologies neurologiques.

Les structures biologiques traitent aussi essentiellement des messages composites. En effet, les capteurs biologiques collectent des signaux issus de multiples sources extérieures et transmettent au Système Nerveux Central des signaux multi-dimensionnels (multi-capteurs notamment) constitués de mélanges de sources indépendantes. Par exemple, lorsque l'on effectue un mouvement (volontaire ou forcé), des informations concernant la vitesse et la position de

l'articulation en mouvement sont envoyées depuis des capteurs dits fusoriaux par l'intermédiaire des fibres IA et II vers le Système Nerveux Central [18]. On pourrait s'attendre à ce qu'un de ces deux types de fibres véhicule l'information « vitesse » et l'autre l'information « position », il n'en est rien. Chaque type de fibre transmet un mélange des informations « vitesse » et « position ». Les fibres IA, dites dynamiques, sont plutôt sensibles à la vitesse qu'à la position, et réciproquement les fibres II, dites statiques, transmettent préférentiellement la position, mais on observe globalement toute une gradation dans la pondération des mélanges. Si l'on admet que le mélange est linéaire, un modèle très simple du signal composite véhiculé le long de ces fibres est le suivant [1] :

$$(2) \quad \begin{cases} f_I(t) = a_{11} v(t) + a_{12} x(t) \\ f_{II}(t) = a_{21} v(t) + a_{22} x(t) \end{cases}$$

avec  $a_{11} > a_{12}$  et  $a_{22} > a_{21}$ .

Par rapport à l'équation (1), ce modèle est un simple mélange additif : les produits de convolution sont ici des produits simples, c'est-à-dire que la propagation des signaux intervenant dans le mélange est supposée instantanée. Dans ce modèle, les coefficients  $a_{ij}$  sont des scalaires,  $v(t)$  et  $x(t)$  sont respectivement la vitesse et la position angulaires de l'articulation en mouvement, et  $f_I(t)$  et  $f_{II}(t)$  sont les signaux transmis par les fibres IA et II respectivement. En réalité, ces signaux véhiculés par les fibres nerveuses sont des trains d'impulsions nerveuses, modélisables par des processus ponctuels; un codage en fréquence instantanée (fréquence-gramme des neuro-physiologistes) ou en fréquence moyenne sur un temps court donne une représentation à valeurs réelles continues des activités sur ces fibres.

La perception isolée des notions de vitesse et de position lors d'un mouvement, nous conduisent à formuler l'hypothèse de l'existence d'un dispositif de séparation de signaux dans le Système Nerveux. En considérant uniquement les capteurs dits proprioceptifs, une estimation du nombre total de fibres musculaires conduit à rejeter l'existence d'une structure pré-câblée génétiquement remplissant cette fonction. De

plus, ces capteurs peuvent évoluer en fonction d'un vieillissement accidentel ou naturel, ce qui entraîne une modification des mélanges. Une telle évolution est encore incompatible avec une structure figée génétiquement, et nous amène naturellement à concevoir une *structure adaptative*.

La notion d'*adaptativité* est matérialisée dans les structures nerveuses par le phénomène de plasticité synaptique. Cette plasticité est essentielle durant les premiers mois de la vie extra-utéro pour parvenir à un développement normal du système sensori-moteur, comme l'ont prouvé de nombreuses expériences [10], mais une plasticité chez les sujets matures existe également, et permet d'expliquer la récupération possible d'un déficit causé par des lésions accidentelles [20]. Le premier modèle, qualitatif, de la plasticité synaptique est connu sous le nom de règle de Hebb [6]. Aujourd'hui, d'autres travaux [13, 17] ont abouti à des règles quantitatives de la modification du poids synaptique  $m_{ij}$  (entre le neurone source  $j$  et le neurone cible  $i$ ) que l'on peut mettre sous la forme générale suivante :

$$(3) \quad dm_{ij}/dt = -\gamma \cdot m_{ij}(t) + a(t) \cdot f(S_i(t)) \cdot g(S_j(t)).$$

Dans cette relation,  $S_i(t)$  et  $S_j(t)$  sont les activités des neurones  $i$  et  $j$ ,  $a(t)$  est un gain de plasticité et  $\gamma$  un coefficient d'oubli passif. Le spécialiste en traitement du signal constatera l'identité formelle étroite entre ce type de règle et celles utilisées en filtrage adaptatif [9].

L'existence de ce problème de séparation de sources dans les systèmes biologiques, en particulier au niveau du Système Nerveux, nous a conduit naturellement à en concevoir une solution neuromimétique. On pourra objecter que le modèle proposé finalement, n'a plus grand chose de neuromimétique, tant il est simple vis-à-vis des systèmes biologiques. L'aspect neuromimétique tient en fait à un état d'esprit où les sources d'inspiration de la solution proposée ne sont pas seulement la physique mathématique, le traitement du signal ou d'autres théories. Notre approche consulte en permanence la « méta-source d'inspiration » que constituent les systèmes naturels. Ceci entraîne en particulier une discussion et une remise en question des méthodes utilisées et des résultats obtenus. Cependant, notre but n'étant pas de modéliser le Système Nerveux, cette source d'inspiration ne constituera jamais une contrainte : par exemple, pour développer une application performante dédiée à un problème particulier, nous n'attacherons pas une grande importance à l'aspect neuromimétique. Une telle approche n'est pas unique en Traitement du Signal : les travaux sur les systèmes sonar de la chauve-souris [3] relèvent d'une approche analogue; l'astuce et les performances des solutions biologiques ne sont plus à prouver.

Cet article est organisé en trois parties. La première partie, développe la démarche de construction du réseau adaptatif de séparation de sources. La seconde partie illustre les performances atteintes par l'algorithme sur deux applications. Une discussion, orientée sur la généralisation de notre solution dans le cadre de traitement du signal ou celui encore plus général de traitement de données, constitue la troisième partie.

## 2. Le problème et sa solution

### 2.1. MODÈLE DE MÉLANGE

Nous travaillerons dans cette partie sur un modèle simplifié de mélange (modèle linéaire) et nous nous placerons dans le cas où l'on dispose d'autant de sources que de capteurs ( $n=p$ ). Un tel modèle correspond par exemple au mélange des informations vitesse/position dans les fibres nerveuses [équation (2)], ou à celui obtenu par diaphonie entre deux lignes couplées, ou plus simplement à celui fourni par une table de mixage. L'extension à des mélanges non linéaires ou convolutifs [équation (1)] et aux cas  $n \neq p$  sera discuté dans la dernière partie. On suppose donc en sortie des  $n$  capteurs des signaux  $E_i(t)$  de la forme :

$$(4) \quad E_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j(t), \quad 1 \leq i \leq n.$$

soit en notation matricielle :

$$(5) \quad E(t) = A \cdot X(t).$$

Cette équation correspond à l'hypothèse de mélange linéaire, mais il faut rappeler que la matrice  $A$  et les sources  $X_j(t)$  sont inconnues. On pose seulement les deux hypothèses suivantes :

- la matrice  $A$  est constante et régulière;
- les sources  $X_j(t)$  sont indépendantes.

### 2.2. ARCHITECTURE DU RÉSEAU

La structure proposée est un modèle de réseau très courant dans le système nerveux tant au niveau sensoriel [8] qu'au niveau cortical [22]. Il s'agit d'un réseau à inhibitions latérales récurrentes, dont le choix semble judicieux si l'on lance l'idée suivante : on peut extraire une source parmi les  $n$  sources présentes dans le mélange  $E_i(t)$  en éliminant dans ce mélange les  $(n-1)$  autres sources par des soustractions pondérées (fig. 1). Les opérateurs  $N_i$  du réseau sont linéaires et caractérisés par un gain égal à l'unité. La sortie  $S_i(t)$  de l'opérateur  $N_i$  est connectée aux entrées de tous les autres opérateurs  $N_j$  ( $j \neq i$ ) avec un poids  $c_{ij}$  ( $c_{jj}=0$ ). Si la bande passante des opérateurs est très grande vis-à-vis de celle des signaux traités  $E_j(t)$ , on peut écrire :

$$(6) \quad S_i(t) = E_i(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_{ij} \cdot S_j(t), \quad 1 \leq i \leq n.$$

soit en notation matricielle :

$$(7) \quad S(t) = E(t) - C \cdot S(t).$$

où  $E(t)$  et  $S(t)$  sont maintenant des signaux multi-capteurs à  $n$  dimensions et  $C$  est la matrice carrée  $n \times n$  des connexions du réseau.

Si le réseau récursif est stable, la relation (7) peut s'écrire :

$$(8) \quad S(t) = (I + C)^{-1} \cdot E(t).$$

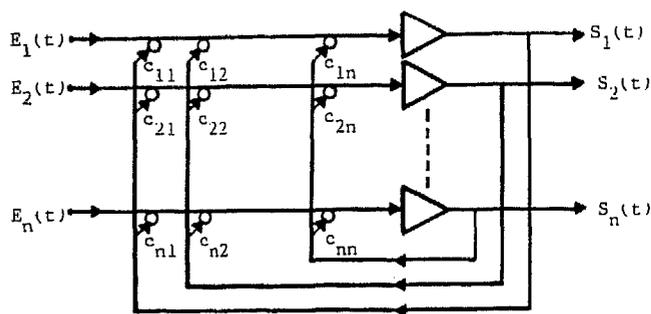


Fig. 1. - Architecture du réseau récursif.

### 2.3. EXISTENCE D'UNE SOLUTION THÉORIQUE

En introduisant l'hypothèse de mélange, la relation (8) devient :

$$(9) \quad S(t) = (I + C)^{-1} \cdot A \cdot X(t).$$

Une solution du problème de séparation de sources est atteinte si le vecteur  $S(t)$  est égal au vecteur  $X(t)$ , à une permutation des lignes près, et à un facteur près pour chaque composante, c'est-à-dire :

$$(10) \quad S(t) = P \cdot D \cdot X(t),$$

où  $P$  est une matrice de permutation et  $D$  est une matrice diagonale à éléments diagonaux non nuls.

A cette solution, est associée une configuration des poids du réseau telle que :

$$(11) \quad (I + C)^{-1} \cdot A = P \cdot D$$

que l'on peut écrire

$$(12) \quad C = A \cdot D^{-1} \cdot P^{-1} - I$$

puisque  $D^{-1}$  et  $P^{-1}$  existent, car  $P$  et  $D$  sont, de façon évidente, des matrices régulières.

La condition de stabilité du réseau implique l'existence de la matrice  $(I + C)^{-1}$ , qui nécessite l'hypothèse de régularité de  $A$  d'après (11).

La contrainte  $c_{ii} = 0$  impose les valeurs des éléments diagonaux de  $D^{-1}$ ,  $P^{-1}$  étant fixée. En effet, pour simplifier prenons  $P^{-1} = P = I$ , où  $I$  est la matrice identité; on a alors d'après (12) :

$$(13) \quad C = A \cdot D^{-1} - I.$$

Soit  $d_{ii}$  et  $d'_{ii}$  les éléments diagonaux situés à la ligne  $i$  et à la colonne  $i$  dans les matrices  $D$  et  $D^{-1}$  respectivement, on a alors :

$$(14) \quad d'_{ii} = 1/d_{ii}$$

et l'on peut calculer d'après (13) et (14) le coefficient  $c_{ii}$  :

$$(15) \quad c_{ii} = a_{ii}/d_{ii} - 1.$$

Puisque  $c_{ii} = 0$ , on en déduit que

$$(16) \quad d_{ii} = a_{ii}.$$

Les éléments  $c_{ij}$  peuvent alors être calculés d'après (13) et (16) :

$$(17) \quad c_{ij} = a_{ij}/a_{jj}.$$

Dans le cas général, si  $P^{-1}$  est une matrice de permutation, réalisation d'une permutation  $\sigma(\cdot)$  sur les indices des lignes, les relations (16) et (17) deviennent :

$$(18) \quad d_{ii} = a_{i\sigma(i)}$$

$$(19) \quad c_{ij} = a_{i\sigma(j)}/a_{j\sigma(j)}.$$

Le réseau possède donc au plus  $n!$  solutions théoriques, puisqu'il y a  $n!$  matrices  $P^{-1}$  possibles. Cependant, il convient de ne pas oublier que le réseau récursif doit rester stable. La condition de stabilité du réseau conduira ainsi à rejeter certaines de ces solutions.

Une solution théorique correspondant à l'extraction simultanée de toutes les sources sur les sorties est possible si l'équation (19) est vérifiée et on a alors :

$$(20) \quad \forall i, S_i(t) = a_{i\sigma(i)} \cdot X_{\sigma(i)}(t).$$

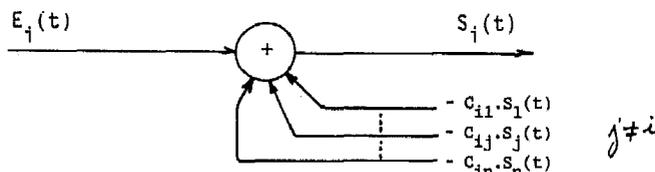
Cependant, les valeurs des  $c_{ij}$  données par (19) sont fonctions des coefficients  $a_{ij}$  du mélange, inconnus par hypothèse. Nous proposons par conséquent de calculer les coefficients  $c_{ij}$  en utilisant un algorithme adaptatif.

### 2.4. RECHERCHE D'UNE RÈGLE D'ADAPTATION

Essayons d'appliquer la méthode du gradient stochastique [9] à notre problème. Commençons par déterminer un terme d'erreur, dont nous calculerons ensuite le gradient par rapport aux  $c_{ij}$ .

#### 2.4.1. Terme d'erreur

L'opérateur  $N_i$  du réseau peut être modélisé par le schéma de la figure 2. On peut considérer d'après


 Fig. 2. - Modèle d'un opérateur  $N_i$ .

cette figure, que l'opérateur  $N_i$  et les coefficients  $c_{ij}$  ( $j \neq i$ ) élaborent un modèle du mélange des  $n$  sources inconnues au moyen de  $(n-1)$  signaux  $-c_{ij} \cdot S_j(t)$  ( $j \neq i$ ). Supposons que les  $(n-1)$  sorties  $S_j(t)$  ( $j \neq i$ ) séparent  $(n-1)$  sources, on a d'après (19) et (20) :

$$(21) \quad -c_{ij} \cdot S_j(t) = -c_{ij} \cdot a_{j\sigma(j)} \cdot X_{\sigma(j)}(t).$$

Le signal  $S_i(t)$  peut s'écrire alors :

$$(22) \quad S_i(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot X_k(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_{ij} \cdot a_{j\sigma(j)} \cdot X_{\sigma(j)}(t),$$

$$S_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [a_{i\sigma(j)} - c_{ij} \cdot a_{j\sigma(j)}] \cdot X_{\sigma(j)}(t) + a_{i\sigma(i)} \cdot X_{\sigma(i)}(t).$$

Considérons la valeur quadratique moyenne du signal centré  $S_i(t) - \langle S_i(t) \rangle = s_i(t)$ ; d'après (22) et en tenant compte de l'hypothèse d'indépendance des sources  $X_j(t)$ , on peut écrire :

$$(23) \quad \langle s_i^2(t) \rangle = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_{i\sigma(j)} - c_{ij} \cdot a_{j\sigma(j)})^2 \cdot \langle x_{\sigma(j)}(t) \rangle + a_{i\sigma(i)}^2 \cdot \langle x_{\sigma(i)}(t) \rangle$$

Le terme  $\langle s_i^2(t) \rangle$  est donc constitué de  $n$  termes quadratiques, dont le minimum sera obtenu si l'on annule les  $n-1$  premiers termes, ce qui est possible si l'on annule les parenthèses  $(a_{i\sigma(j)} - c_{ij} \cdot a_{j\sigma(j)})$ , c'est-à-dire si :

$$(24) \quad c_{ij} = \frac{a_{i\sigma(j)}}{a_{j\sigma(j)}}$$

Ainsi, nous proposons de considérer le terme  $s_i(t)$  comme un terme d'erreur. La solution (20) correspond seulement à un minimum local de (23), puisque on a supposé que les  $S_j(t)$  ( $j \neq i$ ) et les coefficients  $c_{ij}$  ( $j \neq i$ ) satisfont les relations (19) et (20). Un simple calcul, dans le cas  $n=p=2$ , montre que les « minimum minimorum » des termes  $\langle s_i^2(t) \rangle$  sont obtenus pour des valeurs de  $c_{ij}$  différentes de celles prévues par (24) (voir Annexe).

## 2. 5. CALCUL DU GRADIENT DE L'ERREUR

Calculons le gradient de l'erreur quadratique  $s_i^2(t)$  par rapport au coefficient  $c_{ij}$ . On a :

$$(25) \quad \frac{\partial s_i^2(t)}{\partial c_{ij}} = 2 \cdot s_i(t) \cdot \frac{\partial s_i(t)}{\partial c_{ij}}$$

Si le réseau récursif est stable, on peut appliquer la relation matricielle (8). Transposons-la à des variables centrées, et dérivons-la partiellement par rapport à  $c_{ij}$  :

$$(26) \quad s(t) = (I + C)^{-1} \cdot e(t)$$

$$(27) \quad \frac{\partial s(t)}{\partial c_{ij}} = -(I + C)^{-1} \cdot \frac{\partial (I + C)}{\partial c_{ij}} (I + C)^{-1} \cdot e(t)$$

$$(28) \quad \frac{\partial s(t)}{\partial c_{ij}} = -(I + C)^{-1} \cdot \frac{\partial C}{\partial c_{ij}} \cdot s(t)$$

Or  $\partial C / \partial c_{ij}$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ , dont le seul élément non nul est égal à l'unité et se trouve à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ . Le produit  $(I + C)^{-1} \cdot \partial C / \partial c_{ij}$  est alors une matrice carrée dont seule la colonne  $j$  est non nulle. L'élément de la ligne  $k$  de cette colonne est l'élément  $q_{ki}$  de la matrice  $(I + C)^{-1}$  :

$$(29) \quad \frac{\partial s(t)}{\partial c_{ij}} = - \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & q_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & q_{ni} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot s(t).$$

On a donc pour la composante  $s_k(t)$  un gradient :

$$(30) \quad \frac{\partial s_k(t)}{\partial c_{ij}} = -q_{ki} \cdot s_j(t),$$

d'où l'on déduit, en utilisant (25), le gradient de l'erreur :

$$(31) \quad \frac{\partial s_k^2(t)}{\partial c_{ij}} = -2 \cdot q_{ki} \cdot s_k(t) \cdot s_j(t).$$

De la méthode du gradient stochastique, on déduit alors la règle d'adaptation suivante, obtenue à partir de (30) et (31) dans le cas  $k=i$ , puisque le terme d'erreur est  $s_i$  :

$$(32) \quad \frac{dc_{ij}}{dt} = a \cdot q_{ii} \cdot s_i(t) \cdot s_j(t),$$

où  $a$  est un gain d'adaptation positif.

## 2. 6. CRITIQUES DE CETTE RÈGLE

Cette règle ne conduit pas à la séparation de sources, ce qui s'explique aisément. En effet, la règle (32) est symétrique :  $dc_{ij} = dc_{ji}$ , ce qui entraîne des variations symétriques de la matrice  $C$ . Cette contrainte dans le calcul adaptatif des coefficients de  $C$  est incompatible avec les solutions prévues par la relation (17), si la matrice de mélange  $A$  est quelconque. Une autre explication consiste à remarquer que la règle (32) converge lorsque la covariance de  $s_i$  et  $s_j$  est nulle : les signaux  $s_i$  et  $s_j$  ne sont donc pas indépendants, comme ils devraient l'être en cas de séparation des sources. Expérimentalement, on vérifie bien la tendance à des incréments adaptatifs symétriques en moyenne, c'est-à-dire que  $\langle dc_{ij} \rangle = \langle dc_{ji} \rangle$  :

- si initialement, la matrice  $C$  est nulle ou symétrique, on observe dans chaque plan  $(c_{ij}, c_{ji})$  des trajectoires d'apprentissage le long de la première bissectrice  $c_{ij} = c_{ji}$

- si initialement, la matrice  $C$  est quelconque, les trajectoires d'apprentissage dans chaque plan  $(c_{ij}, c_{ji})$  semblent admettre pour asymptote la première bissectrice.

La symétrie de cette règle est tout à fait inacceptable dans notre problème, puisque la matrice  $A$  n'étant pas symétrique *a priori*, la matrice des connexions  $C$  ne le sera pas non plus.

De plus, d'un point de vue neuromimétique, les règles d'adaptation qui régissent les évolutions des efficacités synaptiques sont des règles locales, c'est-à-dire que l'incrément  $dc_{ij}$  ne doit dépendre que de  $c_{ij}$ , de la sortie de l'élément pré-synaptique  $s_j(t)$  et de celle de l'élément post-synaptique  $s_i(t)$ . Manifestement, le coefficient  $q_{ii}$  n'est pas une variable locale, puisque c'est l'élément diagonal de rang  $i$  de la matrice  $(I + C)^{-1}$  : ce terme dépend de tous les poids  $c_{ij}$  des connexions du réseau.

Enfin, dans la règle (32), les signaux  $s_i(t)$  et  $s_j(t)$  sont des variables centrées. Dans le cas général, on dispose initialement de signaux  $S_i(t)$  à moyennes non

nulles. De plus, ces signaux sont *a priori* non stationnaires puisque :

– aucune hypothèse de stationnarité n'est faite sur les sources inconnues,

– le système étant adaptatif, les sorties seraient non stationnaires pendant l'apprentissage, même si les sources inconnues étaient stationnaires.

Par conséquent, on ne peut que faire une estimation en temps court des signaux centrés  $s_i(t)$ , que l'on notera  $\widehat{s}_i(t) = S_i(t) - \langle \widehat{S}_i(t) \rangle$ , où  $\langle \widehat{S}_i(t) \rangle$  est une estimation en temps court de la moyenne temporelle du signal  $S_i(t)$ .

On peut se demander l'effet de cette estimation sur la convergence de l'algorithme. Pour simplifier, on se place dans le cas  $n=p=2$ ; calculons le lieu des points du plan  $(c_{12}, c_{21})$  où la covariance  $\langle s_1(t) \cdot s_2(t) \rangle = 0$ . On peut montrer [11] que ce lieu est une famille d'hyperboles (fig. 3c) dont les paramètres sont les coefficients  $a_{ij}$  du mélange et le rapport des variances des sources inconnues  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$ . Or la sortie  $S_i(t)$  est une combinaison linéaire des sources  $X_j(t)$ , si bien qu'une estimation de la moyenne  $\langle \widehat{S}_i(t) \rangle$  est une combinaison linéaire d'estimations des moyennes  $\langle X_j(t) \rangle$ . En pratique, le lieu « covariance nulle » met donc en jeu les variances estimées des sources  $X_j(t)$ . Si l'estimation des moyennes est à forte variance, l'estimation des variances l'est aussi, si bien que l'hyperbole lieu des points à covariance nulle évolue sans cesse. Le seul point commun à toutes ces hyperboles (obtenues quand les variances varient) est le point caractéristique du mélange, correspondant effectivement à la séparation des sources sur les sorties du réseau.

Ainsi, une estimation de moyenne à forte variance n'est en aucune sorte préjudiciable à la convergence de l'algorithme. En pratique, on peut se contenter d'un simple filtrage passe-bas du premier ordre.

A partir de ces trois remarques, nous proposons de modifier la règle d'adaptation :

– les signaux  $s_i(t)$  sont en réalité des signaux centrés estimés en utilisant un simple filtrage passe-bas du premier ordre (pour alléger l'écriture, on omettra le symbole «  $\wedge$  » de l'estimation dans toute la suite);

– on remplace  $q_{ii}$  par le nombre 1. En effet, si la matrice initiale  $C(t=0)$  est nulle, où si tous les  $c_{ij}$  sont petits devant 1, on peut écrire :

$$(33) \quad (I + C)^{-1} \approx I - C,$$

d'où l'on en déduit que  $q_{ii} \approx 1 - c_{ii} = 1$ , puisque les poids  $c_{ij}$  de la connexion de l'opérateur  $i$  sur lui-même sont nuls. La règle (32) devient alors une règle plus simple mais parfaitement symétrique :

$$(34) \quad \frac{dc_{ij}}{dt} = a \cdot s_i(t) \cdot s_j(t).$$

Puisque cette symétrie est inacceptable, nous allons dissymétriser la règle (34) en utilisant deux fonctions  $f$  et  $g$  non linéaires :

$$(35) \quad \frac{dc_{ij}}{dt} = a \cdot f(s_i(t)) \cdot g(s_j(t)).$$

## 2.7. CHOIX DES FONCTIONS $f$ ET $g$

La non-linéarité des fonctions  $f$  et  $g$ , rend difficile, voire impossible la démonstration de convergence de l'algorithme.

Nous choisirons les fonctions  $f$  et  $g$  parmi la classe des fonctions impaires, en imposant à ces fonctions d'être positives sur l'axe réel positif. En première approximation, il est clair que ces fonctions vont qualitativement entraîner des incréments de  $c_{ij}$  du même signe que la règle (34). A défaut de montrer la convergence de cette règle, nous allons nous limiter à expliquer qualitativement l'intérêt de la non-linéarité puis déterminer une condition de stabilité des solutions. Cependant, les travaux récents de Luc Féty [4], concernant des algorithmes adaptatifs de séparation de sources pour le traitement d'antennes assez voisins du notre, proposent une classification de ces fonctions non-linéaires en deux catégories : les fonctions atténuatrices et les fonctions amplificatrices. Nous invitons le lecteur à s'y référer pour avoir un autre éclairage sur les non-linéarités.

### 2.7.1. Rôle de la non-linéarité

Supposons que les fonctions impaires  $f$  et  $g$  soient développables en séries au voisinage de 0 :

$$f(s_i) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1} \cdot s_i^{2k+1}$$

$$g(s_j) = \sum_{l=0}^{\infty} g_{2l+1} \cdot s_j^{2l+1}.$$

La relation (35) devient :

$$(36) \quad \frac{dc_{ij}}{dt} = a \sum_{k,l} f_{2k+1} \cdot g_{2l+1} \cdot s_i^{2k+1} \cdot s_j^{2l+1}.$$

En moyenne, on aura stabilisation des poids  $c_{ij}$ , si l'incrément d'adaptation est en moyenne nul, c'est-à-dire si :

$$(37) \quad \langle \frac{dc_{ij}}{dt} \rangle = a \sum_{k,l} f_{2k+1} \cdot g_{2l+1} \cdot \langle s_i^{2k+1} \cdot s_j^{2l+1} \rangle,$$

c'est-à-dire si tous les moments croisés  $\langle s_i^{2k+1} \cdot s_j^{2l+1} \rangle$  sont nuls, et non pas seulement lorsque la covariance  $\langle s_i \cdot s_j \rangle$  est nulle. Les fonctions  $f$  et  $g$  introduisent ainsi des moments croisés d'ordre élevé, et la règle (35) peut être considérée comme une approximation d'un test d'indépendance.

Pour ce calcul, nous avons fait l'hypothèse de l'existence d'un développement en séries de MacLaurin de  $f$  et  $g$ . Cette condition n'est pas nécessaire, et l'on peut le vérifier expérimentalement. Par exemple, la fonction  $g(\cdot) = \text{signe}(\cdot)$ , qui n'est pas développable en série au voisinage de 0, a été testée avec succès (voir aussi [4]).

### 2.7.2. Stabilité à la convergence

Supposons que l'on se trouve en un point C solution de notre problème. Appliquons au coefficient  $c_{ij}$

un petit échelon  $\Delta c_{ij}$ ; on observe alors une perturbation  $\Delta s$  du vecteur  $s$ , que l'on peut écrire en utilisant la relation (28) :

$$\Delta s = -(I + C)^{-1} \cdot \Delta C \cdot s.$$

En particulier, pour les sorties  $s_i(t)$  et  $s_j(t)$ , on observe une erreur que l'on peut écrire d'après (3) :

$$(38) \quad \begin{cases} \Delta s_i(t) = -q_{ii} \cdot s_j(t) \cdot \Delta c_{ij} \\ \Delta s_j(t) = -q_{ji} s_j(t) \cdot \Delta c_{ij} \end{cases}$$

En appliquant la règle d'adaptation (35), il correspond à ces variations  $\Delta s_i(t)$  et  $\Delta s_j(t)$  des variations des poids  $c_{ij}$  du réseau :

$$(39) \quad dc_{ij} = a \cdot f(s_i + \Delta s_i) \cdot g(s_j + \Delta s_j).$$

En cours de calcul, l'écart  $c_{ij}$  dû à la règle d'adaptation peut être rendu aussi petit que possible (par exemple en diminuant la valeur de  $a$ ). Un développement du premier ordre se justifie donc parfaitement, et de (39) nous tirons :

$$dc_{ij} = a \cdot [f(s_i) + \Delta s_i \cdot f'(s_i)] [g(s_j) + \Delta s_j \cdot g'(s_j)].$$

En développant le produit et en tenant compte de (38), on arrive à :

$$(40) \quad dc_{ij} = [f(s_i) \cdot g(s_j) - \Delta c_{ij} \cdot q_{ii} \cdot s_j \cdot f'(s_i) \cdot g(s_j) - \Delta c_{ij} \cdot q_{ji} \cdot s_j \cdot g'(s_j) \cdot f(s_i) + O(c_{ij}^2)]$$

En prenant la moyenne sur le temps, sans oublier que nous sommes au voisinage de la convergence, c'est-à-dire que  $s_i$  et  $s_j$  sont indépendants, on arrive à :

$$(41) \quad \langle f(s_i) \cdot g(s_j) \rangle = \langle f(s_i) \rangle \cdot \langle g(s_j) \rangle$$

$$(42) \quad \langle -\Delta c_{ij} \cdot q_{ii} \cdot s_j \cdot f'(s_i) \cdot g(s_j) \rangle = -\Delta c_{ij} \cdot q_{ii} \cdot \langle s_j \cdot g(s_j) \rangle \cdot \langle f'(s_i) \rangle$$

$$(43) \quad \langle -\Delta c_{ij} \cdot q_{ji} \cdot s_j \cdot g'(s_j) \cdot f(s_i) \rangle = -\Delta c_{ij} \cdot q_{ji} \cdot \langle s_j \cdot g'(s_j) \rangle \cdot \langle f(s_i) \rangle.$$

Puisque les fonctions  $f$  et  $g$  sont impaires, on peut donc affirmer que les dérivées  $f'$  et  $g'$  sont paires. Les variables  $s_i$  et  $s_j$  étant centrées, on a alors :

$$\langle f(s_i) \rangle = \langle g(s_j) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle s_j \cdot g'(s_j) \rangle = 0.$$

On en déduit que (41) et (43) sont nulles. La relation (40) se réduit alors, en moyenne, à :

$$(44) \quad \langle dc_{ij} \rangle = -\Delta c_{ij} \cdot q_{ii} \langle s_j \cdot g(s_j) \rangle \cdot \langle f'(s_i) \rangle.$$

Les fonctions  $s_j \cdot g(s_j)$  et  $f'(s_i)$  sont deux fonctions paires de  $s_j$  et  $s_i$  respectivement. Si le produit des moyennes est positif, la variation moyenne de  $c_{ij}$  est de sens contraire à l'échelon  $\Delta c_{ij}$  qui en est la cause, pourvu que le terme  $q_{ii}$  reste positif. Aux conditions sur  $f$  et  $g$  proposées au début du paragraphe 2.7, il convient alors d'ajouter que  $f'(\cdot)$  doit être positive (au moins sur un intervalle centré autour de zéro), c'est-à-dire que la fonction  $f(\cdot)$  est une fonction croissante.

En conclusion, on propose une règle d'adaptation :

$$(45) \quad dc_{ij}/dt = a \cdot f(s_i(t)) \cdot g(s_j(t)),$$

ou ce qui est équivalent en moyenne

$$(46) \quad \frac{dc_{ij}}{dt} = a f(S_i(t)) \cdot g(s_j(t))$$

où  $s_j(t) = S_j(t) - S_j(t) * e^{-t/T}$ .

Dans cette relation,  $a$  est une scalaire et l'on peut choisir les fonctions non linéaires  $f$  et  $g$  dans la classe des fonctions impaires. La fonction  $f$  doit, en outre, être croissante, afin que  $\langle f'(\cdot) \rangle$  soit positif. Par contre, une règle obtenue à partir de (46) en remplaçant le signal centrée  $s_j(t)$  par le signal  $S_j(t)$  n'est pas correcte : elle introduit des moments non centrés qui ne seront pas nuls lorsque les sorties sont indépendantes.

### 3. Simulations

Les manipulations que nous présentons maintenant ont un double objectif :

— illustrer la démarche théorique de la partie précédente;

— montrer quelques applications de cet algorithme dans le domaine du Traitement du Signal et du Traitement d'Images.

Les simulations numériques décrites dans la suite ont été faites sur un petit calculateur HP9816 en Basic interprété. D'autres outils de simulation tant analogiques [11] que numériques [5, 14], ont aussi été développés dans notre laboratoire, notamment pour pallier à la lenteur des calculs sur les ordinateurs conventionnels.

#### 3.1. DÉROULEMENT D'UNE SIMULATION

Le début de la simulation est la saisie des paramètres :

$a$  : gain d'adaptation;

$T$  : constante de temps du filtrage passe-bas utilisé pour les estimations de moyenne, suivie d'une mise à l'état initial :

- des coefficients  $c_{ij}(t=0)$ ;
- des moyennes  $\langle s_j(t=0) \rangle$ .

La simulation, proprement dite est alors la répétition des tâches suivantes à chaque instant  $t$  :

1. Échantillonnages des signaux  $E_i(t)$ ,
2. Calcul des signaux  $S_j(t)$ .

La bande passante des opérateurs étant supposée très grande vis-à-vis de celle des signaux, le calcul numérique peut s'effectuer en itérant jusqu'à la convergence des relations du type :

$$(47) \quad S_i^{(k)}(t) = E_i(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_{ij}(t) \cdot S_j^{(k-1)}(t),$$

où  $k$  est le numéro d'ordre de l'itération, ou en calculant directement  $S_j(t)$  à partir de la relation matricielle :

$$S(t) = (I + C)^{-1} E(t).$$

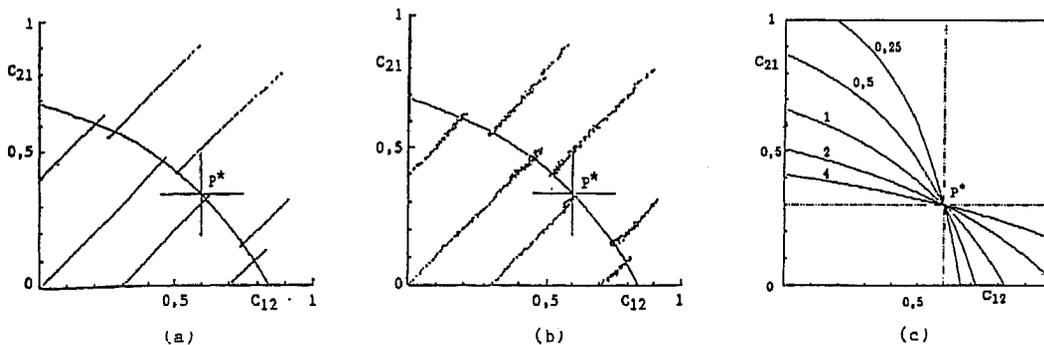


Fig. 3. — Trajectoires de convergence dans le plan  $(c_{12}, c_{21})$ . (a) pour la règle  $dc_{ij}/dt = a \cdot s_i(t) \cdot s_j(t)$ , qui est parfaitement symétrique. (b) pour la règle  $dc_{ij}/dt = a \cdot S_i(t) \cdot s_j(t)$ , qui est symétrique en moyenne. (c) famille des hyperboles lieux des points à covariance nulle  $(\langle s_1 \cdot s_2 \rangle = 0)$  pour quelques rapports de variance des sources  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$ .

3. Mise à jour de la matrice C.

Après le calcul des sorties  $S_j(t)$ , on met à jour les estimations de moyennes, puis on calcule les nouvelles valeurs de  $c_{ij}$  en appliquant la règle d'adaptation.

3. 2. TEST DES RÈGLES D'ADAPTATION

On se place dans le cas  $n=p=2$ . On choisit un mélange A, ce qui permet de calculer les solutions théoriques (point P\* dans le plan  $c_{12}, c_{21}$ ) et de comparer les performances de quelques règles. Dans ce cas, l'étape 1 (§ 3. 1), échantillonnage de signaux  $E_i(t)$ , est remplacée par un échantillonnage des sources  $X_i(t)$  et le calcul des signaux  $E_i(t)$  par la relation (4). Mais le réseau ne dispose que des signaux  $E_i(t)$ , pour retrouver les sources  $X_i(t)$ .

3. 2. 1. Loi symétrique

Nous montrons ici l'insuffisance des règles symétriques, du type des tests « covariance nulle » :

$$(48) \quad dc_{ij}/dt = a \cdot s_i(t) \cdot s_j(t),$$

ou bien

$$(49) \quad dc_{ij}/dt = a \cdot S_i(t) \cdot s_j(t).$$

La première règle (fig. 3 a) est parfaitement symétrique, alors que la seconde ne l'est qu'en moyenne (fig. 3 b), comme le montre les trajectoires de convergence dans le plan  $(c_{12}, c_{21})$ . Ces trajectoires sont parallèles à la première bissectrice et le point P\* ne

pourra être atteint que par un choix fortuit des valeurs initiales de  $c_{ij}$ .

Les trajectoires de convergence suivies dans les cas a et b ont été tracées pour des variances des sources identiques, pour sept valeurs initiales du couple  $(c_{12}, c_{21})$ . Lorsque les variances sont différentes, les trajectoires, identiques au départ, se stabilisent au voisinage de l'hyperbole associée au rapport des variances (voir fig. 3 c).

3. 2. 2. Loi dissymétrique

Nous utilisons maintenant la loi dissymétrique suivante :

$$(50) \quad dc_{ij}/dt = a \cdot S_i^3(t) \cdot \text{Arctg}(s_i(t)).$$

Dans la première simulation, les sources  $X_i(t)$  sont des signaux aléatoires à distribution uniforme, obtenues par la fonction RND du calculateur. Dans l'espace  $(E_1, E_2)$ , la distribution sur le temps  $t$  des points  $(E_1(t), E_2(t))$  est un parallélogramme dont les pentes des côtés correspondent aux rapports (fig. 4 a) :

$$a_{21}/a_{11} = (E_2/E_1) \text{ à } X_2 = \text{Cte}$$

et

$$(a_{22}/a_{12}) = (E_2/E_1) \text{ à } X_1 = \text{Cte}.$$

Après la convergence de l'algorithme, la distribution de sortie, transformée de la distribution d'entrée est un rectangle : les transformées des côtés du parallélogramme de la figure 4 a. sont des droites orthogo-

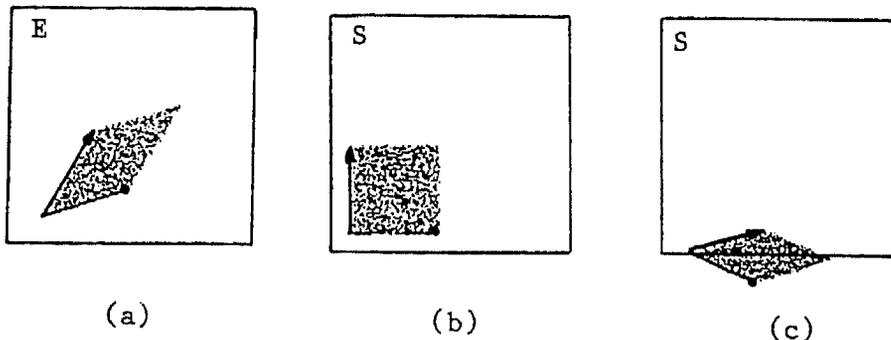
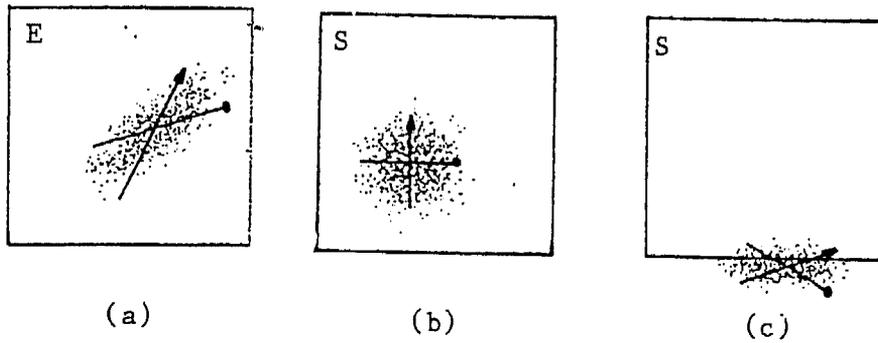


Fig. 4. — Distributions d'entrée et de sortie, dans le cas de sources aléatoires à distribution équirépartie. (a) La distribution conjointe des entrées met en évidence la nature composite des signaux  $E_1(t)$  et  $E_2(t)$ . (b) Distribution conjointe des sorties après la convergence de l'algorithme : les signaux de sortie sont statistiquement indépendants. (c) Distribution conjointe des sorties correspondant à la transformation de Karhunen-Loève de la distribution initiale 4 a : les sorties ne sont pas indépendantes.



**Fig. 5. — Distributions d'entrée et de sorties pour des sources à distributions gaussiennes.** (a) Distributions d'entrée. (b) Distribution des sorties à la convergence de l'algorithme :  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$  sont indépendants. (c) Distribution des sorties correspondant à la transformation de Karhunen-Loève de la distribution d'entrée (a) :  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$  ne sont pas indépendants. Le petit axe et le grand axe de la distribution sont parallèles aux axes  $S_1$  et  $S_2$ , donc orthogonaux, mais ils ne correspondent pas aux transformées des axes  $(E_2/E_1) X_1 = Cte$  et  $(E_2/E_1) X_2 = Cte$  :  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$  sont encore dépendants.

nales parallèles aux axes du plan (fig. 4b). Les signaux  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$  sont indépendants (et proportionnels aux sources inconnues).

La transformation de Karhunen-Loève de la distribution de la figure 4a, fournit la distribution 4c, obtenue à partir de 4a par une simple rotation. Les angles sont donc conservés. Dans la figure 4c, l'axe  $S_1(t)$  correspond à l'axe maximal d'inertie, c'est-à-dire l'axe de variance maximal, mais qui contient toujours un mélange des sources  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$ . La transformation de Karhunen-Loève correspond à un point du lieu « covariance nulle » [11] mais n'assure pas l'indépendance des sorties.

La figure 5 illustre les distributions d'entrée et de sortie au point théorique, et la distribution correspondant à la transformation de Karhunen-Loève dans le cas de distributions gaussiennes. Ce cas est très intéressant car pour des signaux gaussiens, les notions de covariance nulle et d'indépendance sont indissociables. On s'attendrait donc à un échec de l'algorithme. La figure 5 montre qu'il n'en est rien : l'algorithme converge bien vers la solution caractéristique de l'indépendance des sorties : les transformées des deux axes  $(E_2/E_1) X_1 = Cte$  ou  $X_2 = Cte$  sont orthogonales à la convergence de l'algorithme. Nous interprétons ce résultat étonnant de la façon suivante : la nature gaussienne des signaux est masquée car, d'une part, en raison de la nature adaptative de l'algorithme,

les sorties sont non stationnaires, et car d'autre part, l'approximation stochastique est guidée par une estimation des paramètres des signaux de sorties sur de courtes fenêtres temporelles.

### 3.2.3. Trajectoires de convergence

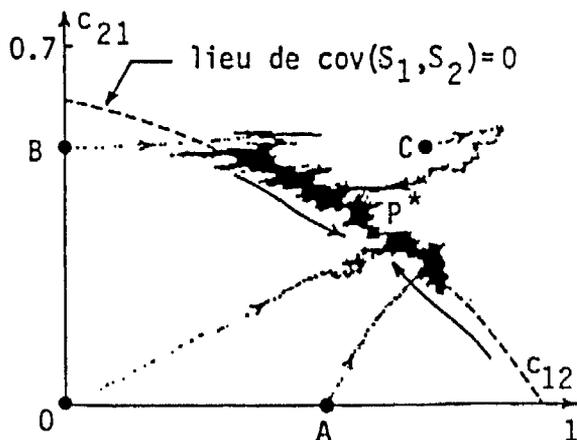
Avec la règle dissymétrique (50), la convergence est atteinte *quelle que soient les valeurs initiales* des coefficients  $c_{ij}$ . La solution est atteinte en deux étapes : une phase conduit rapidement (quelques centaines d'itérations) au voisinage des hyperboles lieu des points à covariance nulle; dans la deuxième phase, la trajectoire évolue très lentement (plusieurs milliers d'itérations) vers la solution prévue  $P^*$  (fig. 6).

## 3.3. APPLICATIONS

### 3.3.1. Séparation de deux signaux

Les signaux  $E_1(t)$  et  $E_2(t)$  sont réalisés à partir du mélange de deux signaux indépendants, l'un est un bruit à distribution uniforme et l'autre un signal déterministe non stationnaire. L'énergie du bruit est environ 50 à 100 fois supérieure à celle du signal déterministe. Il est bien évident que dans ce cas particulier, d'autres méthodes de traitement du signal sont au moins aussi efficaces, si l'on connaît la nature des signaux, ce qui n'est pas le cas ici. Le choix de ces signaux est guidé par un souci de visualisation des résultats, mais on aurait pu choisir deux signaux aléatoires ou deux signaux déterministes tout à fait quelconques. Mieux, à n'importe quel moment, il est possible de remplacer l'une ou l'autre des sources par un autre signal sans perturber la convergence de l'algorithme : le réseau apprend le mélange et non pas les signaux.

Indépendamment donc de toute connaissance *a priori* sur les signaux (en particulier sur leur nature déterministe ou aléatoire, s'ils sont à bande large ou étroite, etc), on échantillonne les signaux mélangés  $E_1(t)$  et  $E_2(t)$  et on fournit ces échantillons aux entrées des opérateurs du réseau adaptatif. Avant le début de l'apprentissage, si les coefficients initiaux du réseau sont nuls  $c_{ij}(t=0)=0$ , les sorties du réseau sont égales aux entrées :  $S(t)=E(t)$ . Au temps  $t=0$ , matérialisé par une flèche sous  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$ , on autorise l'adaptation des coefficients  $c_{ij}$ . On observe alors l'extraction progressive simultanée de  $X_1(t)$  sur



**Fig. 6. — Trajectoires des points  $c_{12}(t)$ ,  $c_{21}(t)$  dans le plan  $(c_{12}, c_{21})$ , pour différentes valeurs initiales. Le point  $P^*$  correspond à la séparation de sources.**

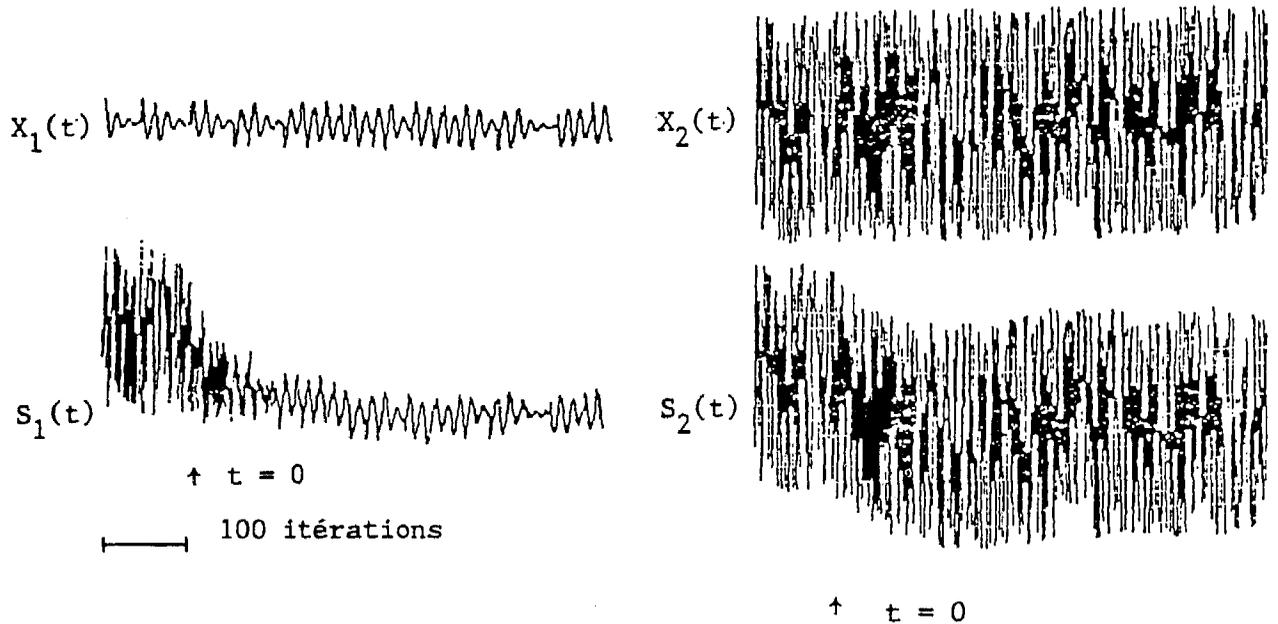


Fig. 7. — Extraction simultanée de deux signaux par un réseau à deux opérateurs. Avant l'apprentissage (à gauche de la flèche  $t=0$ ), les sorties sont égales aux entrées. Très vite, après le début de l'apprentissage, les sources  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  sont extraites sur les sorties : comparer notamment la sortie  $S_1(t)$  et la source  $X_1(t)$ . L'extraction est moins nette sur la sortie  $S_2(t)$ , car en raison de la grande énergie du bruit  $X_2(t)$ , la sortie  $S_2(t)$  ressemble déjà beaucoup à cette source avant le début de l'apprentissage.

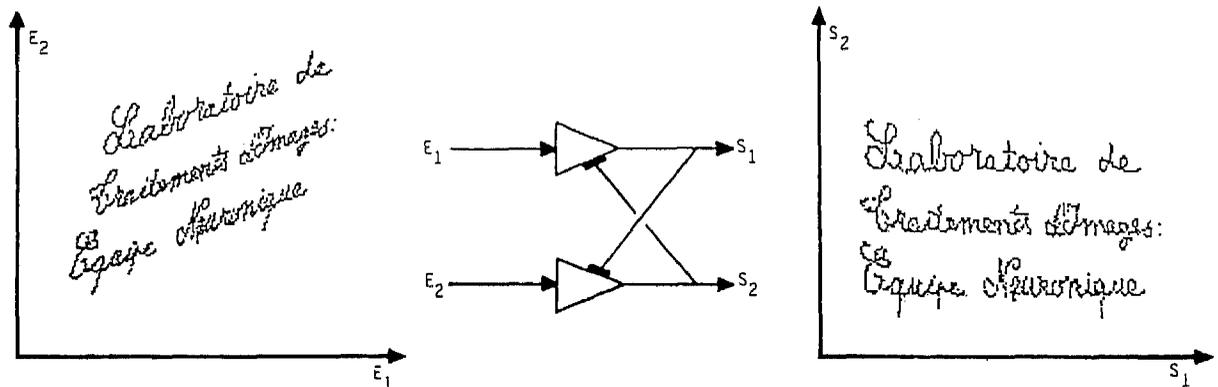


Fig. 8. — Application au prétraitement d'images. Le texte original (à gauche) est transformée en une série temporelle de vecteurs (abscisses et ordonnées) par un tirage aléatoire. Après apprentissage sur ce signal, les sorties du réseau (à droite) fournissent une transformée de l'image initiale dont les lignes du texte et les caractères sont redressés.

$S_1(t)$  et de  $X_2(t)$  sur  $S_2(t)$  (fig. 7). Au bout de quelques centaines de pas d'adaptation, si l'incrément d'adaptation  $a$  est assez petit, on atteint facilement une séparation caractérisée par une diaphonie résiduelle de  $-20$  à  $-25$  dB. Il est à noter que le bruit extrait sur  $S_2(t)$  n'est pas seulement un bruit aux propriétés statistiques identiques à celles de  $X_2(t)$  : c'est le signal  $X_2(t)$ , aux erreurs de diaphonie près. L'extraction simultanée de deux bruits à distribution gaussienne ou uniforme est possible, sans modification de l'algorithme, et avec la même précision dans la séparation.

Le résultat semble étonnant à première vue. En réalité, grâce à cet algorithme, le réseau élabore un modèle du mélange  $A$ , à l'origine des signaux  $E(t)$ . Les signaux présentés permettent d'effectuer les approximations stochastiques de l'adaptation; il semble que seule une « condition de mélange », analogue à celle introduite par M. Sondhi et D. Mitra [19] soit nécessaire à la convergence de l'algorithme : cette

condition implique que si le signal  $E(t)$  est de dimension  $N$ , la suite d'échantillons de ce signal ne doit pas être confinée à un sous-espace de dimension inférieure à  $N$  pendant trop longtemps. Ceci explique en particulier l'absence des hypothèses classiques en traitement du signal, sur les sources : on ne traite pas les signaux, on modélise le mélange. En particulier, il n'est pas nécessaire de respecter l'échantillonnage de Shannon; il est même conseillé de sous-échantillonner si l'on veut une convergence rapide; un sur-échantillonnage au contraire ralentit fortement la convergence : en effet, les échantillons successifs sont alors très liés, ils se répartissent sur un sous-espace de dimension inférieure à  $N$  (sur une courbe dans le cas  $N=2$ ) et la condition de mélange n'est pas satisfaite.

### 3.3.2. Prétraitement d'images

Considérons le texte de gauche de la figure 8 : les lignes sont penchées et les caractères sont en italiques. La reconnaissance ou simplement la saisie automati-

que d'un tel texte nécessite généralement un prétraitement.

Nous proposons d'utiliser notre réseau adaptatif pour prétraiter cette image. Nous devons initialement transformer l'image de nature spatiale, en un signal temporel. Nous suggérons la stratégie élémentaire suivante : à chaque instant  $t$ , on tire au hasard un point du texte. Les deux suites temporelles des abscisses et des ordonnées de ces points tirés au hasard sont assimilables à deux signaux échantillonnés. Ces deux suites seront les entrées  $E_1(t)$  et  $E_2(t)$  qui alimenteront le réseau adaptatif.

En appliquant l'algorithme adaptatif sur ces signaux, on observe une évolution des coefficients du réseau. Au bout de quelques centaines d'échantillons, les valeurs des coefficients se stabilisent. L'image transformée par le réseau de l'image initiale effectuée un prétraitement intéressant :

- les lignes de textes sont redressés;
- les caractères, italiques dans l'image initiale, sont également redressés. Ce résultat s'explique simplement: le réseau analyse la distribution des points de l'image et trouve des axes privilégiés (et non seulement principaux) dans cette distribution: il s'agit de l'orientation des lignes et de celle des caractères.

Ce prétraitement est extrêmement intéressant: les méthodes classiques [12] de recherche d'orientation fournissent les indices d'orientation de l'image traitée, alors que dans notre méthode les sorties donnent directement l'image redressée, et les poids du réseau la transformation s'appliquant à l'image initiale, c'est-à-dire ses indices d'orientation.

## 4. Généralisation

Le problème traité dans les parties précédentes n'est qu'un problème d'école et ce pour différentes raisons :

- l'hypothèse de mélange linéaire est restrictive, voire peu réaliste. En particulier, l'extension à l'étude de mélanges convolutifs [équation (1)] est capitale pour le traitement du signal;
- l'hypothèse  $n=p$  est incompatible avec le fait que les sources sont inconnues; le nombre de ces

sources donc aussi inconnu, et dans le cas général, il faudra considérer  $n \neq p$ , c'est-à-dire que le nombre de sources est différent du nombre de capteurs.

Dans cette partie nous proposons de discuter la généralisation de l'algorithme décrit précédemment dans ces divers cas.

### 4.1. CAS DE MÉLANGES NON LINÉAIRES, MAIS NON CONVOLUTIFS

Nous proposons d'illustrer les performances du réseau adaptatif par un exemple. Considérons les trois variables indépendantes  $\rho(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $\varphi(t)$  et le mélange non linéaire de ces trois variables obtenu par les équations :

$$(51) \quad \begin{cases} E_1(t) = \rho(t) \cdot \cos \theta(t) \cdot \cos \varphi(t) \\ E_2(t) = \rho(t) \cdot \cos \theta(t) \cdot \sin \varphi(t) \\ E_3(t) = \rho(t) \cdot \sin \theta(t) \end{cases}$$

A chaque instant  $t$ , on tire de manière aléatoire des nombres  $\rho(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $\varphi(t)$  tels que :

$$\begin{aligned} 0,8 < \rho(t) < 1; \\ 20^\circ < \theta(t) < 55^\circ; \\ 20^\circ < \varphi(t) < 45^\circ. \end{aligned}$$

La distribution des vecteurs  $(E_1(t), E_2(t), E_3(t))$ , dans un repère orthonormé correspond donc à une portion de boule.

Appliquons à un réseau adaptatif de trois opérateurs ce signal vectoriel  $[E_1(t), E_2(t), E_3(t)]$ . On observe une évolution des poids du réseau pendant quelques milliers d'itérations, puis la stabilisation de ces poids. La transformée de la « portion de boule » initiale, par le réseau à la convergence est illustrée à la figure 9 c. On remarque que la portion de boule a été « redressée » et que les trois sorties du réseau sont approximativement proportionnelles aux trois grandeurs  $\rho$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  :

- $S_1(t)$  est proportionnel à  $\rho(t)$ ;
- $S_2(t)$  est proportionnel à  $\theta(t)$ ;
- $S_3(t)$  est proportionnel à  $\varphi(t)$ .

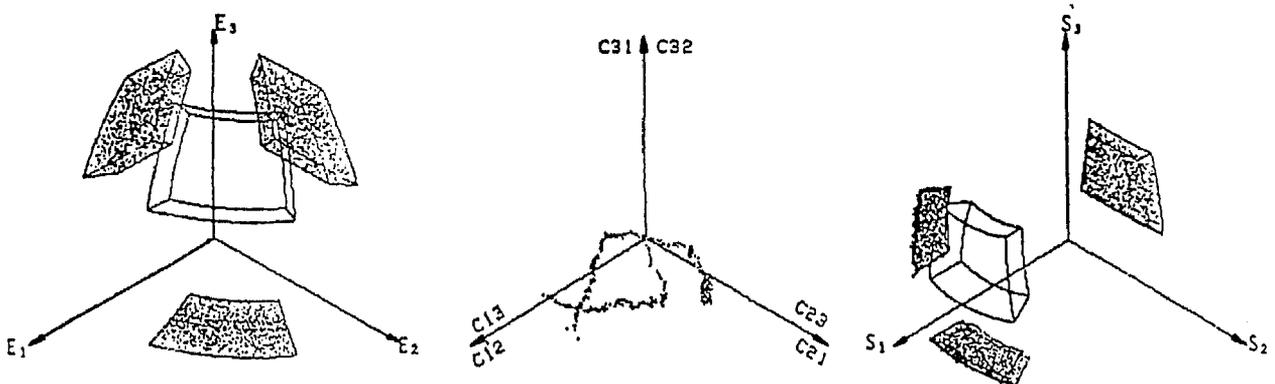


Fig. 9. — Séparation des signaux primitifs dans un mélange non linéaire. (a) Distribution des vecteurs d'entrée pour un mélange non linéaire correspondant aux équations (51). (b) Trajectoires de convergence des connexions  $c_{ij}$ . Le réseau à trois opérateurs possède six coefficients; la trajectoire de convergence dans cet espace à six dimensions est représentée par les trois projections dans les plans  $(c_{12}, c_{21})$ ,  $(c_{13}, c_{31})$  et  $(c_{23}, c_{32})$ . (c) Distribution transformée par le réseau de la distribution (a), une fois la convergence de l'algorithme atteinte.

Si l'on considère l'approximation linéaire du mélange non linéaire (51), obtenu par un développement limité au premier ordre sur les valeurs  $\rho(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $\varphi(t)$  autour de leurs valeurs  $\rho_0$ ,  $\theta_0$  et  $\varphi_0$ , on peut montrer [11] que les coefficients théoriques prévus pour cette approximation linéaire du mélange sont identiques aux coefficients obtenus par simulation pour le mélange non linéaire (51).

En cas de mélange non linéaire de signaux, notre algorithme ne peut pas fournir une solution exacte puisque les opérateurs sont linéaires; cependant, la solution obtenue correspond à la meilleure approximation linéaire du mélange non linéaire.

4.2. LE NOMBRE  $n$  DE SOURCES EST DIFFÉRENT DU NOMBRE DE CAPTEURS

On distinguera deux cas:

$$(53) \quad \begin{aligned} S_1(t) &= \frac{(a_{11} - c_{12} \cdot a_{21}) \cdot X_1(t) + (a_{12} - c_{12} \cdot a_{22}) \cdot X_2(t) + (a_{13} - c_{12} \cdot a_{23}) \cdot X_3(t)}{1 - c_{12} \cdot c_{21}} \\ S_2(t) &= \frac{(a_{21} - c_{21} \cdot a_{11}) \cdot X_1(t) + (a_{22} - c_{21} \cdot a_{12}) \cdot X_2(t) + (a_{23} - c_{21} \cdot a_{13}) \cdot X_3(t)}{1 - c_{12} \cdot c_{21}} \end{aligned}$$

Il est donc évident qu'en choisissant les valeurs de  $c_{12}$  et  $c_{21}$ , il est tout à fait impossible dans le cas général (sans condition particulière sur les coefficients  $a_{ij}$ ) d'annuler deux termes sur trois dans les équations (53), afin d'extraire de façon rigoureuse deux des trois sources (une par opérateur). Chaque sortie du réseau comportera donc un mélange de deux ou trois sources:

- un mélange de deux sources, si les valeurs des poids  $c_{12}$  et  $c_{21}$  annulent exactement un terme pour chaque équation (53): ces valeurs sont alors identiques aux solutions théoriques d'un des problèmes d'ordre  $n=p=2$  (deux sources, deux capteurs) extraits de (52). Chaque sortie comporte la source extraite et un signal résiduel que l'on peut considérer comme un bruit;

- un mélange de trois sources, dans le cas contraire. Chaque sortie comporte la source extraite, et deux signaux résiduels que l'on peut considérer comme un bruit.

Expérimentalement, l'algorithme adaptatif converge vers des valeurs différentes des valeurs théoriques correspondant aux sous-problèmes d'ordre 2 issus de (52).

Chaque sortie est donc un mélange de trois sources. En définissant le rapport source extraite à signaux résiduels comme un rapport signal à bruit, on peut montrer [11] que la solution optimale, qui maximise le rapport signal à bruit en sortie du réseau est un mélange des trois sources. Cependant, la solution expérimentale diffère légèrement de cette solution optimale théorique (fig. 10). Le critère optimisé par la solution expérimentale reste encore à découvrir; il est lié au terme d'erreur minimisé par la règle d'adaptation non-linéaire, ce qui explique qu'il ne s'agit pas d'un simple critère d'erreur quadratique mais d'un terme beaucoup plus complexe.

La distribution d'entrée correspondant à un mélange de trois sources est contenue dans un hexa-

$n > p$ : il y a plus sources de capteurs. Le problème de séparation de sources ne possède pas de solution exacte.

$n < p$ : il y a moins de sources que de capteurs. Le vecteur  $E(t)$  à la sortie des capteurs fournit une information redondante. Le problème de séparation de sources possède au moins une solution exacte.

4.2.1. Il y a plus de sources que de capteurs

Pour simplifier considérons le cas le plus simple de deux mélanges de trois sources:

$$(52) \quad \begin{cases} E_1(t) = a_{11} \cdot X_1(t) + a_{12} \cdot X_2(t) + a_{13} \cdot X_3(t) \\ E_2(t) = a_{21} \cdot X_1(t) + a_{22} \cdot X_2(t) + a_{23} \cdot X_3(t) \end{cases}$$

Si on applique ces signaux à un réseau de deux opérateurs, on obtient à la sortie:

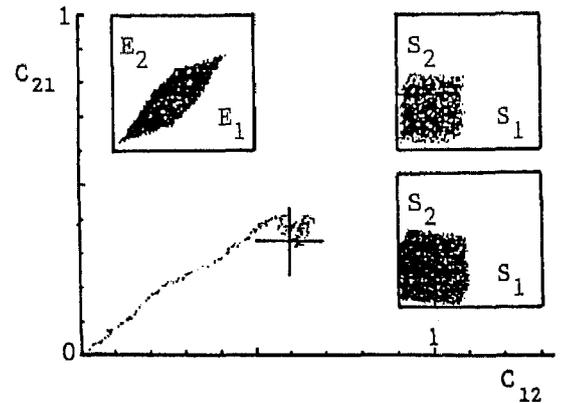


Fig. 10. - Traitement de deux mélanges de trois sources.

gone dont les côtés sont parallèles deux à deux, les pentes correspondant aux rapports  $a_{21}/a_{11}$ ,  $a_{22}/a_{12}$  et  $a_{23}/a_{13}$ .

La solution théorique du sous-problème à deux sources  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  est indiquée par une croix dans les plans  $(C_{12}, c_{21})$ . On voit que la trajectoire de convergence se stabilise à côté de cette croix. A droite, on a représenté les distributions transformées par le réseau dans deux situations:

- en haut, lorsque les coefficients  $c_{12}$  et  $c_{21}$  sont le résultat de simulation;

- en bas, lorsque les coefficients  $c_{12}$  et  $c_{21}$  sont les valeurs théoriques maximisant le rapport signal à bruit en sortie.

4.2.2. Il y a moins de sources que de capteurs

Pour simplifier, raisonnons sur le cas le plus simple, non trivial, de trois mélanges de deux sources:

$$(54) \quad \begin{cases} E_1(t) = a_{11} \cdot X_1(t) + a_{12} \cdot X_2(t) \\ E_2(t) = a_{21} \cdot X_1(t) + a_{22} \cdot X_2(t) \\ E_3(t) = a_{31} \cdot X_1(t) + a_{32} \cdot X_2(t) \end{cases}$$

La règle d'adaptation consistant à l'indépendance dans leurs ensembles des sorties du réseau, on doit avoir une solution de la forme suivante, à une permutation des indices de ligne près :

$$(55) \quad \begin{cases} S_1(t) = a_{1i} \cdot X_i(t) \\ S_2(t) = a_{2j} \cdot X_j(t), & j \neq i \\ S_3(t) = 0, \end{cases}$$

où  $i$  et  $j$  valent 1 ou 2.

Cette solution, avec en particulier une sortie nulle, est la seule à garantir l'indépendance des signaux de sorties dans leur ensemble.

Expérimentalement [11], la séparation des sources  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  sur deux des sorties et l'annulation de la sortie « inutile » intervient après *compétition* entre les trois opérateurs du réseau. En général, la compétition est incertaine :

- plusieurs dizaines de milliers de pas de calculs sont nécessaires pour atteindre une solution analogue à (55);

- la compétition entraîne parfois des « pseudo-oscillations » entre deux configurations de la forme (55), avant de se stabiliser sur l'une d'elles.

D'autres simulations mettant en jeu des réseaux à quatre opérateurs recevant quatre mélanges de deux ou trois grandeurs indépendantes seulement, ont confirmé ces résultats [11].

Dans le cas de mélanges dégénérés, le réseau adaptatif effectue donc une séparation de sources cohérentes : il sépare toutes les sources indépendantes avec le minimum d'opérateurs, les sorties des autres opérateurs « inutiles » deviennent identiquement nulles. Les expériences ont confirmé les relations théoriques (55), prévues par la seule hypothèse que notre règle d'adaptation, avec les fonctions  $f$  et  $g$  non linéaires, réalise un test d'indépendance des sorties du réseau.

### 4.3. MÉLANGES CONVOLUTIFS

#### 4.3.1. Problème de la « cocktail-party »

Considérons dans une pièce  $n$  personnes en train de discuter. On dispose dans cette pièce de  $p$  microphones. Chaque microphone reçoit les mélanges issus de chaque locuteur. À la sortie d'un microphone, on obtient donc un signal composite résultant de la superposition de toutes ces sources. Le mélange dépend des temps de propagation entre les sources et les capteurs, de la réponse en fréquence des microphones, de la directivité des microphones, de la réponse en fréquence la pièce, etc. La séparation des locuteurs est un problème difficile et les solutions proposées dans la littérature sont encore peu satisfaisantes [21].

Pour simplifier les équations, plaçons-nous encore dans le cas simple de deux sources et deux capteurs. Si la propagation est isotrope (milieu homogène) et si l'on néglige les échos, on peut modéliser ces mélanges par les équations :

$$(56) \quad \begin{cases} E_1(t) = X_1(t) + a_{12}(t) * X_2(t) \\ E_2(t) = a_{21}(t) * X_1(t) + X_2(t). \end{cases}$$

Le problème est différent du problème de séparation traité jusqu'ici, en raison des produits de convolution. Pour les éliminer, passons dans l'espace de Fourier, on obtient alors :

$$(57) \quad \begin{cases} E_1(f) = X_1(f) + a_{12}(f) \cdot X_2(f) \\ E_2(f) = a_{21}(f) \cdot X_1(f) + X_2(f). \end{cases}$$

Ces équations ressemblent alors beaucoup à l'équation (4) dans laquelle la variable  $t$  est remplacée par la variable  $f$ , à ceci près que les coefficients  $a_{ij}(f)$  ne sont pas constants. Si on se place dans une bande étroite de fréquence centrée autour de  $f_0$ , cet inconvénient sera levé :  $a_{ij}(f) \approx a_{ij}(f_0) = \text{Cte}$ . Cependant, l'adaptation sur les équations (57) est impossible puisque la variable temps a disparu lorsque l'on a appliqué la transformée de Fourier.

En appliquant une *transformée de Fourier en temps courts* et en travaillant dans une *bande étroite de fréquence*, notre algorithme est alors applicable en étendant le réseau réel précédent à un réseau complexe.

Dans le cas de signaux à large bande, il faut procéder à une analyse spectrale, appliquer notre algorithme adaptatif dans chaque bande, et reconstruire les sources indépendantes large bande par sommation des signaux extraits dans chaque bande de fréquence.

Expérimentalement [11], l'algorithme a été testé avec succès dans le cas de signaux à bande étroite. Nous travaillons actuellement sur la séparation de sources à large bande, où se présentent un certain nombre de problèmes techniques inhérents en particulier à la charge de calcul du système.

## Conclusion

Les performances et l'intérêt de cet algorithme de séparation de sources ont été développés au cours de cet article et nous ne voulons pas y revenir en détail. Nous nous permettrons seulement de mettre l'accent sur quelques points essentiels :

- l'apprentissage est permanent, ce qui permet la *poursuite* de la solution dans le cas de mélanges variables;

- l'algorithme ne traite pas directement les signaux; il effectue un *modèle du mélange* grâce aux signaux observés, ce qui explique les hypothèses faibles sur les signaux: ils peuvent être, sans inconvénient, stationnaires ou non, à bande large ou étroite, déterministes ou aléatoires.

De plus, la partie 4 montre que cet algorithme est efficace dans les cas réels où le nombre de capteurs est différent du nombre de sources et qu'il s'accommode de mélanges non linéaires, ou dégénérés.

D'un point de vue technique, ces remarques sont intéressantes, mais de cet algorithme émerge une notion théorique nouvelle : celle d'Analyse en Composantes Indépendantes applicable dans le champ de l'analyse des données au sens large. Il suffira en effet de considérer la suite temporelle des données comme un signal vectoriel échantillonné pour retrouver le formalisme développé dans cet article.

La décomposition en fonctions orthogonales est un outil classique et performant en Traitement du Signal: séries de Fourier, fonctions de Rademacher et de Walsh, polynômes de Legendre, de Laguerre, etc., transformation de Karhunen-Loeve. Dans ces décompositions, la notion d'orthogonalité de deux signaux est associée à la définition d'un produit scalaire, et correspond à la non-corrélation de ces signaux. Dans le problème de séparation de sources indépendantes, cette notion d'orthogonalité est insuffisante. A cette notion d'orthogonalité, s'ajoute ici celle d'indépendance: les signaux extraits sont *indépendants*, ce qui implique bien sûr l'orthogonalité, et forment une base génératrice de toutes les composantes du signal vectoriel d'entrée. Cette base est canonique dans la mesure où il s'agit du *système générateur minimal*. Ce concept d'Analyse en Composantes Indépendantes semble être plus puissant que celui bien connu d'Analyse en Composantes Principales, en particulier pour les opérations de décision.

En effet, par le biais d'une analyse en composantes principales d'une distribution d'un espace  $R^q$ , on recherche les axes tels que la matrice de covariance de la distribution est diagonale: c'est la base des vecteurs propres. A chaque nouvel axe (vecteur propre) est associée une valeur propre égale à la variance de la distribution initiale sur cet axe. Si certaines valeurs propres sont très petites par rapport aux autres, on peut alors considérer que les axes correspondants sont inutiles pour représenter la distribution: cela permet d'obtenir une représentation plus simple de la distribution initiale, c'est-à-dire une représentation dans un espace de dimension  $r$  inférieure à  $q$ . Par contre, il est clair que dans la base des vecteurs propres, les signaux ne sont pas séparés: la projection le long d'un vecteur propre quelconque est encore un mélange de sources. Sur l'axe d'inertie maximale (variance maximale), on a donc une dynamique maximale mais cette dynamique est due à plusieurs signaux: les opérations de décision sur cet axe seront incertaines.

Au contraire, l'analyse en composantes indépendantes effectuée par notre algorithme fournit une nouvelle base de signaux *indépendants* et non plus seulement non-corrélés. Les opérations de décision sur un axe particulier ne portent que sur une source unique: elles seront donc plus sûres. De plus, ce système de signaux indépendants est le système générateur minimal: la redondance de la distribution initiale est donc entièrement éliminée par l'algorithme.

Actuellement, nous continuons des travaux sur cet algorithme selon trois axes principaux, tant théoriques qu'expérimentaux: l'étude de la convergence de la règle d'adaptation, étude pour laquelle nous collaborons avec des mathématiciens, l'application de cette méthode à l'«effet cocktail party» sur des signaux à large bande, l'application du concept d'Analyse en Composantes Indépendantes à des problèmes d'analyse de données.

Manuscrit reçu le 27 avril 1988.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. ANS, J. C. GILHODES et J. HERAULT, Simulation de Réseaux Neuronaux (SIRENE). II. Hypothèse de décodage du message de mouvement porté par les afférences fusoriales IA et II par un mécanisme de plasticité synaptique, *C.R. Acad. Sci. Paris*, série III, 1983, p. 419-422.
- [2] F. CHRISTOPHE et C. MORISSEAU, Elimination auto-adaptative de brouilleurs par une méthode de gradient appliquée à un réseau lacunaire, *X<sup>e</sup> colloque GRETSI*, Nice, 1985, p. 571-576.
- [3] P. ESCUDIER et Y. BIRAUD, Systèmes Sonar Aériens Animaux. Traitement et Analyse des Signaux, *Acte du colloque International CNRS*, Lyon, 1985.
- [4] L. FETY, Méthodes de traitement d'antenne adaptées au radiocommunications, *Thèse*, ENST, Paris, juin 1988.
- [5] A. GUERIN, CRASY: un Calculateur de Réseaux Adaptatifs Systolique: application au calcul neuromimétique, *Thèse de Docteur-Ingénieur*, INP, Grenoble, 1987.
- [6] D. O. HEBB, *The organization of behaviour*, Wiley, New York, 1949.
- [7] J. HERAULT et C. JUTTEN, Space or time adaptive signal processing by neural network models, *International conference of "Neural Networks for Computing"*, Snowbird, Utah, 1986.
- [8] A. HOLLEY, La perception des odeurs, *La Recherche*, juillet-août 1975.
- [9] M. L. HONIG et D. G. MESSERSCHMITT, *Adaptive filters. Structures, algorithms and applications*, Klumer Academic Publishers, 1984.
- [10] D. H. HUBEL et T. N. WIESEL, Receptive fields of cells in striate cortex of very young, visually inexperienced kittens, *J. Physiol.*, 26, 1963, p. 994-1002.
- [11] C. JUTTEN, Calcul neuromimétique et traitement du signal. Analyse en composantes indépendantes, *Thèse d'état ès Sciences Physiques*, USM-INP, Grenoble, 1987.
- [12] J. C. LAHAYE, Étude et réalisation d'un système de vision temps réel par reconnaissance d'éléments rectilignes, *Thèse de Docteur-Ingénieur*, INP, Grenoble, 1986.
- [13] W. B. LEVY et N. L. DESMOND, *The rules of elemental synaptic plasticity in Synaptic Modification, Neuron Selectivity, and Neurons System Organization*, W. B. LEVY, J. A. ANDERSON et S. LEHMKUHLE édés., Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1985.
- [14] F. LONGER, Implantation d'un algorithme de séparation de sources sur une carte processeur de signal, *DEA d'Electronique*, ENSER, Grenoble, 1987.
- [15] B. LUMEAU, Traitement spatial et analyse spectrale. Applications neurophysiologiques, *Thèse d'état es Sciences Physiques*, Univ. de Paris-Sud, 1987.
- [16] P. NICOLAS et G. VEZZOSI, Localisation de sources ponctuelles avec une antenne de géométrie inconnue, *X<sup>e</sup> colloque GRETSI*, Nice, 1985, p. 335-338.
- [17] J. P. RAUSCHKEK et W. SINGER, The effect of early experience of the cat's visual cortex and their possible explanation by Hebb synapses, *J. Physiol.*, 310, 1981, p. 215-239.
- [18] J. P. ROLL, Contribution de la proprioception musculaire à la perception et au contrôle du mouvement chez l'homme, *Thèse de Doctorat d'État*, Univ. d'Aix-Marseille-I, 1981.

- [19] M. M. SONDI et D. MITRA, New results on the performance of a well-known class of adaptive filters, *Proc. IEEE*, 64, n° 11, 1976, p. 1583-1597.
- [20] D. G. STEIN, J. J. ROSEN et N. BUTTERS, *Plasticity and recovery of functions in the central nervous system*, Academic Press, New York, 1984.
- [21] H. W. STRUBE, Separation of several speakers recorded by two microphones (cocktail party processing), *Signal processing*, 3, 1981, p. 355-364.
- [22] SZENTAGOTAI, The "module-concept" in cerebral cortex architecture, *Brain research*, 95, 1975, p. 475-496.

## Annexe

### Calcul du minimum de la fonction $\langle s_i^2 \rangle$

On se place dans le cas  $n=p=2$  et on effectuera le calcul pour la seule fonction  $s_1^2$ . Les relations écrites sont valables pour  $s_2^2$  à une permutation d'indices près.

$$s_1^2 = \frac{(a_{11} - c_{12} a_{21})^2 x_1^2 + 2(a_{11} - c_{12} a_{21})(a_{12} - c_{21} a_{22}) x_1 \cdot x_2 + (a_{12} - c_{21} a_{22})^2 x_2^2}{(1 - c_{12} \cdot c_{21})^2}$$

En passant à la moyenne, on élimine les produits croisés  $x_1(t) \cdot x_2(t)$ , puisque ces signaux sont supposés indépendants. En notant  $V_1$  et  $V_2$  les variances de  $x_1(t)$  et de  $x_2(t)$ , respectivement, on arrive à :

$$\langle s_1^2 \rangle = \frac{(a_{11} - c_{12} a_{21})^2 V_1 + (a_{12} - c_{21} a_{22})^2 V_2}{(1 - c_{12} \cdot c_{21})^2}$$

On voit que  $\langle s_1^2 \rangle$  dépend de  $c_{12}$  et de  $c_{21}$ . Calculons le minimum relatif au paramètre  $c_{12}$ , par exemple. Ce minimum est obtenu lorsque  $\partial \langle s_1^2 \rangle / \partial c_{12}$  est nul, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \langle s_1^2 \rangle}{\partial c_{12}} = \frac{1}{(1 - c_{12} \cdot c_{21})^4} [-c_{12} \{ a_{21} (a_{11} c_{21} - a_{21}) V_1 + a_{22} (a_{12} c_{21} - a_{22}) V_2 \} + a_{11} \cdot V_1 (a_{11} c_{21} - a_{21}) + a_{12} \cdot V_2 (a_{12} \cdot c_{21} - a_{22})].$$

Dans le cas  $n=p=2$ , la relation (9) se développe sous la forme :

$$s_1 = \frac{(a_{11} - c_{12} a_{21}) x_1 + (a_{12} - c_{21} a_{22}) x_2}{1 - c_{12} c_{21}}$$

et, en élevant au carré, on a :

Le terme entre crochet est nul pour :

$$c_{12} = \frac{V_1 \cdot a_{11} (a_{11} c_{21} - a_{21}) + V_2 a_{12} (a_{12} \cdot c_{21} - a_{22})}{V_1 a_{21} (a_{11} c_{21} - a_{21}) + V_2 a_{22} (a_{12} \cdot c_{21} - a_{22})}$$

Dans cette relation, il apparaît clairement que cette valeur de  $c_{12}$  dépend de  $c_{21}$ . Bien sûr, dans le cas où  $c_{21} = a_{22}/a_{12}$ , on retrouve le minimum pour  $c_{12} = a_{11}/a_{21}$ , valeurs correspondant à la séparation des sources. Sinon, les valeurs sont différentes et dépendent en outre des variances des sources. Les solutions théoriques ne sont donc pas des minimums absolus du terme d'erreur  $\langle s_i^2 \rangle$ .