

Compensation des déformations

d'une antenne

par filtrage adaptatif

Compensating the distortions of an array shape

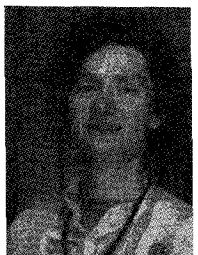
by adaptive filtering



Sylvie MARCOS

Laboratoire des Signaux et Systèmes, ESE, plateau du Moulon, 91192 GIF-SUR-YVETTE.

Sylvie Marcos est née en 1960 à Vincennes, Val-de-Marne. Elle est Ingénieur de l'École Centrale des Arts et Manufactures de Paris depuis 1984 et Docteur de l'Université Paris-Sud - Orsay depuis 1987. Elle travaille depuis 1984 dans l'équipe « Communications » du Laboratoire des Signaux et Systèmes de l'École Supérieure d'Électricité. Ses principaux sujets d'intérêt sont les communications numériques et le traitement d'antenne adaptatif.



Odile MACCHI

Laboratoire des Signaux et Systèmes, ESE, plateau du Moulon, 91192 GIF-SUR-YVETTE.

Odile Macchi est née en 1943 à Aurillac, Cantal. Ancienne élève de l'École Normale Supérieure de jeunes filles, elle est reçue septième à l'Agrégation de Mathématiques en 1966. Elle obtient son Doctorat d'État en Sciences Physiques en 1972 et depuis lors, elle se consacre à la recherche en traitement du signal, spécialement en théorie des communications. Elle est directeur de recherche au CNRS et dirige au sein du Laboratoire des Signaux et Systèmes de l'École Supérieure d'Électricité, une équipe qui travaille en communications, tout particulièrement sur les systèmes adaptatifs en transmission. Actuellement elle est adjointe au directeur du GRECO Traitement du Signal et Image. Pour la partie transmission de données, elle est coauteur du livre **Téléinformatique** qui a fait l'objet d'un très gros tirage et de trois traductions. Elle a reçu la médaille Blondel, le prix du général Kampé de Férié de l'Académie des Sciences et la distinction senior member des IEEE.

RÉSUMÉ

Pour appliquer les méthodes usuelles de traitement d'antenne, il est fondamental de connaître la forme géométrique de l'antenne et la position des capteurs. Ce papier traite du problème d'une antenne flexible dont la forme peut varier au cours du temps; ceci arrive, par exemple, en acoustique sous-marine à cause du mouvement du bateau qui tracte l'antenne. On se propose d'estimer à chaque instant les paramètres décrivant la position des capteurs et la forme géométrique de l'antenne par une méthode de poursuite (filtrage adaptatif en situation non stationnaire) utilisant un signal auxiliaire de référence.

MOTS CLÉS

Traitement d'antenne, filtre adaptatif, déformations d'une antenne, poursuite de non-stationnarité, acoustique sous-marine.

SUMMARY

It is crucial in array processing methods to know the array geometry. This paper deals with array processing using a flexible antenna whose shape is time-varying. Our purpose is to improve the techniques of beamforming and source-bearing estimation by estimating the array shape in real time. The original contribution of this paper is the use of the capability of the LMS algorithm in adapting to a nonstationary environment in association with the knowledge of a pilot signal. Limitations concerning the variations that can be tracked are established, and performance gains on beamforming and source-bearing estimation techniques are shown.

KEY WORDS

Array processing, adaptive filtering, flexible antenna, tracking of non stationarity, underwater acoustics.

I. Introduction

Deux propriétés essentielles caractérisent le traitement adaptatif du signal : d'abord il permet l'optimisation d'un système et son adaptation à l'environnement sans intervention extérieure, ensuite il assure cette optimisation en présence de fluctuations de l'environnement au cours du temps. C'est cette deuxième propriété que l'on va essayer d'appliquer au traitement spatial avec une antenne se déformant au cours du temps.

L'influence des fluctuations de l'environnement sur les performances d'un traitement adaptatif utilisant l'algorithme du gradient stochastique ou LMS (least mean square) a déjà été considérée [1-4] dans le cas de l'identification adaptative d'un système inconnu variant dans le temps et en particulier en annulation d'écho adaptative. Le pas d'incrémentation μ de l'algorithme, qui gouverne la vitesse d'adaptation, joue un rôle prépondérant. L'analyse montre que les fluctuations du vecteur d'erreur entre le système adaptatif et le système optimal se décomposent en deux termes, un terme appelé bruit de l'algorithme, dû au caractère stochastique de l'algorithme du gradient et qui croît avec le pas d'incrément, et un terme appelé retard dû aux variations dans le temps du système optimal et qui décroît lorsque le pas d'incrément croît. On comprend donc qu'il existe une valeur optimale du pas d'incrément de l'algorithme adaptatif qui réalise un compromis entre la finesse de convergence et la vitesse de poursuite de l'algorithme LMS.

En ce qui concerne le traitement adaptatif d'antennes, les seules études qui ont été faites dans le cas d'un environnement non stationnaire ne considèrent que des fluctuations du champ de bruit et d'interférences [5] et non celles de la forme géométrique de l'antenne. En effet, dans les problèmes de localisation de sources et de formation de voies toutes les méthodes [6, 7] font appel à un modèle de propagation des signaux faisant intervenir la forme de l'antenne. Dans le cas où celle-ci se déforme au cours du temps, il faut donc estimer à chaque instant les paramètres géométriques qui la décrivent. C'est pourquoi nous envisageons une méthode adaptative pour l'estimation de la forme de l'antenne. Pour cela on considère l'algorithme LMS de Widrow [8] qui utilise le critère de l'erreur quadratique moyenne (eqm) minimale par rapport à un signal de référence dont la valeur exacte est connue à chaque instant.

Nous supposons que le système comporte à son entrée un même filtrage passe-bande sur tous les capteurs, de pulsation centrale ω connue. Les signaux ainsi traités sont tous à bande étroite et, à chaque instant, l'échantillon temporel du signal de référence est disponible. Il est alors connu [8] que le vecteur poids optimal défini à la pulsation centrale ω de la bande passante, est solution de l'équation de Wiener-Hopf associée à ce critère et s'écrit

$$(1) \quad W_{\text{opt}} = \alpha R_x^{-1} D,$$

où R_x est la matrice des covariances croisées des signaux reçus sur les capteurs constituant l'antenne, D le vecteur directionnel (ou vecteur source) caractérisant le modèle de propagation à la pulsation centrale ω , et α un coefficient de proportionnalité. R_x et D sont supposés pratiquement constants dans la bande $\Delta\omega$. L'avantage de l'algorithme LMS de Widrow est de ne pas exiger de connaissances *a priori* de D ; de plus, il permet d'identifier D en estimant de manière adaptative W_{opt} et en écrivant d'après (1)

$$(2) \quad \hat{D} = \beta \hat{R}_x W$$

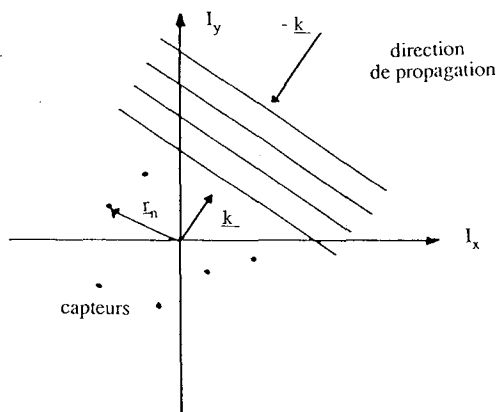
où \hat{D} , \hat{R}_x , W sont des estimations respectives de D , R_x et W_{opt} , et β un coefficient multiplicatif. Ainsi à l'aide de l'algorithme LMS donnant une estimation W de W_{opt} , et d'une estimation itérative de la matrice de covariance R_x , on peut identifier à chaque instant le vecteur D du modèle de propagation et par là même les paramètres qui le décrivent.

La méthode que nous proposons dans cet article pour estimer en temps réel le modèle de propagation du signal et en particulier la forme de l'antenne, associe les propriétés de l'algorithme LMS à la connaissance d'un signal de référence temporel. On analyse donc ici cette méthode ainsi que sa capacité à poursuivre les non-stationnarités dues aux déformations de l'antenne. Pour cela dans la section II suivante, après avoir présenté la méthode, on montre que l'on peut se passer de l'estimation adaptative de la matrice de covariance pour certains cas où W_{opt} de (1) devient alors directement proportionnel à D . Dans la section III, on s'intéresse à l'étude de la convergence de l'algorithme LMS dans le cas où l'antenne a une forme fixe, et sa répercussion sur l'estimation du vecteur D et des paramètres décrivant la géométrie de l'antenne. Enfin dans la section IV, on se place dans le cas où l'antenne se déforme au cours du temps.

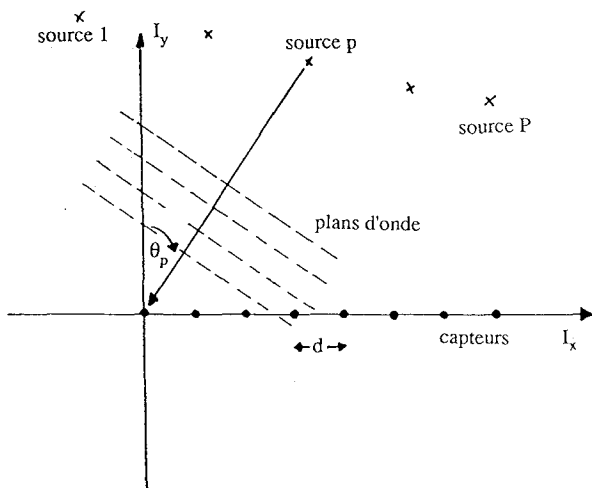
II. Présentation de la méthode

II. 1. IDÉE DE BASE

On considère une source propageant dans un milieu caractérisé par la célérité c , une onde plane monochromatique ou à bande étroite de pulsation centrale ω (fréquence $f = \omega/2\pi$), de sorte que le vecteur d'onde associé est $\mathbf{k} = (\omega/c) \mathbf{u}_k$, où \mathbf{u}_k est un vecteur unitaire indépendant de ω . L'enveloppe complexe $s_1(t)$ du signal issu de cette source, est supposée être une fonction complexe aléatoire, stationnaire, centrée et de variance σ_1^2 . Le signal $s_1(t)$ est supposé connu. On l'appelle indifféremment signal pilote ou de référence. Considérons une antenne constituée de N capteurs omnidirectionnels situés à des positions quelconques



(a) Onde plane arrivant sur un réseau quelconque de capteurs.



(b) Réseau de capteurs équidistants espacés de d , recevant P signaux issus de sources à l'infini.

Fig. 1

$\mathbf{r}_1 = 0, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ (cf. fig. 1 a). Chaque capteur n reçoit alors l'onde avec un déphasage $\varphi_n = \mathbf{k}^T \mathbf{r}_n$ par rapport au premier capteur. Le vecteur source \mathbf{D}_1 où

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{D}_1 = [1; e^{j\varphi_2}; \dots; e^{j\varphi_N}]^T \\ \varphi_n = \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_k^T \mathbf{r}_n \end{cases}$$

représente la fonction de transfert multidimensionnelle entre le signal reçu sur le premier capteur pris comme référence et les $N-1$ autres capteurs. Le vecteur \mathbf{D}_1 constitue la définition spatiale du signal, il tient compte du milieu de propagation et de la géométrie de l'antenne. On suppose que la largeur de bande $\Delta\omega$ des signaux reçus est assez faible pour que le vecteur \mathbf{D}_1 puisse être considéré comme indépendant de ω dans toute la bande $(\omega, \Delta\omega)$ où $\Delta\omega$ est soumis à la contrainte de bande étroite $\Delta\omega/\omega \ll 1$ [10, 11]. Les éléments de \mathbf{D}_1 sont alors des coefficients constants qui s'appliquent aussi bien à la représentation temporelle des signaux qu'à leur représentation fréquentielle. L'incertitude $\Delta\varphi_n$ sur chaque φ_n qui résulte de la largeur de bande $\Delta\omega$ sera majorée dans la suite de l'article. Dans ces conditions, l'enveloppe complexe $\mathbf{X}(t)$ du signal reçu sur les N capteurs est un vecteur de dimension N qui s'écrit

$$(4) \quad \mathbf{X}(t) = s_1(t) \mathbf{D}_1 + \mathbf{B}(t).$$

où $\mathbf{B}(t)$ représente le vecteur bruit ayant pour matrice de covariance $\sigma^2 \text{Id}_N$. $\mathbf{B}(t)$ est indépendant de $s_1(t)$.

Dans le cas où il y a P sources, et où les signaux reçus sur les capteurs sont préalablement filtrés dans la bande de fréquence $\Delta\omega$ centrée autour de ω , le vecteur \mathbf{X} observé par l'antenne devient

$$(5) \quad \mathbf{X}(t) = \sum_{p=1}^P s_p(t) \mathbf{D}_p + \mathbf{B}(t)$$

où les $s_p(t)$ sont les signaux issus des sources; ils sont supposés non corrélés, centrés de variance σ_p^2 ; les vecteurs \mathbf{D}_p sont les vecteurs sources associés.

Supposons que l'on veuille reconstituer le signal pilote $s_1(t)$ par filtrage de l'observation $\mathbf{X}(t)$, selon le critère de l'erreur quadratique moyenne (eqm). Soit \mathbf{W} le vecteur complexe de filtrage que l'on applique à \mathbf{X} tel que

$$(6) \quad y(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{X}(t).$$

(* , T , † désignent respectivement le conjugué, le transposé et le transconjugué). L'erreur par rapport au signal de référence s'écrit alors

$$(7) \quad e(t) = s_1(t) - y(t) = s_1(t) - \mathbf{W}^T \mathbf{X}(t).$$

On cherche le vecteur poids optimal \mathbf{W}_{opt} au sens de l'erreur quadratique moyenne (eqm) minimale par rapport au signal de référence $s_1(t)$ soit

$$(8) \quad \mathbf{E}(t) = E[|e(t)|^2].$$

En reportant (7) dans (8) et en supposant les signaux stationnaires localement et ergodiques, il est aisé de trouver

$$(9) \quad \mathbf{E} = \sigma_1^2 - 2 \text{Ré} \{ E[s_1^*(t) \mathbf{W}^T \mathbf{X}(t)] \} + \mathbf{W}^T \mathbf{R}_x \mathbf{W},$$

où

$$(10) \quad \mathbf{R}_x = E[\mathbf{X}(t) \mathbf{X}^{\dagger}(t)]$$

est la matrice $(N \times N)$ des covariances croisées des signaux pris sur les capteurs. Il est connu [8] que

l'eqm E est minimale là où son gradient par rapport à W s'annule, même dans le cas complexe [10, 11]. Or le gradient en complexe est défini par

$$\nabla E = \nabla_{W_R} E + j \nabla_{W_I} E$$

où W_R et W_I sont les parties réelles et imaginaires de W , de sorte qu'en se reportant à [8], [10] et [11] il vient

$$(11) \quad \nabla E = -2 E [s_1^*(t) X(t)] + 2 R_x W.$$

On trouve, lorsque R_x est inversible, le vecteur poids optimal

$$(12) \quad W_{\text{opt}} = R_x^{-1} E [s_1^*(t) X(t)]$$

qui donne encore d'après (4) et en remarquant que R_x^{-1} est à symétrie hermitienne

$$(13) \quad \begin{cases} W_{\text{opt}} = \sigma_1^2 R_x^{-1} D_1 \\ E_{\text{min}} = \sigma_1^2 - \sigma_1^4 D_1^+ R_x^{-1} D_1 \end{cases}$$

avec

$$(14) \quad R_x = D \Gamma D^+ + \sigma^2 \text{Id}_N,$$

où Γ est, pour des sources non corrélées, la matrice diagonale de dimension $P \times P$

$$(15) \quad \Gamma = \text{diag} \{ \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2 \},$$

et D la matrice de dimension $N \times P$

$$(16) \quad D = [D_1, D_2, \dots, D_p].$$

Remarquons que le résultat (13) s'obtient aussi par la théorie du filtre adapté et par celle du maximum de vraisemblance sous l'hypothèse gaussienne [7].

La minimisation de l'eqm (8) et de façon équivalente, la recherche du filtrage optimal sont généralement accomplies par des techniques itératives de recherche du gradient. Lorsque les signaux sont échantillonnés à la période T_e de sorte que $s_1(k) = s_1(k T_e)$, l'algorithme d'adaptation du gradient déterministe destiné à minimiser l'eqm (8) est, d'après (10) et (11),

$$(17) \quad \begin{aligned} W(k+1) &= W(k) - \frac{\mu}{2} \nabla E(k) \\ &= W(k) + \mu \{ E [s_1^*(k) X(k)] - R_x W(k) \} \\ &= W(k) + \mu E [s_1^*(k) X(k) - X(k) X^+(k) W(k)] \end{aligned}$$

soit encore, d'après (7) où $W(k)$ remplace W ,

$$(18) \quad W(k+1) = W(k) + \mu E [e^*(k) X(k)].$$

Dans ces expressions μ désigne le pas d'incrémenta-tion de l'algorithme, il est positif et constant. De lui dépendent la vitesse et la finesse de convergence de l'algorithme comme ceci sera vu dans la section III. L'une des méthodes qui s'est avérée la plus utile est l'algorithme du gradient stochastique ou encore appelé LMS. Il utilise une estimation stochastique du gradient de sorte que le vecteur filtrage est ajusté suivant

$$(19) \quad \begin{cases} W(k+1) = W(k) + \mu e^*(k) X(k); \\ e(k) = s_1(k) - W^T(k) X(k). \end{cases}$$

On verra dans la section III que $W(k)$ adapté suivant l'algorithme (19), constitue une estimation non biaisée de W_{opt} . Ainsi, grâce à (13) et à une estimation itérative de la matrice des covariances R_x , il est possible, d'après (2), d'identifier à chaque instant le vecteur source D_1 ainsi que les paramètres qui le caractérisent, ceci sans modélisation *a priori* de D_1 . Cependant le propos de cet article étant d'analyser l'influence de l'algorithme LMS sur la détermination des paramètres géométriques de l'antenne lorsque ceux-ci varient au cours du temps, nous allons essayer d'obtenir une expression plus simple de \hat{D}_1 qui se passe de l'estimation de la matrice R_x .

II. 2. EXPRESSION SIMPLIFIÉE DE \hat{D}_1

On peut expliciter davantage les solutions (13). En effet, on démontre, en Annexe 1, que si la source 1 de référence est orthogonale, au sens $D_1^+ D_p = 0$, $p=2, \dots, P$, aux $P-1$ autres sources (ce qui implique que le nombre de sources P soit inférieur au nombre de capteurs N), alors

$$(20) \quad \begin{aligned} W_{\text{opt}} &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2 + N \sigma_1^2} D_1 \\ E_{\text{min}} &= \frac{\sigma^2 \sigma_1^2}{\sigma^2 + N \sigma_1^2} \end{aligned}$$

(W_{opt} constitue le filtre adapté au signal de référence en l'absence de bruit ou avec du bruit blanc [7]). Il est facile de vérifier que cette solution est la même que celle que l'on aurait dans le cas d'une seule source. Autrement dit dans ce cas, on peut considérer que l'on a une source unique. Par ailleurs, dans le cas d'une antenne rectiligne avec capteurs équidistants espacés de d , c'est-à-dire lorsque le vecteur source correspondant à la p -ième source s'écrit [cf. fig. 1 b et (3)]

$$(21) \quad D_p = [1, e^{j a \sin \theta_p}, e^{j 2 a \sin \theta_p}, \dots, e^{j (N-1) a \sin \theta_p}]^T,$$

où θ_p désigne l'angle d'incidence par rapport à la normale à l'antenne rectiligne du signal issu de la source p , il est bien connu que le module du produit scalaire entre les vecteurs directionnels D_1 et D_p a pour expression

$$(22) \quad |\alpha_{1p}|(x) = |D_1^+ D_p| = \left| \frac{\sin N x / 2}{\sin (x / 2)} \right|$$

où

$$(23) \quad x = a (\sin \theta_p - \sin \theta_1)$$

et

$$(24) \quad a = \omega d / c = 2 \pi d / \lambda.$$

Dans (24) λ est la longueur d'onde correspondant à la pulsation ω (notons que $a = \pi$ si $d = \lambda / 2$). Naturellement, on pourra faire varier la fréquence ω à laquelle on filtre à la sortie des capteurs, mais l'antenne étant construite une fois pour toute, on n'aura pas toujours $a = \pi$. Pour x variant de $-a$ à a , la fonction $|\alpha_{1p}|(x)$ fait apparaître un lobe principal d'amplitude N et des lobes secondaires plus faibles. Elle s'annule pour $x = 2k(\pi/N)$, $k=1, \dots, N-1$; c'est-à-dire d'autant

plus souvent que N est grand (par contre, on verra dans la suite que la géométrie de l'antenne est d'autant plus facile à estimer que N est petit, sauf pour une antenne rectiligne). Ainsi on a $|\alpha_{1p}| \ll N$ lorsqu'on est éloigné du lobe principal centré autour de $x=0$; autrement dit lorsque les sources 1 et p sont éloignées l'une de l'autre au sens angulaire. Dans le cas d'une antenne se déformant au cours du temps, on supposera que les déformations sont faibles par rapport à l'écartement des sources de sorte que $D_1^+ D_p$ reste faible. Cette hypothèse est en pratique fort contraignante, mais rappelons qu'elle peut être évitée en appliquant (2) avec une estimation itérative de la matrice R_x .

II. 3. APPLICATION A L'ANALYSE SPATIALE

Le mode de fonctionnement que l'on propose est schématisé sur la figure 2. Un premier système adaptatif permet d'estimer les paramètres géométriques de

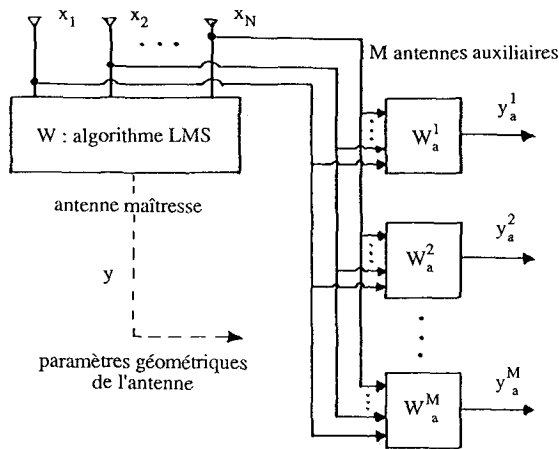


Fig. 2. — Schéma de la méthode proposée.

l'antenne suivant la méthode proposée dans II. 1 et II. 2 : une estimation adaptative de W_{opt} minimisant le critère de l'eqm par rapport à un signal de référence permet de déduire le vecteur source \hat{D}_1 de ce signal. Ce système est appelé antenne maîtresse. Les paramètres ainsi estimés sont alors passés à des systèmes auxiliaires W_a^1, \dots, W_a^M de façon à construire les vecteurs observation nécessaires à la localisation de sources selon des méthodes usuelles [6, 7]. Dans la suite, nous prendrons comme exemple celui du maximum de vraisemblance ou de Capon [6]. Le nombre M de ces antennes auxiliaires dépend du nombre de directions dans lesquelles on veut observer.

Cette fois un autre traitement adaptatif est appliqué en parallèle à l'observation $X(k)$ suivant le schéma de la figure 2. Dans chacune des M directions explorées, le vecteur poids auxiliaire W_a est adapté suivant l'algorithme [10, 11]

$$(25) \quad W_a(k+1) = W_a(k) - \mu_a y_a^*(k) X(k)$$

$$(26) \quad W_a'(k+1) = \left\{ Id_N - \frac{CC^+}{N} \right\} W_a(k+1) + \frac{C}{N}$$

où

$$(27) \quad y_a(k) = W_a^+(k) X(k)$$

et C un vecteur exprimant une contrainte. En effet l'algorithme (25)-(26) réalise la minimisation de la puissance $P_y = E[|y_a|^2] = W_a^+ R_x W_a$ du signal y_a de sortie de l'antenne auxiliaire, sous la contrainte $W_a^+ C = 1$ avec $|C|^2 = N$. Physiquement, le vecteur C exprime le fait que l'on impose *a priori* un modèle de propagation d'onde et de géométrie de l'antenne, et que l'on observe dans une direction donnée. Dans ces conditions, la contrainte impose que la sortie de l'antenne soit justement le signal reçu de cette direction. Par exemple, lorsque $C = D_1$, c'est que l'on observe dans la direction de la source 1 et que l'on connaît la géométrie de l'antenne et le modèle de propagation de l'onde. Dans ce cas, pour une seule source on trouve $P_y = \sigma_1^2 + (\sigma^2/N)$ [6].

En conclusion, une fois la géométrie de l'antenne connue grâce au signal de référence, on peut construire plusieurs antennes auxiliaires dont les vecteurs C associés ne dépendent que de la direction d'observation θ : le diagramme de directivité $P_y(\theta)$ qui en résulte constitue un échantillonnage spatial du champ d'ondes.

C'est ainsi que l'estimation de la forme de l'antenne par la méthode proposée est réalisée en temps réel et automatiquement utilisée par les différentes méthodes de localisation de sources.

III. Étude de l'algorithme LMS dans le cas d'une antenne fixe au cours du temps

III. 1. VITESSE ET FINESSE DE CONVERGENCE DE L'ALGORITHME LMS

Dans toute la suite on se place dans le cas d'une seule source; on suppose alors que les autres sources éventuelles sont suffisamment éloignées (au sens $D_1^+ D_p = 0$) de la source de référence pour que l'on ait $W_{opt} = \alpha D_1$ (α est un coefficient de proportionnalité) selon la formule (20). Le but de l'étude qui suit est d'analyser la capacité de l'algorithme LMS à estimer la forme de l'antenne. Le caractère adaptatif d'un traitement réside dans le réajustement itératif du vecteur poids W à chaque nouvelle observation temporelle de sorte que W tende en moyenne au bout d'un certain temps vers la solution optimale W_{opt} selon un certain critère.

Convergence vers la solution (12) de Wiener

Posons

$$(28) \quad V(k) = W_{opt} - W(k)$$

où W_{opt} a été donné en (12). L'algorithme (19) devient

$$(29) \quad V(k+1) = [Id_N - \mu X(k) X^+(k)] V(k) - \mu e_{opt}^*(k) X(k),$$

où

$$(30) \quad e_{opt}(k) = s_1(k) - W_{opt}^+ X(k).$$

Pour étudier la convergence de l'algorithme stochastique, on prend d'abord l'espérance mathématique de (29)

$$(31) \quad E[V(k+1)] \\ = E[(\text{Id}_N - \mu X(k)X^T(k))V(k)] - \mu E[e_{\text{opt}}^*(k)X(k)].$$

Par définition de W_{opt} , on voit immédiatement que le deuxième terme de droite de (31) est nul. L'erreur optimale (innovation) est toujours décorrélée de l'observation. Nous faisons les hypothèses supplémentaires suivantes

(H1) $e_{\text{opt}}(k)$ est centré; c'est une suite de variables indépendantes entre elles et indépendantes de tous les $X(k)$;

(H2) les $X(k)$ successifs sont indépendants; en conséquence $V(k)$, $X(k)$ et $e_{\text{opt}}(k)$ sont indépendants.

Elles sont couramment utilisées par les auteurs, voir notamment [10-12]. L'hypothèse (H1) est un peu plus forte que la simple décorrélation déjà mentionnée; elle est vérifiée par exemple quand $X(k)$ comporte seulement, outre le signal, un bruit additif blanc indépendant du signal. En pratique l'hypothèse (H2) peut poser problème (surtout en traitement d'antenne), mais il a été démontré dans [4] que l'on peut se passer d'elle pour établir les résultats à condition que μ soit petit devant μ_1 où μ_1 sera donné par la suite. L'hypothèse (H2) permet cependant de faciliter les calculs.

Dans ce cas, (31) s'écrit plus simplement

$$(32) \quad E[V(k+1)] = (\text{Id}_N - \mu R_x) E[V(k)],$$

soit encore, lorsque R_x est constante (cas stationnaire)

$$(33) \quad E[V(k+1)] = (\text{Id}_N - \mu R_x)^{k+1} E[V(0)].$$

Ainsi, si R_x est inversible, ce que l'on suppose,

$$(34) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E[V(k)] = 0$$

pourvu que

$$(35) \quad \mu < \mu_1 = \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

où λ_{\max} est la plus grande valeur propre de la matrice R_x . Cette condition est bien connue [10, 12]. En fin de convergence de l'algorithme, $W(k)$ oscillera autour de la solution de Wiener W_{opt} donnée en (12).

Vitesse de convergence

La matrice R_x peut se réécrire

$$(36) \quad R_x = Q^{-1} \Lambda Q, \quad Q^{-1} = Q^T$$

où Λ est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de R_x et Q la matrice unitaire des vecteurs propres orthonormés associés. Il vient directement

$$(37) \quad E[QV(k+1)] = [\text{Id}_N - \mu \Lambda]^{k+1} E[QV(0)].$$

La vitesse de convergence de chaque coefficient du vecteur $E[QV(k+1)]$ est donc gouvernée par la valeur propre correspondante de R_x .

Cas d'une seule source

D'après (14), R_x a $(N-1)$ valeurs propres égales à σ^2 et une valeur propre égale à $\sigma^2 + N\sigma_1^2$, celle-ci étant associée au vecteur propre D_1 . Il y a donc deux modes de convergence suivant la direction du vecteur $E[QV(0)]$ correspondant aux deux valeurs possibles du temps de convergence (cf. [1], temps au bout duquel l'eqm est divisée par e)

$$(38) \quad \tau_1 = \frac{1}{\mu(N\sigma_1^2 + \sigma^2)}, \\ \tau_n = \frac{1}{\sigma^2 \mu}, \quad n=2, \dots, N,$$

qui dépendent évidemment du pas d'incrément μ . Ainsi la condition de convergence (35) donnant

$$(39) \quad \mu < \mu_1 = \frac{2}{N\sigma_1^2 + \sigma^2},$$

implique

$$(40) \quad \tau_n > \frac{N\sigma_1^2 + \sigma^2}{2\sigma^2}.$$

Ainsi le temps de convergence est d'autant plus grand que $N\sigma_1^2/\sigma^2$ est grand, ce qui est généralement le cas.

Cas de P sources

Dans ce cas, il y a $N-P$ valeurs propres égales à σ^2 , les P autres valeurs propres vérifient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_P > \sigma^2$. Les relations (38) deviennent alors

$$(41) \quad \tau_n = \frac{1}{\lambda_n \mu}, \quad n=1, \dots, P; \\ \tau_n = \frac{1}{\sigma^2 \mu}, \quad n=P+1, \dots, N.$$

On vérifie bien [10, 13] que le temps de convergence est sensible à la dispersion des valeurs propres de R_x . La phase transitoire de l'algorithme LMS ne sera pas terminée tant que l'exponentielle ayant le temps de convergence le plus long (correspondant à la plus petite valeur propre) ne sera pas atténuée.

Variance du vecteur poids W en fin de convergence

D'après (33), en fin de convergence de l'algorithme adaptatif, $W(k)$ constitue une estimation non biaisée de W_{opt} ; on cherche à calculer la variance de $W(k)$, c'est-à-dire sa déviation par rapport à l'optimalité que l'on note

$$(42) \quad p(k) = E[|V(k)|^2].$$

A partir de la forme (29) de l'algorithme LMS, on calcule la récurrence sur $p(k)$ en tenant compte de l'hypothèse (H1)

$$(43) \quad p(k+1) = E[|[\text{Id}_N - \mu X(k)X^T(k)]V(k)|^2] \\ + \mu^2 E[|e_{\text{opt}}^*(k)X(k)|^2].$$

On calcule en Annexe 2 la valeur de $p(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} p(k)$ en fin de convergence. Pour mener

à bien ce calcul, nous avons supposé que $X^*(k)X(k)$ était constant et égal à $\text{Tr}\{R_x\}$, ce qui n'est pas le cas ici. En fait compte tenu de ce que $X^*(k)X(k)$ est majoré par $\text{Tr}\{R_x\} = N(\sigma_1^2 + \sigma^2)$, un calcul ressemblant à celui de l'Annexe 2 donnerait une borne supérieure de $p(\infty)$. Ce calcul a déjà été fait dans [4], et pour des commodités de calcul on préférera faire l'hypothèse mentionnée. Finalement, on trouve

$$(44) \quad p(\infty) = \frac{\mu N E_{\min}}{2 - \mu N (\sigma_1^2 + \sigma^2)}$$

En reprenant l'expression (20) de E_{\min} , et pour $\mu \ll \mu_2 = 2/N(\sigma_1^2 + \sigma^2)$, c'est-à-dire loin de la condition limite de convergence (algorithme « lent »), il vient

$$(45) \quad p(\infty) = \frac{\mu N \sigma_1^2 \sigma^2 / (N \sigma_1^2 + \sigma^2)}{2}$$

Dans la pratique, si l'on fait l'hypothèse d'un bon rapport signal sur bruit d'entrée selon $N \sigma_1^2 / \sigma^2 \gg 1$, $p(\infty)$ devient indépendant du nombre N de capteurs selon

$$(46) \quad p(\infty) = \frac{\mu \sigma^2}{2}$$

Néanmoins il n'est pas nécessaire que le rapport signal à bruit soit fort pour mener le calcul.

En conclusion

L'algorithme LMS (construit pour minimiser l'eqm en sortie du système adaptatif par rapport à un signal de référence connu en temps) permet d'obtenir en moyenne la solution optimale W_{opt} avec une variance proportionnelle au pas d'incrément μ de l'algorithme, ainsi qu'à la puissance du bruit de mesure sur les capteurs. On parle de « quasi-convergence » de $W(k)$ vers W_{opt} puisqu'en choisissant μ assez faible, on peut obtenir une variance arbitrairement faible de $W(k)$.

Cette solution optimale W_{opt} est rigoureusement proportionnelle au vecteur source d'un signal de référence à bande étroite s_1 dans le cas où il n'existe que cette source ou bien lorsque les autres sources lui sont orthogonales. La solution optimale est approximativement proportionnelle au vecteur source du signal de référence si les autres sources existantes sont éloignées de la source pilote.

Enfin, remarquons que dans le cas d'une antenne de forme parfaitement connue, la connaissance du signal temporel s_1 entraîne par la méthode précédemment décrite la détermination de l'angle d'arrivée du signal s_1 . Inversement si l'on connaît l'angle d'arrivée de s_1 , on peut déterminer la forme de l'antenne. Cette question fait l'objet de la section suivante.

III. 2. APPLICATION A LA DÉTERMINATION DE LA FORME DE L'ANTENNE

Il s'agit d'étudier la répercussion des résultats précédents sur l'estimation des paramètres décrivant le vecteur D_1 de (3), qui permettront de déterminer la géométrie de l'antenne sous l'hypothèse « onde plane ».

Pour cela, on écrit à partir de (20)

$$(47) \quad W(k) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2 + N \sigma_1^2} \hat{D}_1,$$

où \hat{D}_1 est une estimation de D_1 . D'après (28), (42) et (47), on déduit la variance de l'estimation de D_1 :

$$(48) \quad \text{var}(\hat{D}_1) = E[|\hat{D}_1 - D_1|^2] = p(\infty) \frac{(\sigma^2 + N \sigma_1^2)^2}{\sigma_1^4} \cong \frac{\mu N^2 \sigma^2}{2};$$

l'approximation de droite correspond au cas où $\mu \ll \mu_2$ et $N \sigma_1^2 / \sigma^2 \gg 1$. Alors que pour $\mu \ll \mu_2$, $p(\infty)$ est quasiment indépendant de N [formules (45), (46)], on voit qu'ici, dans les mêmes conditions, la variance de l'estimation du vecteur D_1 croît en N^2 . Par ailleurs, si l'on considère que les erreurs d'estimation faites pour chaque coefficient d_n de D_1 sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors

$$(49) \quad \text{var}(\hat{d}_n) = p(\infty) \frac{(\sigma^2 + N \sigma_1^2)^2}{N \sigma_1^4} \cong \frac{\mu N \sigma^2}{2},$$

variance qui croît avec N . Cette formule est utile dans le cas où l'on ne sait rien *a priori* sur la forme de l'antenne, de sorte que le vecteur source a la structure la plus générale (3). Le déphasage réel φ_n sera alors estimé par

$$(50) \quad \hat{\varphi}_n = \arg(\hat{d}_n).$$

En supposant que les parties réelle et imaginaire de \hat{d}_n sont affectées d'erreurs indépendantes, il s'ensuit que

$$(51) \quad \text{var}(\hat{\varphi}_n) = \frac{\text{var}(\hat{d}_n)}{2|\hat{d}_n|^2} \cong \frac{1}{2} \text{var}(\hat{d}_n),$$

en remplaçant \hat{d}_n par la vraie composante d_n qui est de module égal à 1. D'après (49), il vient donc

$$(52) \quad \text{var}(\hat{\varphi}_n) = p(\infty) \frac{(\sigma^2 + N \sigma_1^2)^2}{2N \sigma_1^4} \cong \frac{\mu N \sigma^2}{4}.$$

Autrement dit, sans connaissance *a priori* sur la forme de l'antenne, supposée quelconque, c'est l'antenne la plus courte (en nombre de capteurs) qui donne la meilleure estimation de chaque déphasage. A noter que dans (48), (49) et (52), la dernière égalité a lieu lorsque le rapport signal à bruit est fort.

Cas d'une antenne de forme quelconque

Nous pouvons paramétrer la géométrie de l'antenne à capteurs équidistants à l'aide des angles $(\gamma_n, n=2, \dots, N)$ que font chacun des segments reliant deux capteurs successifs avec l'axe que constitue la position rectiligne initiale de l'antenne. Ceci est représenté sur la figure 3. Il est alors facile de calculer les déphasages successifs sur chacun des capteurs; on a

$$(53) \quad \hat{\varphi}_{n+1} - \hat{\varphi}_n = a \sin(\theta_1 - \hat{\gamma}_{n+1}); \quad n=1, \dots, N-1,$$

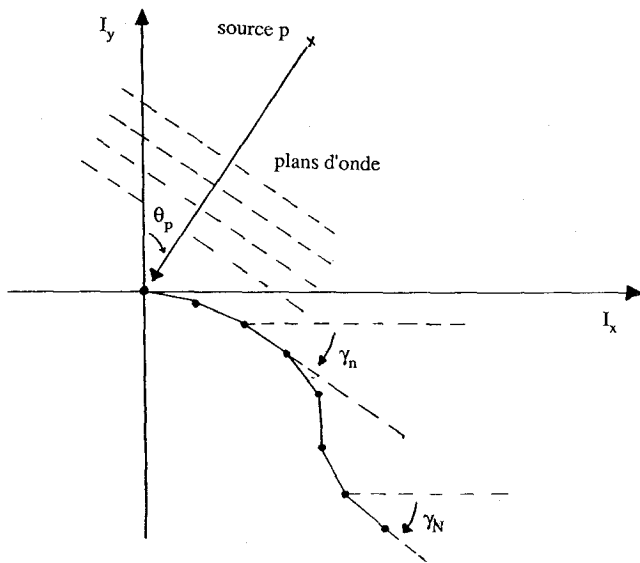


Fig. 3. — Paramétrage d'une antenne déformée.

ce qui donne, avec une indétermination de 2π

$$(54) \quad \hat{\gamma}_{n+1} = \theta_1 - \frac{1}{a} \text{Arc sin}(\hat{\phi}_{n+1} - \hat{\phi}_n);$$

$$n = 1, \dots, N-1.$$

Cas d'une antenne rectiligne

Plaçons nous maintenant dans le cas où l'on sait *a priori* que l'antenne est rectiligne. Dans ce cas, le vecteur D_1 à la structure particulière (21). Ce qui est inconnu, c'est donc seulement l'orientation de la source par rapport à l'antenne, caractérisée par l'angle θ_1 . Pour estimer θ_1 , on peut utiliser les résultats (50)-(52) appliqués au dernier capteur. Il vient évidemment

$$(55) \quad \widehat{\sin \theta_1} = \frac{1}{a(N-1)} \arg(\hat{d}_N),$$

ce qui donne d'après (49)

$$(56) \quad \text{var}(\widehat{\sin \theta_1})$$

$$= p(\infty) \frac{(\sigma^2 + N\sigma_1^2)^2}{2a^2 N(N-1)^2 \sigma_1^4} \approx \frac{\mu N \sigma^2}{4a^2 (N-1)^2},$$

la dernière équation correspondant à $\mu \ll \mu_2$ et à $N\sigma_1^2/\sigma^2 \gg 1$. Cette variance décroît en $1/N$: comme il est naturel, l'orientation est d'autant mieux estimée que l'antenne est longue (en nombre de capteurs). Cependant, il ne faut pas perdre de vue que ce résultat avantageux est dû à notre connaissance *a priori* de la forme de l'antenne. D'une manière plus générale, si l'antenne est de grande longueur et de forme inconnue, on peut penser qu'il sera plus intéressant d'estimer sa forme en la modélisant *a priori* comme une succession de sous antennes rectilignes.

Largeur $\Delta\omega$ du filtre passe-bande d'entrée

Nous pouvons désormais déterminer un majorant de la largeur de bande $\Delta\omega$ des signaux traités qui sont issus d'un filtrage préalable, comme cela a été expliqué

dans l'introduction et dans la section II. 1. En effet, pour une antenne de forme quelconque il vient, d'après (3) et (52)

$$(57) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\phi_n}{\phi_n} < \frac{1}{\phi_n} \sqrt{\frac{\mu N \sigma^2}{4}}.$$

Pour une antenne rectiligne, (56) fournit l'expression de ce majorant

$$(58) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} < \frac{\sqrt{\mu N \sigma^2}}{2a(N-1) \sin \theta_1},$$

dont la valeur numérique sera donnée dans la section III. 4 suivante.

III. 3. RÉSULTATS DE SIMULATION

Le but est d'identifier le vecteur source D_1 défini en (3) ainsi que les paramètres qui le composent. En fait pour simplifier les simulations qui suivent, on suppose que l'antenne reste rectiligne à capteurs équidistants; seule l'orientation θ_1 est inconnue. Il est bien évident que si la source est *a priori* parfaitement localisée, cette identification permet de déterminer les paramètres géométriques de l'antenne suivant (54).

Le signal de référence simulé est une exponentielle complexe

$$(59) \quad s_1(t) = \sigma_1 \exp(j\omega_0 t),$$

échantillonnée à la période $T = 10^{-3}$ s. L'onde propageant le signal est plane et de pulsation ω_0 (longueur d'onde λ_0). Le facteur de suréchantillonnage vaut $T_0/T = 4,2$ ($f_0 = 238,7$ Hz). Le signal arrive sous un angle θ_1 par rapport à la normale à une antenne rectiligne qui comporte N capteurs équidistants espacés de $d = \lambda_0/2$, soit $d = 3,15$ m, et d'après (24) $a = \pi$. Le vecteur D_1 a la forme (3) ou (21) suivant que l'on sait ou non que l'antenne est rectiligne. Du bruit blanc gaussien indépendant est généré sur chacun des capteurs avec une variance égale à $\sigma^2 = 2$. Dans les simulations $\theta_1 = 0,4$ rd et $\sigma_1^2 = 100$, ce qui correspond à un rapport signal à bruit sur chacun des capteurs de 17 dB.

Le vecteur poids W de l'antenne maîtresse est adapté suivant l'algorithme (19), pour lequel on fera varier le pas d'incrémentation μ . On ne s'intéresse pas ici au comportement transitoire de l'algorithme mais seulement au régime établi c'est-à-dire en fin de convergence. Les performances mesurées seront $p(\infty)$,

$\text{var}(\hat{d}_N)$ puis $\text{var}(\widehat{\sin \theta_1})$.

Sur la figure 4, les résultats théoriques concernant $p(\infty)$ sont confrontés aux résultats de simulations pour différents pas d'incrémentations et différentes valeurs de N . Les résultats sont ceux donnés par les formules (44). Les résultats expérimentaux sont en très bon accord avec ceux prédits par la théorie. En particulier, si l'on peut voir que le pas d'incrémentations limite μ_2 est d'autant plus faible que N est plus grand, on vérifie bien que pour $\mu \ll \mu_2$, $p(\infty)$ est indépendant de N . Remarquons que d'après (38), le temps de convergence devient très grand pour $\mu < 2^{-14}$ de

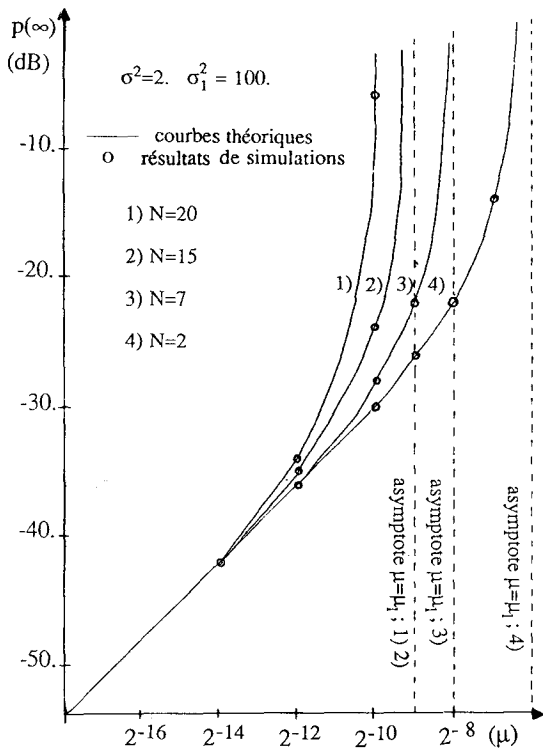


Fig. 4. — Courbes théoriques et de simulations de $p(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} E[|W(k) - W_{opt}|^2]$ en fonction du pas d'incrémenta-tion μ et du nombre N de capteurs.

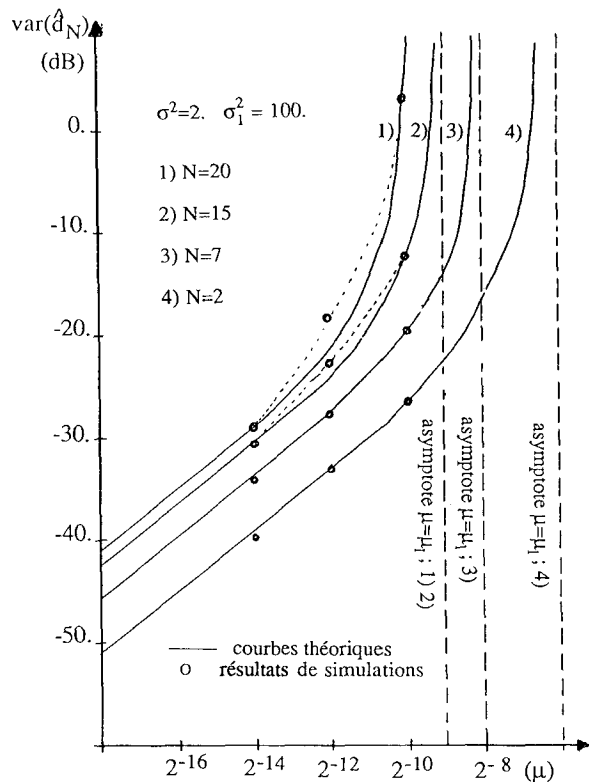


Fig. 5. — Courbes théoriques et de simulations de $\text{var}(\hat{d}_N)$ en fonction de μ et de N .

sorte qu'il est difficile d'obtenir des résultats de simulations en régime permanent.

La figure 5 représente les résultats théoriques et expérimentaux concernant l'estimation des coefficients du vecteur source D_1 sans savoir *a priori* que l'antenne est rectiligne. Là encore ces résultats coïncident très correctement sauf peut être pour les zones approchant l'instabilité c'est-à-dire là où N et μ sont grands. La théorie est bien vérifiée puisque $\text{var}(\hat{d}_N)$ augmente avec N conformément à (49). Rappelons la difficulté liée au compromis entre le choix d'un N grand [équation (22)] pour l'orthogonalité des sources et celui d'un N petit [équation (52)] pour une estimation plus facile de la géométrie de l'antenne.

Enfin, sur la figure 6, théorie et simulations s'accordent encore très bien en ce qui concerne la variance de l'estimation de $\sin \theta_1$ lorsqu'on sait *a priori* que l'antenne est rectiligne. Remarquons quand même que pour $\mu=2^{-14}$ les simulations semblent légèrement meilleures que la théorie; ceci est certainement dû au fait que la convergence n'était pas complète sur l'horizon sur lequel on a moyenné (W étant initialisé

à W_{opt}). Finalement on vérifie bien que $\text{var}(\widehat{\sin \theta_1})$ décroît lorsque l'on augmente N .

Autrement dit, si l'on sait *a priori* que l'antenne est rectiligne et l'onde plane, il vaut mieux chercher à estimer directement l'angle d'arrivée du signal (ceci se faisant sur le dernier capteur) plutôt que tous les coefficients du vecteur source et à travers eux les déphasages du signal sur chacun des capteurs. Ceci est conforme à la théorie de la section III. 2.

Une autre façon d'illustrer ce résultat est de comparer l'influence de l'estimation de D_1 et de celle de $\sin \theta_1$

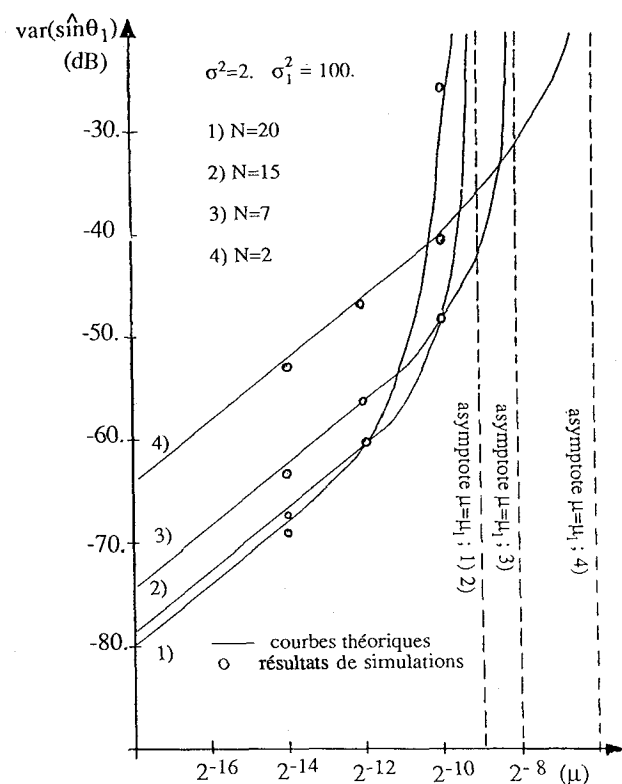


Fig. 6. — Courbes théoriques et de simulations de $\text{var}(\widehat{\sin \theta_1})$ en fonction de μ et de N .

sur les performances de la méthode d'analyse spatiale usuelle exposée dans la section II. 3 précédente. Dans les simulations, la contrainte C intervenant dans

l'algorithme (26) est prise égale à l'estimation de D_1 faite à partir de W , c'est-à-dire

$$(60) \quad c_n = \hat{d}_n = \frac{w_n}{w_1}; \quad n=1, \dots, N$$

où c_n est le n -ième coefficient du vecteur de contrainte C . On regarde donc l'influence de cette estimation sur P_y en fonction de μ . Le vecteur W est initialisé à sa valeur optimale W_{opt} de sorte que la dégradation constatée sur P_y n'est due qu'à l'erreur de fluctuation de l'algorithme d'adaptation de W . L'étude de l'algorithme (25)-(26) n'est pas de notre propos; on choisit pour toutes les simulations $\mu_a = 2^{-10}$ (ce choix de μ_a est convenable, car il apparaît peu de fluctuations sur la courbe 1 de la figure 7 correspondant au cas où

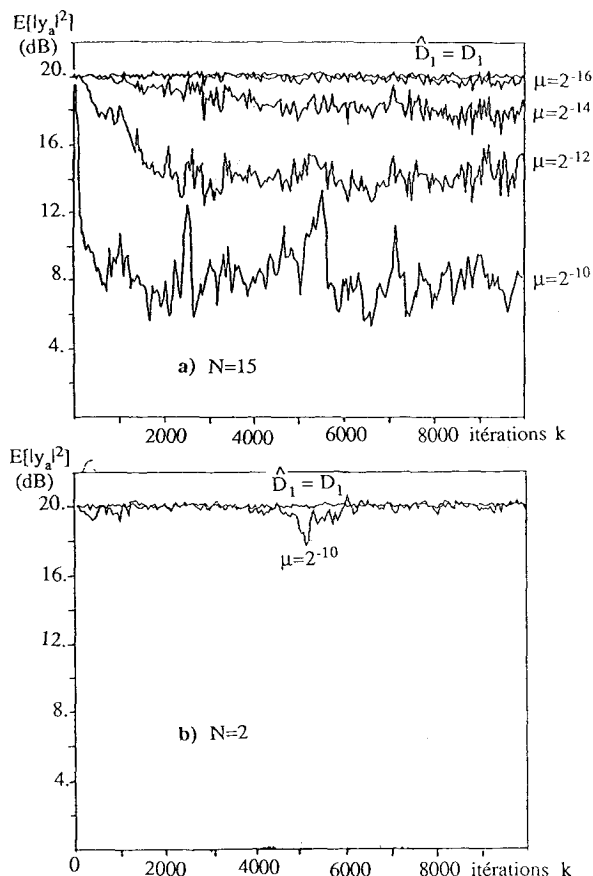


Fig. 7. — Influence de l'estimation de la forme de l'antenne sur la puissance du signal estimée par la formule de Capon.

D_1 est connu et non estimé). Les effets observés sur la figure 7 sont bien ceux de l'antenne maîtresse. Sur la figure 7a on voit alors qu'il faut prendre $\mu = 2^{-16}$ pour $N=15$ afin de restituer la valeur $P_y = \sigma_1^2 + \sigma^2/N$ du cas $C=D_1$ de la courbe 1. Remarquons sur la figure 7b que la valeur $\mu = 2^{-10}$ suffit pour $N=2$. En fait, il s'agit là d'un autre phénomène qui n'a rien à voir avec l'estimation de D_1 . On sait [6] que plus N est grand, meilleure est la résolution de l'antenne auxiliaire et plus le lobe de directivité est étroit. Ainsi, à même erreur sur l'estimation de la direction de la source, c'est-à-dire à même \hat{D}_1 , la valeur P_y dans la direction $C=\hat{D}_1$ sera d'autant plus perturbée que N est grand. Autrement dit, plus N est

grand meilleure doit être l'estimation de la forme de l'antenne, mais plus cette estimation est difficile à réaliser.

En revanche, si le modèle rectiligne (21) est légitime, en estimant l'angle d'arrivée θ_1 à partir du dernier coefficient de W et en reconstituant D_1

$$(61) \quad C = \hat{D}_1 = [1, e^{j\pi \sin \hat{\theta}_1}, e^{j\pi 2 \sin \hat{\theta}_1}, \dots, e^{j\pi (N-1) \sin \hat{\theta}_1}]^T,$$

on voit alors sur la figure 8a que le résultat est amélioré par rapport à celui de la figure 7a. En effet, il suffit pour $N=15$ de prendre $\mu = 2^{-12}$ pour restituer P_y et donc le diagramme de directivité.

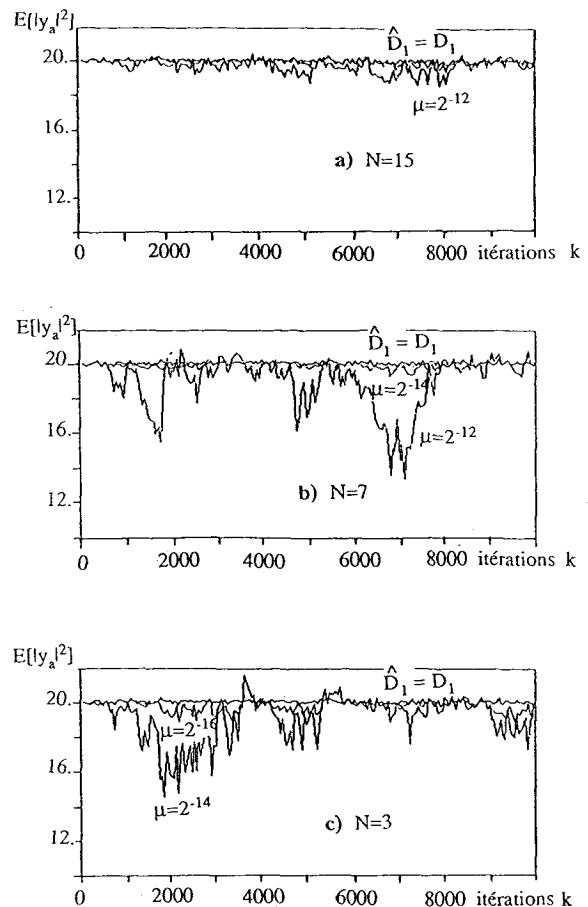


Fig. 8. — Influence de l'estimation de la forme de l'antenne, connaissant *a priori* sa forme rectiligne, sur la puissance du signal estimée par la formule de Capon.

Cela prouve une fois encore que le résultat est meilleur lorsqu'on possède une information *a priori* sur la forme de l'antenne.

Par ailleurs, on vérifie que dans ce cas il vaut mieux augmenter N . En effet, les figures 8b, c montrent que pour restituer P_y et donc le diagramme de directivité avec la même qualité, plus N est grand, plus on peut augmenter μ , ceci impliquant comme on l'a déjà vu une plus grande vitesse de convergence. Ainsi, pour $N=7$ et $N=3$ il faut respectivement $\mu = 2^{-14}$ et $\mu = 2^{-16}$ pour restituer P_y .

Enfin, on peut donner une valeur numérique de la largeur de bande $\Delta\omega$ des signaux à l'aide des résultats

précédents. Dans le cas où $d = \lambda/2$ c'est-à-dire où $a = \pi$, la formule (58) devient

$$(62) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} < \frac{\sqrt{\mu N \sigma^2}}{2\pi(N-1)\sin\theta_1}.$$

Par exemple, avec $\mu = 2^{-10}$, $N = 15$, $\theta_1 = 0,4$ rd et $\omega = 1500$ rd/s, ceci donne $\Delta\omega \leq 7,5$ rd/s soit une largeur de 1,2 Hz autour de la fréquence 238,7 Hz. Remarquons que $\Delta\omega/\omega$ diminue avec le pas d'incrémentation μ et qu'il y aura donc un compromis à faire entre la finesse de l'estimation des déphasages et la largeur du préfiltrage passe-bande. Remarquons encore que $\Delta\omega/\omega$ devient d'autant plus grand (filtre d'autant plus large) que la source coopérative se trouve plus près de la perpendiculaire à l'antenne, ce qui est conforme au résultat classique concernant la « condition bande étroite » pour les antennes.

IV. Étude de l'algorithme LMS dans le cas d'une antenne se déformant au cours du temps

IV.1. POURSUITE DE NON-STATIONNARITÉS PAR UN FILTRE ADAPTATIF

S'il n'assure pas une convergence parfaite, l'algorithme adaptatif stochastique a la capacité fondamentale de poursuivre un système optimal W_{opt} variant dans le temps. L'étude des propriétés de poursuite de l'algorithme a déjà fait le sujet de quelques travaux notamment en annulation d'écho [1-4].

Il est connu qu'en notant

$$(63) \quad d(k) = W_{opt}(k+1) - W_{opt}(k)$$

le vecteur des variations du filtre optimal d'un instant à l'autre, alors pour $\mu \ll \mu_2$ et pour $d(k)$ aléatoire et blanc [3]

$$(64) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E[|W(k) - W_{opt}(k)|^2] = \beta\mu + \frac{\beta'}{\mu}$$

tandis que

$$(65) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E[|W(k) - W_{opt}(k)|^2] \leq \beta\mu + \frac{\beta''}{\mu^2}$$

pour $d(k)$ déterministe et borné [4]. Dans les deux cas, le premier terme est dû aux fluctuations de l'algorithme qui a fait l'objet de la section précédente et croît quand μ croît. Le second terme est le terme de retard (dans le cas stationnaire il est nul); il décroît quand μ croît. Ainsi, il existe un compromis à faire entre la finesse de convergence ($\beta\mu$) qui exige un μ faible et la capacité de poursuite (en β'/μ ou β''/μ^2) qui exige d'augmenter μ . Il existe généralement une valeur optimale μ_{opt} réalisant ce compromis. La constante β dépend du bruit additif tandis que les constantes β' et β'' dépendent principalement de la vitesse des variations de $W_{opt}(k)$.

Inversement, pour μ fixé, il existe toujours un niveau maximal de non-stationnarité (contenu dans β' ou β'') que l'on peut suivre tout en assurant une convergence voulue.

IV.2. CALCUL DE L'ERREUR DE FLUCTUATION DES PARAMÈTRES DE L'ANTENNE ADAPTATIVE DANS LE CAS NON STATIONNAIRE

On ne considère que le cas où $d(k)$ est aléatoire centré.

Les notations (28) et (30) deviennent respectivement

$$(66) \quad V(k) = W_{opt}(k) - W(k)$$

et

$$(67) \quad e_{opt}(k) = s_1(k) - W_{opt}^T(k) X(k).$$

Si l'on reprend l'algorithme (19) avec la notation (63), il vient

$$(68) \quad V(k+1) = [Id_N - \mu X(k) X^T(k)] V(k) - \mu e_{opt}^*(k) X(k) + d(k).$$

En prenant la limite de l'espérance mathématique de (68) et grâce aux hypothèses (H1) et (H2), on trouve que

$$(69) \quad E[V(k+1)] = [Id_N - \mu R_x(k)] E[V(k)],$$

soit encore

$$(70) \quad E[V(k+1)] = \prod_{j=1}^k [Id_N - \mu R_x(j)] E[V(1)].$$

Il est démontré dans [4] que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[V(k)] = 0$$

ou

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[W(k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} E[W_{opt}(k)]$$

c'est-à-dire qu'en régime permanent, le système adaptatif est en moyenne égal au système optimal même si celui-ci varie dans le temps.

En tenant compte des hypothèses faites sur $d(k)$, la procédure de récurrence sur $p(k)$ est analogue à celle du cas stationnaire, mais cette fois on obtient à la place de (43)

$$(72) \quad p(k+1) = E[| [Id_N - \mu X(k) X^T(k)] V(k) |^2] + \mu^2 E[| e_{opt}^*(k) X(k) |^2] + d^2,$$

où $d^2 = E[|d(k)|^2]$. On calcule en Annexe 3 la valeur de $p(\infty)$ dans le cas non stationnaire avec des hypothèses identiques à celles du cas stationnaire. À l'aide de la grandeur d'^2 définie en (A 3-2), le résultat s'écrit

$$(73) \quad p(\infty) = \frac{E_{min} \mu N}{2 - \mu N (\sigma^2 + \sigma_1^2)} + \frac{d^2 (2 - \mu N \sigma_1^2)}{2 \mu \sigma^2 [2 - \mu N (\sigma^2 + \sigma_1^2)]} - \frac{d'^2 \sigma_1^2}{2 \mu \sigma^2 (\sigma^2 + N \sigma_1^2)}.$$

Finalement, pour $\mu \ll \mu_2$, (73) devient

$$(74) \quad p(\infty) = \frac{E_{\min} \mu N}{2} + \frac{d^2}{2\mu\sigma^2} - \frac{d'^2 \sigma_1^2}{2\mu\sigma^2(\sigma^2 + N\sigma_1^2)},$$

qui correspond au résultat annoncé en (64) avec

$$(75) \quad \beta = \frac{E_{\min} N}{2}$$

$$(76) \quad \beta' = \frac{d^2}{2\sigma^2} - \frac{d'^2 \sigma_1^2}{2\sigma^2(\sigma^2 + N\sigma_1^2)}.$$

Finalement, on voit bien qu'il existe un compromis à faire quant au choix du pas d'incrémentation de l'algorithme afin de minimiser l'erreur (74).

IV. 3. RÉSULTATS DE SIMULATION

(a) cas d'une antenne rectiligne en rotation

On suppose que la source de référence a une direction fixe et on simule une antenne qui, bien que restant rectiligne et rigide (capteurs équidistants), tourne autour du premier capteur. L'angle sous lequel arrive le signal de référence sur l'antenne est alors à chaque instant

$$(77) \quad \theta(k) = \theta_1 + k \Delta\theta.$$

Le vecteur source à identifier est

$$(78) \quad D(k) = [1, e^{ja \sin(\theta_1 + k\Delta\theta)}, e^{j2a \sin(\theta_1 + k\Delta\theta)}, \dots, e^{j(N-1)a \sin(\theta_1 + k\Delta\theta)}]^T.$$

Sur les figures 9 et 10 sont rassemblés les résultats de simulation en termes de variance de l'estimation de $W_{opt}(k)$ et de variance de l'estimation de $\sin \theta(k)$, ceci pour différents pas d'incrémentations et pour des vitesses de rotation de $\Delta\theta = 10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-6}$ et $2,5 \cdot 10^{-6}$ rd/ms (c'est-à-dire que l'antenne tourne de 0,1 rd en respectivement 10, 20 et 40 secondes). Ces figures font apparaître conformément à la théorie, un pas d'incrémentations optimal μ_{opt} d'autant plus faible que la non-stationnarité à poursuivre est plus lente. Cet optimum réalise un compromis entre augmenter μ pour poursuivre la variation de W_{opt} ou de façon équivalente celle de $D(k)$, et diminuer μ pour avoir une estimation plus fine. Il est important de remarquer que les figures 9 et 10 présentent les mêmes μ_{opt} ; ceci implique qu'en non stationnaire il est moins grave de ne pas connaître le modèle géométrique de l'antenne qu'en stationnaire.

La figure 11 représente le résultat de la poursuite opérée en appliquant la formule de Capon dans la direction estimée du signal lorsque l'antenne rectiligne est en rotation de $\Delta\theta = 2,5 \cdot 10^{-6}$ ($N = 15$). La courbe (1) représente la puissance $P_y(k)$ de $y_a(k)$ en sortie de l'antenne auxiliaire quand $\hat{D}(k)$ est connu à chaque instant, même s'il varie au cours du temps; on trouve bien que $P_y(k)$ oscille autour de $P_y = \sigma_1^2 + (\sigma^2/N)$. Les courbes (2) et (3) donnent les valeurs de $P_y(k)$ lorsque $D(k)$ est estimé à chaque instant par la méthode proposée dans cet article. La courbe (2), pour laquelle le modèle d'antenne rectiligne de l'antenne est connu, montre un meilleur résultat

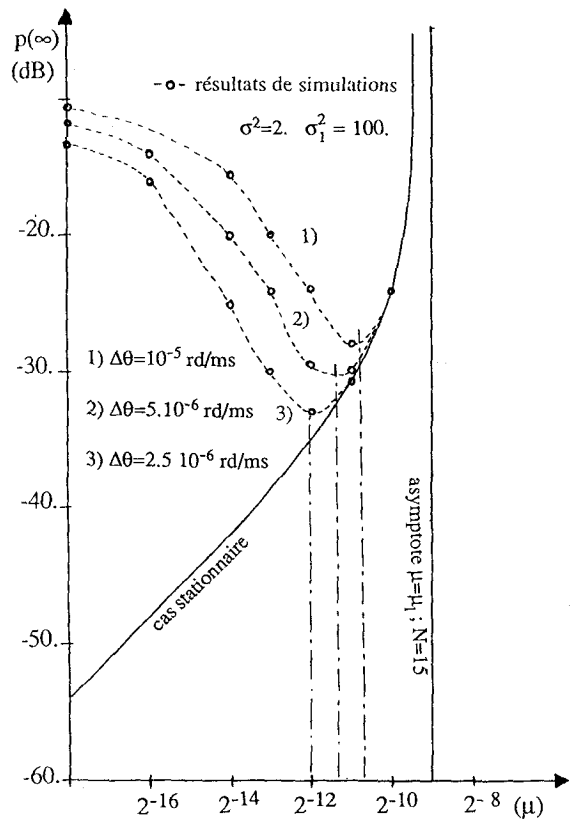


Fig. 9. — Courbes de simulations de $p(\infty)$ pour une antenne rectiligne en rotation, en fonction de μ et $\Delta\theta$ vitesse de rotation ($N = 15$).

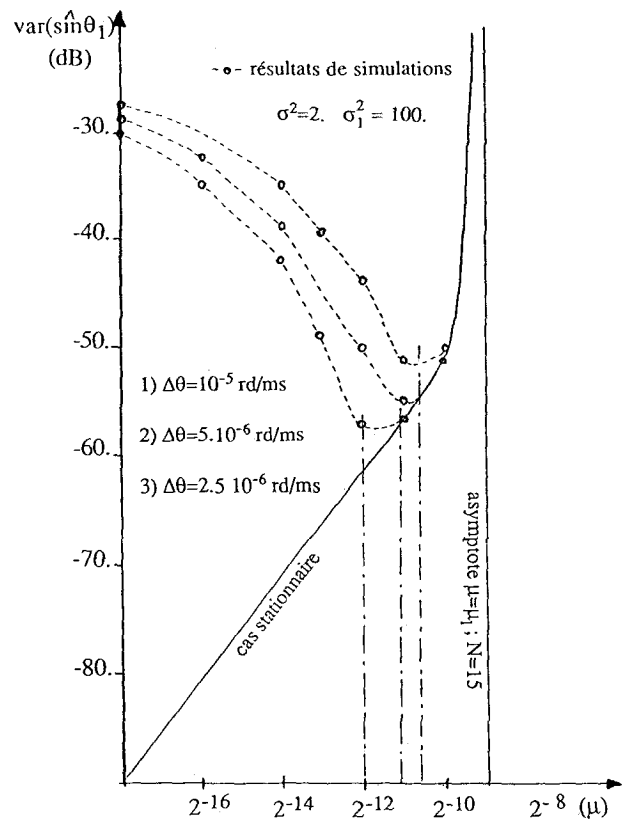


Fig. 10. — Courbes de simulations de $\text{var}(\widehat{\sin \theta_1})$ pour une antenne rectiligne en rotation, en fonction de μ et $\Delta\theta$ vitesse de rotation ($N = 15$).

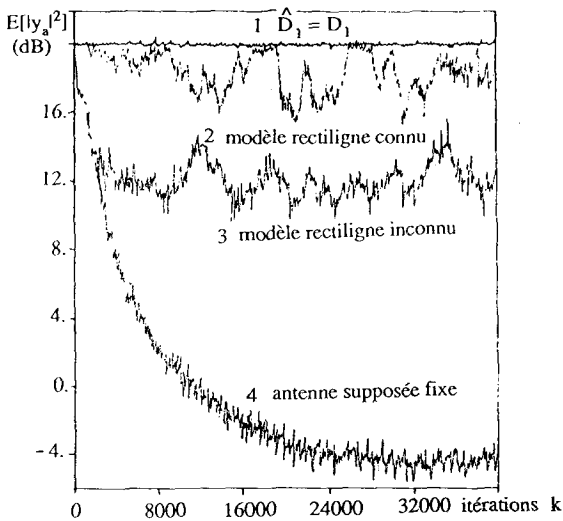


Fig. 11. — Estimation de la puissance par la formule de Capon dans la direction estimée du signal en poursuite adaptative. Cas d'une antenne rectiligne en rotation $\Delta\theta=2,5 \cdot 10^{-6}$, $\mu_a=2^{-10}$ et $\mu=\mu_{opt}=2^{-12}$.

que la courbe (3) pour lequel le modèle n'était pas connu *a priori*. Enfin la courbe (4) présente le résultat obtenu lorsque $D(k)$ n'est pas estimé à chaque instant, c'est-à-dire lorsqu'on suppose que l'antenne reste fixe.

Ainsi l'amélioration apportée par la méthode d'estimation en temps réel de la forme de l'antenne ou de sa position est très nette, même si l'on ne possède pas de modèle *a priori*; il suffit de comparer les courbes (3) et (4) de la figure 11. Elle est encore plus nette si un modèle est connu, en l'occurrence la forme rectiligne [comparer les courbes (2) et (4)].

Enfin sur la figure 12 on montre que l'existence d'une seconde source initialement orthogonale à la source de référence [$\theta_2=1,17515$ rd, cf. (II.2) et $\sigma_2^2=100$] n'affecte que peu les performances déjà rencontrées dans le cas d'une seule source, même lorsque l'antenne est en rotation par rapport à l'un de ces capteurs, pourvu que $|\alpha_{12}|$ reste assez petit par rapport à N .

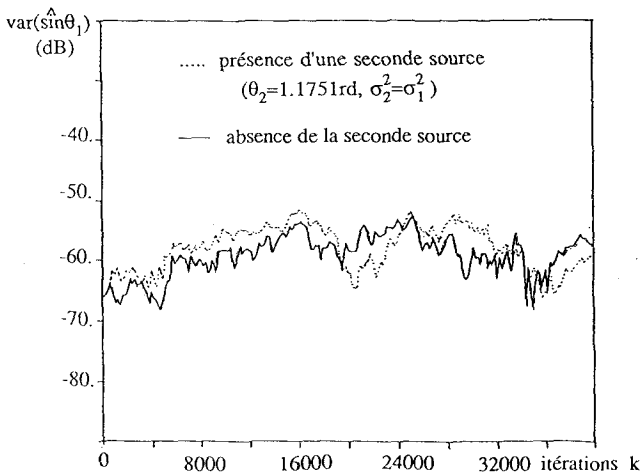


Fig. 12. — Influence d'une seconde source sur $\text{var}(\sin \theta_1)$ lorsque l'antenne rectiligne est en rotation ($\Delta\theta=2,5 \cdot 10^{-6}$ rd/ms, $N=15$). Initialement $D_1^+ D_2=0$, à la fin $D_1^+ D_2=1,42$.

(b) cas d'une antenne dont les capteurs se déplacent sur un arc de cercle

Dans ce cas, les paramètres angulaires décrivant la position des capteurs varient dans le temps de la façon suivante

$$\begin{aligned} \gamma_n(0) &= 0; & n &= 1; \dots; N \\ (79) \quad k > 0 \quad \gamma_n(k+1) &= \gamma_{n+1}(k); & n &= 2; \dots; N-1; \\ \gamma_N(k+1) &= (k+1)\gamma; \end{aligned}$$

où γ est une constante indiquant la vitesse de déformation de l'antenne. Les valeurs $\gamma=2,5 \cdot 10^{-5}$,

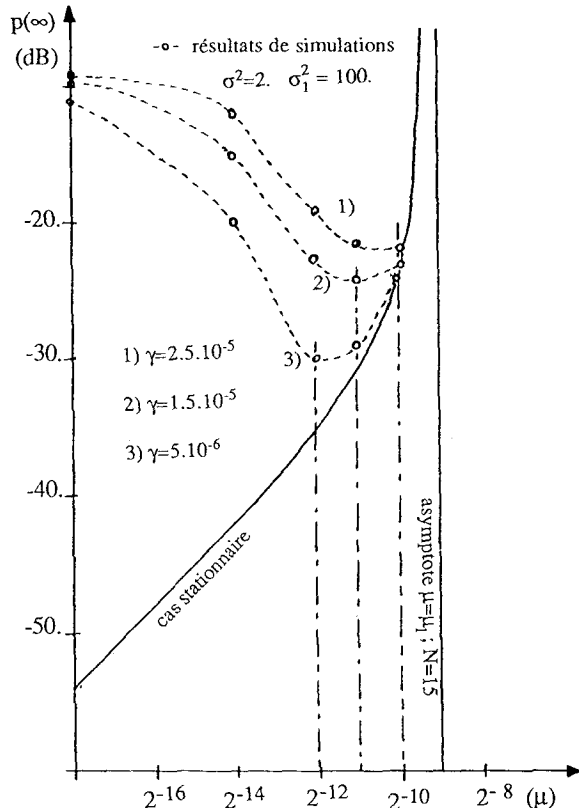


Fig. 13. — Courbes de simulations de $p(\infty)$ pour une antenne dont les capteurs se déplacent sur un arc de cercle en fonction de μ et de γ vitesse de déformation ($N=15$).

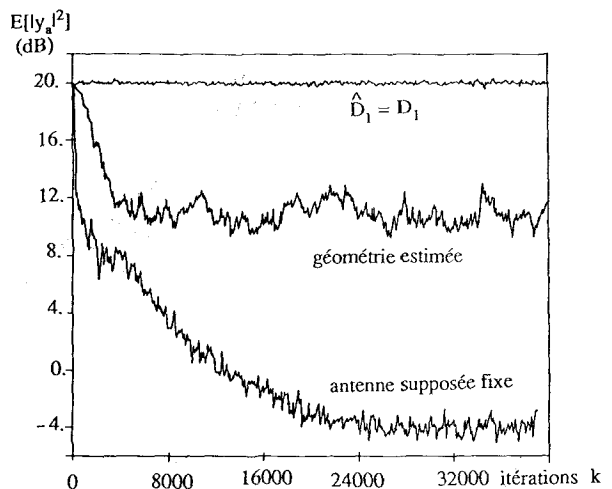


Fig. 14. — Estimation de la puissance par la formule de Capon dans la direction estimée du signal en poursuite adaptative. Cas d'une antenne dont les capteurs se déplacent sur un arc de cercle $\gamma=2,5 \cdot 10^{-5}$, $\mu_a=2^{-10}$ et $\mu=\mu_{opt}=2^{-10}$ ($N=15$).

$1,5 \cdot 10^{-5}$ et $5 \cdot 10^{-6}$ radians par seconde correspondent à une rotation globale de l'antenne (redevue rectiligne) de $\pi/2$ par rapport à sa position initiale, en approximativement 1, 2 et 5 minutes. Les courbes de la figure 13 illustrent les résultats de simulations concernant $p(\infty)$ en fonction de μ et de γ . Il apparaît encore, pour chaque γ , un pas d'incrément optimal μ_{opt} pour lequel l'algorithme LMS a la capacité de poursuivre les déformations de l'antenne. La figure 14 montre l'amélioration très nette qu'apporte l'estimation adaptative de la forme de l'antenne sur l'estimation par la formule de Capon de la puissance du signal reçu.

V. Conclusion

Les déformations éventuelles de l'antenne au cours du temps risquent de dégrader les performances des méthodes habituelles de localisation de source en acoustique sous-marine. Pour compenser ces dégradations, on a imaginé un système adaptatif principal qui à l'aide d'un signal de référence connu en temps, permet d'estimer à chaque instant le vecteur-source de ce signal. Dans la mesure où l'azimut de la source pilote est connu, il est facile d'en déduire la forme géométrique de l'antenne sous l'hypothèse « onde plane ». Les paramètres géométriques de l'antenne sont alors communiqués aux filtres auxiliaires qui peuvent appliquer les méthodes usuelles d'analyse spatiale.

Nous avons particulièrement étudié l'influence de l'algorithme d'adaptation sur l'estimation du vecteur source et des paramètres géométriques de l'antenne. Pour cela, des calculs d'erreurs d'estimation du vecteur source ont été établis à la fois dans les cas stationnaires et non stationnaires. De plus des simulations sont venues confirmer la théorie.

Le choix de la source auxiliaire de référence reste un problème important surtout en acoustique sous-marine. Le mieux serait que cette source physique soit située à bord du bateau pour pouvoir être contrôlable localement, mais ceci constitue une hypothèse contraignante en pratique et pas forcément réalisable dans certaines applications. On préférera se repérer par rapport à un signal connu émis par un bruiteur annexe parfaitement localisé. Ce bruiteur ne doit pas nécessairement être de forte puissance par rapport au bruit.

La méthode proposée a cependant l'avantage de pouvoir être appliquée dans un autre contexte que celui de la localisation de sources en acoustique sous-marine. En effet, puisqu'elle permet d'identifier le vecteur source en temps réel, elle s'appliquera dans tous les problèmes où, l'antenne étant fixe, c'est le milieu de propagation qui évolue [14] ou bien la source qui se déplace.

Remerciements

Les auteurs remercient les « experts » pour des suggestions et commentaires utiles.

Manuscrit reçu le 19 octobre 1987.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. WIDROW *et al.*, Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter, *Proceedings of the IEEE*, 64, n° 8, August 1976.
- [2] A. BENVENISTE et G. RUGET, A measure of the tracking capability of recursive algorithms with constant gains, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-27, n° 3, March 1982.
- [3] O. MACCHI, *Advances in adaptive filtering*, Digital communications, E. BIGLIERI et G. PRATI éd., North Holland, 1986.
- [4] S. MARCOS et O. MACCHI, Tracking capability of the least mean square algorithm: application to an asynchronous echo canceller, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-35, n° 11, November 1987.
- [5] F. B. TUTEUR, The effects of a moving interference on an adaptive array processor, submitted to *IEEE Trans. on ASSP*.
- [6] D. H. JONHSON, The application of spectral estimation methods to bearing estimation problems, *Proceedings of the IEEE*, 70, n° 9, September 1982.
- [7] J. MUNIER et G. DELISLE, Spatial analysis in passive listening using adaptive techniques, *Proceedings of the IEEE*, 75, n° 11, November 1987.
- [8] B. WIDROW, P. E. MANTHEY, L. J. GRIFFITHS et B. B. GOODE, Adaptive antenna systems, *Proceedings of the IEEE*, 55, n° 12, December 1967.
- [9] O. MACCHI, Le filtrage adaptatif en télécommunications, *Annales des Télécommunications*, 36, n° 11-12, novembre 1981.
- [10] R. A. MONZINGO et T. W. MILLER, *Introduction to adaptive arrays*, New York, Wiley, 1980.
- [11] J. E. HUDSON, *Adaptive array principles*, Peter Peregrinus, 1981.
- [12] B. WIDROW et S. D. STEARNS, *Adaptive signal processing*, Prentice Hall, 1985.
- [13] S. MARCOS et O. MACCHI, Suréchantillonnage, vitesse et variance résiduelle d'un filtre adaptatif pour signal de données, *GRETSI-87*, 1-5 juin 1987, Nice.
- [14] B. FAURE, S. BOURENNANE et J. L. LACOUME, Analyse temporelle et spatiale de l'onde reçue sur une grande antenne à longue distance en acoustique sous-marine, *Revue Traitement du Signal*, 4, n° 4, 3^e trimestre 1987.

Annexe 1

CALCUL DE W_{opt} DANS LE CAS DE P-1 SOURCES ORTHOGONALES A LA SOURCE DE RÉFÉRENCE

Par hypothèse, les sources sont orthogonales à la source 1 de référence au sens où

$$(A1-1) \quad D_1^+ D_p = 0, \quad p=2, \dots, P.$$

Donc, d'après (14), D_1 est un vecteur propre de R_x associé à la valeur propre $N\sigma_1^2 + \sigma^2$. Soit donc la base orthonormée des vecteurs propres de R_x

$$(A1-2) \quad \left\{ \frac{D_1}{\sqrt{N}}, V_2, \dots, V_N \right\}^T,$$

alors

$$(A1-3) \quad R_x = \sum_{n=2}^N \lambda_n V_n V_n^+ + (N\sigma_1^2 + \sigma^2) \frac{D_1 D_1^+}{N}.$$

La matrice R_x^{-1} a les mêmes vecteurs propres que R_x mais avec les valeurs propres inverses associées de sorte que

$$(A1-4) \quad R_x^{-1} = \sum_{n=2}^N \lambda_n^{-1} V_n V_n^T + (N\sigma_1^2 + \sigma^2)^{-1} \frac{D_1 D_1^T}{N}$$

Finalement, il est facile de calculer à partir de (13)

$$(A1-5) \quad W_{opt} = \frac{\sigma_1^2}{(N\sigma_1^2 + \sigma^2)} D_1$$

qui n'est rien d'autre que le résultat qui serait obtenu dans le cas d'une source unique.

Donc, si la source de référence est orthogonale aux P-1 autres sources, alors W_{opt} est colinéaire à D_1 avec le même coefficient de proportionnalité que dans le cas où la source 1 est seule.

Annexe 2

CALCUL DE LA VARIANCE DE L'ESTIMATEUR W DE W_{opt} EN FIN DE CONVERGENCE : CAS STATIONNAIRE

On note également

$$(A2-1) \quad q(k) = E[|V^T(k) D_1|^2]$$

qui sera utile dans la suite des calculs. On calcule la récurrence sur q

$$(A2-2) \quad q(k+1) = E[|D_1^T - \mu D_1^T X(k) X^T(k) V(k)|^2 + \mu^2 E[|e_{opt}^*(k) D_1^T X(k)|^2]]$$

Le développement de (43) donne

$$(A2-3) \quad p(k+1) = p(k) + \mu^2 E[V^T(k) X(k) X^T(k) X(k) X^T(k) V(k)] - 2\mu E[V^T(k) X(k) X^T(k) V(k)] + \mu^2 E_{min} E[X^T(k) X(k)],$$

où $E_{min} = E[e_{opt}^*]^2$ a déjà été calculé en (20). De même, il vient d'après (A2-2)

$$(A2-4) \quad q(k+1) = q(k) + \mu^2 E[V^T(k) X(k) X^T(k) D_1 D_1^T X(k) X^T(k) V(k)] - 2\mu E[V^T(k) D_1 D_1^T X(k) X^T(k) V(k)] + \mu^2 E_{min} E[D_1^T X(k) X^T(k) D_1]$$

On suppose dans la suite que

$$X^T(k) X(k) = \text{Tr}\{R_x\} = N(\sigma^2 + \sigma_1^2),$$

ce qui a été justifié dans le texte. De la même façon, $D_1^T X(k) X^T(k) D_1$ est en moyenne égal à $D_1^T R_x D_1$. Ainsi, les équations (A2-3) et (A2-4) peuvent se réécrire, si l'on tient compte de l'hypothèse (H2),

$$(A2-5) \quad p(k+1) = p(k) + \mu^2 N(\sigma^2 + \sigma_1^2) E[V^T(k) R_x V(k)] - 2\mu E[V^T(k) R_x V(k)] + \mu^2 E_{min} N(\sigma^2 + \sigma_1^2)$$

et

$$(A2-6) \quad q(k+1) = q(k) + \mu^2 D_1^T R_x D_1 E[V^T(k) R_x V(k)] - 2\mu E[V^T(k) D_1 D_1^T R_x V(k)] + \mu^2 E_{min} D_1^T R_x D_1$$

En tenant compte de la forme (14) de la matrice R_x dans le cas d'une source et de l'équation $D_1^T D_1 = N$, il vient encore

$$(A2-7) \quad p(k+1) = [1 + \mu^2 N(\sigma^2 + \sigma_1^2) \sigma^2 - 2\mu\sigma^2] p(k) + [\mu^2 N(\sigma^2 + \sigma_1^2) \sigma_1^2 - 2\mu\sigma_1^2] q(k) + \mu^2 E_{min} N(\sigma^2 + \sigma_1^2)$$

et

$$(A2-8) \quad q(k+1) = [1 + \mu^2 N(\sigma^2 + N\sigma_1^2) \sigma_1^2 - 2\mu(\sigma^2 + N\sigma_1^2)] q(k) + \mu^2 N(\sigma^2 + N\sigma_1^2) \sigma^2 p(k) + \mu^2 E_{min} N(\sigma^2 + N\sigma_1^2)$$

On admet que les suites $p(k)$ et $q(k)$ sont convergentes, cette étude ayant été faite dans [3]. A partir des égalités (A2-7) et (A2-8), il vient par passage à la limite

$$(A2-9) \quad p(\infty) = \frac{\mu E_{min} N(\sigma^2 + \sigma_1^2)}{\sigma^2 [2 - \mu N(\sigma^2 + \sigma_1^2)]} - \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} q(\infty)$$

et

$$(A2-10) \quad q(\infty) = \frac{\mu E_{min} N}{2 - \mu N \sigma_1^2} + \frac{\mu N \sigma^2}{2 - \mu N \sigma_1^2} p(\infty)$$

La solution du système d'équations (A2-9)-(A2-10) fournit

$$(A2-11) \quad p(\infty) = \frac{\mu N E_{min}}{2 - \mu N(\sigma^2 + \sigma_1^2)}$$

Annexe 3

CALCUL DE LA VARIANCE DE L'ESTIMATEUR W DE W_{opt} EN RÉGIME PERMANENT : CAS NON STATIONNAIRE

On procède de la même manière qu'en Annexe 2. La récurrence sur $q(k)$ défini en (A2-1) donne

$$(A3-1) \quad q(k+1) = E[|D_1^T - \mu D_1^T X(k) X^T(k) V(k)|^2 + \mu^2 E[|e_{opt}^*(k) D_1^T X(k)|^2] + d'^2,$$

où

$$(A3-2) \quad d'^2 = E[D_1^T d(k) d^T(k) D_1]$$

Le système (A2-7), (A2-8) se trouve remplacé par

$$(A3-3) \quad p(k+1) = [1 + \mu^2 N(\sigma^2 + \sigma_1^2) \sigma^2 - 2\mu\sigma^2] p(k) + [\mu^2 N(\sigma^2 + \sigma_1^2) \sigma_1^2 - 2\mu\sigma_1^2] q(k) + \mu^2 E_{min} N(\sigma^2 + \sigma_1^2) + d'^2,$$

et

$$(A3-4) \quad q(k+1) = [1 + \mu^2 N(\sigma^2 + N\sigma_1^2)\sigma_1^2 - 2\mu(\sigma^2 + N\sigma_1^2)]q(k) + \mu^2 N(\sigma^2 + N\sigma_1^2)\sigma_1^2 p(k) + \mu^2 E_{\min} N(\sigma^2 + N\sigma_1^2) + d'^2.$$

En passant à la limite conformément à l'Annexe 2, ceci donne le système

$$(A3-5) \quad p(\infty) = \frac{\mu E_{\min} N(\sigma^2 + \sigma_1^2) + (d^2/\mu)}{\sigma^2 [2 - \mu N(\sigma^2 + \sigma_1^2)]} - \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} q(\infty)$$

et

$$(A3-6) \quad q(\infty) = \frac{\mu E_{\min} N + (d'^2/\mu)(\sigma^2 + N\sigma_1^2)}{2 - \mu N\sigma_1^2} + \frac{\mu N\sigma_1^2}{2 - \mu N\sigma_1^2} p(\infty).$$

La relation (73) est la solution en $p(\infty)$ de ce dernier système.