

# Conception d'antennes à faisceau constant

## sur une large bande

## à partir du vecteur covariance

Broadband constant beamwidth array processing

using the covariance vector



### Joseph LARDIES

Université Paul-Sabatier, Laboratoire d'Acoustique de Métrologie et d'Instrumentation, 38, rue des Trente-six-Ponts, 31062 TOULOUSE CEDEX.

A soutenu en 1987 une thèse de Doctorat de l'Université Paul Sabatier à Toulouse, en Acoustique. Ses travaux de recherche concernent le traitement d'antenne.

### RÉSUMÉ

Une technique nous permettant d'obtenir des diagrammes de directivité à faisceau constant sur une très large bande est présentée. Le vecteur covariance est formé en considérant la partie réelle et la partie imaginaire de certains éléments de la matrice de covariance. C'est en filtrant ce vecteur par une matrice qu'un opérateur peut contrôler le niveau, le nombre, et la position des lobes secondaires ainsi que la largeur du faisceau de directivité du traitement.

L'efficacité de la méthode proposée lors de la caractérisation de signaux basse fréquence est démontrée, par comparaison avec quatre autres approches.

### MOTS CLÉS

Large bande, faisceau constant, matrice de covariance.

### SUMMARY

*A broadband constant beamwidth array technique is presented in this paper. It is shown that the number and the position of the sidelobes and the beamwidth of the processor are controlled by an operator who consider the covariance vector, formed from sensor data, with a weighting matrix which is a beamformer.*

*The effectiveness of the technique at low frequency operation is demonstrated by comparison with four alternative approaches.*

### KEY WORDS

*Broadband, constant beamwidth, covariance matrix.*

### Notation

**x**: vecteur observable;  
**r**: vecteur covariance;  
**p**: vecteur puissance estimée;  
**w**: vecteur pondération;  
**s<sub>i</sub>**: vecteur direction du signal de la source d'indice *i*;

**b<sub>f</sub>**: vecteur bruit de fond externe au traitement;  
**b<sub>c</sub>**: vecteur bruit de fond interne au traitement;  
**R**: matrice de covariance du vecteur observable;  
**R<sub>b<sub>f</sub></sub>**: matrice de covariance du bruit de fond externe;  
**R<sub>b<sub>c</sub></sub>**: matrice de covariance du bruit de fond interne;  
**H<sup>-</sup>**: matrice pondération;  $\mathbf{H}^- = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}$ ;

- $\dot{H}$ : Dérivée première de  $H$ , par rapport à l'angle d'incidence;
- $\ddot{H}$ : dérivée seconde de  $H$ , par rapport à l'angle d'incidence;
- $\lambda$ : longueur d'onde du signal émis;
- $( )^+$ : conjugué-transposé.

**I. Introduction**

Lors de la mesure des caractéristiques (direction et puissance) de signaux à large bande, on désire très souvent concentrer l'énergie provenant d'une direction donnée, avec une antenne acoustique. Malheureusement, si aucun traitement n'est effectué aux sorties des capteurs, cette focalisation n'est pas possible: le diagramme de directivité, qui traduit la variation angulaire de la sensibilité de l'antenne vis-à-vis de l'onde incidente, se déformant avec la fréquence. Ainsi

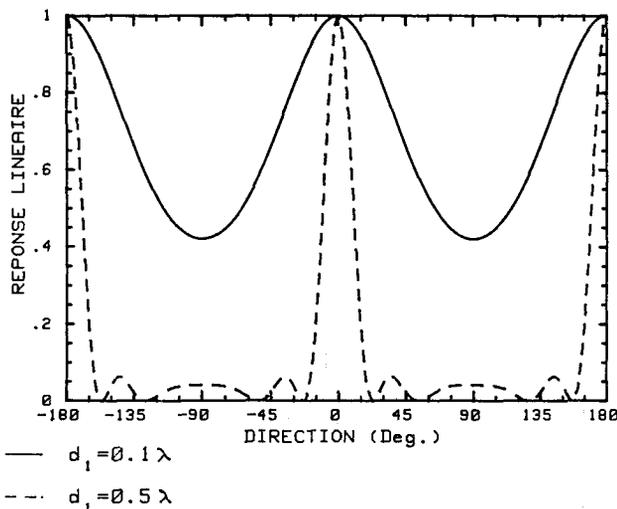


Fig. 1. — Diagrammes de directivité d'une antenne rectiligne classique, formée de 5 capteurs espacés de  $d_1$ .

la figure 1 représente, pour deux valeurs du rapport  $d_1/\lambda$  (ou  $d_1$  étant fixe pour deux valeurs de la fréquence) les variations du diagramme de directivité en puissance d'une antenne rectiligne formée de 5 capteurs équidistants, espacés de  $d_1$ ;  $\lambda$  est la longueur d'onde du signal émis. Le même problème se présente si on considère une antenne circulaire équiphase de rayon  $r_1$ , et formée de 5 éléments, comme le montre la figure 2. Lorsque la fréquence décroît, le lobe principal s'élargit dans les deux cas. Un tel système est alors inopportun lors d'opérations à large bande, vu la dépendance angulaire du spectre du signal obtenu en sortie du traitement. Une application possible de la focalisation est la caractérisation de signaux et sera examinée dans cet article.

Peu d'auteurs ont étudié les systèmes d'antennes acoustiques à faisceau constant sur une très large bande. Le premier fut, certainement, D. G. Tucker [1] en 1957. Il considère 19 transducteurs, chacun étant relié à quatre lignes à retard indépendantes,

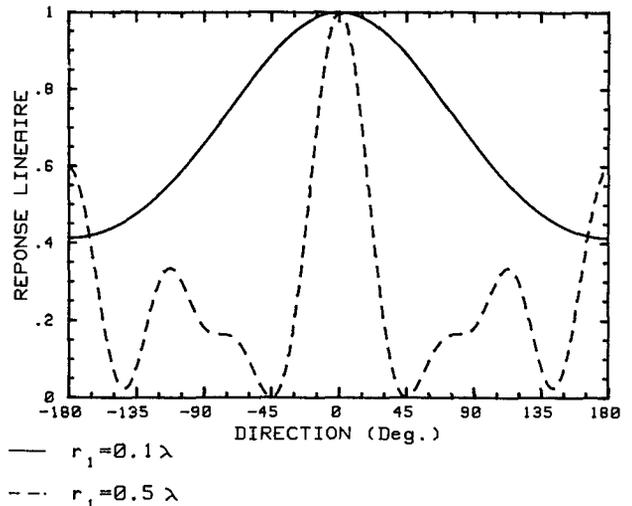


Fig. 2. — Diagrammes de directivité d'une antenne circulaire équiphase de rayon  $r_1$ , formée de 5 capteurs.

celles-ci étant connectées à un sommateur. En déphasant convenablement les lignes à retard, il maintient la largeur du faisceau de ce système constante à mi-puissance, sur une large bande; mais par contre, le lobe principal subit d'importantes variations perdant l'effet focalisant recherché. En 1970, R. P. Smith [2] propose une nouvelle technique, en considérant deux réseaux récepteurs de dimensions différentes. La sortie du premier réseau est reliée à un simple circuit passif, dont la fonction de transfert est déterminée à partir de contraintes imposées au diagramme de directivité du système de réception. Ce filtre est ensuite relié à un sommateur. La sortie du deuxième réseau est directement connectés au même sommateur. Cette technique permet de maintenir la largeur du faisceau à mi-puissance constante sur une octave, avec une variation négligeable de la forme du lobe principal. Son étude est effectuée dans le domaine des ultrasons (40-80 kHz) pour les systèmes sonar.

En 1978, Van Buren [3] montre qu'en plaçant les capteurs sur une calotte sphérique et en les pondérant avec des coefficients déterminés à partir des polynômes de Legendre, on peut obtenir une antenne acoustique à faisceau constant sur une très large bande. En 1983 il présente des résultats expérimentaux [4]. Avec 849 capteurs piézo-électriques pondérés convenablement, le lobe principal est maintenu constant sur une largeur de bande qui s'étend de 20 à 140 kHz. Une étude similaire a été effectuée par Trott [5], les capteurs étant placés sur une sphère.

Une autre approche a été proposée en 1986 [6] en considérant une antenne rectiligne de 7 capteurs, espacés d'un pas  $d_1$ . L'optimisation du gain dans la direction de l'alignement des capteurs pour  $d_1=0,15 \lambda$ , nous permet de concevoir le diagramme de directivité optimal de ce groupement. Le lobe principal est maintenu constant sur plusieurs octaves, en imposant 7 contraintes au diagramme suivant 7 directions particulières. On est alors amenés à affecter d'une loi fréquentielle la pondération de chaque capteur, et 7 filtres sont donc requis. Des contraintes dérivatives du premier et du second ordre sont aussi appliqués

au diagramme, ce qui a pour effet de réduire le niveau des lobes secondaires, tout en gardant le faisceau constant sur une large bande.

Une autre technique [7, 8], est de combiner linéairement, par l'intermédiaire de deux filtres compensateurs actifs, la sortie d'une première antenne qui a un certain diagramme de directivité pour une certaine fréquence, avec la sortie d'une deuxième antenne, qui a le même diagramme, mais pour une fréquence différente. Le lobe principal est ainsi maintenu constant sur une octave, de 353 à 707 Hz. C'est en combinant les sorties de P réseaux de deux antennes chacun avec d'autres filtres pondérateurs, que le faisceau est maintenu constant sur P octaves [9, 10, 27].

On doit noter que toutes ces techniques utilisent aux sorties des capteurs, ou aux sorties des antennes, des filtres qui obéissent à une certaine loi fréquentielle et qui assurent, donc, au diagramme une forme qui est quasiment insensible aux variations de fréquence. Une autre approche, tout à fait différente, est proposée dans cette étude.

Toutes les méthodes modernes d'analyse spatiale reposent sur l'estimation de la matrice des densités spectrales des signaux observés aux sorties des capteurs formant l'antenne. On se propose de déterminer une matrice de filtrage qui, combinée linéairement avec les éléments de la matrice des densités spectrales (avec le vecteur de covariance), permet de maintenir le faisceau de directivité du traitement constant sur plusieurs octaves. L'étude s'effectuera avec une antenne circulaire. Des précisions concernant les inconvénients liés à l'utilisation d'une antenne rectiligne seront trouvées en [27]. La propagation des ondes s'effectuera dans le plan de l'antenne. Une application possible qui est l'estimation de la puissance et de la direction des signaux basse fréquence sera alors examinée, en comparant les performances de ce traitement avec celles obtenues en utilisant l'antenne classique et les estimateurs du maximum de vraisemblance (ou de Capon), du maximum d'entropie et de Lagunas-Hernandez [24, 25, 26].

## II. Estimation de la puissance de signaux en considérant le vecteur covariance

### II.1. MATRICE DE COVARIANCE

L'antenne acoustique est formée de N capteurs dont sont issus les N signaux complexes  $x_1, x_2, \dots, x_N$  constitués des signaux émis par K sources rayonnantes (on néglige dans ce premier paragraphe le bruit de fond externe et le bruit de fond interne propre aux canaux de traitement du signal). Le vecteur signal observé aux sorties des N capteurs est de dimension N. Il est considéré dans le domaine fréquentiel, et s'écrit [11]:

$$(1) \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^K m_i \mathbf{s}_i$$

$m_i$  est une variable aléatoire complexe, supposée centrée, représentant l'amplitude de l'onde émise par la source d'indice  $i$ ;  $\mathbf{s}_i$  est le vecteur de dimension N représentant la direction du signal provenant de la source  $i$ .

La matrice de covariance du vecteur observable  $\mathbf{x}$  est

$$(2) \quad \mathbf{R} = E[\mathbf{x} \mathbf{x}^+] \\ = E \left[ \left( \sum_{i=1}^K m_i \mathbf{s}_i \right) \left( \sum_{j=1}^K m_j \mathbf{s}_j \right)^+ \right] \\ = E \left[ \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K (m_i m_j^*) \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j^+ \right]$$

On suppose que les signaux sont statistiquement indépendants entre eux.

On obtient alors

$$(3) \quad \mathbf{R} = E \left[ \sum_{i=1}^K |m_i|^2 \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^+ \right] \\ = \sum_{i=1}^K E[|m_i|^2] \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^+ = \sum_{i=1}^K p_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^+$$

$p_i = E[|m_i|^2]$  est la puissance de la source d'indice  $i$  que nous allons estimer en considérant les éléments de la matrice de covariance.

### II.2. VECTEUR COVARIANCE

La densité interspectrale de puissance entre signaux issus de deux capteurs  $a$  et  $b$  est l'élément  $r_{ab}$  de la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  et s'écrit :

$$(4) \quad r_{ab} = \sum_{i=1}^K p_i s_{ai} s_{bi}^* \\ a = 1, N; \quad b = 1, N$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation (4) on obtient

$$(5) \quad \text{Re}(r_{ab}) = \sum_{i=1}^K p_i \text{Re}(s_{ai} s_{bi}^*) \\ \text{Im}(r_{ab}) = \sum_{i=1}^K p_i \text{Im}(s_{ai} s_{bi}^*)$$

Le nombre total d'équations issues de (5) est  $2N^2$ ; mais ces équations ne sont pas toutes indépendantes car la matrice de covariance est hermitienne:  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^+$ . Nous obtenons donc

$$(6) \quad \text{Re}(r_{ab}) = \text{Re}(r_{ba}), \\ a = 1, N; \quad b = 1, N \\ \text{Im}(r_{ab}) = -\text{Im}(r_{ba}), \\ a = 1, N; \quad b = 1, N \\ \text{Im}(r_{aa}) = 0, \quad 1 \leq a \leq N \\ \text{Re}(r_{aa}) = \text{Re}(r_{bb}), \quad a \neq b$$

Dans le cas général où nous considérons une antenne de géométrie quelconque, le nombre maximum d'équations indépendantes provenant de (5) est  $(N^2 - N + 1)$ . Le système d'équations (5) se met sous la forme vectorielle suivante

$$(7) \quad \mathbf{r} = \mathbf{H} \mathbf{p}$$

Le vecteur  $\mathbf{r}$  contient la partie réelle et la partie imaginaire des composantes de  $r_{ab}$ ; c'est le vecteur covariance ayant  $(N^2 - N + 1)$  composantes. Il s'écrit :

$$(8) \quad \mathbf{r}^+ = [\text{Re}(r_{11}) \text{Re}(r_{12}) \dots \text{Re}(r_{1N}) \text{Re}(r_{23}) \dots \text{Re}(r_{2N}) \dots \text{Re}(r_{(N-1)N}) \text{Im}(r_{12}) \dots \text{Im}(r_{1N}) \dots \text{Im}(r_{(N-1)N})]$$

$$(10) \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \text{Re}(s_{11} s_{11}^*) & \text{Re}(s_{12} s_{12}^*) & \dots & \text{Re}(s_{1K} s_{1K}^*) \\ \text{Re}(s_{11} s_{21}^*) & \text{Re}(s_{12} s_{22}^*) & \dots & \text{Re}(s_{1K} s_{2K}^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Re}(s_{11} s_{N1}^*) & \text{Re}(s_{12} s_{N2}^*) & \dots & \text{Re}(s_{1K} s_{NK}^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Re}(s_{i1} s_{(i+1)1}^*) & \text{Re}(s_{i2} s_{(i+1)2}^*) & \dots & \text{Re}(s_{iK} s_{(i+1)K}^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Re}(s_{(N-1)1} s_{N1}^*) & \text{Re}(s_{(N-1)2} s_{N2}^*) & \dots & \text{Re}(s_{(N-1)K} s_{NK}^*) \\ \text{Im}(s_{11} s_{21}^*) & \text{Im}(s_{12} s_{22}^*) & \dots & \text{Im}(s_{1K} s_{2K}^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Im}(s_{11} s_{N1}^*) & \text{Im}(s_{12} s_{N2}^*) & \dots & \text{Im}(s_{1K} s_{NK}^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Im}(s_{(N-1)1} s_{N1}^*) & \text{Im}(s_{(N-1)2} s_{N2}^*) & \dots & \text{Im}(s_{(N-1)K} s_{NK}^*) \end{bmatrix}$$

Soit encore :

$$(11) \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \text{Re}(s_{ai} s_{bi}^*) \\ \text{Im}(s_{ai} s_{bi}^*) \end{bmatrix}, \quad a=1, N-1; \quad b=1, N, \quad i=1, K$$

$\mathbf{p}$  est le vecteur à  $K$  composantes, contenant la puissance des signaux émis par les sources. Nous avons  $\mathbf{p}^T = (p_1, p_2 \dots p_K)$ .

II.3. ESTIMATION DE LA PUISSANCE DES SIGNAUX

La résolution du système d'équations (7) nous permettant de déterminer  $\mathbf{p}$  s'effectue en considérant trois cas :

*Premier cas :* Si  $K = (N^2 - N + 1)$  : le nombre d'inconnues  $p_i$  est égal au nombre d'équations indépendantes, et si la matrice  $\mathbf{H}$  est régulière, le vecteur puissance est

$$(12) \quad \mathbf{p} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{r}$$

*Deuxième cas :* Si  $K < (N^2 - N + 1)$  : le nombre d'équations linéaires provenant de (7) est supérieur au nombre d'inconnues, et si la matrice  $\mathbf{H}$  est de rang  $K$  (par suite la matrice carrée  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  d'ordre  $K$  n'est pas singulière), la puissance estimée au sens des moindres carrés est

$$(13) \quad \mathbf{p} = \mathbf{H}^- \mathbf{r}$$

Soit encore :

$$(9) \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \text{Re}(r_{ab}) \\ \text{Im}(r_{ab}) \end{bmatrix} \quad a=1, N-1, \quad b=1, N$$

$\mathbf{H}$  est une matrice de dimensions  $(N^2 - N + 1) \times K$  contenant les différents déphasages qui existent entre les  $K$  signaux reçus sur les  $N$  capteurs, et celui reçu sur un point de référence fixe et arbitraire. Les éléments de cette matrice sont fonction de la géométrie de l'antenne et de la direction des  $K$  sources. La forme générale de la matrice  $\mathbf{H}$  est :

$\mathbf{H}^- = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$  est la matrice pseudo-inverse à gauche de la matrice  $\mathbf{H}$ .

*Troisième cas :* Si  $K > (N^2 - N + 1)$  : le nombre d'équations issues de (7) est inférieur au nombre d'inconnues, le système est sous-déterminé.

Nous nous intéressons essentiellement au deuxième cas.

III. Propriétés du traitement étudié

III.1. SCHÉMA-BLOC DU TRAITEMENT

Le traitement classique d'antenne estime la puissance des signaux en sommant les sorties des capteurs et en considérant leur variance à l'aide d'un système quadratureur-intégrateur (ou moyenneur). Avec le traitement proposé, la puissance des signaux est estimée en filtrant le vecteur covariance  $\mathbf{r}$  par la matrice  $\mathbf{H}^{-1}$ ,  $\mathbf{H}^-$ , qui est un formateur de faisceaux conçu à partir de  $K$  directions équidistantes en azimut. Cette matrice est la matrice de filtrage du vecteur covariance. Avec une antenne circulaire de 5, 7 ou 9 capteurs, le nombre maximal de directions équidistantes ( $K_{max}$ ) que nous avons pu concevoir pour déterminer la matrice de filtrage a été respectivement de 9, 13 et 17; la matrice  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  étant mal conditionnée ou singulière au-delà de ces valeurs. Nous ne formerons que  $\mathbf{H}^-$  avec

$K \leq K_{max}$ ; les diagrammes étant détruits dès que  $K > K_{max}$ .

Il faut insister sur le fait que l'utilisation de la matrice pseudo-inverse  $H^-$  se traduit par l'application d'un algorithme qui traite le vecteur covariance  $r$  et qui doit être stocké d'une façon permanente. On doit donc former  $r$  à partir des signaux issus des capteurs et appliquer l'équation (13), suivant le schéma-bloc de la figure 3.

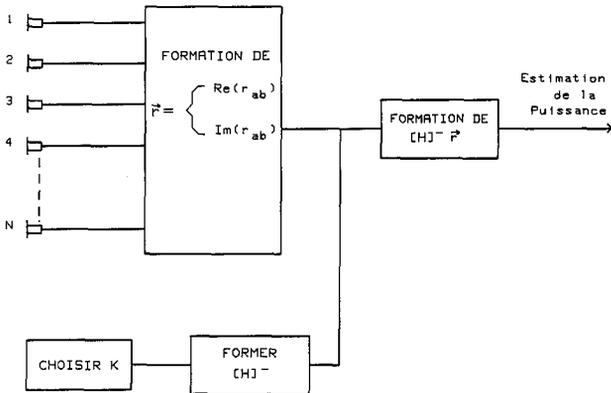


Fig. 3. — Schéma-bloc du traitement.

### III. 2. DIAGRAMMES OBTENUS AVEC UNE ANTENNE CIRCULAIRE

L'antenne circulaire équiphase formée de 5 capteurs possède un diagramme de directivité qui se déforme considérablement avec la fréquence (ou avec le rapport  $r_1/\lambda$ ), comme l'indique la figure 2, présentant au maximum 4 zéros, tant que  $r_1 < 0,5 \lambda$  (lorsque  $r_1 = 0,45 \lambda$ ).

La figure 4 nous montre les variations du diagramme de directivité en fonction de  $r_1/\lambda$ , en utilisant  $H^-$  et le vecteur covariance  $r$ . C'est la composante  $P_1(\theta, F)$ , qui nous permet de concevoir la réponse spatiale du traitement. Nous avons utilisé une antenne circulaire de 7 capteurs et 13 dimensions équidistantes ( $K=13$ ). Contrairement au traitement classique, le diagramme est superdirectif pour de faibles valeurs du rapport  $r_1/\lambda$  ( $r_1=0,1 \lambda$ ). Le lobe principal est unique et sa largeur indépendante de la fréquence sur plusieurs octaves. Avec une antenne circulaire, les zéros des diagrammes sont obtenus suivant  $(K-1)$  directions, forçant le faisceau principal à rester constant sur une très large bande. La largeur du faisceau et le nombre de zéros, sont donc déterminés par  $K$  et contrôlés par un opérateur. L'augmentation du nombre de capteurs entraîne aussi l'augmentation du nombre de directions équidistantes (de  $K$ ) qu'un opérateur peut manipuler; ainsi, si  $N=11$  on a pu concevoir  $K_{max}=19$  [27]. Plus  $K$  est important, plus le faisceau est étroit, mais au détriment du niveau et du nombre des lobes secondaires qui vont s'accroître, pouvant conduire à des ambiguïtés lors de la détection de signaux. Cependant, la réduction du niveau des lobes secondaires est possible en utilisant des contraintes dérivatives, et va être étudiée dans les prochains paragraphes.

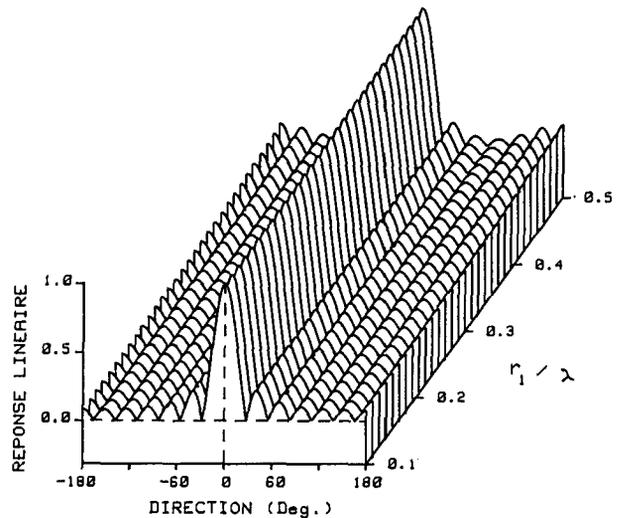


Fig. 4. — Variations du diagramme de directivité d'une antenne circulaire formée de 7 capteurs, avec  $K=13$ .

L'étude s'effectuera avec une antenne circulaire, vu que son diagramme ne présente qu'un seul faisceau principal [27].

### III. 4. CONTRAINTES DÉRIVATIVES DU PREMIER ORDRE

Vural [12] et Steele [13] utilisent des contraintes directionnelles et dérivatives afin d'élargir le lobe principal dans la direction d'observation, tout en maintenant un bon indice de détection. Leur but est d'accroître l'angle d'acceptation du signal, tout en préservant la possibilité de rejeter toute interférence issue des directions autres que celles de l'angle d'acceptation.

Des contraintes dérivatives et non dérivatives ont été utilisées dans la référence [6] afin de maintenir constant, sur une large bande, le lobe principal d'une antenne dont le gain a été optimisé dans la direction du maximum de directivité. Les contraintes (7 pour une antenne linéaire de 7 capteurs) sont imposées suivant les zéros du diagramme, et suivant la direction principale. Les contraintes directionnelles forcent le diagramme à prendre des valeurs nulles et la valeur unité suivant des directions bien définies. Les contraintes dérivatives forcent le gradient de la réponse de l'antenne à être nul suivant les directions précédentes, ce qui a pour effet d'élargir les zéros de chaque diagramme et de réduire le niveau des lobes secondaires.

Le même principe va être étudié dans ce paragraphe, les contraintes directionnelles et dérivatives étant appliquées suivant  $K$  directions équidistantes. Pour cela, on considère une perturbation des  $K$  directions représentées par l'angle polaire  $\theta_p$ , et on développe en série de Taylor le vecteur covariance  $r$

$$(14) \quad r(\theta) = r(\theta_i) + (\theta - \theta_i) \dot{r}(\theta_i)$$

$$(15) \quad r = H p + \dot{H} \Delta p$$

$$(16) \quad r = [H : \dot{H}] \begin{bmatrix} p \\ \Delta p \end{bmatrix}$$

expression dans laquelle  $\Delta = (\theta - \theta_i)$  correspond à une perturbation des  $K$  directions;  $\dot{\mathbf{H}}$  est la dérivée première de  $\mathbf{H}$  par rapport à l'angle d'incidence  $\theta$ , pour  $\theta = \theta_i$ . Les deux matrices  $\mathbf{H}$  et  $\dot{\mathbf{H}}$  sont de dimensions  $(N^2 - N + 1) \times K$  et les vecteurs  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{r}$  ont respectivement  $K$  et  $(N^2 - N + 1)$  composantes. En posant  $\mathbf{H}_1 = [\mathbf{H}; \dot{\mathbf{H}}]$ , matrice de format  $(N^2 - N + 1) \times 2K$  et  $\mathbf{p}'^T = (\mathbf{p}^T, \Delta \mathbf{p}^T)$  vecteur ayant  $2K$  composantes, on obtient

$$(17) \quad \mathbf{r} = \mathbf{H}_1 \mathbf{p}'$$

Comme dans les paragraphes II.3 et III.1, et pour les mêmes raisons, des trois cas qui peuvent se présenter lors de l'estimation du vecteur  $\mathbf{p}'$ , nous ne considérerons que  $2K < (N^2 - N + 1)$  conduisant à

$$(18) \quad \mathbf{p}' = (\mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{H}_1^T \mathbf{r}$$

soit (Annexe 1)

$$(19) \quad \mathbf{p} = ((\mathbf{H}^T \mathbf{H} - \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}} (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}})^{-1} \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T - (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}} (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \times \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}})^{-1} \dot{\mathbf{H}}^T) \mathbf{r}$$

Le nombre maximal de directions équidistantes que nous avons pu concevoir avec une antenne circulaire de 5 capteurs est  $K_{\text{Max}} = 5$ ; avec 7 capteurs  $K_{\text{Max}} = 6$ ; les diagrammes de directivité étant détruits au-delà de ces valeurs.

Les diagrammes qui correspondent à ces données sont tracés sur la figure 5. Le faisceau principal est insensible aux variations de fréquence sur plusieurs octaves, le niveau des lobes secondaires étant maintenant plus atténué que précédemment (fig. 4). Chaque diagramme possède de larges zéros; ceci est dû au fait que le premier terme de l'équation (14), qui contient les contraintes non dérivatives ou directionnelles, assure la présence des zéros dans les diagrammes suivant  $(K-1)$  directions; le deuxième terme qui contient les contraintes dérivatives, force les zéros à « devenir » plus larges.

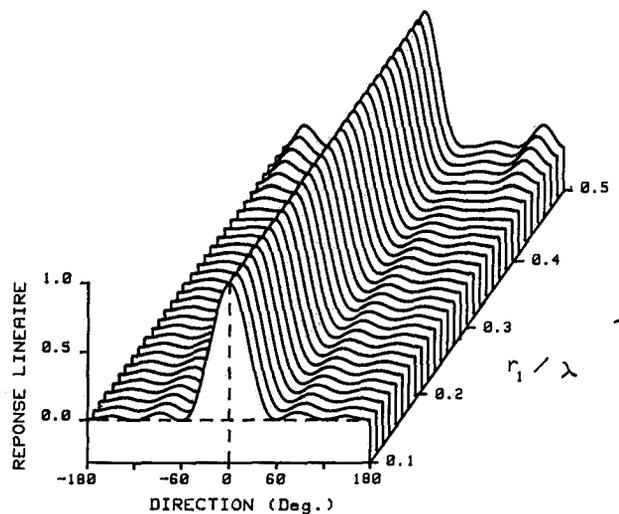


Fig. 5. - Variations du diagramme de directivité d'une antenne circulaire formée de 7 capteurs,  $K=6$  et en utilisant les contraintes dérivatives du premier ordre.

Le niveau des lobes secondaires est aussi plus bas que celui qui serait obtenu, sans les contraintes dérivatives, en utilisant une antenne circulaire de 5 capteurs avec  $K=5$ , ou une antenne de 7 capteurs avec  $K=6$  [27].

III.5. CONTRAINTES DÉRIVATIVES DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE

Des contraintes dérivatives du premier ordre, du second ordre et des contraintes directionnelles sont appliquées au vecteur covariance  $\mathbf{r}$ , suivant les  $K$  directions, en développant ce dernier en série de Taylor au second ordre :

$$(20) \quad \mathbf{r}(\theta) = \mathbf{r}(\theta_i) + (\theta - \theta_i) \dot{\mathbf{r}}(\theta_i) + \left(\frac{\theta - \theta_i}{2}\right)^2 \ddot{\mathbf{r}}(\theta_i)$$

$$(21) \quad \mathbf{r} = \mathbf{H} \mathbf{p} + \dot{\mathbf{H}} \Delta \mathbf{p} + \ddot{\mathbf{H}} \frac{\Delta^2}{2} \mathbf{p}$$

$$(22) \quad \mathbf{r} = [\mathbf{H}; \dot{\mathbf{H}}; \ddot{\mathbf{H}}] \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{p} \\ \frac{\Delta^2}{2} \mathbf{p} \end{bmatrix}$$

En posant  $\mathbf{H}_2 = [\mathbf{H}; \dot{\mathbf{H}}; \ddot{\mathbf{H}}]$  matrice de format  $(N^2 - N + 1) \times 3K$  et  $\mathbf{p}''^T = (\mathbf{p}^T, \Delta \mathbf{p}^T, (\Delta^2/2) \mathbf{p}^T)$  vecteur ayant  $3K$  composantes, on obtient

$$(23) \quad \mathbf{r} = \mathbf{H}_2 \mathbf{p}''$$

On considère le cas  $3K < (N^2 - N + 1)$ ; si la matrice  $\mathbf{H}_2$  est de rang  $3K$ , l'estimation de  $\mathbf{p}''$  au sens des moindres carrés conduit à

$$(24) \quad \mathbf{p}'' = (\mathbf{H}_2^T \mathbf{H}_2)^{-1} \mathbf{H}_2^T \mathbf{r}$$

Le développement de cette équation a été effectué en Annexe 2; nous obtenons

$$(25) \quad \mathbf{p} = (\mathbf{E} \mathbf{H}^T + \mathbf{F} \dot{\mathbf{H}}^T + \mathbf{G} \ddot{\mathbf{H}}^T) \mathbf{r}$$

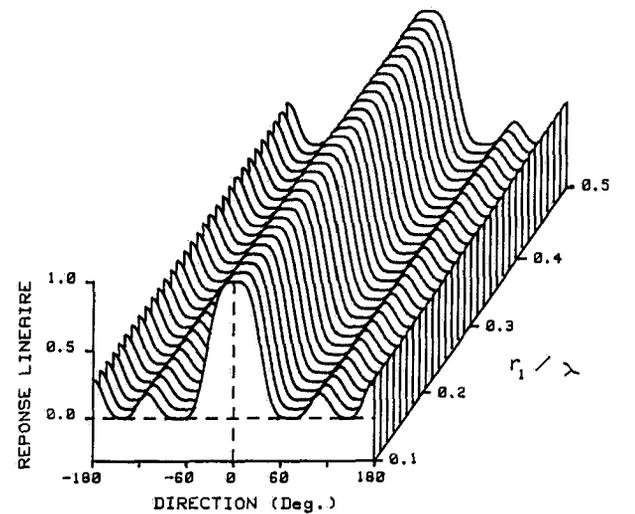


Fig. 6. - Variations du diagramme de directivité d'une antenne circulaire formée de 7 capteurs,  $K=5$  et en utilisant les contraintes dérivatives du premier et du second ordre.

avec  $E$ ,  $F$  et  $G$  matrices s'exprimant en fonction de  $H$ ,  $\dot{H}$  et  $\ddot{H}$ .

La figure 6 nous montre les variations du diagramme de directivité lorsqu'on utilise une antenne circulaire de 7 capteurs et 5 directions équidistantes ( $K=5$ ), les diagrammes étant détruits au-delà de cette valeur. La largeur du lobe principal est toujours insensible aux variations de fréquence sur plusieurs octaves. Le faisceau est cependant plus large que précédemment, ce qui est une conséquence du choix du nombre de directions équidistantes  $K$ . L'utilisation de contraintes dérivatives du premier et du second ordre permet d'élargir les zéros des diagrammes, le niveau des lobes secondaires étant légèrement accru.

### III. 6. INSENSIBILITÉ DU TRAITEMENT AUX VARIATIONS D'AMPLITUDE ET DE PHASE DES CAPTEURS

En général, et en particulier dans cette étude, on considère les capteurs comme ponctuels, mesurant sans aucune altération le champ acoustique au point où ils se trouvent, et traduisant toute variation du champ en un signal électrique. Mais en pratique, il est possible que les capteurs n'aient pas tous la même réponse en fréquence sur la bande considérée, et que le traitement proposé soit très sensible aux faibles variations d'amplitude et de phase des capteurs.

Un certain nombre d'auteurs ont étudié ces perturbations en traitement d'antenne conventionnel et adaptatif. Ainsi Cox [14], Farrier [15] et Godara [16] ont considéré plusieurs modèles mathématiques générant des coefficients de pondération avec des variations d'amplitude et de phase, et étudient le gain, le rapport signal à bruit et la puissance de sortie du traitement sous ces variations.

Pour étudier la sensibilité de notre traitement aux perturbations d'amplitude et de phase, nous utilisons une antenne circulaire de 5 capteurs, avec  $K=6$  et sans les contraintes dérivatives. Nous considérons une variation de 2% de l'amplitude du signal de sortie de chaque capteur et générons une perturbation de phase qui varie de 0 à 6°; ainsi les senseurs 1-5 auront respectivement sur la bande de fréquence considérée les variations de phase suivantes : 0, 2, 3, 4 et 6°. La figure 7 nous montre l'effet de ces perturbations. On peut déduire que notre traitement est insensible à ces faibles variations d'amplitude et de phase entre capteurs.

### III. 7. CONSIDÉRATION DU BRUIT DE FOND

On suppose qu'en plus du bruit émis par les sources rayonnantes, le milieu est constitué de bruit de fond externe, blanc sur la largeur de bande considérée, conforme au modèle du bruit isotrope « cylindrique » [25] et de bruit de fond interne, propre aux canaux de traitement du signal, considéré comme blanc et incohérent entre canaux. Les  $N$  signaux complexes  $x_1, x_2, \dots, x_N$  issus des  $N$  capteurs sont dus au bruit de fond et au bruit émis par les  $K$  sources rayonnantes, de sorte que le vecteur signal s'écrit

$$(26) \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^K m_i \mathbf{s}_i + \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c$$

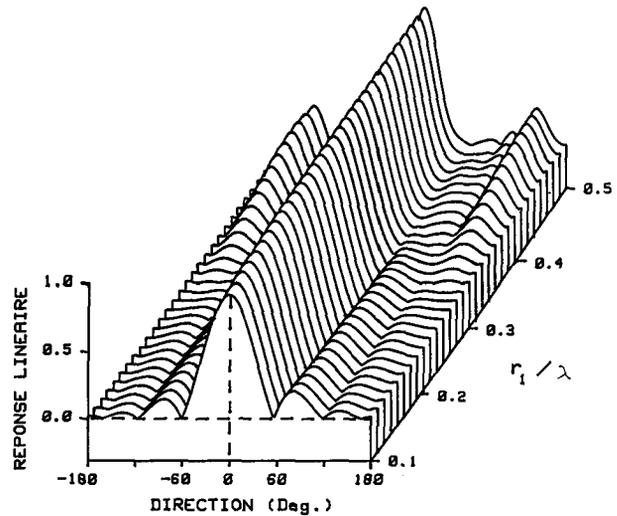


Fig. 7. - Variations du diagramme de directivité d'une antenne circulaire formée de 5 capteurs,  $K=6$ , sans contraintes dérivatives, avec des perturbations d'amplitude et de phase sur chaque capteur.

$\mathbf{b}_f$  est le vecteur à  $N$  composantes, représentant le bruit de fond « cylindrique » présent sur chaque senseur. La matrice de covariance de ce bruit de fond externe est  $\mathbf{R}_{bf} = E[\mathbf{b}_f \mathbf{b}_f^+]$ .

$\mathbf{b}_c$  est le vecteur à  $N$  composantes, représentant le bruit interne propre aux canaux. La matrice de covariance de ce bruit de fond interne est  $\mathbf{R}_{bc} = E[\mathbf{b}_c \mathbf{b}_c^+]$ .

La matrice de covariance du vecteur observable  $\mathbf{x}$ , est

$$(27) \quad \mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^+] = E \left[ \left( \sum_{i=1}^K m_i \mathbf{s}_i + \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c \right) \times \left( \sum_{j=1}^K m_j \mathbf{s}_j + \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c \right)^+ \right]$$

Les différents processus étant statistiquement indépendants entre eux, on obtient

$$(28) \quad \mathbf{R} = \sum_{i=1}^K p_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^+ + \mathbf{R}_{bf} + \mathbf{R}_{bc}$$

La matrice de covariance du bruit de fond externe se met sous la forme

$$(29) \quad \mathbf{R}_{bf} = p_f \mathbf{B}_f$$

$p_f$  et  $\mathbf{B}_f$  sont la puissance et la matrice de cohérence spatiale du bruit de fond externe, conforme au modèle « cylindrique ».

La matrice de covariance du bruit de fond interne se met sous la forme

$$(30) \quad \mathbf{R}_{bc} = p_c \mathbf{B}_c$$

$p_c$  et  $\mathbf{B}_c$  sont la puissance et la matrice de cohérence spatiale du bruit interne propre aux canaux, ce bruit étant spatialement incohérent, on a  $\mathbf{B}_c = \mathbf{I}$  (matrice identité).

L'interspectre entre signaux issus de deux capteurs  $a$  et  $b$  est

$$(31) \quad r_{ab} = \sum_{i=1}^K p_i s_{ai} s_{bi}^* + p_f \mathbf{B}_{fab} + p_c \delta_{ab}$$

avec  $\delta_{ab} = 1$  si  $a = b$  et 0 dans le cas contraire;  $a = 1, N$  et  $b = 1, N$ .

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation (28), on obtient

$$(32) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(r_{ab}) &= \sum_{i=1}^K p_i \operatorname{Re}(s_{ai} s_{bi}^*) \\ &\quad + p_f \mathbf{B}_{fab} + p_c \delta_{ab} \\ \operatorname{Im}(r_{ab}) &= \sum_{i=1}^K p_i \operatorname{Im}(s_{ai} s_{bi}^*) \end{aligned}$$

Des  $2N^2$  équations issues du système (32), seulement  $(N^2 - N + 1)$  sont indépendantes. Le vecteur covariance se met sous la forme

$$(33) \quad \mathbf{r} = \mathbf{H}' \mathbf{p}'''$$

avec  $\mathbf{p}'''$  vecteur à  $(K + 2)$  composantes contenant la puissance des signaux émis par les  $K$  sources rayonnantes à caractériser, la puissance du bruit de fond externe et interne au traitement

$$(34) \quad \mathbf{p}'''^T = [p_1, p_2, \dots, p_K, p_f, p_c]$$

$\mathbf{H}'$  est la matrice de dimensions  $(N^2 - N + 1) \times (K + 2)$  contenant les termes relatifs à la géométrie de l'antenne, aux directions des sources, à la cohérence spatiale du bruit de fond externe et interne au traitement

$$(35) \quad \mathbf{H}' = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(s_{ai} s_{bi}^*) & \mathbf{B}_{fab} & \delta_{ab} \\ \operatorname{Im}(s_{ai} s_{bi}^*) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$a = 1, N - 1; \quad b = 1, N; \quad i = 1, K$

On suppose que la puissance du bruit de fond externe est égale à l'unité, et que celle du bruit interne propre aux canaux est de  $-30$  dB. La figure 8 (courbe en

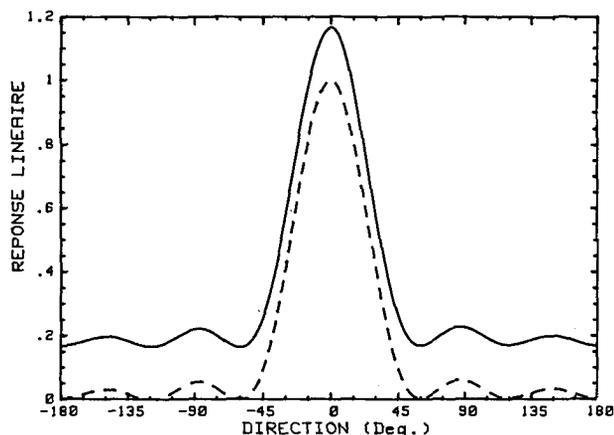


Fig. 8. — Diagrammes de directivité d'une antenne circulaire formée de 7 capteurs,  $K=6$  et en utilisant les contraintes dérivatives du premier ordre ( $r_1=0,1 \lambda$ ). — — —, en l'absence de bruit de fond; — — —, en présence de bruit de fond.

trait continu) nous montre le diagramme de directivité, en considérant une antenne circulaire de 7 capteurs, avec les contraintes dérivatives du premier ordre, 6 directions équidistantes et  $r_1=0,2 \lambda$ . Ce diagramme est comparé avec celui tracé en pointillés, qui exclu le modèle du bruit de fond. La puissance estimée en faisant abstraction des deux processus de bruit parasite subit un même accroissement suivant toutes les directions, lorsqu'on introduit le bruit de fond externe et interne qui est additif. Ce bruit produit, donc, un léger biais sur tous les diagrammes, sans les déformer.

Le niveau du bruit de fond peut être déterminé de la façon suivante : lorsqu'on fait abstraction de ce bruit, le diagramme de directivité présente 5 zéros suivant les directions  $-120^\circ, -60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$  et  $180^\circ$ ; toute augmentation de niveau en ces points, n'est due qu'au bruit de fond externe et interne. Ce niveau peut alors être soustrait de la réponse du traitement, pour obtenir les diagrammes de la figure 5.

#### IV. Performances du traitement lors de l'estimation de la puissance et de la direction de signaux

##### IV. 1. LES PRINCIPAUX ESTIMATEURS DE PUISSANCE

On considère une antenne circulaire de 7 capteurs et on se place dans la situation suivante : le milieu est formé de deux sources indépendantes, l'une de 0 dB à  $0^\circ$  connue, l'autre plus faible, de  $-10$  dB à  $50^\circ$  supposée inconnue. Le bruit de fond externe est conforme au modèle du bruit « cylindrique », et de puissance unité. Le bruit de fond interne, propre aux canaux, a une puissance de  $-30$  dB.

On se propose de caractériser le signal faible aux basses fréquences, ou pour de faibles valeurs du rapport  $r_1/\lambda$  (lorsque  $r_1=0,1 \lambda$ , et que la célérité du son est de  $343 \text{ ms}^{-1}$ , la direction d'un signal de 50 Hz nous amène à considérer une antenne de rayon  $r_1=68 \text{ cm}$ , ce qui est concevable). Pour cela nous allons utiliser les méthodes d'analyse continue au second ordre : voie préformée, maximum de vraisemblance ou de Capon, maximum d'entropie et Lagunas-Hernandez.

La puissance estimée en utilisant l'antenne équiphase est

$$(36) \quad \mathbf{P} = \mathbf{w}^+ \mathbf{R} \mathbf{w}$$

$\mathbf{w}$  est le vecteur formation de voies.

La figure 9 nous montre la réponse de l'antenne équiphase placée dans la situation décrite ci-dessus. La faible directivité du groupement aux basses fréquences, ainsi que la présence du signal fort dans le milieu, ne nous permettent pas de discerner le signal faible. Ce traitement classique ne nous permet pas de résoudre notre problème.

La méthode du maximum de vraisemblance, ou encore de Capon, permet de déterminer le vecteur pondération  $\mathbf{w}$  qui minimise la puissance moyenne en

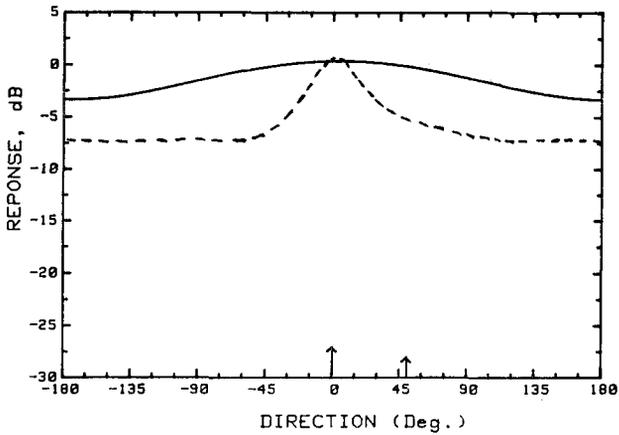


Fig. 9. — Réponse en puissance de l'antenne circulaire équiréphasée formée de 7 capteurs ( $r_1=0,1\lambda$ ), —. Réponse de l'antenne circulaire en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance ( $r_1=0,1\lambda$ ), - - -.

sortie du traitement, sous la contrainte qu'un signal provenant de la direction d'observation, caractérisée par le vecteur  $\mathbf{v}$ , soit parfaitement reproduit. La puissance estimée en utilisant cette méthode se met sous la forme [17, 18, 19]

$$(37) \quad P = (\mathbf{v}^+ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v})^{-1}$$

La figure 9 (en tiretés) nous montre la réponse de l'antenne, en considérant cet estimateur, lorsque  $r_1=0,1\lambda$ . Le signal faible ne peut pas être caractérisé. On peut vérifier que cette technique donne d'assez bons résultats à des fréquences élevées ( $r_1 > 0,4\lambda$ ), sur l'estimation de la direction du signal faible.

La méthode du maximum d'entropie [20, 21, 22] est équivalente à la minimisation de l'erreur quadratique moyenne d'une prédiction linéaire. La puissance estimée en utilisant cette technique est

$$(38) \quad P = \frac{P_e}{\left| 1 - \sum_{i=1}^{N-1} w_{i+1} \exp(-j2\pi FT_i) \right|^2}$$

$F$  est la fréquence du signal émis,  $T_i$  est le retard entre le signal reçu sur le capteur  $i$  et celui reçu sur un point de référence fixe et arbitraire et  $P_e$  correspond à l'erreur minimale de prédiction. Les coefficients de pondération et  $P_e$  sont obtenus en utilisant la matrice de covariance, suivant la relation

$$(39) \quad [1, -w_2, -w_3, \dots, -w_N] = [P_e, 0, 0, \dots, 0] \mathbf{R}^{-1}$$

En se plaçant dans la situation décrite précédemment, on remarque que toute information est distordue, rendant impossible la caractérisation du signal faible et même celle du signal fort comme l'indique la figure 10. On montre que cette méthode est performante à des fréquences plus élevées ( $r_1 > 0,4\lambda$ ), permettant de déterminer la direction des deux

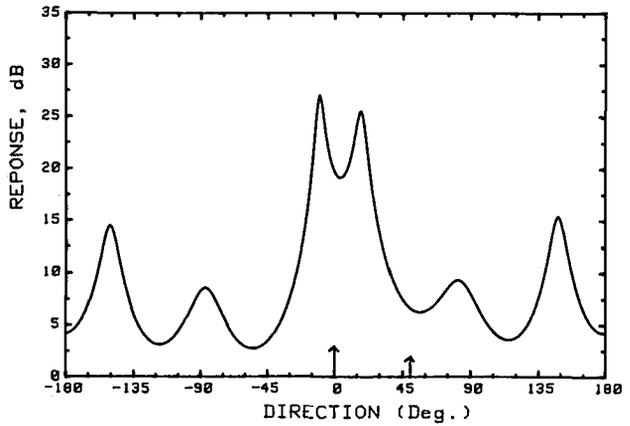


Fig. 10. — Réponse de l'antenne circulaire formée de 7 capteurs, en utilisant la méthode du maximum d'entropie ( $r_1=0,1\lambda$ ).

signaux et possédant un pouvoir de résolution supérieur à celui qui serait obtenu par la technique du maximum de vraisemblance [27].

La méthode de Lagunas-Hernandez [23] présente un juste milieu entre la méthode haute résolution du maximum d'entropie et la méthode du maximum de vraisemblance. La puissance estimée se met sous la forme

$$(40) \quad P = (\mathbf{v}^+ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}) (\mathbf{v}^+ \mathbf{R}^{-2} \mathbf{v})^{-1}$$

Cette méthode ne nous permet pas de caractériser le signal faible lorsque  $r_1=0,1\lambda$ , comme l'indique la figure 11. La direction du signal fort peut cependant être déterminée. On montre que cette technique, comme les précédentes, donne de bons résultats à des

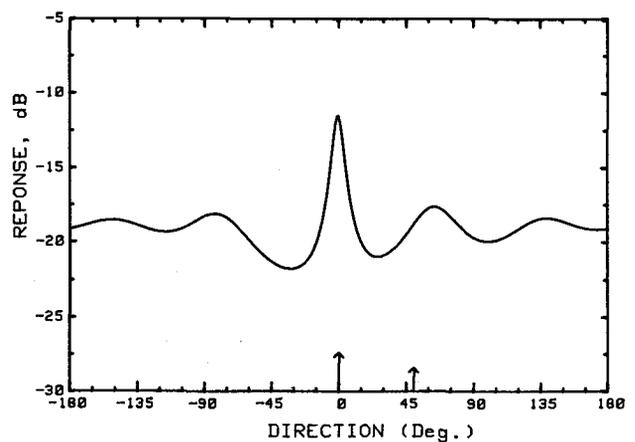


Fig. 11. — Réponse de l'antenne circulaire formée de 7 capteurs, en utilisant la méthode de Lagunas-Hernandez ( $r_1=0,1\lambda$ ).

fréquences plus élevées, permettant d'estimer correctement la direction des deux signaux.

Aucune des quatre méthodes précédentes n'est performante pour caractériser le signal faible aux basses fréquences. Nous allons montrer que le traitement

utilisant le vecteur covariance, avec les contraintes dérivatives du premier ordre, donne de meilleurs résultats, lorsqu'on se place dans la situation évoquée en début de ce paragraphe.

IV. 2. PERFORMANCES DU TRAITEMENT UTILISANT LE VECTEUR COVARIANCE

La figure 12 nous montre la réponse de l'antenne circulaire formée de 7 capteurs (le bruit de fond ayant été négligé), en utilisant 13 directions équidistantes et sans contraintes dérivatives, lorsque  $r_1 = 0,1 \lambda$ .

Le niveau important des lobes secondaires rend impossible l'identification du signal faible. Ce niveau est réduit en utilisant les contraintes dérivatives du premier ordre, la caractérisation des deux signaux étant alors possible. Ainsi, la figure 13 (trait continu) nous montre la réponse de l'antenne en considérant les contraintes dérivatives du premier ordre, 6 directions équidistantes et  $r_1 = 0,1 \lambda$ . Étant donné que le diagramme de directivité en puissance, qui est la réponse du traitement au signal de 0 dB est fixe (courbe en pointillés), la comparaison des deux diagrammes et les anomalies qui en résultent, nous indiquent sans ambiguïté la présence d'un signal plus faible à environ 50°. Ce résultat est de loin supérieur à ceux obtenus précédemment.

Lorsque  $r_1 = 0,35 \lambda$ , les deux signaux peuvent encore être identifiés sans aucune ambiguïté, comme l'indique la figure 14. Ceci est une conséquence du traitement utilisé, qui possède des diagrammes de directivité à faisceau constant sur une très large bande.

Le niveau du bruit de fond peut être déterminé suivant la technique exposée dans le paragraphe III.7, et soustrait de la réponse précédente. Nous obtenons alors les diagrammes de la figure 15 qui représentent la réponse du traitement aux deux signaux uniquement (trait continu), pour la valeur  $r_1 = 0,1 \lambda$ . La source émettant le signal faible à 50° est toujours discernable; sa puissance de -10 dB peut maintenant être facilement estimée.

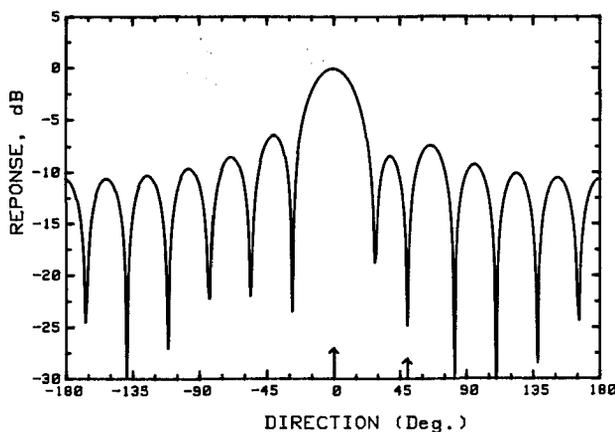


Fig. 12. — Réponse de l'antenne circulaire formée de 7 capteurs,  $K=13$ , sans contraintes dérivatives et en l'absence de bruit de fond ( $r_1 = 0,1 \lambda$ ).

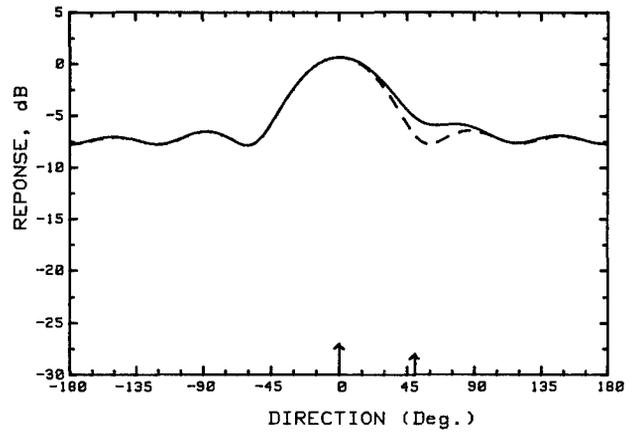


Fig. 13. — Réponse de l'antenne circulaire formée de 7 capteurs,  $K=6$ , avec les contraintes dérivatives du premier ordre et en présence de bruit de fond ( $r_1 = 0,1 \lambda$ ). —, réponse de l'antenne aux deux signaux; - - -, réponse de l'antenne au signal de 0 dB.

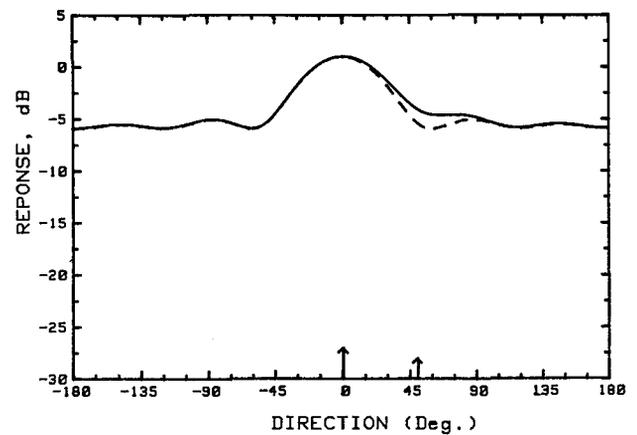


Fig. 14. — Réponse de l'antenne circulaire formée de 7 capteurs,  $K=6$ , avec les contraintes dérivatives du premier ordre et en présence de bruit de fond ( $r_1 = 0,35 \lambda$ ). —, réponse de l'antenne aux deux signaux; - - -, réponse de l'antenne au signal de 0 dB.

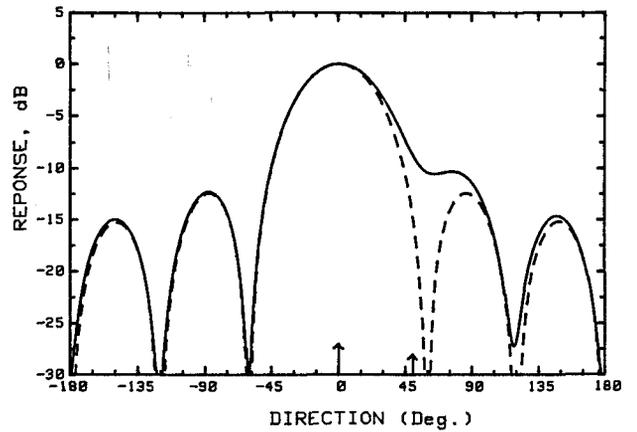


Fig. 15. — Réponse de l'antenne circulaire formée de 7 capteurs,  $K=6$ , avec les contraintes dérivatives du premier ordre et en l'absence de bruit de fond ( $r_1 = 0,1 \lambda$ ). —, réponse de l'antenne aux deux signaux; - - -, réponse de l'antenne au signal de 0 dB.

Les caractéristiques du signal fort (0 dB à 0°) étant connues, la réponse du traitement à ce signal peut être soustraite de la réponse précédente pour obtenir

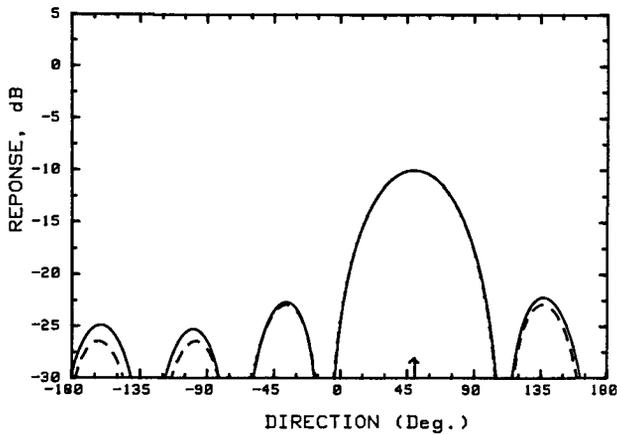


Fig. 16. — Réponse de l'antenne circulaire formée de 7 capteurs,  $K=6$ , avec les contraintes dérivatives du premier ordre, en l'absence de bruit de fond et sans le signal de 0 dB. —,  $r_1=0,1 \lambda$ ; - - -,  $r_1=0,35 \lambda$ .

les diagrammes de la figure 16, qui nous permettent d'estimer directement et sans ambiguïté la puissance et la direction du signal « inconnu ».

## V. Conclusion

Les diagrammes conçus à partir du vecteur de covariance  $r$  sont sous le contrôle d'un opérateur, qui choisit le nombre de directions équidistantes  $K$  pour former la matrice de filtrage  $H^{-}$ , qui est un formateur de voies. Cette technique nous permet d'obtenir des diagrammes superdirectifs aux basses fréquences, avec une variation négligeable du faisceau principal sur plusieurs octaves. L'utilisation des contraintes dérivatives du premier ordre permet de réduire le niveau des lobes secondaires, qui sont source d'ambiguïtés lors de l'estimation de la direction et de la puissance de sources rayonnantes.

Cinq traitements d'antenne ont été étudiés dans une situation bien définie, pour caractériser deux signaux aux basses fréquences : le traitement conventionnel, le traitement du maximum de vraisemblance (ou de Capon), du maximum d'entropie, de Lagunas-Hernandez et le traitement utilisant le vecteur covariance. Ces deux signaux ne peuvent pas être caractérisés avec une antenne circulaire aux basses fréquences ( $r_1=0,1 \lambda$ ) en considérant les méthodes adaptatives (le signal fort étant cependant discernable).

Il faut noter cependant que puisque nous connaissons la position de la source émettant le signal fort, celui-ci peut être éliminé par traitement optimal d'antenne ou en utilisant le traitement de Capon sous la contrainte linéaire suivante : position d'un zéro dans la direction du brouilleur. Le signal faible sera alors détecté.

Mais le but de cet article est de proposer une autre technique de traitement d'antenne, présentant des diagrammes de directivité indépendants de la fréquence dans une large bande, caractérisés par des lobes secondaires de faible niveau. Cette technique, qui n'est pas haute résolution, permet d'estimer le gisement et la puissance de deux signaux (dont un faible) aux basses fréquences.

Je remercie les experts qui par leurs conseils enrichissants ont permis d'éclaircir certains points et ont contribué à améliorer la qualité de l'article.

*Manuscrit reçu le 16 novembre 1987, version révisée le 3 octobre 1988.*

## Annexe 1

Détermination de la puissance estimée  $p$  en utilisant les contraintes dérivatives du premier ordre :

$$r = [H : \dot{H}] \begin{bmatrix} p \\ \Delta p \end{bmatrix}$$

En utilisant la matrice pseudo-inverse de  $[H : \dot{H}]$  on obtient :

$$\begin{bmatrix} p \\ \Delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T \\ \dot{H}^T \end{bmatrix} (H : \dot{H})^{-1} \begin{bmatrix} H^T \\ \dot{H}^T \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} p \\ \Delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T H & H^T \dot{H} \\ \dot{H}^T H & \dot{H}^T \dot{H} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H^T \\ \dot{H}^T \end{bmatrix} r$$

ce qui se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} p \\ \Delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^T \\ \dot{H}^T \end{bmatrix} r$$

Puisque c'est  $p$  que nous voulons déterminer, nous avons :

$$p = (A H^T + B \dot{H}^T) r$$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont déterminées en considérant :

$$\begin{bmatrix} H^T H & H^T \dot{H} \\ \dot{H}^T H & \dot{H}^T \dot{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} H^T H A + H^T \dot{H} C &= I \\ H^T \dot{H} B + H^T \dot{H} D &= 0 \\ \dot{H}^T H A + \dot{H}^T \dot{H} C &= 0 \\ \dot{H}^T H B + \dot{H}^T \dot{H} D &= I \end{aligned}$$

La résolution de ce système conduit à

$$\begin{aligned} A &= (H^T H - H^T \dot{H} (\dot{H}^T \dot{H}^{-1} \dot{H}^T H)^{-1} \\ B &= -(H^T H)^{-1} H^T \dot{H} \\ &\quad \times (\dot{H}^T \dot{H} - H^T H (H^T H)^{-1} H^T \dot{H})^{-1} \end{aligned}$$

Sachant que  $\mathbf{H}^{-1} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$  on obtient

$$\mathbf{p} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} - \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}} (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}})^{-1} \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{r} - \mathbf{H}^{-1} \dot{\mathbf{H}} (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}^{-1} \dot{\mathbf{H}})^{-1} \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{r}$$

## Annexe 2

Détermination de la puissance estimée  $\mathbf{p}$  en utilisant les contraintes dérivatives du premier et du second ordre :

$$\mathbf{r} = [\mathbf{H}] \mathbf{p} + [\dot{\mathbf{H}}] \Delta \mathbf{p} + [\ddot{\mathbf{H}}] \frac{\Delta^2}{2} \mathbf{p}$$

$$\mathbf{r} = ([\mathbf{H}] : [\dot{\mathbf{H}}] : [\ddot{\mathbf{H}}]) \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{p} \\ \frac{\Delta^2}{2} \mathbf{p} \end{bmatrix}$$

En utilisant la matrice pseudo-inverse de  $([\mathbf{H}] : [\dot{\mathbf{H}}] : [\ddot{\mathbf{H}}])$  on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{p} \\ \frac{\Delta^2}{2} \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{H} & \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}} & \mathbf{H}^T \ddot{\mathbf{H}} \\ \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} & \dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} & \dot{\mathbf{H}}^T \ddot{\mathbf{H}} \\ \ddot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} & \ddot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} & \ddot{\mathbf{H}}^T \ddot{\mathbf{H}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \\ \dot{\mathbf{H}}^T \\ \ddot{\mathbf{H}}^T \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

Ce qui se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{p} \\ \frac{\Delta^2}{2} \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{J} & \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \\ \dot{\mathbf{H}}^T \\ \ddot{\mathbf{H}}^T \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

d'où la valeur de  $\mathbf{p}$  :

$$\mathbf{p} = (\mathbf{E} \mathbf{H}^T + \mathbf{F} \dot{\mathbf{H}}^T + \mathbf{G} \ddot{\mathbf{H}}^T) \mathbf{r}$$

Nous allons déterminer  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  en fonction de  $\mathbf{H}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$  et  $\ddot{\mathbf{H}}$ . Ces trois matrices sont déterminées en considérant.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{H} & \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}} & \mathbf{H}^T \ddot{\mathbf{H}} \\ \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} & \dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} & \dot{\mathbf{H}}^T \ddot{\mathbf{H}} \\ \ddot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} & \ddot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} & \ddot{\mathbf{H}}^T \ddot{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{J} & \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} & \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{E} + \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{J} + \mathbf{H}^T \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{M} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{F} + \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{K} + \mathbf{H}^T \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{N} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{G} + \mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{L} + \mathbf{H}^T \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{E} + \dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{J} + \dot{\mathbf{H}}^T \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{F} + \dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{K} + \dot{\mathbf{H}}^T \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{N} = \mathbf{I}$$

$$\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{G} + \dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{L} + \dot{\mathbf{H}}^T \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

$$\ddot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{E} + \ddot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{J} + \ddot{\mathbf{H}}^T \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

$$\ddot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{F} + \ddot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{K} + \ddot{\mathbf{H}}^T \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{N} = \mathbf{0}$$

$$\ddot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{G} + \ddot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{L} + \ddot{\mathbf{H}}^T \ddot{\mathbf{H}} \mathbf{P} = \mathbf{I}$$

La résolution de ce système conduit, en posant

$$\mathbf{H}' = (\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H})^{-1} \dot{\mathbf{H}}^T,$$

à :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{H}' [\dot{\mathbf{H}} (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}})^{-1} \times (\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}}) + \dot{\mathbf{H}}] \times [(\mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}}) (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}})^{-1} \times (\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}}) + (\mathbf{H}^T \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}})]^{-1}$$

$$\mathbf{F} = -\mathbf{H}' [\dot{\mathbf{H}} (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}})^{-1} \times (\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}}) + \dot{\mathbf{H}}] \times [(\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}}) (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}})^{-1} \times (\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}}) + (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}})]^{-1}$$

$$\mathbf{G} = -\mathbf{H}' [\dot{\mathbf{H}} (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}})^{-1} \times (\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}}) + \dot{\mathbf{H}}] \times [(\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}}) (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}})^{-1} \times (\dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}}) + (\dot{\mathbf{H}}^T \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{H} \mathbf{H}' \dot{\mathbf{H}})]^{-1}$$

expressions qui nous permettent de concevoir

$$\mathbf{p} = (\mathbf{E} \mathbf{H}^T + \mathbf{F} \dot{\mathbf{H}}^T + \mathbf{G} \ddot{\mathbf{H}}^T) \mathbf{r}$$

## Annexe 3

Diagrammes conçus avec le vecteur covariance  $\mathbf{r}$ , pour diverses valeurs de  $K$ .

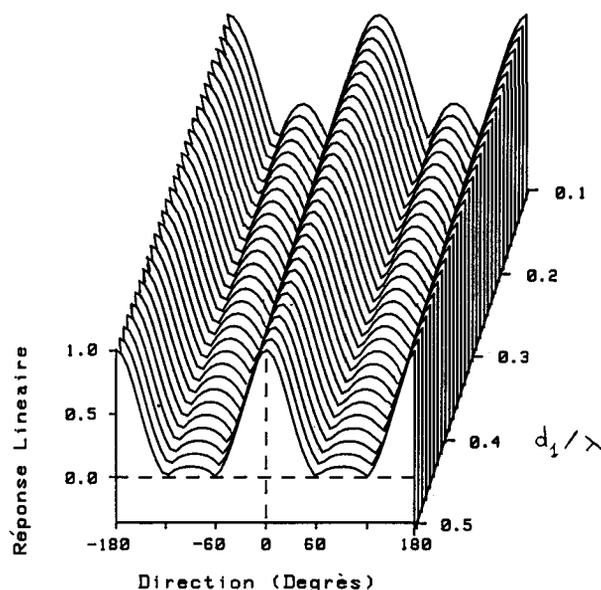


Fig. A.1. - Variations du diagramme de directivité en considérant 2 capteurs, avec  $K=3$ .

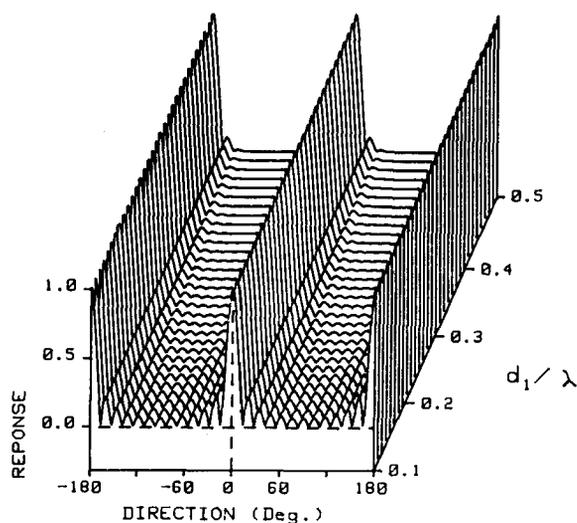


Fig. A. 2. — Variations du diagramme de directivité d'une antenne rectiligne formée de 7 capteurs, avec  $K=13$ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. G. TUCKER, Array with Constant Beamwidth over a Wide Frequency Range, *Nature*, 180, Sept. 1957, p. 496-497.

[2] R. P. SMITH, Constant Beamwidth Receiving Arrays for Broadband Sonar Systems, *Acustica*, 23, 1970, p. 21-26.

[3] A. L. VAN BUREN et P. H. ROGERS, New Approach to a Constant Beamwidth Transducer, *JASA*, 64, n° 1, July 1978, p. 38-43.

[4] A. L. VAN BUREN, L. DWIGHT, M. D. JEVNAGER et A. C. TIMS, Experimental Constant Beamwidth Transducer, *JASA*, 76, n° 6, June 1983, p. 2200-2209.

[5] W. J. TROTT et J. JARZYNSKI, Array Shading for a Broadband Constant Directivity Transducer, *JASA*, 64, n° 5, November 1978, p. 1266-1269.

[6] J. LARDIES et J. P. FLENNER, Détection et Estimation de la Puissance de Signaux à Large Bande par l'Intermédiaire d'une Antenne Acoustique, *X<sup>e</sup> Colloque d'Acoustique Aéronautique et Navale*, CNRS, Marseille, 19-21 novembre 1986.

[7] J. LARDIES et J. P. GUILHOT, Octave Bandwidth Constant Beamwidth Acoustical End-Fire Line Array, *Review of Scientific Instruments*, 58, n° 9, September 1987, p. 1727-1731.

[8] J. LARDIES et J. P. GUILHOT, An Optimal Broadband Constant Beamwidth End-Fire Line Array, *Acoustics Letters*, 10, n° 5, Dec. 1986, p. 70-75.

[9] J. LARDIES et J. P. FLENNER, End-Fire Line Array and Cophasal Concentric Rings Array with Constant

Beamwidth over a Wide Frequency Range, *Vth International Conference on Antennas and Propagation, IEE-ICAP 87*, University of York, UK, 30 March-2 April 1987, p. 189-193.

[10] J. LARDIES et J. P. GUILHOT, Étude de la Détection de Signaux avec une Antenne Acoustique, *II Specialized Conference on Acoustics and Ocean Bottom*, FASE 87, Madrid, Spain, June 18-20, 1987, p. 229-238.

[11] J. E. HUDSON, *Adaptive Array Principles*, IEE, Peter Peregrinus, 1981.

[12] A. M. VURAL, Effects of Perturbations on the Performance of Optimum/Adaptive Arrays, *IEEE Trans. AES*, 15, n° 1, January 1979, p. 76-87.

[13] A. K. STEELE, Comparison of Directional and Derivative Constraints subject to Multiple Linear Constraints, *IEE Proc.*, 130, Pt. F, February 1983, p. 41-45.

[14] H. COX, Sensitivity Considerations in Adaptive Beamforming, *Proc. NATO Advanced Study Institute of Signal Processing*, Loughborough, UK, Aug. 1972.

[15] D. R. FARRIER, Gain of an Array of Sensors Subjected to Processor Perturbations, *IEE Proc.*, 130, Pt. H, June 1983, p. 251-254.

[16] L. C. GODARA, Error Analysis of the Optimal Antenna Array Processors, *IEEE Trans. AES*, 22, n° 4, July 1986, p. 395-408.

[17] H. A. D'ASSUMPCAO, An Overview of Signal Processing for Arrays of Receivers, *JEEE, Australia*, 4, n° 1, March 1984, p. 6-18.

[18] D. H. JOHNSON, The Application of Spectral Estimation Methods to Bearing Estimation Problems, *Proc. IEEE*, 70, n° 9, September 1982, p. 1018-1028.

[19] J. W. R. GRIFFITHS, Adaptive Array Processing. A tutorial, *IEE Proc.*, 130, n° 1, February 1983, p. 3-10.

[20] A. VAN DEN BOS, Alternative Interpretation of Maximum-Entropy Spectral Analysis, *IEEE Trans. IT*, 17, n° 4, 1971, p. 493-495.

[21] D. R. FARRIER et T. J. HICKS, Power estimation for an array of sensors and its use in broadband detection, *IEE Proc.*, 130, Pt. F, n° 3, April 1983, p. 261-266.

[29] R. A. MONZINGO et T. W. MILLER, *Introduction to Adaptive Arrays*, J. Wiley, 1980.

[23] H. A. D'ASSUMPCAO, Some New Signal Processors for Arrays of Sensors, *IEEE Trans. IT*, 26, n° 4, July 1980, p. 441-453.

[24] R. O. SCHMIDT, Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation, *IEEE Trans. AP*, 34, n° 3, March 1986, p. 276-280.

[25] G. BIENVENU, Méthodes Haute Résolution pour la Localisation de Sources Rayonnantes, *L'Onde Électrique*, 64, n° 4, juillet-août 1984, p. 28-37.

[26] J. MUNIER et G. Y. DELISLE, De l'Analyse spatiale Continue à l'Analyse Paramétrique, *Actes du GRETSI*, Nice, mai 1985, p. 307-312.

[27] J. LARDIES, Étude d'antennes acoustiques à directivité constante sur une large bande, *Thèse*, Université Paul-Sabatier, Toulouse, 1987.