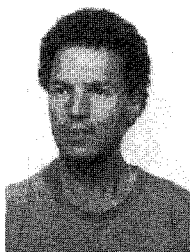


Caractérisation des polynômes de Hurwitz

et de Schur complexes

Characterisation of Hurwitz and Schur polynomials

in the complex case



Messaoud BENIDIR

Laboratoire des Signaux et Systèmes, ESE, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex.

Messaoud Benidir, né en 1949, a obtenu le diplôme d'ingénieur de l'École Centrale de Paris en 1975, option mathématiques appliquées. Il a soutenu, à l'université Paris-Sud, en 1981 une thèse de Docteur-Ingénieur sur les algorithmes rapides en traitement du signal et en 1987 une thèse de Doctorat d'État sur l'étude de la stabilité et de la représentation en treillis des systèmes linéaires. Il a occupé des postes de professeur de mathématiques dans le secondaire, d'assistant-chercheur à l'École Centrale de Paris et enfin de chercheur au Laboratoire des Signaux et Systèmes, École Supérieure d'Électricité, Gif-sur-Yvette, où il travaille actuellement sur des questions relatives à la complexité des algorithmes intervenant en automatique et en traitement du signal et à la stabilité des systèmes linéaires.

RÉSUMÉ

Les polynômes qui n'ont que des racines à partie réelle *négative* et ceux qui n'ont que des racines à l'*intérieur* du cercle unité peuvent être caractérisés de différentes manières. Les critères fondés sur l'introduction d'une paire de polynômes dont les racines alternent sur l'axe des imaginaires ou sur le cercle unité sont étendus aux polynômes à coefficients complexes. Un algorithme de calcul pour tester les polynômes à coefficients réels ou complexes admettant toutes leurs racines dans un demi-plan donné, ou dans un secteur du plan délimité par deux demi-droites passant par l'origine, est établi. Une démonstration complète du critère de Routh pour tester la stabilité des filtres linéaires à temps continu et à coefficients réels ou complexes est proposée.

MOTS CLÉS

Polynôme de Hurwitz, polynôme de Schur, propriété de séparation, polynôme complexe, critère de stabilité, critère de Routh.

SUMMARY

Polynomials having only roots with negative real parts and those having only roots inside the unit circle can be characterized in many ways. The criterias introducing a pair of other polynomials with roots alternating on the imaginary axis or on the unit circle are extended to the complex case. An algorithm is established for testing polynomials with real or complex coefficients having all of their roots in a given half-plane, or in a sector defined by two straight lines passing through the origin. A complete proof of the Routh's criterion for testing the continuous-time linear system stability is proposed in both the real and complex cases.

KEY WORDS

Hurwitz's polynomial, Schur's polynomial, separation property, complex polynomial, stability criterion, Routh's criterion.

1. Introduction

Un polynôme est dit de Hurwitz (polynôme **H**) si toutes ses racines sont à partie réelle négative. Par extension, on dira qu'un polynôme est de Schur (**S**)

si toutes ses racines sont à l'intérieur du cercle unité (CU). La caractérisation de ces deux types de polynômes est étroitement liée à l'étude de la stabilité des filtres linéaires à temps continu ou discret. Vue l'importance de la question, plusieurs méthodes ont été introduites pour tester le caractère **H** ou **S** d'un

polynôme donné. En particulier on peut associer au polynôme de départ une paire d'autres polynômes de sorte que le caractère **H** ou **S** du premier se traduise par le fait que les seconds ont toutes leurs racines respectivement sur l'axe imaginaire (AI) ou sur le CU (Propriété de séparation). Des critères fondés sur une telle propriété ont été établis dans le cas réel par Guillemin [1], p. 398, pour les polynômes **H** et par Schüssler [2] pour les polynômes **S**. Les démonstrations de ces critères sont assez complexes et quelques compléments sont donnés dans [3] et [4]. De plus, la propriété établie par Schüssler est à la base de l'introduction des fractions continues [5, 6, 7] pour tester la stabilité des systèmes linéaires à temps discret. D'autre part, le critère donné dans [1] ne permet pas de tester la propriété **H** et la construction de la table classique de Routh reste encore la méthode la plus pratique pour effectuer ce test. Cependant, les propriétés de cette table sont établies dans la littérature à partir de méthodes mathématiques sophistiquées qui nécessitent la distinction entre les polynômes réels et ceux à coefficients complexes [8], p. 169-193.

Cet article généralise les critères démontrés dans [1] et [2] et en donne des démonstrations complètes. Pour ce faire, on établit tout d'abord dans la section 2 des résultats sur la variation de l'argument d'un polynôme $D(z)$ lorsque la variable z décrit une courbe du plan qui est soit le CU soit une droite passant par l'origine des axes. La section 3 étend le critère démontré dans [2] aux polynômes à coefficients complexes. On établit dans la section 4 une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme admette toutes ses racines dans un secteur du plan défini par deux demi-droites passant par l'origine des axes. Comme application, on donne un algorithme qui permet de tester cette dernière propriété et qui conduit à la formation de la table de Routh pour les polynômes à coefficients complexes.

2. Résultats préliminaires fondamentaux

Dans la suite, \mathbb{Z} et \mathbb{R} représentent respectivement l'ensemble des entiers relatifs et celui des nombres réels. L'ensemble des nombres complexes, complété par ses points à l'infini et privé d'une demi-droite passant l'origine, est représenté par \mathbb{C} et identifié au plan affine muni de la coupure définie par cette demi-droite. On désigne par $\text{Re}(z)$, $\text{Im}(z)$, $\text{Arg}(z)$, et $\text{tgArg}(z)$ respectivement la partie réelle, la partie imaginaire, une détermination continue de l'argument du nombre complexe z et la tangente du nombre réel $\text{Arg}(z)$. D'autre part, on associe à tout polynôme de degré n et à coefficients complexes

$$(2.1) \quad D(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i, \quad a_n > 0,$$

le polynôme

$$(2.2) \quad D^*(z) = \sum_{i=0}^n a_i^* z^i,$$

obtenu en remplaçant dans (2.1) a_i par son complexe conjugué a_i^* .

Définition 1: On dit que deux polynômes P et Q alternent sur un chemin continu γ de \mathbb{C} , sans point double, s'ils satisfont les deux propriétés suivantes:

1. les racines de P et Q sont simples, distinctes et situées sur γ ;
2. lorsqu'on parcourt γ on rencontre une racine de P et une racine de Q alternativement.

On note une telle paire de polynômes $P \mathbb{S}_\gamma Q$.

Ces deux types de polynômes peuvent être caractérisés à l'aide de la « propriété de séparation », connue dans le cas réel [1, 2] et que l'on se propose de généraliser dans cet article aux polynômes à coefficients complexes. Pour ce faire, nous allons établir tout d'abord les deux lemmes suivants.

Lemme 1 [variation de $\text{Arg}\{D(z)\}$]: Supposons qu'il existe un chemin $\gamma = (a^- a^+)$ de \mathbb{C} continu et sans point double et deux polynômes P et Q de degrés n et $m \leq n$, tels que

$$(2.3) \quad D(z) \neq 0, \quad \forall z \in \gamma,$$

$$(2.4) \quad \text{tgArg}\{D(z)\} = Q(z)/P(z), \quad \forall z \in \gamma$$

$$(2.5) \quad \text{Arg}\{D(a^+)\} - \text{Arg}\{D(a^-)\} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Alors, désignant par $\Delta_\gamma \text{Arg}\{D(z)\}$ la variation de $\text{Arg}\{D(z)\}$ lorsque z décrit une fois γ dans le sens de a^- vers a^+ , on a

$$(2.6) \quad Q \mathbb{S}_\gamma P \text{ ssi } \Delta_\gamma \text{Arg}\{D(z)\} = \pm n\pi.$$

Exemple 1: $\gamma = \mathbb{R}$, $D(z) = z^2 + jz - 1$, $j^2 = -1$, $P(z) = z^2 + 1$, $Q(z) = z$.

On a

$$D(z) \neq 0, \quad \forall z \in \gamma,$$

$$\text{tgArg}\{D(z)\} = Q(z)/P(z), \quad \forall z \in \gamma$$

et

$$\text{Arg}\{D(+\infty)\} - \text{Arg}\{D(-\infty)\} = k\pi.$$

Les hypothèses du lemme 1 sont donc vérifiées et puisque $Q \mathbb{S}_\gamma P$, l'argument de $D(z)$ varie de -2π lorsque z varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Démonstration: Posons $A(z) = \text{Arg}\{D(z)\}$ et partons de l'hypothèse $\Delta_\gamma A(z) = +n\pi$ (le cas $-n\pi$ se traite de façon identique). Lorsque z décrit γ de a^- vers a^+ , la variation de la fonction réelle continue, $A(z)$, est égale à $+n\pi$. Comme par hypothèse la fonction $\text{tg}A(z)$ est donnée par (2.4) et que $m \leq n$, le nombre N de fois où $\text{tg}A(z)$ devient nulle ou infinie vérifie

$$(2.7) \quad N \leq 2n.$$

Or N représente aussi le nombre de fois où $A(z)$ est égal à un multiple de $\pi/2$ et l'hypothèse $\Delta_\gamma A(z) = +n\pi$ implique

$$(2.8) \quad N \geq 2n.$$

On a donc $N = 2n$ et par suite, lors de sa variation continue égale par hypothèse à $+n\pi$, la fonction $A(z)$

passer une fois et seulement une fois par n valeurs multiples paires de $\pi/2$ et par les n valeurs multiples impaires de $+n\pi$ qui alternent avec les premiers. Comme γ n'admet aucun point double, ces $2n$ valeurs correspondent à n zéros et n pôles de Q/P distincts et situés sur γ . Tenant compte de l'hypothèse sur les degrés de Q et P , on obtient $Q \mathbb{S}_\gamma P$.

Réciproquement, si z_1, z_2, \dots, z_n et p_1, p_2, \dots, p_n désignent respectivement les zéros et les pôles de Q/P (y compris le zéro éventuel à l'infini), l'hypothèse $Q \mathbb{S}_\gamma P$ se traduit par le fait que ces $2n$ valeurs sont distinctes et que les z_i alternent avec les p_i sur γ . Lorsque z décrit une fois γ , la fonction $\text{tg}A(z)$ définie par (2.4) devient donc infinie n fois exactement pour les valeurs $A(p_1), A(p_2), \dots, A(p_n)$ qui sont des multiples impairs de $\pi/2$ et s'annule n fois exactement pour les valeurs $A(z_1), A(z_2), \dots, A(z_n)$ qui sont des multiples pairs de $\pi/2$. Comme γ n'admet aucun point double, les $2n$ points $A(p_i)$ et $A(z_i)$, $1 \leq i \leq n$, sont eux aussi distincts et le nombre k défini par (2.5) est forcément égal à $\pm n$ (voir graphe de la fonction tg).

Lemme 2: Si dans le lemme 1, $\gamma = \mathbb{R}$ et le rapport des termes de plus haut degré de $Q(z)/P(z)$ est égal à k/z , i.e. $m=n-1$, alors la variation $\Delta_\gamma \text{Arg}\{D(z)\}$ est positive ($+n\pi$) ssi le nombre k est négatif.

Démonstration: Comme $Q \mathbb{S}_\mathbb{R} P$ et $m=n-1$, les pôles de Q/P sont réels et la fraction rationnelle Q/P ne s'annule en aucun point de $] -\infty, p_1[, p_1$ désignant le plus petit pôle de Q/P .

Lorsque z varie de $-\infty$ à $+\infty$, appelons n^+ et n^- les nombres de fois où $\text{Arg}\{D(z)\}$ passe par un multiple de $\pi/2$ respectivement dans le sens croissant et décroissant.

Puisque γ n'admet aucun point double, le nombre de pôles réels de $\text{tg} \text{Arg}\{D(z)\}$ est égal à $n^+ + n^-$ et on a, d'après (2.4),

$$(2.9) \quad n^+ + n^- \leq n.$$

L'hypothèse $\Delta_\mathbb{R} \text{Arg}\{D(z)\} = +n\pi$ implique $n^+ \geq n$ et par suite (2.9) donne $n^+ = n$ et $n^- = 0$. Donc $\text{tg} \text{Arg}\{D(z)\}$ ne peut passer de $-\infty$ à $+\infty$ et par conséquent $\text{tg} \text{Arg}\{D(p_1^-)\} = +\infty$.

D'où $\text{tg} \text{Arg}\{D(-\infty)\} = 0^+$ et ceci donne $k < 0$.

Réciproque: Un raisonnement similaire montre que l'hypothèse $\Delta_\mathbb{R} \text{Arg}\{D(z)\} = -n\pi$ conduit à $k > 0$ et par conséquent $k < 0$ implique $\Delta_\mathbb{R} \text{Arg}\{D(z)\} = +n\pi$.

Principe de l'argument [8], p. 1: Lorsque z décrit une fois dans le sens trigonométrique une courbe fermée γ de \mathbb{C} sans point double et ne passant par aucun zéro de $D(z)$, on a

$$(2.10) \quad \Delta_\gamma \text{Arg}\{D(z)\} = 2\pi n_i(D)$$

où $n_i(D)$ représente le nombre de zéros de D situés à l'intérieur de γ et comptés avec leurs multiplicités.

Le résultat (2.10) se déduit immédiatement de la forme factorisée

$$(2.11) \quad D(z) = c \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$$

et du fait que

$$(2.12) \quad \Delta_\gamma \text{Arg}\{D(z)\} = \sum_{i=1}^n \Delta_\gamma \text{Arg}(z - \alpha_i).$$

Remarque 1: La relation (2.10) est valable même si la courbe γ comporte des points à l'infini; par exemple la réunion de la droite (ab) et du demi-cercle (bca) est une courbe $\gamma = (abca)$, fig. 1, qui admet des points à l'infini si l'on fait tendre le diamètre (ab) vers l'infini.

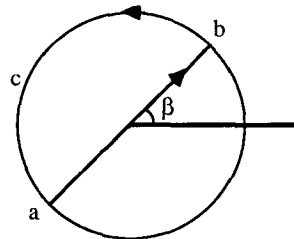


Fig. 1. - $\gamma = (abca)$.

3. Caractérisation des polynômes de Schur

Comme première application du lemme 1, on va généraliser aux polynômes à coefficients complexes, le théorème établi par Schüssler dans [2] pour caractériser les polynômes S à coefficients réels. Pour cela, associons au polynôme (2.1) son polynôme réciproque, défini par

$$(3.1) \quad D_r(z) = z^n D^*(z^{-1})$$

où D^* est défini par (2.2), et les deux polynômes

$$(3.2) \quad D^+ = (D + D_r)/2$$

et

$$(3.3) \quad D^- = (D - D_r)/2j$$

Remarque 2: Comme $|a_0/a_n|$ représente le module du produit des racines de D , si ce dernier a toutes ses racines à l'intérieur du CU , on a $|a_0/a_n| < 1$. Dans ce cas, les polynômes (3.2), (3.3) ont le même degré que D .

Proposition 1 (Propriété de séparation): *Le polynôme D a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité ssi $|a_0/a_n| < 1$ et les polynômes D^- et D^+ , définis par (3.2), (3.3), alternent sur ce cercle.*

Démonstration: Considérons le plan complexe muni de la coupure définie par le demi-axe des réels négatifs ou nul et désignons par γ le cercle unité sans le point $z = -1$, fig. 2. Ceci permet de définir sur \mathbb{C} une détermination continue de la fonction $z^{-n/2} D(z)$ et donc de $A(z)$.

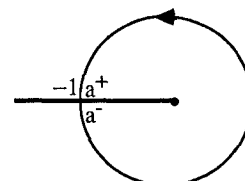


Fig. 2. - $\gamma = (a^- a^+)$.

Lorsque z décrit une fois $\gamma=(a^- a^+)$ dans le sens positif, la variation de $A(z)=\text{Arg}\{z^{-n/2} D(z)\}$ est donnée par

$$(3.4) \quad \Delta_\gamma A(z) = A(a^+) - A(a^-) = \Delta_\gamma \text{Arg} D(z) - n\pi.$$

1. Partant de l'hypothèse $n_i(D) = n$ et tenant compte de (2.10), on obtient à partir de (3.4)

$$(3.5) \quad \Delta_\gamma A(z) = +n\pi.$$

Or

$$\begin{aligned} \text{tg} A(z) &= \text{Im}\{z^{-n/2} D(z)\} / \text{Re}\{z^{-n/2} D(z)\} \\ &= \{z^{-n/2} D(z) - z^{*(n/2)} D^*(z^*)\} / j \{z^{-n/2} D(z) \\ &\quad + z^{*(n/2)} D^*(z^*)\}. \end{aligned}$$

Comme $z^* = z^{-1}, \forall z \in \text{CU}$, on a aussi

$$\begin{aligned} (3.6) \quad \text{tg} A(z) &= \{z^{-n/2} D(z) - z^{n/2} D^*(z^{-1})\} / j \{z^{-n/2} D(z) \\ &\quad + z^{n/2} D^*(z^{-1})\} \\ &= \{D(z) - z^n D^*(z^{-1})\} / j \{D(z) + z^n D^*(z^{-1})\} \\ &= D^-(z) / D^+(z), \quad \forall z \in \text{CU}, \end{aligned}$$

d'après les définitions (3.2), (3.3). Puisque D^- et D^+ sont de degré n d'après la remarque 2 et que $A(a^+) - A(a^-) = n\pi$, les hypothèses du lemme 1 sont vérifiées et par suite $D^- \mathcal{S}_\gamma D^+$. De plus, le module du produit des racines de D est égal à $|a_0/a_n|$ et donc $|a_0/a_n| < 1$.

2. Réciproquement, partant de $D^- \mathcal{S}_\gamma D^+$, le lemme 1 donne $\Delta_\gamma A(z) = \pm n\pi$. Tenant compte de (3.4) on obtient alors

$$(3.7) \quad \Delta_\gamma \text{Arg} D(z) = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_\gamma \text{Arg} D(z) = +2n\pi.$$

Or si $D(v) = 0$ pour $v \in \text{CU}$, on a aussi $D_r(v) = 0$ d'après (3.1). D'où $D^-(v) = D^+(v) = 0$ d'après (3.2) et (3.3) et ceci contredit $D^- \mathcal{S}_\gamma D^+$. Par conséquent D n'a pas de racine sur le CU et on peut appliquer (2.10). La relation (3.7) montre alors que les racines de D sont toutes soit à l'extérieur du CU soit à l'intérieur de ce cercle; elles sont donc à l'intérieur puisque $|a_0/a_n| < 1$.

Exemple 2 (polynômes réels du troisième degré): Soit

$$(3.8) \quad D(z) = z^3 + bz^2 + cz + d$$

un polynôme à coefficients réels ($d \neq \pm 1$). On a, d'après (3.1),

$$(3.9) \quad D_r = dz^3 + cz^2 + bz + 1$$

et d'après (3.2), (3.3),

$$(3.10) \quad \begin{aligned} 2D^+(z) &= (1+d)z^3 + (b+c)z^2 \\ &\quad + (b+c)z + (1+d) \end{aligned}$$

et

$$(3.11) \quad \begin{aligned} 2jD^-(z) &= (1-d)z^3 \\ &\quad + (b-c)z^2 - (b-c)z - (1-d). \end{aligned}$$

Posons

$$(3.12) \quad p = (b+c)/(1+d); \quad q = (b-c)/(1-d).$$

On obtient

$$(3.13) \quad \begin{aligned} 2D^+(z) &= (1+d)R^+(z); \\ 2jD^-(z) &= (1-d)R^-(z) \end{aligned}$$

avec

$$(3.14) \quad \begin{aligned} R^+(z) &= z^3 + pz^2 + pz + 1 \\ &= (z+1)\{z^2 - (1-p)z + 1\} \end{aligned}$$

et

$$(3.15) \quad \begin{aligned} R^-(z) &= z^3 + qz^2 - qz - 1 \\ &= (z-1)\{z^2 + (1+q)z + 1\}. \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que les racines de R^- et R^+ sont sur le CU et qu'elles alternent sur le CU si et seulement si leurs parties réelles alternent sur l'axe des réels. Ceci se traduit immédiatement par

$$(3.16) \quad -1 < -(1+q)/2 < (1-p)/2 < 1.$$

Tenant compte de ces inégalités et de la proposition 1, on obtient

$$(3.17) \quad \begin{aligned} n_i(D) = 3 \quad \text{ssi} \quad &-1 < d < 1, \quad -1 < p < 3, \\ &-3 < q < 1 \quad \text{et} \quad p - q < 2. \end{aligned}$$

La partie hachurée de la figure 3 donne une représentation de la coupe, par le plan $z_3 = d$, du domaine de l'espace $(z_1, z_2, z_3) = (p, q, d)$ correspondant à des polynômes D n'ayant que des racines à l'intérieur de CU (domaine de stabilité).

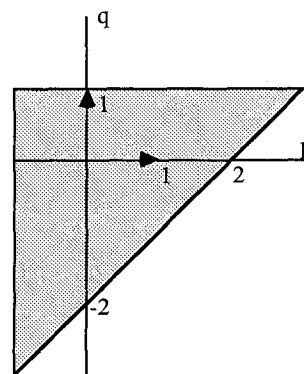


Fig. 3.

4. Caractérisation des polynômes de Hurwitz

Comme application des lemmes 1 et 2, on va généraliser le critère établi dans [1]. Pour cela associons au polynôme (2.1) et au nombre complexe de module 1,

$$(4.1) \quad u = \text{Exp}(j\beta), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

le polynôme

$$(4.2) \quad D_u(x) = u^{-n} D(ux).$$

Il est clair d'après (4.2) que les racines de D se déduisent de celles de D_u dans la rotation centrée à l'origine du repère et d'angle β . La figure 4 donne l'exemple d'un polynôme de Hurwitz D de degré 5.

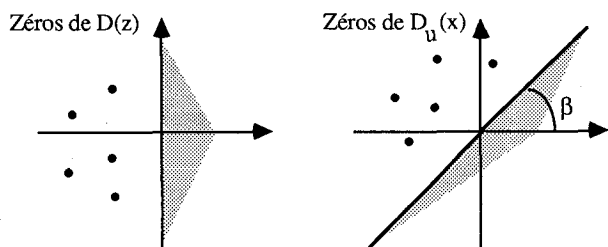


Fig. 4. — Position des zéros de D et D_u .

Associés à D_u les deux polynômes de degrés respectifs n et m

$$(4.3) \quad P = (D_u + D_u^*)/2 = \sum_0^n c_{n,i} x^i$$

et

$$(4.4) \quad Q = (D_u - D_u^*)/2j = \sum_0^n c_{m,i} x^i.$$

Tenant compte de (2.1) et de (4.2) on obtient, en identifiant les termes de même degré dans les deux membres de (4.3),

$$(4.5) \quad c_{n,i} = \text{Re} \{ a_i u^{i-n} \}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Procédant de la même façon sur (4.4), on a aussi

$$(4.6) \quad c_{m,i} = \text{Im} \{ a_i u^{i-n} \}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Les polynômes P et Q sont donc à coefficients réels et la résolution du système (4.3), (4.4) conduit à

$$(4.7) \quad D_u = P + jQ,$$

i.e. les polynômes P et Q sont les parties réelle et imaginaire de D_u .

Remarque 3: Comme $a_n > 0$, les relations (4.5), (4.6) donnent $c_{n,n} = a_n$ et $c_{m,n} = 0$. Les degrés de P et Q sont donc respectivement n et $m \leq n-1$.

Proposition 2 (Propriété de séparation): Soit \mathbb{C}_u le demi-plan, défini par l'intérieur de la courbe γ de la figure 1 où l'on a fait tendre a et b vers l'infini et soient P et Q les polynômes définis à l'aide de (4.3), (4.4) à partir d'un polynôme D . Alors, il y a équivalence entre les deux propositions:

- (i) le polynôme D a toutes ses racines dans \mathbb{C}_u ;
- (ii) les polynômes P et Q alternent sur l'axe des réels, $m = n-1$ et $c_{n-1, n-1}/c_{n,n} < 0$.

Démonstration: Lorsque le diamètre (ab) de la courbe γ devient infini, on obtient une courbe dénommée Γ et les racines de D situées dans \mathbb{C}_u sont celles situées à l'intérieur de Γ . Appelons

$$(4.8) \quad A(z) = \text{Arg} \{ D(z) \}$$

une détermination continue sur \mathbb{C} et évaluons la variation de $A(z)$ lorsque z décrit Γ dans le sens positif. On a

$$(4.9) \quad \Delta_\Gamma A(z) = \Delta_{ab} A(z) + \Delta_{bca} A(z).$$

Sur (bca) , D est équivalent à son terme de plus haut degré $a_n z^n$ et donc

$$\Delta_{bca} \text{Arg} \{ D(z) \} = \Delta_{bca} \text{Arg} \{ a_n z^n \} = +n\pi.$$

La relation (4.9) s'écrit alors

$$(4.10) \quad \Delta_\Gamma \text{Arg} \{ D(z) \} = \Delta_{ab} A(z) + n\pi.$$

Pour montrer que (i) implique (ii), on va appliquer les lemmes 1 et 2. Comme par hypothèse D a toutes ses racines à l'intérieur de Γ , les relations (2.10) et (4.10) donnent

$$(4.11) \quad \Delta_{ab} A(z) = +n\pi.$$

Sur (ab) on a:

$$D(z) = D(ux), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et

$$\Delta_{ab} A(z) = \Delta_{ab} \text{Arg} \{ u^{-n} D(z) \} = \Delta_{\mathbb{R}} \text{Arg} D_u(x).$$

Donc (4.11) s'écrit

$$(4.12) \quad \Delta_{\mathbb{R}} \text{Arg} D_u(x) = +n\pi.$$

Par ailleurs, (4.7) donne

$$(4.13) \quad \text{tg Arg} D_u(x) = Q(x)/P(x).$$

Comme les points à l'infini, a et b , sont symétriques par rapport à l'origine et que $D_u(x)$ est équivalent à son terme de plus haut degré en ces points, on a

$$(4.14) \quad \text{Arg} D_u(b) - \text{Arg} D_u(a) = k\pi.$$

Finalement les polynômes P et Q qui sont définis par (4.3), (4.4) sont de degrés n et $m \leq n-1$ d'après la remarque 3. Toutes les hypothèses du lemme 1 sont donc vérifiées et par suite

$$(4.15) \quad P \mathbb{S}_{\mathbb{R}} Q \quad \text{et} \quad m = n-1.$$

De plus, la variation (4.12) étant positive, l'application du lemme 2 donne $k = c_{n-1, n-1}/c_{n,n} < 0$.

Réciproquement, partant de (ii) et appliquant le lemme 1, on obtient (4.12), (4.11) puis $\Delta_\Gamma A(z) = +2n\pi$ d'après (4.10). Or D n'admet aucune racine sur (ab) sinon les polynômes (4.3), (4.4) auraient une racine réelle commune et ceci contredirait l'hypothèse $P \mathbb{S}_{\mathbb{R}} Q$. On peut donc appliquer (2.10), et en déduire que D a toutes ses racines à l'intérieur de Γ , i.e. dans \mathbb{C}_u .

Exemple 3 (polynômes réels du troisième degré): Soit le polynôme à coefficients réels

$$(4.16) \quad D(s) = s^3 + bs^2 + cs + d.$$

Pour $u = j$, $j^2 = -1$, le polynôme (4.2) s'écrit

$$(4.17) \quad D_j(s) = j^{-3} D(js) = s^3 - jbs^2 - cs + jd$$

et (4.3), (4.4) donnent

$$(4.18) \quad P(s) = s^3 - cs = s(s^2 - c)$$

et

$$(4.19) \quad Q(s) = -bs^2 + d.$$

Il est facile de vérifier que $P \mathbb{S}_{\mathbb{R}} Q$ ssi $c > 0$ et $0 < d/b < c$. Tenant compte de ces inégalités et de la proposition 2, le polynôme (4.16) a toutes ses racines à partie réelle négative ssi ses coefficients sont positifs et vérifient

$$(4.20) \quad d < bc.$$

La partie hachurée de la figure 5, donne une représentation de la coupe, par le plan $z_1 = b$, du domaine, dénommé S , de l'espace $(z_1, z_2, z_3) = (b, c, d)$ correspondant aux polynômes de Hurwitz. Ce domaine peut évidemment être retrouvé en construisant la table de Routh associée au polynôme $D(s)$.

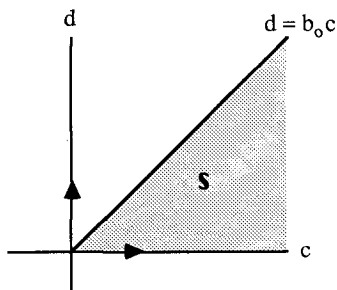


Fig. 5. - Domaine de stabilité dans le plan $b = b_0$.

5. Critère de Routh et applications

Comme application de la proposition 2, on va établir un algorithme qui permet de tester les polynômes à coefficients complexes n'admettant que des racines dans un demi-plan donné ou dans un secteur défini par deux demi-droites passant par l'origine des axes. Ceci permet de donner une démonstration du Critère de Routh dans le cas complexe. Pour ce faire, on établit tout d'abord le résultat suivant.

Lemme 3: Désignant par P_i un polynôme de degré i et par $c_{i,i}$ le coefficient du terme de plus haut degré de P_i , soient P_h, P_{h-1} deux polynômes à coefficients réels et P_k le polynôme défini par la relation de division

$$(5.1) \quad P_h(x) = (\alpha_h x + \beta_h) P_{h-1} - P_k, \quad k \leq h-2.$$

Si $c_{h,h}/c_{h-1,h-1} = \alpha_h$ est positif, il y a équivalence entre les deux propositions:

1. $P_h \mathbb{S}_{\mathbb{R}} P_{h-1}$;
2. $P_{h-1} \mathbb{S}_{\mathbb{R}} P_k, k = h-2$ et

$$\alpha_{h-1} = c_{h-1,h-1}/c_{h-2,h-2} > 0.$$

Démonstration: $1 \Rightarrow 2$. Soient $v_1 < v_2 < \dots < v_{h-1}$ les racines de P_{h-1} . La relation (5.1) donne alors

$$(5.2) \quad \begin{cases} P_h(v_i) P_h(v_{i+1}) = P_k(v_i) P_k(v_{i+1}), \\ 1 \leq i \leq h-2. \end{cases}$$

Or, par hypothèse, une racine de P_h et une seule appartient à chacun des intervalles $]v_i, v_{i+1}[$, $1 \leq i \leq h-2$. Comme P_h est une fonction continue, on a

$$(5.3) \quad P_h(v_i) P_h(v_{i+1}) < 0, \quad 1 \leq i \leq h-2$$

et d'après (5.2),

$$(5.4) \quad P_k(v_i) P_k(v_{i+1}) < 0, \quad 1 \leq i \leq h-2.$$

Donc la fonction continue P_h admet au moins une racine dans chacun des intervalles $]v_i, v_{i+1}[$, $1 \leq i \leq h-2$, et par suite $k \geq h-2$. Comme $k \leq h-2$, l'unique valeur de k est $h-2$ et on a $P_{h-1} \mathbb{S}_{\mathbb{R}} P_k$.

D'autre part, désignant par $\text{Sg } x$ le signe de x , on obtient successivement en indiquant les justifications entre parenthèses,

$$\begin{aligned} & \text{Sg } P_{h-1}(+\infty) \\ &= \text{Sg } P_h(+\infty) \quad (\alpha_h > 0), \\ &= -\text{Sg } P_h(v_{h-1}) \quad (P_h \text{ n'a qu'une racine} \\ & \quad \text{dans } [v_{h-1}, +\infty)), \\ &= +\text{Sg } P_{h-2}(v_{h-1}) \quad [\text{d'après (5.1)}], \\ &= +\text{Sg } P_{h-2}(+\infty) \quad (P_{h-2} \neq 0 \\ & \quad \text{dans } [v_{h-1}, +\infty)) \end{aligned}$$

et finalement $\alpha_{h-1} > 0$.

$2 \Rightarrow 1$. Partant de l'hypothèse (5.4), on obtient (5.3) en utilisant le même raisonnement que ci-dessus. La fonction continue P_k admet donc un nombre impair de racines dans chacun des intervalles $]v_i, v_{i+1}[$, $1 \leq i \leq h-2$. Or

$$\begin{aligned} \text{Sg } P_h(v_{h-1}) &= -\text{Sg } P_{h-2}(v_{h-1}) \quad [\text{d'après (5.1)}], \\ &= -\text{Sg } P_{h-2}(+\infty) \quad (P_{h-2} \neq 0 \\ & \quad \text{dans } [v_{h-1}, +\infty)), \\ &= -\text{Sg } P_{h-1}(+\infty) \quad (\alpha_{h-1} > 0), \\ &= -\text{Sg } P_h(+\infty) \quad (\alpha_h > 0). \end{aligned}$$

Ce qui montre que P_h admet un nombre impair de racines dans l'intervalle $]v_{h-1}, +\infty[$; le même raisonnement conduit à la même conclusion pour $] -\infty, v_1[$. Finalement $P_h \mathbb{S}_{\mathbb{R}} P_{h-1}$.

Proposition 3: Soient D le polynôme (2.1) et P et Q les polynômes définis par (4.3), (4.4). Alors D a toutes ses racines dans le demi-plan \mathbb{C}_u défini dans la proposition 2 ssi $m = n-1$ et la relation (5.1) permet de calculer récursivement, à partir de $P_n = P$ et $P_{n-1} = Q$, le vecteur $\underline{\alpha}_n$ à n composantes positives

$$(5.5) \quad \underline{\alpha}_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T.$$

Démonstration: L'application de la proposition 2 et du lemme 3 pour $h = n, n-1, \dots, 1$ donne le résultat énoncé.

Corollaire 1: Soit \mathbb{C}_{12} le secteur du plan défini par l'intersection des deux demi-plans \mathbb{C}_u et \mathbb{C}_v , délimité par les deux droites d'équations respectives $z = ux$ et $z = vx$. Une condition nécessaire et suffisante pour que D admette toutes ses racines dans \mathbb{C}_{12} est que la relation (5.1) permette de calculer $\alpha_n(u)$, à partir de $P_n(u)$ et $P_{n-1}(u)$, et $\alpha_n(v)$, à partir de $P_n(v)$ et $P_{n-1}(v)$ vérifiant $\alpha_h(u) > 0$ et $\alpha_h(v) > 0$ pour $1 \leq h \leq n$.

Démonstration: Un polynôme D admet toutes ses racines dans le secteur du plan \mathbb{C}_{12} , délimité par deux droites, $D(u)$ et $D(v)$, ssi D admet toutes ses racines dans l'intersection des deux demi-plans gauches, définis respectivement par les droites $D(u)$ et $D(v)$. Le résultat énoncé se déduit donc immédiatement de la proposition 3.

A. CALCUL DU VECTEUR $\underline{\alpha}_n$ DANS LE CAS COMPLEXE

Posons pour $h=0, 1, \dots, n$

$$(5.6) \quad P_h(x) = \sum_{i=0}^n c_{h,i} x^i.$$

Partant du polynôme (2.1) et du nombre (4.1), on calcule le polynôme (4.2). Les parties réelle et imaginaire de ce dernier sont les polynômes réels définis par (4.7) et les conditions initiales pour le calcul de $\underline{\alpha}_n$ sont données par $P_n = P$ et $P_{n-1} = -Q$. L'expression de la relation (5.1) à l'aide des coefficients des polynômes P_h qui sont tous réels conduit au schéma de calculs suivant: $h=n, n-1, \dots, 0$,

$$(5.7) \quad \alpha_h = c_{h,h}/c_{h-1,h-1},$$

$$(5.8) \quad \beta_h = c_{h,h-1}/c_{h-1,h-1} - \alpha_h c_{h-1,h-2}/c_{h-1,h-1},$$

$$(5.9) \quad \begin{cases} c_{h-2,i} - \alpha_h c_{h-1,i-1} + \beta_h c_{h-1,i} - c_{h,i} \\ 0 \leq i \leq h \end{cases}$$

avec la convention $c_{h,-1} = c_{h-1,h} = c_{h-2,h} = 0$.

Critère de stabilité de Routh (cas complexe): Le polynôme D a toutes ses racines à partie réelle négative ssi les relations (5.7), (5.8), (5.9) permettent de déterminer le vecteur $\underline{\alpha}_n$ et $\alpha_h > 0, 1 \leq h \leq n$.

Démonstration: Conséquence directe de la proposition 3 où l'on prend $u=j, j^2 = -1$.

B. CALCUL DU VECTEUR $\underline{\alpha}_n$ DANS LE CAS RÉEL

Associons à la suite des polynômes $P_h, 0 \leq h \leq n$, la suite de polynômes définis par

$$(5.10) \quad f_h(s) = j^{-h} P_h(js) = \sum_{i=0}^n a_{h,i} s^i, \quad 0 \leq h \leq n.$$

Comme les polynômes P_h vérifient la relation (5.1) où $k=h-2$, les polynômes f_h vérifient la relation

$$(5.11) \quad f_h = (\alpha_h s - j \beta_h) f_{h-1} + f_{h-2},$$

obtenue à partir de (5.1) en substituant à la variable s la variable js . Tenant compte de la définition (5.10) et du fait que les a_i sont réels, les relations (4.5), (4.6) donnent

$$(5.12) \quad a_{n,i} = \text{Re}(j^{i-n}) a_i j^{i-n}$$

et

$$(5.13) \quad a_{n-1,i} = \text{Im}(j^{i-n}) a_i j^{i-n+1}.$$

Donc f_n et $-f_{n-1}$ sont les parties paire et impaire de D. Par conséquent, le quotient $\alpha_n s - j \beta_n$ est un polynôme impair, i.e. $\beta_n = 0$; de plus le reste f_{n-2} est un polynôme pair ou impair de même parité que f_n . Il en est de même pour tous les polynômes f_h , calculés récursivement à partir de f_n et f_{n-1} à l'aide de (5.11) qui s'écrit alors

$$(5.14) \quad f_h = \alpha_h s f_{h-1} + f_{h-2}.$$

Cette relation constitue l'algorithme classique de Routh qui permet de calculer le vecteur $\underline{\alpha}_n$ pour les

polynômes à coefficients réels. Son expression en fonction des coefficients $a_{h,i}$ des f_h donne: $h=n, n-1, \dots, 1$

$$(5.15) \quad \alpha_h = a_{h,h}/a_{h-1,h-1}$$

et

$$(5.16) \quad a_{h-2,i} = a_{h,i} - \alpha_h a_{h-1,i}, \quad i=h-2, h-4, \dots$$

Critère de stabilité de Routh (cas réel): Le polynôme D a toutes ses racines à partie réelle négative ssi les relations (5.15), (5.16) permettent de déterminer le vecteur $\underline{\alpha}_n$ et $\alpha_h > 0, 1 \leq h \leq n$.

6. Conclusion

Le lemme 1 établi dans cet article est une généralisation de l'indice de Cauchy [8] sur lequel repose la démonstration du critère de stabilité de Routh. Sans distinction entre les cas réel et complexe et utilisant uniquement des propriétés élémentaires des polynômes, nous avons étendu la propriété de séparation des polynômes de Hurwitz et de Schur au cas des polynômes à coefficients complexes. Les résultats obtenus ne sont pas nouveaux en ce qui concerne le cas des polynômes réels; mais leurs extensions au cas complexe a permis de donner des démonstrations complètes et plus simples que celles déjà établies pour le cas réel. De plus, la propriété de séparation joue un rôle important dans l'étude théorique de la stabilité des systèmes linéaires 1-D et pourrait permettre des généralisations au cas des systèmes n-D.

Manuscrit reçu le 30 juin 1988.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. A. GUILLEMIN, *The Mathematics of Circuits Analysis*, MIT Press, Cambridge, MA, 1949, p. 395-409.
- [2] H. W. SCHÜSSLER, A stability theorem for discrete systems, *IEEE Trans., Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-24, Feb. 1976, p. 87-89.
- [3] R. GNANASEKARAN, A note on the new 1-D and 2-D stability theorems for discrete systems, *IEEE Trans., Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-29, Dec. 1981, p. 1211-1212.
- [4] Y. BISTRITZ, A discrete stability equation theorem and method of stable model reduction, *Systems Control Lett.*, 1, 1982, p. 373-381.
- [5] J. SZCZUPAC, S. K. MITRA et E. I. JURY, Some new results on discrete system stability, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-25, Feb. 1977, p. 101-102.
- [6] P. STEFFEN, An algorithm for testing stability of discrete systems, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-25, oct. 1977, p. 454-456.
- [7] M. ISMAIL, A simplified algorithm for testing stability of discrete via bilinear continued fractions, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-33, May 1986, p. 544-547.
- [8] M. MARDEN, *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in The Complex Plane*, Amer. Math. Soc., 1949.
- [9] Y. BISTRITZ, Zero Location with Respect to the Unit Circle of Discrete-Time Linear System Polynomials, *Proceedings of the IEEE*, 72, n° 9, Sep. 1984.