

Amélioration de la restauration

d'images floues

par un filtrage adaptatif de Kalman

utilisant une image miroir

High efficiency image restoration using mirror images

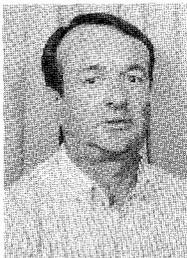
and adaptive Kalman filtering



Laure BLANC-FERAUD

41, boulevard Napoléon-III, 06041 NICE CEDEX.

DEA en Mathématiques et Automatique à l'Université Paris-IX - Dauphine en 1986. Préparation d'une thèse en compression et restauration d'images au LASSY, Université de Nice, depuis septembre 1986.



Michel BARLAUD

41, boulevard Napoléon-III, 06041 NICE CEDEX.

Maître-assistant agrégé à l'Université de Dakar de 1972 à 1983, il effectue sa recherche sur la commande des systèmes photovoltaïques. Il obtient sa thèse d'état en 1983 à l'Université Paris-XII. Maître de conférence à l'Université de Nice depuis 1984, il travaille en traitement du signal sur la modélisation de signaux non stationnaires et multidimensionnels et sur la compression et la restauration d'image.



Pierre MATHIEU

41, boulevard Napoléon-III, 06041 NICE CEDEX.

Ingénieur ENSEEIHT en 1979, il soutient en 1983 une thèse de Docteur-Ingénieur au LEEI de l'INP de Toulouse, sur les modélisations de machines synchrones alimentés par convertisseurs statiques. Maître-assistant à l'Université de Nice depuis 1985, il effectue sa recherche en traitement du signal appliqué aux images.

RÉSUMÉ

Notre propos est la restauration d'image dégradée par un flou ou un bougé, additionné d'un bruit. La méthode proposée est dérivée de l'algorithme de filtrage récursif introduit par Biemond en 1983 [13] qui offre l'avantage d'être plus rapide que d'autres méthodes de restauration d'image, et de réaliser une déconvolution significative.

L'écriture vectorielle du modèle AR 2D de l'image et de la dégradation fait apparaître des matrices de Toeplitz. Celles-ci approchées par des matrices circulantes, sont facilement diagonalisées par FFT. Cette diagonalisation permet de transformer le système 2D de taille $N \times N$, en N systèmes 1D disjoints de taille N : l'application de N FFT sur les lignes permet d'obtenir N filtres de Kalman disjoints sur les colonnes.

L'utilisation de la FFT, qui suppose la périodicité du signal traité, fait apparaître une discontinuité entre les bords droit et gauche de l'image. Cette discontinuité du signal crée des fréquences parasites qui se traduisent sur l'image restaurée, par des bandes verticales blanches et noires. Afin d'éliminer ces rayures, nous proposons d'utiliser dans cet algorithme une image miroir construite à partir de l'image originale : l'image à traiter possède alors des propriétés de continuité et de symétrie que nous exploitons.

Enfin, nous développons un filtre adaptatif de Kalman appliqué au signal 1D à restaurer, afin de réduire la dynamique des gains du filtre de certains de ces signaux.

Des résultats sont présentés sur des images artificiellement rendues floues ou bougées.

MOTS CLÉS

Restauration d'image, filtrage Kalman, FFT, image miroir, méthode adaptative.

SUMMARY

The purpose of this paper is image restoration by means of fast parallel Kalman filtering. This algorithm was introduced by Biemond et al. in 1983 [13] for image restoration. The problem is the appearance of ringing in the restored image. It results from the implicit assumption of rows periodicity, when FFT is applied on the image rows. Since left and right boundaries values are different, discontinuity points appear. In order to achieve boundary condition suitable for the 1D horizontal FFT processing, we use in the algorithm a mirror image. We first give the description of this mirror image, and then we exploit in the algorithm its horizontal properties of boundaries continuity and symmetry.

Then, an adaptive Kalman filtering is introduced to avoid non consistency of the Kalman gains factors on some frequencies, and to reduce the remaining ringing.

Finally results are shown for some images and PSF.

KEY WORDS

Image restoration, point spread function, fast parallel Kalman filter, FFT, mirror image, adaptive Kalman filter.

1. Introduction

Le propos de cet article est la restauration d'images, qui consiste à reconstituer au mieux des images ayant subi des dégradations. Il s'agit de supprimer ces dégradations (bruit, flou...), afin de retrouver l'image originale, en optimisant un certain critère [1].

La restauration d'image est un problème qui apparaît dans de nombreux domaines. En effet, quelle que soit l'origine que puissent avoir les images numériques, que ce soient des images d'origine photographique, scanner, satellite, etc., il est important d'en améliorer la qualité. Les résultats obtenus par un traitement spécifique effectué sur une image numérique, comme la détection de contours ou encore la reconnaissance de textures, sont conditionnés par la qualité de l'image initiale.

Différents critères d'optimisation seront choisis, en fonction de l'utilisation ou du traitement ultérieur de l'image, ainsi que de la connaissance que l'on peut avoir *a priori* de cette image.

Les dégradations subies par une image peuvent être causées par différents phénomènes (bruit de mesure, bougé de l'appareil photographique...). Les algorithmes de restauration seront différents suivant le type de dégradation observé, en particulier en fonction du système choisi pour modéliser la dégradation. Ce modèle peut être simplement l'addition d'un bruit (bruit de mesure, ou bruit de transmission), ou la convolution de l'image originale avec une fonction représentant la dégradation. Cette fonction peut modéliser une variété de dégradations comme par exemple un bougé de la caméra, une défocalisation ou une diffraction de l'appareil photographique, etc. Elle est usuellement appelée dans la littérature « Point Spread Function » (PSF) [1].

Nous nous intéresserons plus particulièrement dans cet exposé à la restauration d'images floues, bougées et bruitées qui sont les cas les plus fréquents rencontrés en restauration d'images. Le problème posé est celui de la déconvolution en présence de bruit.

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Le problème consiste à retrouver une image numérisée, représentée par le signal $x(m, n)$ (m étant la ligne et n la colonne du pixel, m et n variant de 1 à N), à partir d'une image numérique observée $y(m, n)$ telle que :

$$(1) \quad y(m, n) = \sum_{k=-K_1}^{K_2} \sum_{l=L_1}^{L_2} c(k, l) \times x(m-k, n-l) + w(m, n)$$

où $c(k, l)$ est la PSF, et $w(m, n)$ un bruit blanc gaussien, non corrélé avec les données.

C'est un problème de déconvolution difficile car l'équation (1) réécrite sous forme matricielle [équation (2)] fait apparaître une matrice C qui est une matrice mal conditionnée.

$$(2) \quad Y = CX + W$$

Il apparaît en général que certaines lignes ou colonnes de C sont dépendantes [3]. Il est clair que le problème d'inversion posé est difficile, que la solution X n'est pas unique, et qu'il faudra en conséquence choisir une solution particulière parmi toutes les solutions admissibles, en utilisant au mieux la connaissance *a priori* que l'on peut avoir sur l'image d'origine X .

2. RAPPEL DE CERTAINES MÉTHODES EXISTANTES

Diverses méthodes ont été développées dans les années 70 [1] pour résoudre ce problème. Une des premières techniques utilisée, est le filtrage inverse, qui consiste à prendre pour solution \underline{X} :

$$(3) \quad \underline{X} = C^{-1} Y + C^{-1} W$$

Malheureusement l'inverse de C n'existe pas toujours, et dans le cas où l'on peut la calculer, cette matrice étant mal conditionnée, la solution est dominée par le bruit [1].

Des améliorations ont été apportées à cette méthode, en imposant des contraintes sur le type de solutions à obtenir. Malgré tout, les différentes méthodes développées par Hunt [4] dans le cadre d'une optimisation au sens des moindres carrés s'avèrent difficilement applicables en raison des zéros présents dans la matrice C .

Une seconde approche du problème est l'approche stochastique. Le caractère aléatoire du bruit w est alors pris en compte. Le problème est ici posé en terme d'estimation de l'état x , x étant un processus aléatoire, connaissant une observation y de x , la loi du bruit w , et la dégradation c .

La méthode d'estimation la plus couramment utilisée est le filtrage de Wiener [1]. Malheureusement, cette méthode étant une optimisation du type des moindres carrés, elle pose les mêmes problèmes de résolution. D'autre part cette technique ne prend pas en compte la non-stationnarité de l'image, et nécessite de plus la connaissance de la densité spectrale de l'image d'origine qui est inconnue.

Une seconde méthode très utilisée en restauration d'image dans l'approche stochastique, est la méthode du maximum *a posteriori* (méthode du MAP) [1, 5, 7]. Cette méthode donne de bons résultats mais a l'inconvénient d'avoir un temps de traitement très important. Récemment, des recherches ont été faites par Demoment et Djafari [16] afin de simplifier cette méthode et d'en réduire le temps de calcul. La méthode du MAP a notamment l'avantage de ne pas faire d'hypothèse sur la linéarité du système de dégradation de l'image, et est donc utilisée dans le cas de dégradations modélisées par des systèmes non linéaires [2, 8].

Dans le cas d'un bruit multiplicatif, Chellappa utilise le critère du MAP, et résout le système obtenu par une méthode de « simulated annealing » (recuit simulé) [10]. Les résultats ont montré qu'un tel bruit pouvait efficacement être réduit par la méthode du MAP, mais encore une fois au prix d'un temps de calcul considérable. Ces méthodes ont été adaptées au cas d'une PSF variant dans l'espace [6, 8, 9].

Enfin, la méthode récursive de filtrage de Kalman a été étendue au cas 2D et appliquée pour la restauration d'images. Les premiers travaux ont été effectués par Woods [11, 12]. Il apparaît que l'image est bien déconvoluée, c'est-à-dire que le flou a bien été supprimé, mais ceci ne peut être obtenu qu'au prix d'un coût de calcul très élevé. La lourdeur d'un tel filtrage sur une image quelconque $N \times N$, est due au fait que l'état du système dynamique 2D utilisé pour le filtrage a une dimension de l'ordre de N . Il en résulte que les équations de calcul du gain du filtre (l'équation de Riccati en particulier) font intervenir des inconnues matricielles dont la dimension est de l'ordre de $N \times N$. La mise en œuvre d'un tel filtre, même sur un calculateur puissant, pose des problèmes de temps de résolution. Aussi, dès les premières applications, des modifications ont été apportées au filtre de Kalman. Citons un des premiers algorithmes et le plus utilisé à l'heure actuelle, le Reduced Update Kalman Filter (RUKF), développé par Woods en 1971 [11].

Plus récemment, les équations de Chandrasekhar ont été étendues au cas 2D [19] pour le calcul des gains du filtre de Kalman et apportent une réduction de temps de calcul supplémentaire à l'algorithme de RUKF.

Une approche différente du problème a permis à Biemond en 1983 [13] d'utiliser de façon rapide le filtre de Kalman. L'idée maîtresse de cette méthode est de diagonaliser le système 2D pour obtenir N systèmes 1D décorrélés. La transformée théorique de Karhunen Loeve est approchée par une FFT pour décorréler les colonnes. Ainsi la restauration s'effectue par N filtres de Kalman sur les N colonnes de l'image transformée. Ce filtrage est beaucoup plus rapide que celui en dimension 2 : le nombre d'opérations élémentaires est divisée par un facteur de l'ordre de N^2 .

C'est pourquoi, parmi les différentes méthodes rappelées ci-dessus, nous avons retenue cette dernière pour le problème de la restauration d'image. L'efficacité du filtre de Kalman pour l'estimation de l'état d'un système dynamique, la rapidité de l'algorithme obtenue grâce à la transformation de Fourier, et enfin le

fait que cette méthode récursive tienne compte de la non-stationnarité des images ont été les trois facteurs déterminants dans le choix de la méthode.

Cependant cette méthode, appliquée directement sur une image floue, ne donne pas la qualité visuelle attendue par la restauration. Si le flou a été correctement supprimé et que les contours sont nets, il apparaît des dégradations sur l'image qui n'existaient pas à l'origine. Le principal défaut de ces images est la formation de raies blanches et noires verticales, qui se propagent en échos sur l'image à partir des bords. Après avoir posé le problème général et décrit les transformations effectuées pour la décorrélation des colonnes en partie 2, nous analysons dans la partie 3 l'origine des défauts de la méthode et proposons une solution pour les éliminer. La solution que nous proposons est basée sur la construction d'une image miroir, qui, nous le verrons, offre de nombreux avantages dont le principal est bien sûr d'éliminer les raies. Enfin, le filtrage sera rendu adaptatif afin d'améliorer encore la qualité visuelle de l'image restaurée. En partie 4 nous présentons les résultats des différentes simulations effectuées sur des images noir et blanc artificiellement rendues floues et nous concluons en partie 5.

2. Filtrage rapide de Kalman : présentation de la méthode

Nous supposons que l'image peut être représentée par un champ aléatoire markovien, gaussien, de moyenne nulle. La causalité demi-plan asymétrique est définie par les régions passé, présent et futur de la figure 1 (a) [11].

L'image peut être représentée par un modèle récursif que nous avons choisi semi-causal [fig. 1 (b)]. Le modèle est dit semi-causal puisqu'il est causal en m et non causal en n .

Si $x(m, n)$ représente 1 pixel du présent de l'image d'origine, nous écrivons le modèle AR 2D stationnaire utilisé :

$$(4) \quad x(m, n) = \sum_{(p, q) \in R} a(p, q) \times x(m-p, n-q) + u(m, n)$$

— R définit le support semi-causal du modèle [voir fig. 1 (b)]. Il s'étend sur les régions passé et futur, les

éléments $x(m, n+1)$ à $x(m, n+Q_1)$ de la prédiction linéaire se trouvant dans la région futur. Nous donnons son expression :

$$R = \{(p, q) / (0 \leq p \leq P, -Q_1 \leq q \leq Q_2)\} \text{ et } ((p, q) \neq (0, 0))$$

— Les $a(p, q)$ sont les coefficients du modèle, obtenus en minimisant l'erreur quadratique de prédiction $u(m, n)$ (variance de u minimale).

— $u(m, n)$ est le bruit d'entrée, indépendant des données $x(m, n)$. $u(m, n)$ est blanc par rapport à la variable m (i.e. dans le sens vertical) et coloré dans le sens horizontal avec ses voisins appartenant au support du modèle [15] du fait de la non-causalité horizontale. En effet, contrairement aux modèles causaux, à variance minimale, le modèle semi-causal à variance minimale n'a pas pour entrée un bruit blanc. On peut montrer ceci comme suit. La fonction d'autocovariance $r_u(k, l)$ de u , du fait de la stationnarité du modèle, est par définition :

$$(5) \quad r_u(k, l) = E[u(m, n) \cdot u(m-k, n-l)]$$

ou encore, en utilisant (4)

$$(6) \quad r_u(k, l) = E[u(m, n) \cdot x(m-k, n-l)] - \sum_{p, q \in R} a(p, q) \cdot E[u(m, n) \times x(m-k-p, n-l-q)]$$

Les $a(p, q)$ sont les coefficients du modèle, calculés en minimisant l'erreur quadratique de prédiction linéaire $E[u(m, n)^2]$. Donc les $a(p, q)$ sont tels que

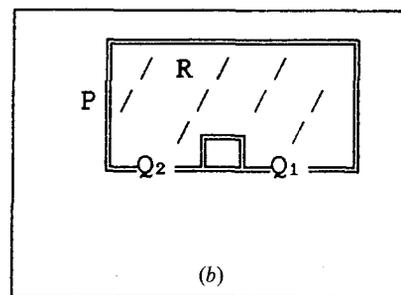
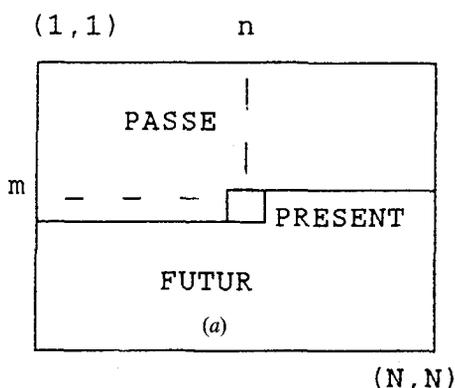
$$(7) \quad \frac{dE[u(m, n)^2]}{da(p, q)} = 0$$

En utilisant (4) dans (7) on obtient les équations normales habituelles :

$$(8) \quad E[(x(m, n) - \sum a(p, q) \cdot x(m-p, n-q)) \times (x(m-k, n-l))] = 0 \quad k, l \in R$$

Ce qui s'écrit aussi

$$(9) \quad \begin{cases} E[x(m, n) \cdot x(m-k, n-l)] = 0 \\ (k, l) \in R \end{cases}$$



R = Support du modèle

Fig. 1.

Nous cherchons à présent à diagonaliser ces matrices. La transformée de Karhunen-Loeve qu'il faut effectuer pour cela n'est bien sûr pas mise en œuvre car elle requiert un volume de calcul énorme. Cette transformée est approchée par la transformée de Fourier. Cette approximation repose sur la remarque

suivante : les matrices bandes de Toeplitz peuvent être approchées asymptotiquement par des matrices circulantes [17]. Par exemple, la matrice $A(p)$ de dimension $N \times N$ est approchée par la matrice circulante suivante :

$$A(p) = \begin{bmatrix} -a(p, 0) & \dots & -a(p, -Q_1) & 0 & \dots & 0 & -a(p, Q_2) & \dots & -a(p, 1) \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ & & -a(p, Q_2) & & & & 0 & & -a(p, Q_2) \\ & & & & & & & & 0 \\ & 0 & & & & & & & 0 \\ & & & -a(p, Q_2) & \dots & -a(p, 0) & \dots & -a(p, -Q_1) & \\ & & 0 & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & 0 & & 0 & & & & & -a(p, -Q_1) \\ -a(p, -Q_1) & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot \\ -a(p, -Q_1) & \dots & -a(p, -1) & 0 & \dots & 0 & -a(p, Q_2) & \dots & -a(p, 0) \end{bmatrix}$$

Lorsque N tend vers l'infini, cette matrice est asymptotiquement équivalente à la matrice bande de Toeplitz.

Cette approximation trouve sa justification dans le fait que toute matrice circulante est diagonalisable par transformée de Fourier. Les vecteurs propres normés d'une matrice circulante sont les vecteurs de la transformée de Fourier. Ainsi, en effectuant une transformée de Fourier sur le système (12), nous obtenons le système diagonalisé (13) [où les matrices $\underline{A}(p)$ et $\underline{C}(k)$ sont diagonales] :

$$(13 a) \quad \sum_{p=0}^P \underline{A}(p) \underline{X}(m-p) = \underline{U}(m)$$

$$(13 b) \quad \underline{Y}(m) = \sum_{k=-K_1}^{K_2} \underline{C}(k) \underline{X}(m-k) + \underline{W}(m)$$

On note par une variable soulignée \underline{X} la transformée de Fourier de la séquence formée par les coordonnées du vecteur X .

Les matrices étant diagonales, ce système peut donc être réécrit sous forme de N systèmes d'équations 1D :

$$(14 a) \quad \sum_{p=0}^P a(p, j) \cdot x(m, j) = u(m, j)$$

$$(14 b) \quad y(m, j) = \sum_k c(k, j) \cdot x(m-k, j) + w(m, j)$$

pour $j=1, \dots, N$ représentant l'indice de fréquence, ou encore la colonne du nouvel ensemble de données. Le système en j est indépendant du système en j' . Les N systèmes 1D ($j=1 \dots N$) de (14) sont traités séparément. Sur chaque colonne j , un filtrage de Kalman (1D) est effectué.

C'est une image floue. Cependant l'image restaurée présente des dégradations : il apparaît des bandes noires et blanches qui se propagent en échos sur l'image restaurée, en particulier aux bords. Nous analysons dans la partie suivante l'origine de ces défauts et proposons la construction d'une image miroir pour les éliminer.

3. Utilisation d'une image miroir et filtrage adaptatif

1. IMAGE MIROIR

a. Problème

Les effets de bords observés sur l'image restaurée sont dus à l'utilisation de la transformée de Fourier rapide directe et inverse des lignes de l'image.

En effet, quand la FFT est appliquée sur une suite de N échantillons, la séquence à transformer n'est pas considérée comme la séquence finie des N échantillons mais comme la séquence infinie périodique, formée

de la suite des N échantillons répétée séquentiellement une infinité de fois. Le signal n'est plus fini mais infini, périodique (période N). Aussi, lorsqu'une ligne quelconque de l'image est ainsi considérée comme infinie périodique, il apparaît dans ce nouveau signal des points de discontinuité. Ces discontinuités se trouvent aux points $-1, 0 [N]$: pour une ligne donnée, $-1 [N]$ est le point côté droit de l'image et $0 [N]$ le point côté gauche, les intensités de ces 2 pixels étant en général très éloignées. Ces discontinuités engendrent des fréquences (hautes fréquences) dans le signal transformé. Si celui-ci est directement recalculé par transformée inverse, on retrouve bien entendu le même signal qu'au départ, les conditions d'échantillonnage du théorème de Shannon ayant été respectées en temps et en fréquence. Par contre, si le signal transformé subit un traitement, en particulier un filtrage de Kalman il va avoir pour effet dans le cas de la restauration, d'amplifier ces fréquences parasites, qui vont ensuite produire ces raies noires et blanches après transformée inverse. Ces problèmes de bords auxquels nous nous heurtons sont des problèmes couramment rencontrés lors de l'utilisation de la FFT. La solution généralement utilisée dans ce cas est l'application d'une fenêtre non rectangulaire sur la séquence. Ces fenêtres (Hamming, Hanning, Blackman, etc.) atténuent les valeurs des bords de la séquence. Nous avons multiplié toutes les lignes de l'image par une fenêtre de Hamming avant l'application de la FFT, puis nous avons filtré. Ensuite, après FFT inverse, nous avons divisé par la fenêtre. Le résultat est présenté image 1. Les raies ont disparu en milieu d'image mais restent présentes sur les bords. Cette technique s'est donc avérée insuffisante.

Une seconde solution proposée par Woods et Biemond [14] est d'ôter ces discontinuités en augmentant la longueur d'une ligne par l'ajout d'un certain nombre de points servant à relier le bord droit au bord gauche de l'image. Ces points sont calculés par interpolation polynomiale et servent à lisser les discontinuités du signal que nous avons mis en évidence aux points $-1, 0 [N]$. Cette technique donne de bons résultats mais requiert le calcul des points interpolés supplémentaires. Nous proposons une troisième méthode, basée sur la construction simple d'une image miroir, qui permet comme les autres méthodes de lisser le signal aux points de discontinuité.

b. Construction et conséquence immédiate

si

$$X(m) = [x(m, 0), x(m, 1), \dots, x(m, N-1)]^T$$

est le vecteur de la ligne m , on construit le vecteur $XD(m)$ de longueur $2N$ en symétrisant le signal :

$$XD(m) = [x(m, 0), \dots, x(m, N-1), z, x(m, N-1), x(m, N-2), \dots, x(m, 1)]$$

où z est le point intermédiaire par rapport auquel la séquence est symétrique. z pourra être choisi égal à $x(m, N-1)$ ou calculé par interpolation polynomiale avec les points l'avoisinant ($x(m, N-1), x(m, N-2)$).



Image 1.
Restauration avec fenêtre de Hamming.

On accole à droite de chaque ligne son symétrique, ce qui revient à prendre l'image miroir de l'image d'origine.

Peu ou aucun calcul n'est nécessaire pour la construction de cette nouvelle image, et chaque ligne peut ainsi être considérée comme périodique, sans qu'il apparaisse de point de discontinuité. Ceci entraîne la disparition totale des raies sur l'image restaurée [image 2 (c)].

c. Autres avantages

(1) *Système réel*

Outre le fait d'éliminer les discontinuités lors de la périodisation des lignes, l'utilisation de l'image miroir nous permet de travailler avec des lignes symétriques. Les trois points suivants montrent alors que les N systèmes que nous obtenons sont réels :

- La transformée de Fourier des lignes symétriques de l'image et son miroir est une séquence réelle.

Remarque : le volume d'informations à traiter est le même avec ou sans symétrie. Nous traitons soit N systèmes réels, au lieu de $N/2$ systèmes complexes dans le cas de la non-symétrie.

- Les paramètres du modèle AR stationnaire sont symétriques dans le sens horizontal, c'est-à-dire par rapport à la seconde variable :

$$a(p, q) = a(p, -q)$$

pour tout p (respectivement q) de 0 à P (respectivement Q , où $Q=Q_1=Q_2$). Les matrices $A(p)$ sont donc toutes symétriques, leurs valeurs propres sont donc réelles.

La propriété de symétrie horizontale des $a(p, q)$ provient de la symétrie de chaque ligne de l'image miroir, qui entraîne la symétrie horizontale de la corrélation $r(i, j)$ entre deux échantillons :

Soit $r_x(i, j)$ la corrélation entre deux échantillons. Ayant supposé la stationnarité, $r_x(i, j)$ est égale à :

$$(15) \quad r_x(i, j) = E[x(m, n) \star x(m-i, n-j)]$$

La symétrie dans le sens horizontal implique que :

$$(16) \quad x(m, n) = x(m, 2N-n)$$

ainsi

$$r_x(i, j) = E[x(m, 2N-n) \cdot x(m-i, 2N-(n-j))]$$

d'où

$$r_x(i, j) = E[x(m, n') \cdot x(m-i, n'+j)]$$

donc

$$r_x(i, j) = r_x(i, -j)$$

La symétrie horizontale de la corrélation implique la symétrie du modèle stationnaire AR 2D.

● La fonction PSF est aussi, dans le cadre de notre étude (images défocalisées ou bougées), symétrique dans le sens horizontal :

— s'il s'agit d'une défocalisation d'un appareil photographique, la PSF est par nature symétrique dans toutes les directions,

— s'il s'agit d'un bougé, elle sera symétrique dans la direction orthogonale à celle du bougé. Il suffira de faire une rotation de l'image à traiter, afin d'obtenir un bougé dans le sens vertical, et donc une PSF symétrique dans le sens horizontal.

Dans les deux cas d'égalité suivante est vérifiée :

$$c(k, l) = c(k, l)$$

pour tout

$$k = -K_1, \dots, K_2$$

et

$$l = -L, \dots, L (L_1 = L_2 = L).$$

Il en résulte que les matrices $C(k)$ sont toutes symétriques, leurs valeurs sont réelles.

Tous les coefficients des N systèmes (14) dans le plan de Fourier sont réels. Les données l'étant aussi, les N systèmes de (8) sont des systèmes entièrement réels.

(2) Diagonalisation exacte du système

Un autre avantage obtenu grâce à l'utilisation de l'image miroir est que l'image avec son miroir peut être considérée non plus dans le plan, mais enroulée sur un cylindre. Chaque ligne a ses deux bords reliés, et est considérée non plus comme un signal fini, mais infini, périodique, de période $2N$.

Remarque : cette opération peut s'effectuer sans utilisation de l'image miroir mais elle entraîne alors, nous l'avons vu, la création de points de discontinuités artificiels très gênants.

La conséquence de cela est que les matrices $A(p)$ du modèle et $C(k)$ de la PSF [voir partie II système (12)]

sont circulantes par construction. Étudions le cas, par exemple, des matrices $A(p)$ du modèle. Dans la modélisation d'une image quelconque, lorsque le support du modèle de prédiction linéaire se trouve en dehors de l'image, ce qui arrive pour la prédiction des points qui se trouvent en bordure d'image, alors on suppose que ces points ont une intensité nulle. Si l'on considère maintenant l'image enroulée sur un cylindre avec les bords droit et gauche reliés, alors ces problèmes de dépassement du support disparaissent à gauche et à droite de l'image puisque celle-ci est horizontalement infinie. (Ces problèmes restent présents pour les points en haut de l'image.) Nous avons schématisé en figure 3 la zone de dépassement du support du modèle pour un point situé sur le bord droit de l'image par une zone hachurée. En prenant zéro comme valeur des intensités de ces pixels, nous obtenons les matrices bandes $A(p)$ de Toeplitz. Par contre si l'on considère que les lignes sont reliées, alors les pixels de cette zone sont en fait des pixels appartenant à l'image et sont représentés par la zone hachurée de gauche sur l'image. En prenant en compte l'intensité de ces pixels, les matrices $A(p)$ sont alors circulantes.

(1, 1)

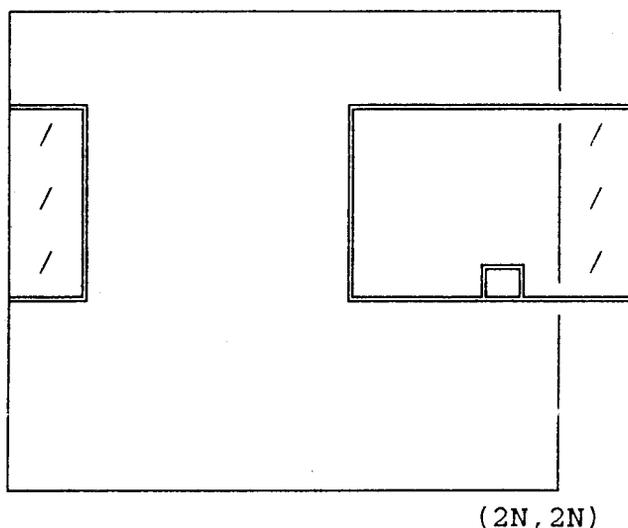


Fig. 3.

L'approximation que nous avons été amenés à faire dans la modélisation du problème, afin de pouvoir diagonaliser, le système par transformée de Fourier [système (13)], n'est plus nécessaire. Le système (13) est exact et non plus approché.

On décrit dans le paragraphe suivant les N filtres de Kalman sur ces N systèmes réels [équation (8)] et analysons la convergence des gains de ces filtres.

2. FILTRAGE DE KALMAN

Le système (14), pour une variable de fréquence j fixée (ou colonne j), est réécrit sous la forme d'un système dynamique, approprié pour le développement d'un filtre de Kalman.

Deux transformations sont effectuées :

– Tout d’abord, il faut remarquer que l’observation $y(m)$ au point m dépend des états futurs $x(m+1), \dots, x(m+K_1)$ [équation d’observation (14 b)]. Afin d’obtenir une équation d’observation causale, c’est-à-dire une équation dans laquelle $y(m)$ au point m ne dépend que des états $x(m-k)$ ($k > 0$ et $k=0$) antérieurs, il faut retarder l’équation d’observation de K_1 . Pour conserver une équivalence avec le modèle (14) précédant, l’équation d’état est aussi décalée de K_1 . Ces deux décalages reviennent à multiplier à la fois le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert de ce système par z^{-K_1} , d’où l’équivalence des deux systèmes.

Le système obtenu s’écrit :

$$(17a) \quad \underline{x}(m, j) = \sum_{p=1}^P \frac{\underline{a}(p, j)}{\underline{a}(0, j)} \underline{x}(m-p, j) + \frac{1}{\underline{a}(0, j)} \underline{u}(m, j)$$

$$(17b) \quad y(m, j) = \sum_{k=0}^{K_1+K_2} \underline{c}(k, j) \cdot x(m-k, j) + \underline{w}(m, j)$$

– La deuxième transformation consiste à mettre les deux équations [état (17 a) + observation (17 b)] sous

$$\underline{A}(j) = \begin{bmatrix} -\frac{\underline{a}(1, j)}{\underline{a}(0, j)} & -\frac{\underline{a}(2, j)}{\underline{a}(0, j)} & \dots & -\frac{\underline{a}(P, j)}{\underline{a}(0, j)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & ; & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & ; & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \diagdown & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & ; & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & ; & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & ; & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}(j) = \begin{bmatrix} 1/\underline{a}(0, j) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}(j) = [\underline{c}(0, j), \dots, (K_1+K_2, j)].$$

On rappelle les équations du filtre de Kalman pour ce système :

$$(19a) \quad \underline{Z}_e(m, j) = \underline{A}(j) \underline{Z}(m-1, j) + \underline{K}(m, j) [y(m, j) - \underline{C}(j) \underline{A}(j) \underline{Z}_e(m-1, j)]$$

$$(19b) \quad \underline{K}(m, j) = \underline{Q}(m-1, j) \underline{C}(j)^T \times [\underline{C}(j) \underline{Q}(m-1, j) \underline{C}(j)^T + \sigma_w^2]^{-1}$$

$$(19c) \quad \underline{Q}(m, j) = \underline{A}(j) \underline{P}(m, j) \underline{A}(j)^T + \sigma_u^2 \underline{B}(j) \underline{B}(j)^T$$

$$(19d) \quad \underline{P}(m, j) = [\underline{I} - \underline{K}(m, j) \underline{C}(j)] \underline{Q}(m-1, j)$$

forme de deux équations ayant le même vecteur d’état. L’équation (17 a) fait intervenir le vecteur d’état $[\underline{x}(m-1, j), \dots, \underline{x}(m-P, j)]^T$ de dimension P , l’équation d’observation (17 b) le vecteur d’état $[\underline{x}(m, j), \dots, \underline{x}(m-K_1-K_2-1, j)]^T$, de dimension K_1+K_2+1 .

Pour coupler ces deux équations, il faut adapter les dimensions de ces vecteurs afin d’avoir un unique vecteur d’état pour les deux équations. Étant donné que nous travaillons avec un modèle d’état d’ordre peu élevé ($P=2$ au maximum), l’inégalité suivante est généralement vérifiée :

$$P \leq K_1 + K_2 + 1.$$

Le vecteur d’état sera donc le vecteur $\underline{Z}(m, j)$ de dimension K_1+K_2+1 ,

$$\underline{Z}(m, j) = [\underline{x}(m, j), \dots, \underline{x}(m-K_1-K_2-1, j)]^T.$$

Les équations sont données par le système (18) :

$$(18a) \quad \underline{Z}(m, j) = \underline{A}(m-1, j) \underline{Z}(m-1, j) + \underline{B}(j) \underline{u}(m, j)$$

$$(18b) \quad y(m, j) = \underline{C}(j) \underline{Z}(m, j) + \underline{w}(m, j)$$

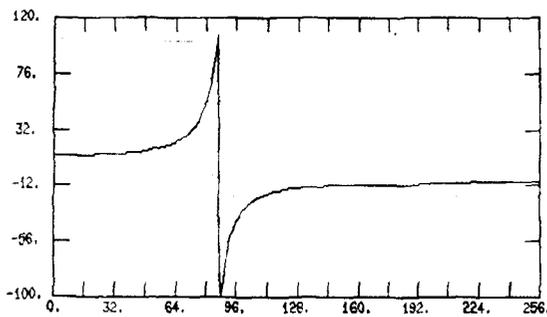
où $\underline{A}(j)$, $\underline{B}(j)$, $\underline{C}(j)$ sont définis par :

$\underline{P}(m, j)$ est la matrice de covariance de l’erreur $\underline{Z}_e(m, j) - \underline{Z}(m, j)$.

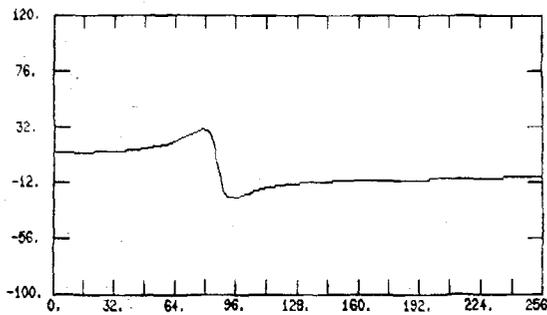
L’expérience montre que les gains $\underline{K}(m, j)$ convergent rapidement avec m . Nous pourrions les calculer dans un premier temps, puis filtrer le signal, en utilisant les gains asymptotiques [équation d’estimation (19 a) avec $\underline{K}(\infty, j)$], donc utiliser les gains asymptotiques dans l’équation d’estimation.

Le problème posé par le filtrage de Kalman sur ces systèmes est que certaines coordonnées du vecteur

$C(j)$ prennent la valeur zéro pour certaines fréquences j . En effet, la transformée de Fourier de la fonction PSF passe par zéro pour la plupart des PSF utilisées. Cela a pour conséquence de faire croître les gains K du filtre en valeur absolue [cf. équation (19 (b))]. Sur ces fréquences critiques, les gains utilisés pour le filtrage sont artificiellement trop grands. Nous présentons, par exemple, la variation de la première coordonnée du gain ($K(1, j)$), en fonction de la fréquence j sur la figure 4(a), pour la PSF définie expérience 1. La présence d'un zéro dans la transformée de la PSF entraîne la divergence de $K(1, j)$ à cet endroit. Il apparaît sur l'image restaurée une propagation en écho de certains contours de l'image d'origine, ainsi qu'une granulosité sur toute l'image [image 2(c)].



(a) $K(1, j)$ par Kalman
NON ADAPTATIF



(b) $K(1, j)$ par Kalman
ADAPTATIF
Fig. 4.

Afin d'éviter ce phénomène, nous contrôlons la croissance des gains du filtre par le terme additif σ_w^2 de l'équation (19 b). En pondérant la variance du bruit d'observation σ_w^2 , par un facteur inversement proportionnel à une coordonnée du vecteur $C(j)$, nous diminuons les gains lorsqu'ils divergent. Avec la pondération utilisant la première coordonnée du vecteur $C(j)$, c'est-à-dire :

$$\sigma_w^2(j) = \left| \frac{C(1, 1)}{C(1, j)} \right| \sigma_w^2 = \left| \frac{c(0, 1)}{c(0, j)} \right| \sigma_w^2$$

la divergence des gains calculés non adaptativement (fig. 4(a)), est effectivement contrôlée [cf. fig. 4(b)]. Le coefficient de pondération est fonction de la fréquence j , afin d'atténuer les effets des zéros sur les fréquences où ils apparaissent [cf. fig. 4(b)].

4. Présentation des résultats

Nous avons appliqué l'algorithme présenté ci-dessus, sur deux images différentes avec deux PSF différentes. Les images « The lady with hat » et « Cameraman » sont des images noir et blanc de 256×256 pixels. L'intensité d'un pixel est codée sur 8 bits et varie de 0 pour le noir à 255 pour le blanc.

1. EXPÉRIENCE 1

L'image utilisée est « The lady with hat » [image 2(a)], que nous avons artificiellement rendue floue, par une PSF simulant une défocalisation d'un appareil photographique [image 2(b)]. La PSF porte sur 7×7 pixels et est symétrique dans le sens vertical et horizontal. Son expression est donnée par [18] :

$$(12) \quad c(k, l) = K \cdot \exp \left[-\frac{(k+1)^2 + (l+1)^2}{8} \right] \quad -4 < k, l < 4$$

K est un facteur de normalisation tel que

$$(13) \quad \sum_{k=-3}^3 \sum_{l=-3}^3 c(k, l) = 1$$

Utilisant l'image miroir et un gain de Kalman non adaptatif, l'image déconvoluée ne présente pas de raies, mais des oscillations restent visibles [image 2(c)]. Finalement en utilisant un gain adaptatif en fonction de la fréquence et de la PSF nous obtenons une image pour laquelle la granulosité a nettement diminué [image 2(d)].

Afin de donner un critère numérique de qualité, nous utilisons le rapport signal sur bruit (SNR) défini ainsi :

$$(14) \quad \text{SNR} = 10 \log_{10}$$

$$\times \left[\frac{255^2}{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (x(m, n) - s(m, n))^2} \right]$$

où $x(n, m)$ est l'image originale de référence, et $s(n, m)$ l'image présentant une erreur, l'image dont on veut calculer le SNR.

L'augmentation du rapport signal sur bruit entre l'image floue (SNR = 24,7 dB) et l'image déconvoluée avec les gains adaptatifs (SNR = 29,6 dB) est de 5 dB.

2. EXPÉRIENCE 2

La seconde PSF choisie simule un bougé horizontal de l'appareil photographique. La PSF a un support non nul sur 17 points dans le sens horizontal :

— sur les 4 premiers points, la PSF est constante :

$$(15) \quad c(0, l) = K \quad \text{pour } l = 0, \dots, 3$$



Image 2(a).

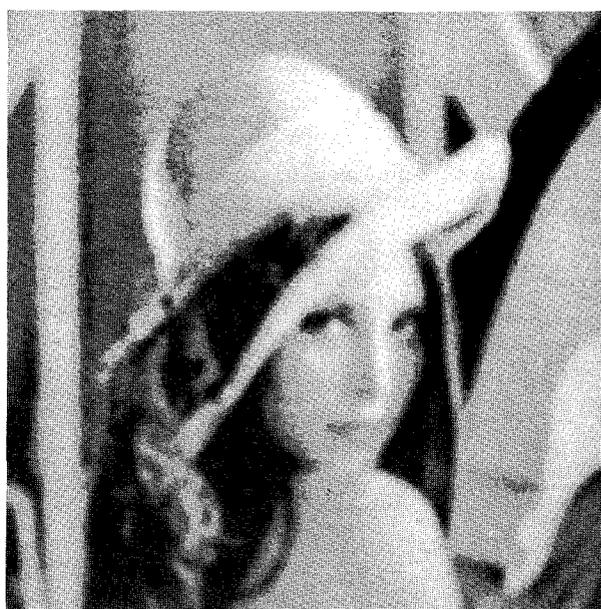


Image 2(b). SNR = 24, dB.



Image 2(c). SNR = 26,3 dB.



Image 2(d). SNR = 29,6 dB.

— sur les 13 points suivants, elle décroît vers zéro suivant une gaussienne :

$$(16) \quad c(0, l) = K \cdot \exp\left[-\frac{(l-4)^2}{44}\right]$$

pour $l = 4, \dots, 17$

où la constante K est définie par (13).
L'image d'origine est le cameraman [image 3(a)], qui

donne, convoluée avec la PSF définie ci-dessus, l'image 3(b).

L'image restaurée est présentée en 3(c). L'augmentation du SNR entre l'image bougée (SNR = 15,3 dB) et l'image restaurée (SNR = 34,1 dB) est alors dans ce cas de 18,8 dB. La déconvolution s'avère très performante autant du point de vue du critère numérique (SNR) que du point de vue visuel comme on peut le voir sur les détails de la caméra de l'image restaurée [image 3(c)]. Les gains adaptatifs n'ont pas été utilisés ici puisque la transformée de Fourier discrète de la PSF ne passe pas par zéro. Les problèmes de grains sur l'image 2(c) n'existent pas sur l'image 3(c).



Image 3(a).



Image 3(b). SNR = 15,3 dB.



Image 3(c). SNR = 34,1 dB.

5. Conclusion

L'utilisation de l'image miroir ne donne pas de traitement supplémentaire dans l'algorithme, et élimine tous les problèmes dus aux effets de bords. L'adaptativité du filtrage sur les fréquences permet de contrôler la divergence des gains lorsque la PSF passe par zéro. Les résultats expérimentaux montrent l'efficacité de cette méthode rapide de déconvolution.

La poursuite de ces travaux s'effectue suivant deux axes :

— Tout d'abord des algorithmes rapides, en vue de diminuer encore le coût de calcul. L'étude de l'influence du modèle AR sur l'image a montré que l'on peut choisir un modèle simple, fixé *a priori* [19]. Un choix judicieux de ce modèle permettra d'obtenir des équations simples et donc un algorithme rapide.

— Une seconde voie d'investigation est l'estimation des paramètres de la PSF, connaissant uniquement l'image floue. Cette étape est bien sûr nécessaire et primordiale dans le problème de la restauration d'images réelles.

Manuscrit reçu le 26 février 1988.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. C. ANDREW et B. R. HUNT, Digital image Restoration, Prentice Hall, Signal Processing Series, 1977.
- [2] P. CHAVEL, D. T. KUAN, A. A. SAWCHUCK et T. C. STRAND, Techniques de réduction de speckle, *Premier colloque image. Traitement, synthèse, technologie et applications*, Biarritz, mai 1984.
- [3] B. R. HUNT, A theorem on the difficulty of the numerical deconvolution, *IEEE Trans.*, AU-20, 1972, p. 94-95.
- [4] B. R. HUNT, Deconvolution of linear systems by constrained regression and its relationship to the Wiener Theory, *IEEE*, AC-17, 1972, p. 703-705.
- [5] T. M. CANNON, H. J. TRUSSEL et B. R. HUNT, Comparison of image restoration methods, *Applied Optics*, 17, n° 21, novembre 1978, p. 3384-3390.
- [6] H. L. TRUSSEL et B. R. HUNT, Image restoration of space variant blurs by selectioned methods, *IEEE Trans. ASSP*, 1978, p. 196-198.
- [7] H. J. TRUSSEL, Improved methods of maximum *a posteriori* restoration, *IEEE Trans.*, C-27, 1979, p. 57-62.
- [8] D. T. KUAN, A. A. SAWCHUCK, T. C. STRAND et P. CHAVEL, Adaptive restoration of images with speckle, *IEEE, Trans. on ASSP*, 35, n° 3, March 1987, p. 373-383.
- [9] A. A. SAWCHUCK, Space-variant image motion degradation and restoration, *Proceedings of the IEEE*, July 1972, p. 854-861.
- [10] H. JINCHI, T. SIMCHONY et R. CHELLAPPA, Stochastic relaxation for MAP restoration of gray level images with multiplicative noise, *ICASSP*, April 6-9 1987, *IEEE*, p. 1236-1239.
- [11] J. W. WOODS et C. H. RADEWAN, Kalman Filtering in two dimensions, *IEEE Trans. inf. theory*, IT-23, July 1977, p. 473-482.
- [12] J. W. WOODS et V. K. INGLE, Kalman filtering in two dimensions: further results, *IEEE Trans. Acous. Speech and sig. proc.*, ASSP-29, April 1981, p. 188-197.
- [13] J. BIEMOND, J. RIESKE et J. J. GERBRANDS, A fast Kalman filter for images degraded by both blur and noise, *IEE*, ASSP-31, n° 5, october 1983.
- [14] J. W. WOODS et J. BIEMOND, A Murat Tekalp "Boundary value problem in image restoration", *ICASSP*, 1985, p. 692-695.
- [15] J. BIEMOND, Image restoration, a linear stochastic filtering approach, *Ph.D dissertation*, Delft University Technology, Delft, The Netherlands, March 1982.
- [16] A. M. DJAFARI et G. DEMOMENT, Maximum entropy diffraction tomography, *Proc. ICASSP 86*, Tokyo.
- [17] R. M. GRAY, On the asymptotic eigenvalue distribution of Toeplitz matrices, *IEEE Trans. Inf. Theory*, IT-18, Nov. 1972.
- [18] A. M. TEKALP, M. KAUFMAN et J. W. WOODS, Identification of image and blur parameters for the restoration of non causal blurs, *IEEE Trans. on ASSP*, 34, n° 4, 1986, p. 963-972.
- [19] A. K. MAHALANABIS et KEFU XUE, An efficient Tow dimensional Chandrasekhar Filter for restoration of images degraded by Spatial Blur and Noise, *IEEE Trans. on ASSP*, 35, n° 11, November 1987.