

# Modèles et traitements de signaux multidimensionnels

Multidimensional signal processing and modelization



**Jean-Louis LACOUME**

CEPHAG, INPG/IEG, UA 346, BP n° 46, 38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES.

Ancien élève de l'École Normale Supérieure, Agrégé de Physique (1964), Docteur ès Sciences (1969), Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, Directeur du CEPHAG, Domaine de recherche : Géophysique : étude de l'environnement ionisé de la terre par sondage électromagnétique, Traitement du Signal : Analyse spectrale et interspectrale, applications en Instrumentation, Acoustique Sous-Marine, Géophysique.

## RÉSUMÉ

De nombreux domaines d'application font appel à des signaux à plus d'une dimension (ND) et le développement des moyens de calcul permet de mettre en œuvre des traitements adaptés à ces signaux. Après avoir précisé les limites du domaine couvert et donné quelques éléments de terminologie, nous présentons les modèles de signaux ND. Nous donnons ensuite une approche synthétique des méthodes d'estimation (ou de mesure) des caractéristiques des signaux ND. Notre exposé est complété par la présentation et l'étude des principaux opérateurs (filtres) utilisés dans le traitement des signaux ND en liaison avec les opérateurs déjà explorés dans le traitement des signaux 1 D.

## MOTS CLÉS

Modélisation, signaux multidimensionnels, analyse spectrale, filtrage adaptatif.

## SUMMARY

*A great number of application fields is concerned with multidimensional signal processing and the new possibilities of hardware allow the development of device operating to those signals. After a presentation of the studied domain, we give some elements of terminology and present the essential models of multidimensional signals. We present then a synthetic approach of the estimation (or measurement) methods used in the multidimensional signal characterization. We conclude in a presentation of the principal operator (filters) used in ND signal processing in connexion with 1 D signal operators.*

## KEY WORDS

*Modelization, multidimensional signals, spectral estimation, adaptive filtering.*

## 1. Introduction

Pendant longtemps le traitement du signal s'est essentiellement intéressé aux signaux dépendant d'une seule variable (le temps). Le développement rapide des moyens de traitement à la fois dans leur capacité de stockage et dans leur vitesse de calcul permet de mettre en œuvre des systèmes de traitement de signaux dépendant de plusieurs variables (temps, espace...). Nous proposons d'appeler signaux multidimensionnels (signaux ND) de tels signaux. Les traitements multidimensionnels qui sont appliqués à ces signaux sont un domaine de recherche actuellement en plein

essor. Le nombre de résultats déjà acquis et le nombre de directions de recherche sont tels qu'il apparaît *a priori* utopique de tenter d'en donner une vue synthétique globale. Après avoir délimité notre champ d'investigation, nous allons cependant proposer une approche de ce vaste domaine en restant en tout état de cause conscients du caractère forcément partiel, et, même partiel, d'une telle entreprise.

Notre premier souci sera de bien fixer les *limites du domaine couvert par les traitements multidimensionnels*. Pour ce faire, nous serons amenés à les situer dans la classe générale des méthodes de traitement d'images et à préciser (ou à proposer) quelques éléments de terminologie.

Il nous sera alors possible de présenter les différents modèles (certains, aléatoires; globaux, structurels) de signaux ND et d'en déduire la définition des grandeurs caractéristiques de ces signaux. Nous serons ainsi conduits aux deux tâches — à notre avis centrales — dans les traitements ND :

- l'estimation des grandeurs caractéristiques;
- et la définition des filtres (ou opérateurs) fondamentaux.

Ces deux tâches sont d'ailleurs (comme dans le cas de l'analyse spectrale à une dimension) très intimement liées.

Enfin, nous essayerons de dégager quelques objectifs (proches ou plus lointains) et de donner quelques pistes de recherches futures.

## 2. Terminologie et généralités

Définir les signaux multidimensionnels et les traitements ND sera notre première préoccupation. Nous proposons de partir du terme général et très employé d'image et d'affecter à ce terme un sens abstrait et un sens concret. Une image, au sens abstrait, est la représentation (exacte ou analogue) d'un être ou d'une chose. Cette image est donc l'entité que perçoit notre cerveau par le truchement de la vue. Une image, au sens concret, sera un ensemble de points. L'image ainsi définie est une image au sens de l'optique (ensemble de points de convergence). Plus récemment, cette image est devenue véritablement une collection de points (image de télévision par exemple). Par opposition à l'image abstraite, l'image concrète et son contenu existent indépendamment de l'interprétation que l'on en donne. Notons que, à notre avis, la même distinction existe pour un domaine important de signaux 1D : le signal de parole.

Les « traitements d'images » recouvrent les techniques utilisées pour traiter aussi bien le contenu abstrait (ou informationnel, ou relationnel) de l'image que son contenu concret. Aux traitements d'images abstraits nous associons la reconnaissance des formes, la morphologie mathématique...

Les traitements ND seront ici les traitements de l'image concrète formée (dans le cas discret) d'un ensemble de points à deux, trois, ... dimensions. Ces traitements transformeront donc une image concrète (N points) en une autre image concrète sans chercher à interpréter les informations qu'elle contient.

Ajoutons enfin que notre distinction est, comme toute distinction, un outil de classification qui doit rester ouvert pour prendre en compte toutes les interactions qui ne peuvent manquer d'exister entre les deux classes de traitements que nous avons introduites.

Pour terminer cette tentative de mise au point (qui nous paraît essentielle dans un domaine où les termes sont souvent confus ou trompeurs), indiquons un certain nombre de termes synonymes (ou presque) de traitement ND. Il s'agit de :

- traitement d'antenne et traitements spatio-temporels : dans les deux types de signaux concernés apparaît la variable temps (associée à une ou plusieurs

variables d'espace). Cette variable ne peut en général pas être rendue homogène aux variables d'espace pour des raisons fondamentales (causalité) et pour des raisons pratiques (on a souvent beaucoup plus d'échantillons en temps qu'en espace).

- traitement d'image : ce terme est pour nous plus général que traitement ND, mais il est souvent utilisé dans le même sens. Le signal est alors à deux (ou trois) dimensions d'espace homogène entre elles.

Le domaine des modèles et traitements ND que nous venons de définir comportera l'étude des modèles de signaux ND et des filtres (ou opérateurs) transformant un signal formé de  $(N_1 \times N_2 \times \dots \times N_i)$  points en un signal formé de  $(M_1 \times M_2 \times \dots \times M_j)$  points.

Voyons maintenant les modèles de signaux ND.

## 3. Modèles de signaux ND

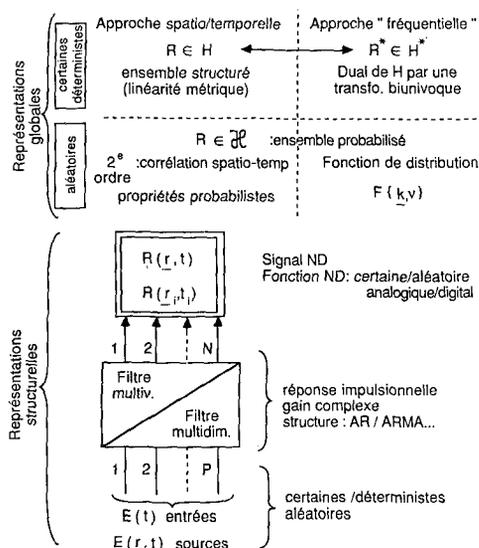
Le signal ND sera noté :

- $R(r, t)$  en espace-temps continu;
- $R(r_i, t_i)$  en espace-temps discret.

C'est une fonction certaine ou aléatoire à valeurs réelles (ou complexes), fonction de variables d'espace  $(r, r_i)$  et de la variable temps  $(t, t_i)$ .

TABLEAU I

Modèles de signaux ND



Ce signal peut être décrit (tableau I) par des modélisations globales ou structurelles. Dans les modélisations globales  $R$  est un élément d'un espace de Hilbert  $H$  [1] (probabilisé dans le cas aléatoire). L'appartenance de  $R$  à  $H$  lui confère des propriétés :

- de linéarité ( $H$  est un espace vectoriel);
- métriques : on définit dans  $H$  un produit scalaire induisant une norme (longueur).

La notion d'espace de Hilbert est applicable aussi bien aux signaux certains [2] qu'aux signaux aléatoires [3, 4, 5].

L'appartenance de  $R$  à un espace de Hilbert introduit une intéressante *interprétation géométrique* des signaux et le *théorème de projection* (sur un sous-espace de Hilbert) donne la clé de toutes les techniques de codage ou d'approximation par les moindres carrés (cas certain) ou en moyenne quadratique (cas aléatoire). Notons enfin que le signal, élément de l'espace de Hilbert  $H$ , a plusieurs *représentations* dépendant de la base choisie dans  $H$ . Les représentations les plus connues sont la représentation temps (continu ou discret) et la (ou les) représentation(s) fréquences [base des exponentielles éternelles, des harmoniques d'un fondamental, des harmoniques discrétisées, auxquelles ont associé la Transformation de Fourier (TF), la Série de Fourier (SF), et la Transformée de Fourier Discrète (TFD)].

Une autre famille de modélisations est celle des *modèles structurels* [5]. Le signal est alors considéré comme la sortie d'un système linéaire et stationnaire (système générateur) à plusieurs entrées et plusieurs sorties (multivariables) excité par des entrées « simples ». Les entrées (appelées souvent *sources*) sont des impulsions de Dirac (cas certain) ou du bruit blanc (cas aléatoire). Notons que, en général, la « blancheur » des entrées est double : blancheur en temps (deux échantillons différents sont décorrélés) et blancheur en espace (les signaux reçus sur deux capteurs différents sont décorrélés). Notons également que, comme nous le verrons plus loin, la caractérisation peut se limiter aux propriétés du second ordre (donnée de la covariance dans les modèles globaux, hypothèse de décorrélation des sources). Cette caractérisation est complète dans le cas gaussien. Dans le cas non gaussien, cette caractérisation est partielle, si bien qu'il est alors possible de définir une famille de bruits blancs [7]. Enfin, et nous voulons le signaler, mais nous n'y reviendrons pas, il apparaît que les signaux non gaussiens (jusqu'à maintenant assez délaissés à cause en particulier de leur complexité) sont beaucoup plus porteurs d'informations que les signaux gaussiens [8].

Notons également que les modélisations structurelles ont deux avantages :

- 1 : elles permettent de résoudre formellement les divers problèmes d'optimisation (filtre de Kalman par exemple);
- 2 : elles s'adaptent bien aux problèmes posés par la télédétection (en acoustique sous-marine, géophysique, astronomie, etc.). Dans ces situations, les sources (ou entrées) sont l'objectif de l'étude, le système linéaire et stationnaire représente le milieu de propagation (mer, sol, ionosphère, espace...), et le signal ND est constitué par les observations reçues sur le réseau de capteurs.

Les modèles présentés ici sont très généraux. L'important est, en vue de mettre au point divers traitements, de les caractériser. On peut — et on doit — dans ce but, s'appuyer sur l'ensemble des connaissances disponibles. Dans cet ensemble de connaissances figurent, au premier plan, les modèles décrivant la physique du processus étudié. Bien qu'elles soient liées aux divers cas d'espèces, on peut utiliser des propriétés générales de ces modèles physiques [9]. Dans cet

exposé, nous nous limiterons à une caractérisation issue d'un apprentissage à partir des signaux observés.

#### 4. Grandeurs caractéristiques des signaux ND

Nous allons envisager successivement :

- les modèles globaux certains;
- les modèles aléatoires;
- les modèles structurels.

Nous terminerons par un essai de synthèse entre les approches certaines et aléatoires qui s'appuiera sur — et introduira — la notion d'estimateur.

##### 4.1. GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES : MODÈLES GLOBAUX CERTAINS

Le signal spatio-temporel  $R(r, t)$  peut être représenté (fig. 1) en :

- fréquences spatiales et temps  $R(k, t)$ ;
- espace et fréquences temporelles  $R(r, v)$ ;
- fréquences spatiales et temporelles  $R(k, v)$ ,

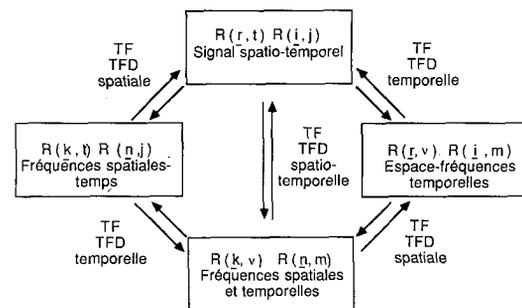


Fig. 1. — Les différentes représentations des signaux certains.

Ces diverses représentations sont obtenues (pratiquement) par Transformée de Fourier Discrète (TFD) à une ou plusieurs dimensions. L'échantillonnage est régi par la condition de Shannon, rigoureuse ou approximative, sur les diverses variables. On peut associer à ces diverses représentations des filtres linéaires et stationnaires en :

- temps;
- espace;
- espace-temps.

##### 4.2. GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES : MODÈLES GLOBAUX ALÉATOIRES

Cette modélisation peut être faite :

- au second ordre;
- de manière plus générale.

###### 4.2.1. Modélisation au second ordre

Cette modélisation est généralement partielle. Elle est complète dans le cas gaussien. La caractéristique générale au second ordre est la corrélation Spatio-Temporelle (ST) définie par :

$$(1) \quad \Gamma_R(r, r', t, t') = E[R(r, t) R^*(r', t')]$$

Cette fonction de  $2K + 2$  variables ( $K$  dimension spatiale) se simplifie si les propriétés statistiques (au second ordre) du signal sont :

(a) invariantes par translation dans le temps (stationnarité temporelle). Alors :

$$(2) \quad \Gamma_R(\underline{r}, \underline{r}', \tau) = E[R(\underline{r}, t) R^*(\underline{r}', t - \tau)]$$

(b) invariantes par translation dans l'espace (stationnarité spatiale). Alors :

$$(3) \quad \Gamma_R(\underline{\rho}, t, t') = E[R(\underline{r}, t) R^*(\underline{r} - \underline{\rho}, t')]$$

(c) invariantes par translation dans l'espace et le temps (stationnarité temporelle et spatiale). Alors :

$$(4) \quad \Gamma_R(\underline{\rho}, \tau) = E[R(\underline{r}, t) R^*(\underline{r} - \underline{\rho}, t - \tau)]$$

A ces grandeurs spatio-temporelles, on associe (par transformation de Fourier) des grandeurs équivalentes qui sont (en notant DSP la Densité Spectrale de Puissance) :

– dans le cas (a) la corrélation-DSP espace-fréquences temporelles :

$$(5) \quad \Gamma_R(\underline{r}, \underline{r}', \nu) = TF_{\tau}[\Gamma_R(\underline{r}, \underline{r}', \tau)] \\ = \int \Gamma_R(\underline{r}, \underline{r}', \tau) e^{-2\pi j \nu \tau} dt$$

$\nu$  est la fréquence temporelle;

– dans le cas (b) la corrélation-DSP en fréquences spatiales et temps :

$$(6) \quad \Gamma_R(\underline{k}, t, t') = TF_{\rho}[\Gamma_R(\underline{\rho}, t, t')] \\ = \int \Gamma_R(\underline{\rho}, t, t') e^{2\pi j \underline{k}^T \underline{\rho}} d\underline{\rho}$$

$\underline{k}$  est fréquence spatiale;

– enfin, dans le cas (c) on a la DSPN dimensionnelle :

$$(7) \quad \gamma_R(\underline{k}, \nu) = TF_{\rho, \tau}[\Gamma_R(\underline{\rho}, \tau)] \\ = \int \Gamma_R(\underline{\rho}, \tau) e^{2\pi j (\underline{k} \cdot \underline{\rho} - \nu \tau)} d\underline{\rho} dt$$

Nous schématisons ces diverses fonctions sur la figure 2 dans le cas d'une stationnarité spatiale et temporelle.

#### 4.2.2. Modélisations globales complètes

Elles prennent en compte la totalité des propriétés statistiques de  $R(\underline{r}, t)$ . Dans le cas gaussien, la modélisation au second ordre est complète. Dans les autres cas, on sera amené à prendre en compte les moments d'ordre supérieur. Une approche intéressante consiste à utiliser les *cumulants* issus de la seconde fonction caractéristique [10]. Au signal  $R(\underline{r}, t)$  on associe, par échantillonnage spatial et temporel, une variable aléatoire multidimensionnelle.

La fonction

$$(8) \quad \psi(\underline{u}) = \text{Log} \{ E[e^{i \underline{u}^T \cdot R}] \}$$

de la variable réelle multidimensionnelle  $\underline{u}$  est la seconde fonction caractéristique. Les dérivées par

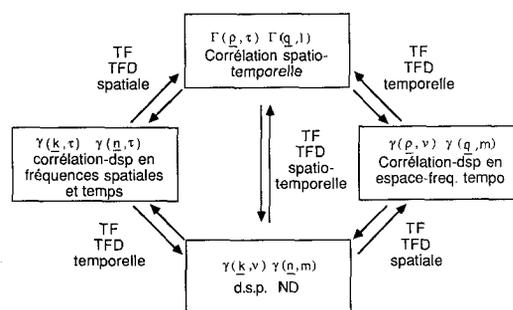


Fig. 2. — Signaux aléatoires : Corrélations et dsp en espace-temps fréquences spatiales et temporelles.

tielles de  $\psi(\underline{u})$  par rapport aux composantes  $u_i$  de  $\underline{u}$  définissent les *cumulants*.

On peut montrer que :

(a) Dans le cas gaussien centré, la corrélation est le cumulants d'ordre 2 (dérivées partielles d'ordre 2), les autres cumulants sont nuls.

(b) La phase du signal étudié, qui disparaît dans la corrélation, est présente dans les cumulants d'ordre supérieur.

Cette modélisation globale complète est nécessaire dans des cas complexes non réductibles à leurs propriétés au second ordre (textures). Elle permet également d'identifier des filtres non minimum de phase ou non linéaires [8].

#### 4.3. MODÈLES DE STRUCTURE (OU STRUCTURELS)

On travaille généralement en échantillonné. Il s'agit de représenter  $R(\underline{i}, j)$  comme la sortie d'un filtre linéaire et stationnaire excité par du bruit blanc.

A une dimension, la solution générale est un filtre ARMA ( $p, q$ ). L'obtention de ce filtre passe par le problème complexe de la détermination de l'ordre AR ( $p$ ) et MA ( $q$ ).

A l'ordre 2, appelant  $F(z)$  la fonction de transfert en  $z$  du filtre et  $\gamma_R(z)$  la DSP en  $z$  du signal, on a :

$$(9) \quad \gamma_R(z) = F(z) F^*(1/z^*) P_B$$

$P_B$  : puissance du bruit blanc.

Sur cette formule apparaissent deux indéterminations au niveau du filtre et de l'entrée  $B(t)$  :

– Seul  $|F(z)|$  est connu sur le cercle de rayon 1, dans le plan  $z$  complexe, ce qui entraîne l'existence de  $2^q$  solutions stables et causales. La solution est unique si l'on impose au filtre d'être stable, causal et causalement inversible (phase minimale) [3, 11].

– Soit un filtre  $T(z)$  non identité tel que :

$$(10) \quad |T(z)| = 1$$

sur le cercle de rayon 1 dans le plan  $z$  complexe. Alors, on peut remplacer  $B(t)$  par  $N(t) = T[B(t)]$ . Les filtres  $T$  (passe-tout) peuvent être : un simple retard; un filtre de Blaschke [12].

En deux (ou  $N > 1$ ) dimensions, l'indétermination grandit encore car :

– on ne dispose pas d'une définition de la causalité. On peut ainsi construire divers filtres causaux. Nous verrons l'effet de ce choix sur les modèles AR ND;

— la classe des « entrées équivalentes » est déduite d'une entrée particulière filtrée par un filtre ND vérifiant :

$$|\det \underline{T}(z)|^2 = 1$$

sur le cercle de rayon 1 dans le plan  $z$  complexe.  $\underline{T}(z)$  est la fonction de transfert (matricielle) du filtre ND. Cette classe est vaste et nous n'avons pas trouvé d'étude en donnant l'analyse complète.

Malgré ces diverses incertitudes, des solutions ont été proposées [13 à 17].

#### 4. 4. SYNTHÈSE ENTRE LES MODÉLISATIONS CERTAINES ET ALÉATOIRES

De nombreux auteurs ont utilisé, pour des signaux certains, des modèles issus de l'approche aléatoire avec quelque succès. Peut-on expliquer ce fait et en déduire une approche synthétique de ces deux situations ?

Dans les modèles de structure, la seule différence entre les deux types de modèles est contenue dans l'excitation (impulsion de Dirac ou bruit blanc). Le problème principal est celui de l'identification du filtre. Au second ordre, une impulsion de Dirac (ou une suite non régulière d'impulsions) et le bruit blanc sont analogues : leur DSP est uniforme. Ainsi, à ce degré d'approximation, les deux types de signaux conduisent aux mêmes techniques d'identification. Une analyse plus fine est cependant parfois nécessaire (identification d'entrées multi-impulsionnelles par exemple). On peut voir des exemples de ces techniques dans l'analyse des signaux de parole ou en sondage sismique [18, 19].

La modélisation globale (et dans un certain sens également — voir les équations de Yule Walker — la modélisation structurelle) repose au moins implicitement sur l'estimation de la corrélation spatio-temporelle. Dans le cas stationnaire (en temps et espace), la corrélation spatio-temporelle est associée à un modèle aléatoire de par sa définition :

$$(11) \quad \Gamma_R(\underline{\rho}, \tau) = E \{ \mathbf{R}(\underline{r}, t) \mathbf{R}^*(\underline{r} - \underline{\rho}, t - \tau) \}$$

Cependant, afin d'estimer cette corrélation, on est conduit à supposer, en plus de la stationnarité, l'ergodicité du signal ND  $\mathbf{R}(\underline{r}, t)$ , ce qui permet de remplacer la moyenne d'ensemble (11) par une moyenne dans le temps, dans l'espace, ou dans le temps et l'espace, conduisant à :

$$(12) \quad \Gamma_R(\underline{\rho}, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \times \int_{-T/2}^{+T/2} \mathbf{R}(\underline{r}, t) \mathbf{R}(\underline{r} - \underline{\rho}, t - \tau) dt$$

$$(13) \quad \Gamma_R(\underline{\rho}, \tau) = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{V_D} \int_D \mathbf{R}(\underline{r}, t) \mathbf{R}(\underline{r} - \underline{\rho}, t - \tau) dr$$

$D$  : domaine spatial de volume  $V_D$ , ou encore :

$$(14) \quad \Gamma_R(\underline{\rho}, \tau) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ D \rightarrow \infty}} \frac{1}{TV_D} \times \int_{-T/2}^{+T/2} \int_D \mathbf{R}(\underline{r}, t) \mathbf{R}(\underline{r} - \underline{\rho}, t - \tau) dt dr$$

selon que l'on moyenne, (12) en temps, (13) en espace, (14) en espace et temps.

Dans ces diverses formules qui donnent, avec  $T$  et  $D$  finies, les formules pratiques d'estimation de la corrélation spatio-temporelle, le signal peut être aléatoire ou certain. On peut donc ainsi associer une corrélation ST et diverses corrélations DSP aux signaux certains. On voit facilement que les relations fondamentales :

- de Wiener Kintchine;
- de filtrage,

sont valables dans ces deux cas.

Sur cette base, il semble naturel de prévoir des analogies fortes entre les cas certains et aléatoires. Il est cependant primordial de garder présentes à l'esprit les différences éventuelles et d'examiner avec tout le discernement souhaitable les différentes situations.

Donnons deux exemples illustrant ces propos en discutant un point évidemment délicat qui est celui de la décorrélation (ceci n'a *a priori* pas de sens en certain). A une dimension, pour un signal formé de deux fréquences pures différentes et non corrélées dans le cas aléatoire, la covariance est :

$$(15) \quad \Gamma_R(\tau) = P_{A_1} \cos 2\pi\nu_1 \tau + P_{A_2} \cos 2\pi\nu_2 \tau$$

$P_{A_1}$ ,  $P_{A_2}$  puissance des deux fréquences pures.  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  fréquences ( $\nu_1 \neq \nu_2$ ).

En certain, la corrélation définie par :

$$(16) \quad \Gamma_R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t-\tau) s(t) dt$$

est :

$$(17) \quad \Gamma_R(\tau) = A_1^2/2 \cos 2\pi\nu_1 \tau + A_2^2/2 \cos 2\pi\nu_2 \tau$$

Soit exactement la même forme que (15). La décorrélation [qui annulait le terme croisé dans (15)] est remplacée par l'orthogonalité des deux fréquences pures issue de :

$$(18) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2\pi\nu_1 t + \varphi_1) \cos(2\pi\nu_2(t-\tau) + \varphi_2) dt = 0$$

lorsque  $\nu_1 \neq \nu_2$ .

Il est cependant bon de garder présent à l'esprit le fait que l'annulation (pratique) du terme croisé n'est réalisée que si le « temps d'intégration »  $T$  vérifie

$$(19) \quad T |\nu_1 - \nu_2| \gg 1$$

La technique de moyennage spatial proposée par [20] illustre le même effet. A la fréquence  $\nu$ , on calcule la corrélation DSP espace-fréquence temporelle entre les capteurs d'une antenne rectiligne à capteurs équidistants. On suppose que le signal est issu de deux sources ponctuelles à l'infini donnant pour le signal vu par l'antenne :

$$(20) \quad \underline{\mathbf{R}} = A_1 \underline{e}_1 + A_2 \underline{e}_2$$

$$(21) \quad \underline{e}_1^+ = (1 e^{-j\varphi_1} \dots e^{-j(N-1)\varphi_1})$$

$$(22) \quad \underline{e}_2^+ = (1 e^{-j\varphi_2} \dots e^{-j(N-1)\varphi_2})$$

où :

$$\varphi_1 = 2\pi\nu \frac{d}{c} \sin \theta_1$$

$$\varphi_2 = 2\pi\nu \frac{d}{c} \sin \theta_2$$

avec :

- $d$  : distance entre les capteurs;
- $c$  : célérité des ondes reçues;
- $\theta_i$  : angle donnant la direction des sources vis-à-vis d'une perpendiculaire à l'antenne.

Dans le modèle aléatoire,  $A_1$  et  $A_2$  sont deux variables aléatoires centrées indépendantes. Leurs puissances sont respectivement :

$$(23) \quad P_{A_1} = E[|A_1^2|]$$

$$(24) \quad P_{A_2} = E[|A_2^2|]$$

D'où l'on déduit la *matrice interspectrale* :

$$(25) \quad \underline{\gamma} = E[\underline{R} \underline{R}^+] = P_{A_1} \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1^+ + P_{A_2} \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2^+$$

Dans le cas certain, on pourrait envisager d'utiliser :

$$(26) \quad \underline{\gamma}_1 = \underline{R} \underline{R}^+ = |A_1^2| \underline{e}_1 \underline{e}_1^+ + |A_2^2| \underline{e}_2 \underline{e}_2^+ + A_1 A_2^* \underline{e}_1 \underline{e}_2^+ + A_1^* A_2 \underline{e}_2 \underline{e}_1^+$$

La différence entre  $\underline{\gamma}$  et  $\underline{\gamma}_1$  est fondamentale (en particulier pour les méthodes HR) car on voit facilement, si  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  sont linéairement indépendants, que :  $\underline{\gamma}$  est de rang 2 (ce qui met en évidence les deux sources) alors que  $\underline{\gamma}_1$  est de rang 1.

Si maintenant nous moyennons dans l'espace en notant qu'une translation de  $x$  multiplie  $\underline{e}_1$  par  $e^{jk_1 x}$  et  $\underline{e}_2$  par  $e^{jk_2 x}$  ( $k_1$  et  $k_2$  sont les nombres d'onde selon  $Ox$  associés aux ondes planes issues des deux sources), on obtient :

$$(27) \quad \underline{\gamma}_2 = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} [ |A_1|^2 \underline{e}_1 \underline{e}_1^+ + |A_2|^2 \underline{e}_2 \underline{e}_2^+ + A_1 A_2^* \underline{e}_1 \underline{e}_2^+ e^{j(k_1+k_2)x} + A_1^* A_2 \underline{e}_2 \underline{e}_1^+ e^{-j(k_1-k_2)x} ] dx$$

$$(28) \quad \underline{\gamma}_2 = |A_1|^2 \underline{e}_1 \underline{e}_1^+ + |A_2|^2 \underline{e}_2 \underline{e}_2^+$$

Cette nouvelle estimée de  $\underline{\gamma}$  (dans le cas certain) a la même forme que l'estimée de  $\underline{\gamma}$  dans le cas aléatoire.

On retrouve ici le résultat obtenu dans le cas temporel examiné plus haut en remplaçant la moyenne temporelle (qui supposait l'invariance des signaux par translation dans le temps) par une moyenne dans l'espace (qui suppose l'invariance des signaux par translation dans l'espace).

De cette discussion, nous tirerons deux conclusions :

(a) dans une certaine mesure, il est possible d'unifier les approches certaines et aléatoires (ceci est heureux car les corrélateurs ne disposent pas d'une commande permettant de leur indiquer si le signal qu'ils traitent est certain ou aléatoire),

(b) l'estimation est un art difficile car en modifiant l'estimateur, on peut changer du tout au tout les propriétés de l'estimée.

L'estimation est un art difficile : essayons d'en pénétrer les secrets.

## 5. Estimation des grandeurs caractéristiques

Pour présenter l'ensemble des méthodes d'estimation existantes ou potentiellement existantes de manière simple, nous allons construire un schéma général faisant apparaître les grandeurs caractéristiques des différentes représentations et les méthodes permettant de les obtenir. Nous nous intéresserons ensuite de manière plus détaillée aux éléments constitutifs de ce « mécano ».

### 5.1. UNE VUE D'ENSEMBLE DES MÉTHODES D'ESTIMATION DES GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES DES SIGNAUX ND

L'ensemble des méthodes est présenté sur la figure 3. Dans cette figure apparaît le point de départ des traitements constitué par les données qui sont soit un signal ND (ou spatio-temporel) continu ( $R(r, t)$ ) ou discret ( $R(\underline{i}, j)$ ) en espace-temps, auquel on associe ses diverses transformées de Fourier et ses diverses corrélations ou DSP en espace/fréquences temporelles, fréquences spatiales/temps, fréquences spatiales et temporelles.

Ces représentations peuvent être obtenues de plusieurs manières. Les « connexions » entre les différentes cases représentent ces opérateurs. Nous avons distingué trois familles d'opérateurs, chaque famille comportant plusieurs membres. Nous présentons rapidement ces diverses familles et nous reviendrons ensuite sur chacune d'elles.

La première famille comporte les opérateurs de Fourier non moyennés [Transformée de Fourier (TF) ou Transformée de Fourier Discrète (TFD)] ou moyennés (périodogramme moyenné) [21].

La deuxième famille est celle des opérateurs haute résolution agissant à partir de l'estimée de la corrélation : HRC. Nous proposons de classer dans cette famille les estimateurs de DSP (en Fréquences Temporelles, en Fréquences Spatiales, en Fréquences Spatio-Temporelles) prenant comme données une estimée de la corrélation et n'utilisant pas la TF. Ces opérateurs utilisent donc l'ensemble des techniques mises au point en particulier en analyse spectrale [22, 23, 24], et dénommées méthodes AR, ARMA, de Capon, de Prony, de Pisarenko, Décomposition en Valeurs Singulières (DVS)... Dans le cas de transformations à une dimension, nous retrouverons les méthodes développées en analyse spectrale. Dans le cas à plus d'une dimension, il s'agira d'extensions (pas toujours évidentes) de ces méthodes.

Sur le plan des principes, la troisième famille est analogue à la deuxième. Seule la technique d'estimation les distingue. Cette troisième famille est celle des méthodes haute résolution (donc a priori les mêmes que celles de la deuxième famille), agissant directement à partir des données (HRD). L'exemple le plus célèbre de ces méthodes (à une dimension en analyse spectrale) est la méthode de Burg [25].

Enfin, pour être complet, nous devons citer la connexion particulière établie entre la case « données » et la case « corrélation ST » et dénommée : estimateurs directs. Il s'agit là, nous y reviendrons, des estimateurs de la corrélation obtenus

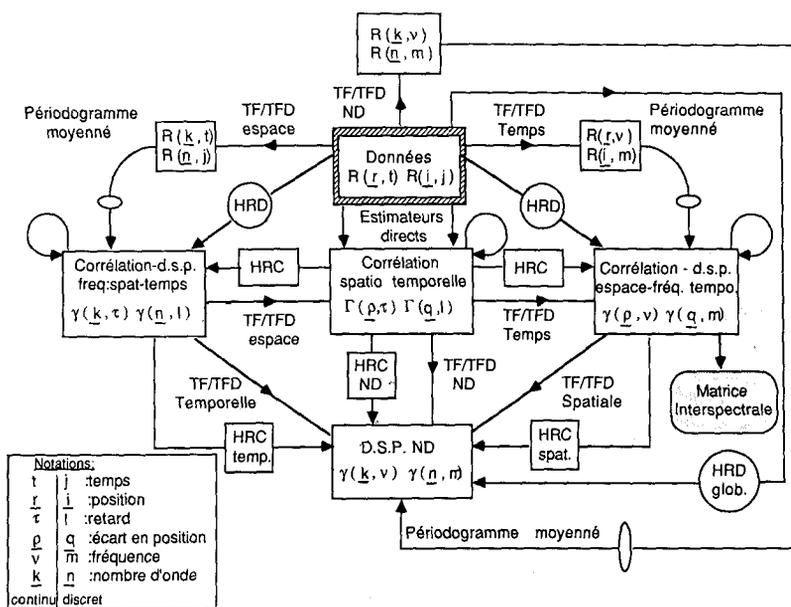


Fig. 3. - Signaux ND. Schéma synoptique des estimateurs des grandeurs caractéristiques.

par moyennage temporel et/ou spatial des données par des estimateurs « ergodiques » du type :

$$(29) \Gamma_R(\rho, \tau) = \alpha \int_{\underline{r}} \int_{\underline{t}} R(\underline{r}, t) R^*(\underline{r}-\rho, t-\tau) dt d\underline{r}$$

← et/ou →

Il est utile de noter que l'on pourrait imaginer d'autres estimateurs indirects de la corrélation ST obtenus à travers :

$$(30) \begin{aligned} \Gamma_R(\rho, \tau) &= \text{TF}_v^{-1}[\gamma(\rho, v)] \\ \Gamma_R(\rho, \tau) &= \text{TF}_k^{-1}[\gamma(k, \tau)] \\ \Gamma_R(\rho, \tau) &= \text{TF}_{k,v}^{-1}[\gamma(k, v)] \end{aligned}$$

où l'estimée  $\gamma$  peut être obtenue par un estimateur de la deuxième ou de la troisième famille.

Enfin, toujours à propos des cases « corrélation », nous avons figuré un opérateur « bouclé » sur ces cases. Cet opérateur prend en compte les méthodes dans lesquelles on est amené à « modifier » l'estimateur de la corrélation de manière à lui faire vérifier certaines propriétés imposées *a priori*. Un exemple bien connu d'une telle transformation de la corrélation ST est la multiplication par une fonction d'apodisation. Cet opérateur bouclé apparaît également sur la corrélation-DSP Spatio-Fréquentielle (SF) et sur la corrélation-DSP Fréquences Spatiales et Temps (FST). On sait en effet qu'à la corrélation-DSPSF est associée la matrice interspectrale à l'estimateur de laquelle on peut imposer de vérifier certaines de ses propriétés : symétrie hermitienne, caractère défini positif, caractère Toeplitz [26].

Voyons maintenant de manière plus détaillée les différents opérateurs d'estimation.

### 5.2. LES ESTIMATEURS DIRECTS DE LA CORRÉLATION SPATIO-TEMPORELLE

Nous nous limitons à une dimension-espace et une dimension-temps. On peut distinguer divers estima-

teurs selon que l'on moyenne :

- en temps;
- en espace;
- en temps et en espace.

TABLEAU II

Estimateurs de la corrélation S.T  
R(i, j) connu sur [0, I-1] x [0, J-1]

#### 1. Estimateur non biaisé

$$l, k \geq 0$$

$$\Gamma_1(k, l) = \frac{1}{(I-k)(J-l)} \sum_{i=k}^{I-1} \sum_{j=l}^{J-1} R(i, j) R^*(i-k, j-l)$$

$$l, k < 0$$

$$\Gamma_1(l, k) = -\Gamma_1^*(-l, k)$$

Cet estimateur est :

- non biaisé;
- à 1 dimension, non défini positif;
- à N > 1 dimensions, non extensible.

#### 2. Estimateur biaisé

$$k, l \geq 0 \quad \Gamma_2(k, l) = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=k}^{I-1} \sum_{j=l}^{J-1} R(i, j) R^*(i-k, j-l)$$

Cet estimateur est :

- biaisé;
- défini positif ↔ extensible.

#### 3. Estimateur périodique (TFD)

$$\Gamma_3(k, l) = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} R(i, j) R^*((i-k)_I, (j-l)_J)$$

$$(i-k)_I = i-k \text{ modulo } I.$$

$$(j-l)_J = j-l \text{ modulo } J.$$

Cet estimateur est :

- biaisé;
- défini positif;
- enfin  $\text{TFD}(\Gamma_3) = |\text{TFD}(R)|^2$ .

Nous donnons pour le moyennage temps espace diverses solutions possibles (tableau II). Indiquons que le problème essentiel sera de :

- déterminer le modèle de signal (cf. § 4.4);
- fixer la « zone de stationnarité » spatiale et temporelle sur laquelle portera le moyennage.

5.3. LES MÉTHODES « CLASSIQUES » D'ESTIMATION DE LA DSPND

Ces méthodes sont contenues dans la figure 4. Il est cependant intéressant de les présenter de manière autonome vu l'importance pratique de la DSPND. La figure 4 donne les deux familles principales de méthodes qui sont des extensions évidentes des méthodes bien connues pour les signaux à 1 dimension :

- le périodogramme moyenné;
- le corrélogramme et le périodogramme lissé.

La méthode du périodogramme moyenné décompose le signal 2D discret (dans la figure présentée) connu sur un domaine d'extension  $(I \times J)$  en « sous-domaines » d'extension  $(\tilde{I} \times \tilde{J})$ . Le signal obtenu dans chaque sous-domaine est apodisé par  $g(i, j)$ ; on réalise une TFD de chaque sous-domaine apodisé et l'on moyenne l'ensemble des modules carrés de ces TFD. Plusieurs éléments sont à la disposition de l'expérimentateur :

- extension  $(\tilde{I} \times \tilde{J})$  de chaque « sous-domaine »;
- forme de la fonction d'apodisation;
- recouvrement ou non des « sous-domaines » moyennés.

Il est bon de préciser que les propriétés statistiques (moyenne variance) de cet estimateur sont complètement connues dans le cas de signaux gaussiens.

Les méthodes du corrélogramme et du périodogramme lissé sont strictement équivalentes lorsque l'on utilise deux fonctions d'apodisation  $c(k, l)$  et  $C(n, m)$  reliées par :

$$(31) \quad C(n, m) = \text{TDF} \{ c(k, l) \}$$

Elles s'appuient essentiellement sur un estimateur de la corrélation spatio-temporelle. L'extension « en temps » et « en espace » de la fonction d'apodisation  $c(k, l)$  fixe le « moyennage » en temps et en espace. Dans le cas de signaux gaussiens, les propriétés de ces estimateurs sont connues.

5.4. LES ESTIMATEURS HRC

Nous avons convenu d'appeler estimateurs HRC (fig. 3) les estimateurs qui partent de la corrélation ST et en déduisent soit la corrélation-DSPSF (Spatio-Fréquencielle) (et la matrice interspectrale), la corrélation-DSPFST (Fréquences spatiales et temps), ou la DSPND. Il existe tout un catalogue de méthodes différentes s'appuyant sur divers modèles. Nous distinguerons deux situations :

(a) Un domaine bien connu (par ex. en analyse spectrale) est celui dans lequel la transformation porte sur une seule dimension (temporelle ou spatiale). Nous donnons un organigramme de ces différentes méthodes dans le tableau III.

Nous avons distingué dans ce tableau quatre types de modèles :

- filtre AR ou méthode du maximum d'entropie qui est susceptible de plusieurs variantes selon l'estimateur choisi pour la corrélation ST;
- méthode FQI (Filtrage, Quadrature, Intégration) dans laquelle on construit un filtre vérifiant certaines propriétés : « pointage de l'antenne » (formation de voies [29]); filtre adapté à la « direction » observée et réjecteur MQ des composantes parasites (référence bruit seul, Capon [30], et la modification de Lagunas [31]);
- ondes planes conduisant aux méthodes de Pisarenko et Prony [27, 28].
- méthodes identifiant l'espace signal et/ou l'espace bruit : décomposition en valeurs singulières, Music, Goniomètre [32, 33, 34].

Il est important de souligner (nous y reviendrons en 6) que certaines de ces méthodes aboutissent à un « sous-

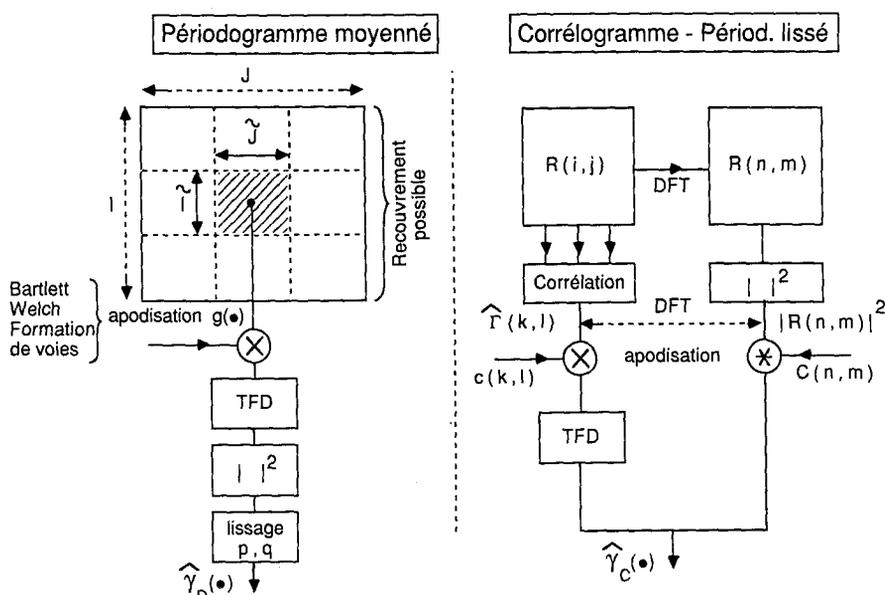
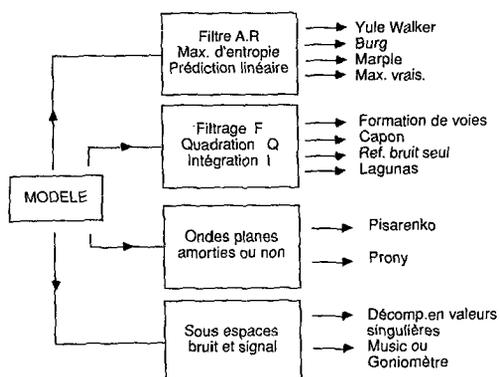


Fig. 4. - Estimation de la DSP ND classique.

TABLEAU III  
Les principales méthodes Haute Résolution et le modèle associé



produit » intéressant sous forme :

- d'un filtre blanchisseur (méthode AR);
- d'un filtre « extracteur optimal » d'une composante (Capon).

(b) L'extension des méthodes HRC au cas à plusieurs composantes n'est pas évidente. La méthode qui s'étend le plus facilement est celle de Capon. La référence [35] présente un filtre de Capon ND.

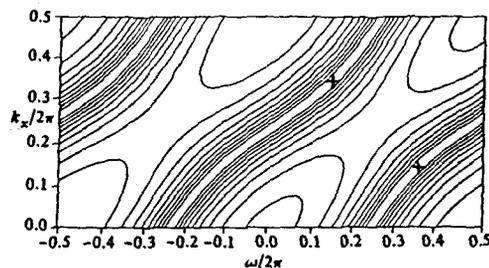
Les méthodes de Pisarenko ou les méthodes AR posent le problème de l'extensibilité. Ce problème (posé dans [36, 37]) est le suivant : étant donné un certain nombre de valeurs (estimées) de la corrélation  $ST \Gamma(k, l)$  pour  $k, l \in \mathcal{D}$ , existe-t-il une corrélation ST passant par ces points ? A une dimension, il faut et il suffit que la matrice construite à partir des valeurs connues de la corrélation (1D) soit positive (ou non négative). L'extension à plus d'une dimension repose sur des critères assez complexes [37] d'extensibilité. Pour une corrélation spatio-temporelle « extensible », il existe [37] une solution et une seule du type Pisarenko (le modèle est alors formé d'une somme d'ondes planes monochromatiques et de bruit blanc). AN (>1) dimensions, les méthodes AR et MEM deviennent différentes.

Il a été démontré [38] que l'estimateur MEM de la DSPND existe et est unique lorsque les valeurs connues (estimées) de la corrélation ST sont extensibles.

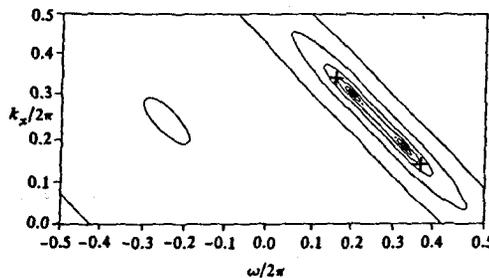
La méthode AR est susceptible de plusieurs variantes selon le domaine sur lequel est défini le filtre AR (1<sup>er</sup> quadrant, 2<sup>e</sup> quadrant, 1/2 plan). Ces variantes sont associées à la perte de la notion de causalité (fig. 5).

Rappelons que, pour des signaux stationnaires, la causalité n'intervient pas à une dimension (les estimateurs progressifs et rétrogrades sont identiques). En fait, cette identité a été battue en brèche par la méthode développée par Kumaresan [32] consistant à faire sortir du cercle de rayon 1 les pôles associés au signal (non stationnaire) en travaillant dans le sens rétrograde. Une synthèse entre ces deux approches définissant plusieurs familles (réversible en temps ou non) d'estimateurs AR a été proposée dans [39].

Enfin, d'intéressantes extensions des méthodes s'appuyant sur les sous-espaces bruit et/ou signal ont été

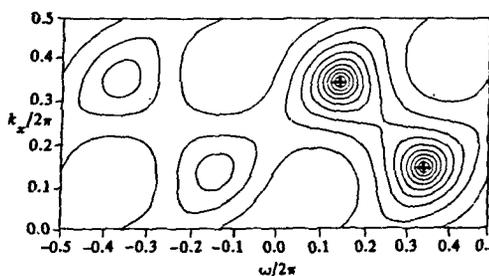


Estimateur AR : filtre à réponse impulsionnelle dans le 1<sup>er</sup> quadrant  $P_1(n, m)$



Estimateur AR : filtre à réponse impulsionnelle dans le 2<sup>e</sup> quadrant  $P_2(n, m)$

$$\frac{1}{P_c(n, m)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{P_1(n, m)} + \frac{1}{P_2(n, m)} \right]$$



Combinaison des estimateurs 1 et 2.

Fig. 5. - Différents estimateurs d'une dsp 2D (le signal est formé de deux ondes planes) extrait de : L. B. JACKSON et H. C. CHIEN, Frequency and bearing estimation by two dimensional linear prediction, Proc. Int. Conf Acoustics Speech and Signal Processing, Washington, April 79, p. 665-68.

proposés par :

- Morf et al. : définition et utilisation d'un sous-espace signal large bande [40];
- Wang et Kaveh [41, 42, 43] : CSM (Coherent Subspace Method), dans laquelle on réalise un pré-traitement permettant de ramener la fréquence spatiale d'une source ponctuelle, qui est a priori variable en fonction de la fréquence temporelle, à la valeur de la fréquence temporelle centrale. Cette méthode, dite de focalisation, permet d'appliquer les méthodes « bande étroite » en large bande et augmente ainsi la stabilité statistique de l'estimation.

### 5.5. LES ESTIMATEURS HRD

Ces estimateurs utilisent des principes analogues à ceux des estimateurs HRC, mais ils en diffèrent par la mise en œuvre. Les paramètres caractéristiques sont ici estimés directement à partir des données sans passer par l'étape intermédiaire de l'estimation de corrélation.

Dans ces estimateurs, on postule l'existence d'un modèle dont les paramètres sont estimés à partir des données. Ce problème d'estimation est en général surdéterminé (plus de données que de paramètres à estimer) et l'on met en œuvre une *méthode des moindres carrés*. Sans être exhaustifs, citons plusieurs exemples précis de la mise en œuvre de ces méthodes :

- la *méthode de Burg* [25] qui estime les coefficients de corrélation partielle par minimisation de la somme des puissances estimées des résidus de prédiction progressive et rétrograde;
- la *méthode de Marple* [44] réalisant la même minimisation sur l'ensemble des coefficients du filtre AR;
- la *méthode de Prony* [22, 28] s'appuie sur un principe analogue pour : (a) estimer la fréquence et le coefficient d'amortissement des composantes du modèle; (b) estimer l'énergie de chaque composante.

Enfin, une variante intéressante de ces techniques est constituée par les méthodes récursives (dont la méthode dite du gradient est une version dégradée) [45] dans lesquelles la minimisation du critère quadratique est effectuée par un système bouclé. L'identité de ces méthodes avec les méthodes *en ligne* a été montrée dans [46].

5.6. ILLUSTRATION : LOCALISATION DE SOURCES EN ACOUSTIQUE SOUS-MARINE

De nombreuses techniques de traitement d'antenne ont été développées à partir des méthodes générales présentées ici. Nous allons illustrer les résultats obtenus, dans des expériences réelles en Acoustique Sous-Marine. A partir des données (signal ND), on met en œuvre toute une famille d'estimateurs dont la structure est donnée dans le tableau IV.

Il est important de noter que certaines méthodes de traitement d'antenne (*Goniomètre, Music*) nécessitent de faire un choix du nombre de sources. Ce choix peut être fait :

- soit relativement arbitrairement en prenant une valeur « assez grande » pour ne pas occulter des sources importantes;
- soit en mettant en œuvre des critères statistiques de détection du nombre de sources. Ce sujet a donné lieu à une intense activité de recherche à la fois au plan théorique et pratique. On trouvera dans [60] une comparaison de ces divers critères.

L'illustration de la localisation de sources ponctuelles en ASM est faite sur des résultats communiqués par J. P. Le Cadre [62].

Nous présentons l'exploitation d'une mesure faite avec une antenne rectiligne comportant N=16 capteurs équirépartis, distants de a=0,54 m. La fréquence maximale traitée est 1280 Hz; à cette fréquence, l'écartement entre les capteurs est de 0,45 fois la longueur d'onde λ. Le traitement est effectué de manière récurrente (période de récurrence =30 secondes) et l'on suit donc l'évolution, au cours du temps, des sources vues par l'antenne.

Sur la figure 6, le traitement exploite un seul canal de 8 Hz à la fréquence de 800 Hz. La méthode MEN utilise un modèle d'ordre 16 (ordre maximal accessible avec 16 capteurs). Dans la méthode du goniomètre,

TABLEAU IV

Les estimateurs utilisés en Traitement d'antenne

Vecteur source

$$e^+(\theta) = 1/\sqrt{N}(1 e^{-j\theta} \dots e^{-j(N-1)\theta})$$

$$\varphi = 2\pi \frac{a \sin \theta}{\lambda}, \quad \underline{e}^+(\theta) \cdot \underline{e}(\theta) = 1$$

$\hat{\gamma}$  : estimateur de la matrice interspectrale;  
 $v_i$  : vecteurs propres (rangés selon les valeurs propres décroissantes) de  $\hat{\gamma}$ .

Formation de voies :

$$I_{FV}(\theta) = \underline{e}^+(\theta) \cdot \hat{\gamma} \cdot \underline{e}(\theta).$$

Méthode de Capon :

$$I_c(\theta) = \frac{a}{\underline{e}^+(\theta) \cdot \underline{\gamma}^{-1} \cdot \underline{e}(\theta)}$$

Maximum d'entropie (Modèle AR) :

$$I_{AR}(\theta) = \frac{1}{P_B |\underline{e}^+(\theta) \underline{\gamma}^{-1} \underline{1}|^2}$$

avec

$$P_B = \frac{1}{\underline{1} \underline{\gamma}^{-1} \underline{1}}$$

Goniomètre Music

$$I_{Gon}(\theta) = \frac{1}{\sum_{p=1}^N |e^+(\theta) v_p|^2} = \frac{1}{1 - \sum_{p=1}^p |e^+(\theta) v_p|^2}$$

sous-espace bruit                  sous-espace source

on s'est placé dans le sous-espace bruit et le nombre de sources postulé est de 10. Deux sources artificielles étaient présentes et elles donnent les traces principales bien identifiées sur les quatre méthodes. A l'échelle de la figure 7, les deux sources ne sont pas séparées entre les instants 0 et 30 minutes.

Enfin, la figure 8 présente un traitement « large bande » des mêmes données. La formation de voies « large bande » est obtenue en sommant des signaux retardés (le retard est fonction de l'azimut). La méthode AR-Goniomètre utilise une méthode *AR vectorielle* pour déterminer les matrices interspectrales. On applique ensuite la méthode du goniomètre à 10 matrices interspectrales obtenues pour 10 valeurs de la fréquence réparties dans la bande analysée. Les résultats obtenus par ces 10 traitements sont ensuite sommés. Nous laissons au lecteur le soin d'apprécier les avantages et inconvénients de ces premiers essais de traitement « large bande »...

Les techniques d'estimation présentées caractérisent le signal au second ordre en espace-temps, espace-fréquences temporelles, fréquences spatiales-temps ou fréquences spatiales et temporelles. A ces diverses caractérisations, on peut associer des opérateurs (filtres) permettant d'améliorer le rapport signal sur

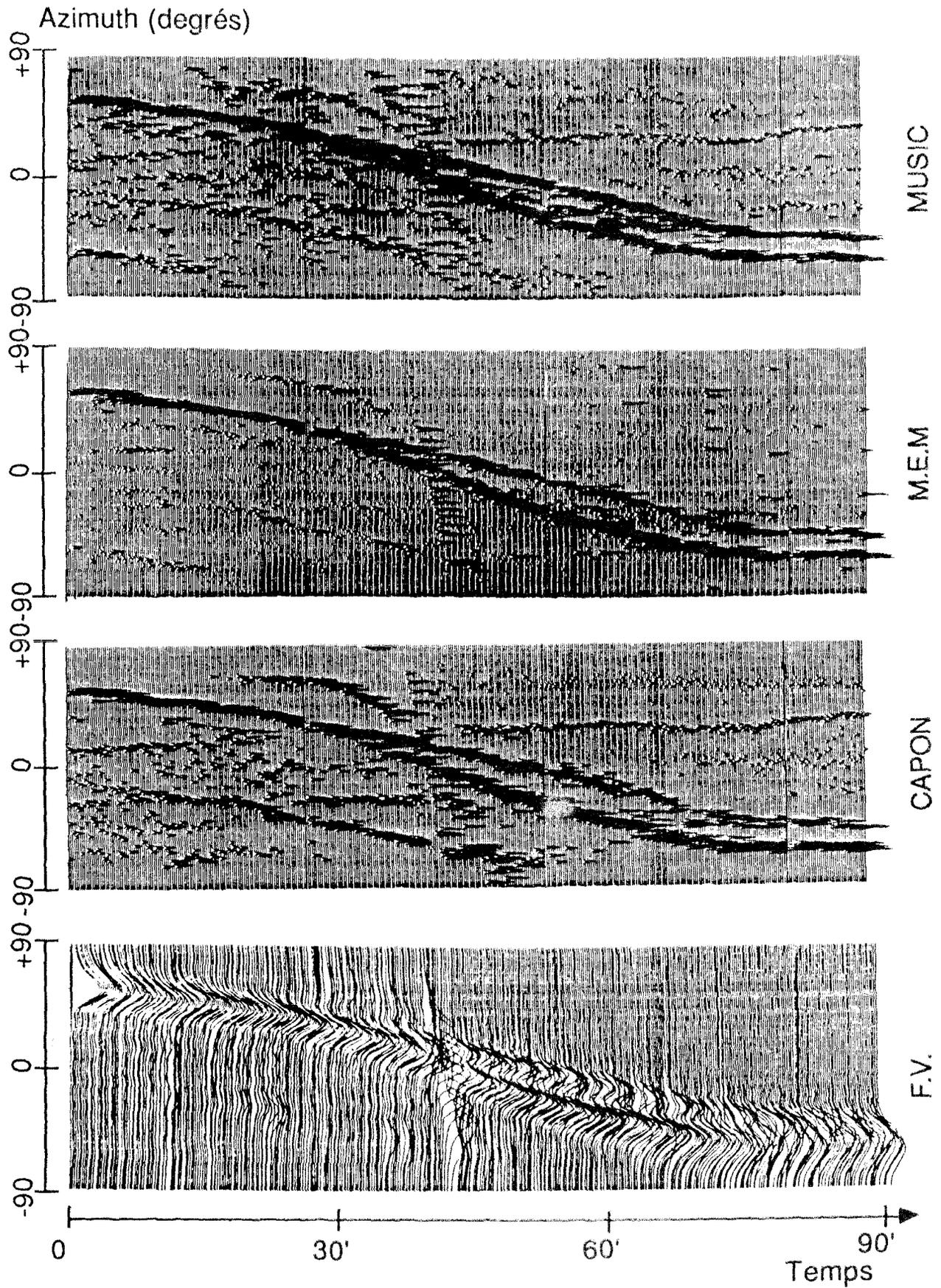


Fig. 6. -- Localisation de sources par traitement bande étroite.  
Méthode : FV/Capon/MEM/Music.

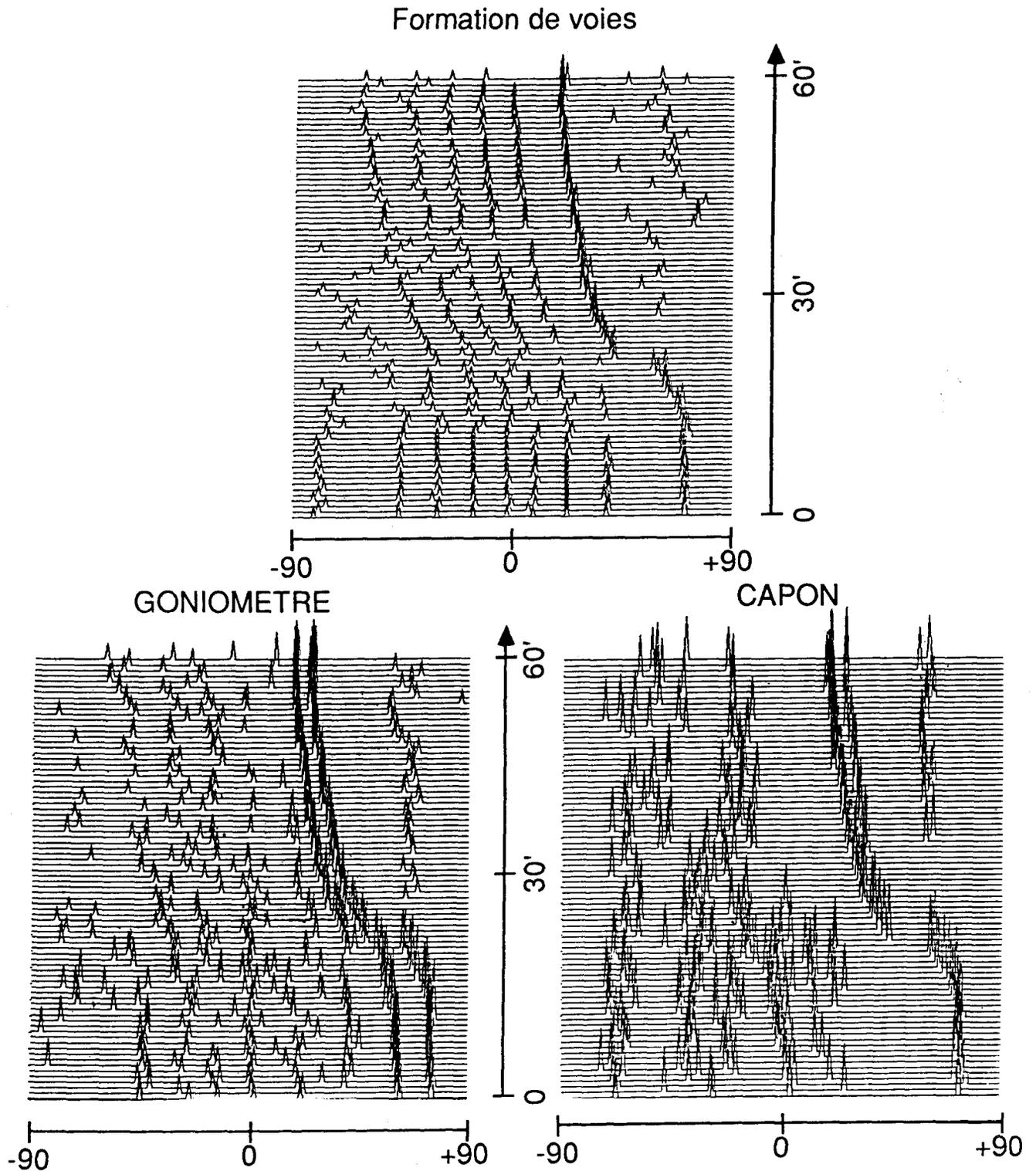


Fig. 7. — Traitement large bande : détail de la figure 6.  
Méthode FV-Gonio-Capon.

bruit ou de séparer les sources. Terminons ce panorama en présentant les principaux opérateurs.

### 6. Les principaux opérateurs

Les techniques de caractérisation des signaux ND sont associées à divers opérateurs. Ces opérateurs ont

été clairement mis en évidence dans [23], où l'on montre que les diverses méthodes d'estimation des grandeurs caractéristiques se ramènent à l'identification d'un opérateur (filtre) en se donnant :

- un objectif : minimisation de l'entropie, de la puissance totale de sortie, etc;
- des contraintes issues du signal observé.

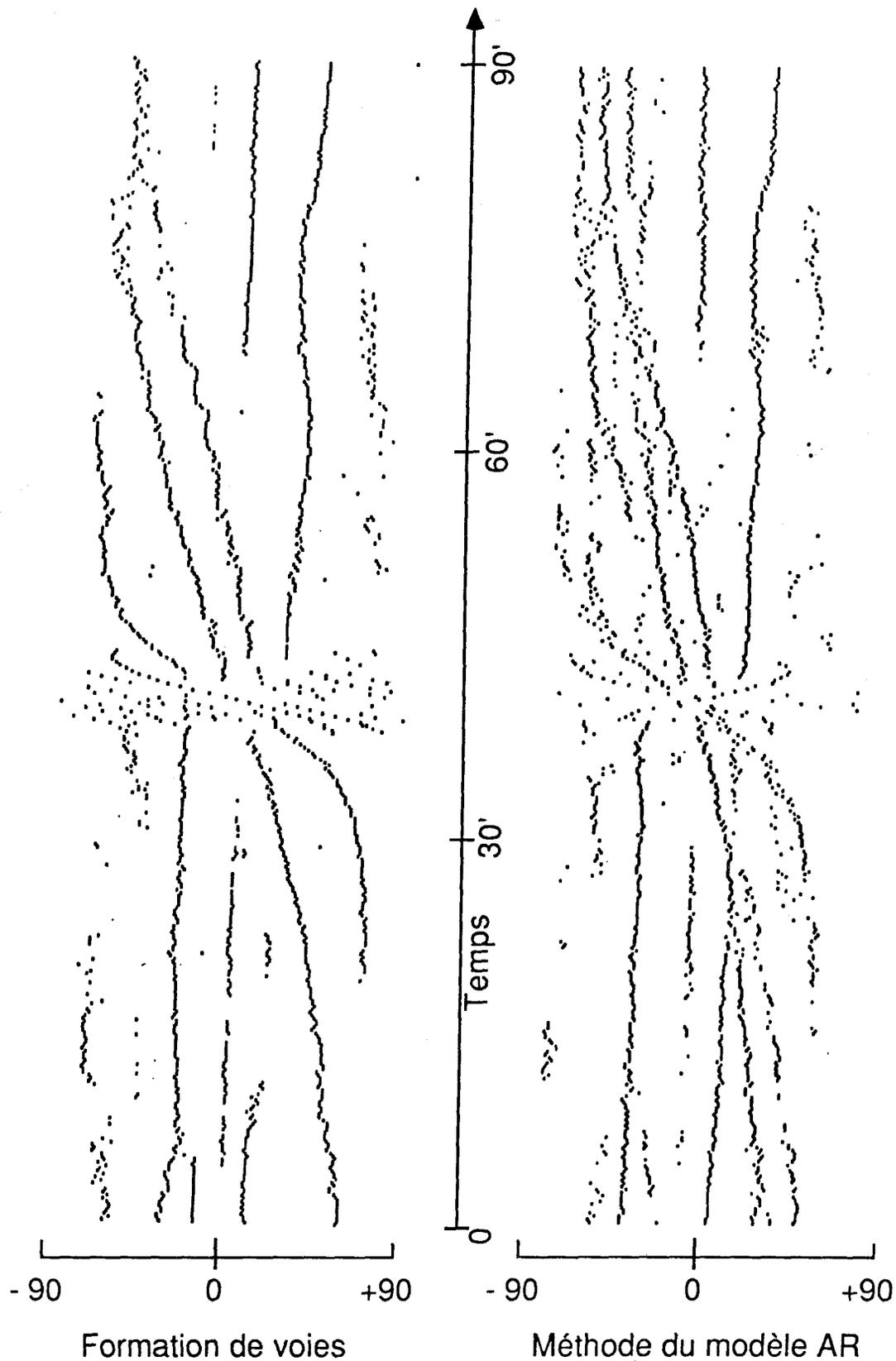


Fig. 8. — Localisation de source par traitement large bande.

Ces opérateurs sont également associés à la représentation structurale des signaux par filtrage d'un signal « simple » : bruit blanc, suite d'impulsions.

Le système générateur  $F$  et l'opérateur d'identification  $G$  (introduit dans [23]) sont en général l'inverse l'un

de l'autre (fig. 9).

Avec cette manière de voir les choses, on sépare les propriétés du signal en deux éléments :

— la forme déterministe de la DSP est contenue dans l'opérateur d'identification  $G$ ;

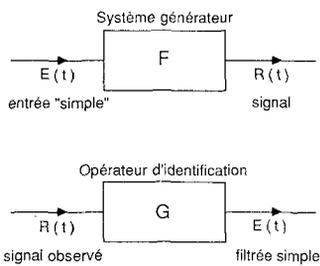


Fig. 9. - Système générateur et son inverse (opérateur d'identification)

- les autres propriétés du signal sont rassemblées dans la filtrée  $E(t)$  du signal observé par l'opérateur d'identification  $G$ .

Lorsque  $E(t)$  vérifie les propriétés simples que le modèle lui impose (en général être blanc ou gaussien), son observation n'apporte pas d'information nouvelle. Cependant, en général, le signal filtré par  $G$  sera plus riche et il est intéressant d'observer ce signal issu du filtrage du signal observé par l'opérateur d'identification. Ainsi, dans le cas de la déconvolution, l'opérateur  $G$  est un filtre inverse et l'information principale (en prospection sismique par exemple) est contenue dans la localisation des impulsions dont est constitué  $E(t)$ .

En se limitant au cas linéaire, on peut obtenir ces divers opérateurs à travers un modèle linéaire du signal observé pollué par un bruit additif [47]. Les principaux opérateurs utilisés à un ou plusieurs dimensions sont :

- le projecteur;
- le filtre adaptatif de Capon;
- la Référence Bruit Seul (RBS) et le filtre de Wiener;
- le filtre blanchisseur autorégressif.

6.1. LE PROJECTEUR

Cet opérateur projette le signal reçu  $R$  sur le vecteur  $e$  caractérisant le signal attendu. Cette méthode est non adaptative lorsque le vecteur signal  $e$  est fixé indépendamment du signal observé. L'exemple type de ces méthodes est la Transformation de Fourier Discrète ou la formation de voies [48]. Nous présentons sur la figure 10 un exemple d'application de cette méthode en prospection sismique [49, 50]. Dans cette figure chaque « trace » est :

$$(32) \quad R_i(t) = \sum s_j(t - \tau_j) + B_i(t)$$

EXTRACTION D'UN SIGNAL (24 TRACES) DU BRUIT

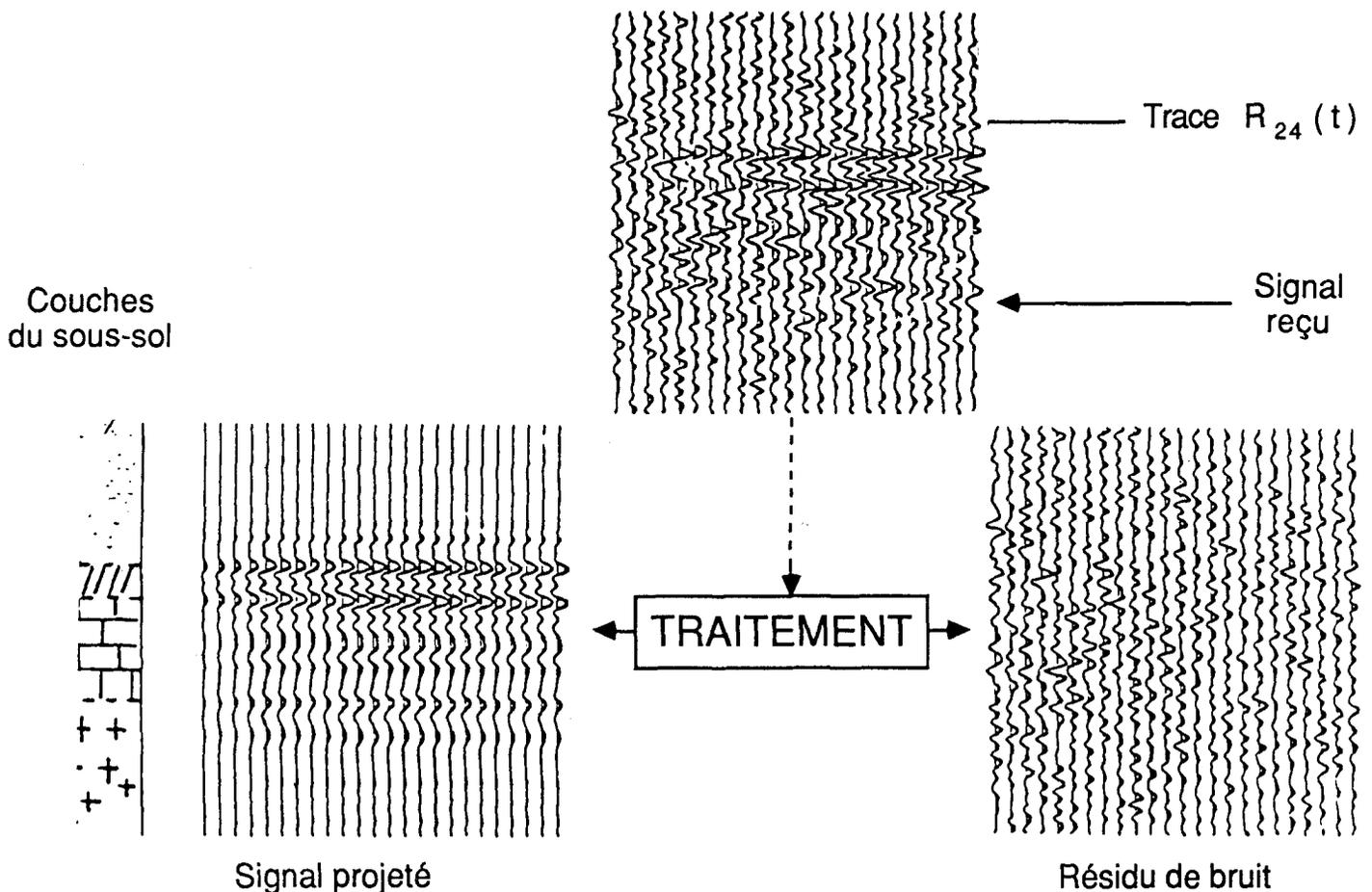


Fig. 10. - Séparation de la partie utile et du bruit par projection en espace-temps.

avec :

$s_j(t - \tau_j)$  : signal réfléchi sur une couche horizontale du sous-sol à la profondeur :  $z_j = \tau_j/c$  ( $c$  : célérité des ondes).

$B_i(t)$  : parasites (bruit) sur la « trace »  $i$ .

On se place dans les « sous-espaces fréquentiels » obtenus par Transformation de Fourier (TF) :

$$(33) \quad R_i(v) = \sum S_j(v) e^{-2\pi j v \tau_j} + B_i(v)$$

et à chaque fréquence on projette le signal spatio-fréquentiel  $\underline{R}(v)$  sur le vecteur signal  $e(v)$  :

$$\underline{R}_p(v) = e^+(v) \cdot \underline{R}(v) e(v).$$

Le « résidu de bruit » à la fréquence  $v$  est donné par :

$$\underline{RB}(v) = \underline{R}(v) - \underline{R}_p(v)$$

Enfin, on présente sur la figure 10 le *signal projeté* et le *résidu de bruit* en temps obtenus par TF inverse :

$$\underline{R}_p(t) = \text{TF}^{-1} \{ \underline{R}_p(v) \}$$

$$\underline{RB}(t) = \text{TF}^{-1} \{ \underline{RB}(v) \}.$$

On peut apprécier directement sur la figure 10 l'amélioration du rapport signal sur bruit ainsi apportée. L'analyse de l'optimalité de ce traitement peut être faite en supposant que le signal observé a le modèle linéaire suivant :

$$(34) \quad \underline{R}(v) = S(v) e(v) + \underline{B}(v)$$

avec :

$\underline{R}(v)$  : signal observé à la fréquence  $v$ ;

$e(v)$  : vecteur signal à la fréquence  $v$ ;

$S(v)$  : amplitude du signal à la fréquence  $v$ ;

$\underline{B}(v)$  : parasites à la fréquence  $v$ .

Lorsque  $e(v)$  est connu et lorsque le bruit  $\underline{B}$  est blanc (décorrélation de ses différentes composantes), le projecteur est optimal en moyenne quadratique.

Si le vecteur  $e(v)$  est totalement inconnu, le bruit restant blanc, le traitement devient adaptatif et il est réalisé en deux étapes :

1 : Estimation du vecteur signal  $e(v)$  par le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de la matrice Interspectrale estimée du signal observé. Cette procédure est à rapprocher de la méthode de Karhunen-Loeve dans laquelle on ne retiendrait que la composante dominante.

2 : Projection sur le vecteur signal estimé.

On a montré dans [53] dans quelles conditions cette méthode peut être considérée comme optimale. Notons que l'on peut passer « continûment » du cas où le vecteur source est connu au cas où il est inconnu en imposant au vecteur source un modèle issu de connaissances *a priori*.

Le cas le plus courant est celui dans lequel on impose un modèle « ondes planes ». On peut également se donner un modèle moins contraignant comme l'égalité des modules des composantes du vecteur source. On a montré [54, 55, 56] qu'il est alors possible (de manière unique ?) d'identifier les vecteurs sources. Ces différents modèles (onde plane, égalité des modules)

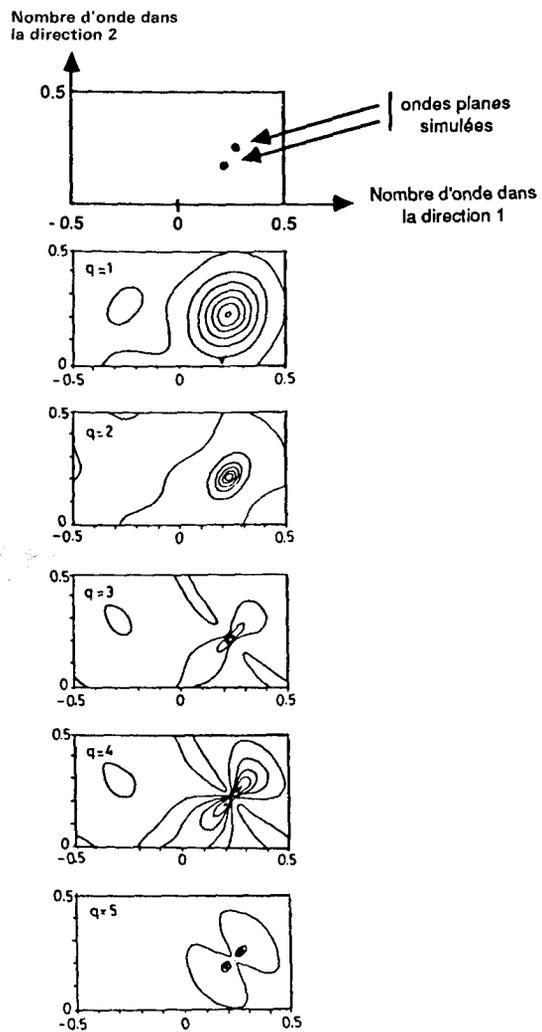


Fig. 11. — DSP 2D issue de l'opérateur de Capon ( $q=1$ ) et de ses généralisations ( $q>1$ ) (extrait de [23]). (Traitement d'un signal synthétique formé de la somme de deux ondes planes.)

permettent d'identifier plusieurs sources (leur nombre maximal dépend du nombre de capteurs).

Sous la seule condition que les différentes sources ne soient pas totalement corrélées, la projection sur le sous-espace source peut être réalisée en utilisant le propagateur défini dans [56].

## 6.2. LE FILTRE ADAPTATIF DE CAPON

Lorsque le bruit n'est pas blanc, le projecteur n'est plus optimal. Ainsi, dans le cas où le bruit est constitué de sources parasites (ou considérées comme telles, quand on ne désire pas les analyser), ces sources contribuent à la projection sur le signal étudié, constituant des interférences que l'on cherche à éliminer.

Le filtre utilisé est alors défini par l'objectif poursuivi mais également par les propriétés du signal et/ou du bruit. Nous appellerons un tel filtre adaptatif dans la mesure où il s'adapte aux signaux et aux bruits reçus. Le filtre adaptatif de Capon répond aux deux conditions suivantes :

- conservation de l'amplitude dans la « direction » du signal;
- minimisation de la puissance moyenne des interférences.

Le filtre de Capon, qui se déduit de ces deux conditions, est donné par :

$$(35) \quad \underline{h}_c = \frac{\Gamma_R^{-1} \cdot \underline{e}}{\underline{e}^+ \cdot \Gamma_R^{-1} \underline{e}}$$

où  $\Gamma_R$  est la matrice de corrélation (ST, SF ou FST). L'étude de l'optimalité du filtre de Capon a été faite dans [53]. Une modification de ce filtre, obtenue en normalisant sa largeur de bande équivalente, a été proposée dans [31] par Lagunas.

$$(36) \quad h_c = \frac{\Gamma_R^{-1} \cdot \underline{e}}{(\underline{e}^+ \cdot \Gamma_R^{-2} \underline{e})^{1/2}}$$

conduisant pour la DSP à :

$$E[|\underline{h}_c + \underline{R}|^2] = \frac{\underline{e}^+ \Gamma_R^{-1} \underline{e}}{\underline{e}^+ \Gamma_R^{-2} \underline{e}}$$

Cette formule a été « généralisée » par Lagunas [31] qui propose, pour la DSP :

$$\gamma(e) = \frac{\underline{e}^+ \Gamma_R^{1-q} \underline{e}}{\underline{e}^+ \Gamma_R^{-q} \underline{e}}$$

Cette formule regroupe :

- le projecteur ( $q=0$ );
- la DSP de Capon ( $q=1$ );
- la DSP normalisée de Lagunas ( $q=2$ ).

on a montré que le pouvoir de résolution de cet estimateur s'accroît avec  $q$ .

L'application de ce type d'opérateur pour obtenir la DSP2D est donnée sur la figure 12, dans le cas d'un signal simulé formé de deux ondes planes. On note l'accroissement de la résolution des deux ondes planes lorsque  $q$  augmente.

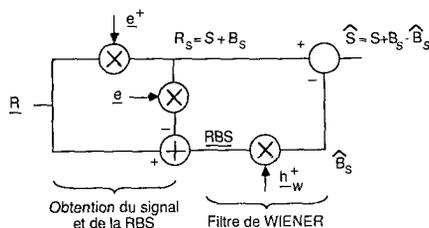


Fig. 12. - La RBS et le filtre de Wiener.

### 6.3. LA MÉTHODE RBS-FILTRE DE WIENER

Cette méthode réalise la synthèse entre le projecteur et le filtre de Capon. Le point de départ est la définition de la référence bruit seul (RBS) présentée initialement par [57]. La RBS résulte de la décomposition du signal observé ( $\underline{R}$ ) en deux parties :

- la partie contenant le signal utile obtenue par projection du signal observé sur vecteur signal  $\underline{e}$  :

$$(37) \quad \underline{R}_s = \underline{e}^+ \cdot \underline{R}$$

- la référence bruit seul, partie du signal observé contenue dans le sous-espace complémentaire du sous-espace de dimension 1 engendré par le vecteur signal :

$$(38) \quad \underline{RBS} = \underline{R} - (\underline{e}^+ \cdot \underline{R}) \underline{e}$$

La référence bruit seul ne contient pas de signal (cette exigence est essentielle pour assurer de bonnes performances [57]). Par contre, la RBS contient des informations sur les interférences polluant la partie signal. On peut construire la référence bruit seul à partir des formules (37) et (38). Dans certains cas, la RBS est donnée directement par les mesures (un exemple de RBS sous forme d'un signal de pression pour le traitement des signaux magnétiques marins est donné dans [58]).

En utilisant le modèle linéaire d'observation :

$$(39) \quad \underline{R} = \underline{se} + \underline{B}$$

la projection sur le sous-espace signal s'écrit :

$$(40) \quad \underline{R}_s \underline{e} = \underline{se} + (\underline{e}^+ \cdot \underline{B}) \underline{e} = \underline{se} + \underline{B}_s \underline{e}$$

$\underline{B}_s$  est la contribution des interférences à la projection sur le vecteur signal. Lorsque la RBS est corrélée à  $\underline{B}_s$  on peut améliorer le rapport signal sur bruit en retranchant à  $\underline{R}_s$  une estimée  $\underline{\hat{B}}_s$  des interférences obtenues à partir de la RBS par filtrage linéaire.

$$\underline{\hat{B}}_s = \underline{h}_w^+ \cdot \underline{RBS}$$

Le principe d'orthogonalité nous indique que nous aurons retranché tout l'effet des interférences lorsque la projection résultante

$$\underline{R}_s - \underline{B}_s = \underline{S} + \underline{B}_s - \underline{\hat{B}}_s$$

sera décorrélée de la RBS. Soit :

$$E[(\underline{R}_s - \underline{B}_s) \underline{RBS}^+] = 0$$

conduisant au *filtre de Wiener* :

$$(41) \quad \underline{h}_w^+ = E[\underline{R}_s \cdot \underline{RBS}^+] \{ E[\underline{RBS} \cdot \underline{RBS}^+] \}^{-1}$$

L'expression de ce filtre fait apparaître :

- l'intercorrélation (ST, SF, FST) de la partie signal et de la RBS.
- l'autocorrélation (ST, SF, FST) de la RBS.

Ces grandeurs peuvent être connues *a priori* ou estimées à partir des données (l'optimalité du traitement est alors remise en cause). Le schéma de filtrage utilisant la RBS et le filtre de Wiener est donné sur la figure 12.

Il est indiqué dans [48] que le filtre de Capon et la technique RBS-Filtre de Wiener sont équivalentes dans le cas d'un seul brouilleur. Cette équivalence est vraie dans le cas général. Appelons :

$\alpha = E[|\underline{R}_s|^2]$  la puissance de la partie signal

$\gamma = E[\underline{R}_s^* \cdot \underline{RBS}]$  l'intercorrélation entre la partie signal et la RBS.

$\Gamma$  = la matrice de corrélation de la

$$\underline{RBS} = E[\underline{RBS} \cdot \underline{RBS}^+]$$

La matrice de corrélation du signal observé est :

$$(42) \quad \Gamma_R = E[\underline{R} \underline{R}^+] = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma^+ \\ \gamma & \Gamma \end{bmatrix}$$

L'inverse de  $\Gamma_R$  est

$$(43) \quad \Gamma_R^{-1} = \begin{bmatrix} \beta & -\beta\gamma + \Gamma^{-1} \\ -\beta\Gamma^{-1}\gamma & \Gamma^{-1} + \beta\Gamma^{-1}\gamma\gamma^+ \Gamma^{-1} \end{bmatrix}$$

En revenant à (35), le filtre de Capon s'écrit :

$$(44) \quad \underline{h}_c^+ = (\underline{1} - \underline{\gamma}^+ \Gamma^{-1}) = (\underline{1}, -\underline{h}_w^+)$$

dans la base ( $\underline{e}_2$  sous espace complémentaire de  $\underline{e}_1$ ). Cette relation établit l'équivalence entre le filtre de Capon et la méthode RBS-filtre de Wiener.

Une illustration « géométrique » du projecteur, du filtre de Capon et de la méthode RBS-filtre de Wiener est donné sur la figure 13.

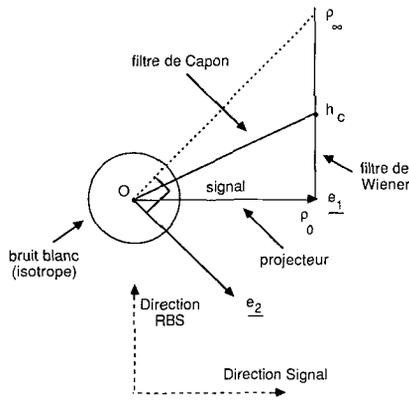


Fig. 13. — Illustration schématique des opérateurs : projecteur, filtre de Capon, RBS-filtre de Wiener.

Le signal observé :

$$(45) \quad \underline{R} = S_1 \underline{e}_1 + S_2 \underline{e}_2 + \underline{B}$$

est formé :

- du signal attendu  $S_1 \underline{e}_1$ ;
- du brouilleur  $S_2 \underline{e}_2$ ;
- de bruit blanc  $\underline{B}$ .

En appelant  $\rho$  le rapport entre la puissance du brouilleur et la puissance du bruit blanc :

$$(46) \quad \rho = \frac{E[|S_2|^2]}{E[|B|^2]}$$

On peut montrer que le filtre de Capon ( $\underline{h}_c$ ) se déplace sur le segment  $\rho_0 \rho_\infty$ .

Pour  $\rho = 0$ , on a :  $\underline{h}_c = \underline{e}_1$ . Le filtre de Capon est alors identique au projecteur et dans la méthode RBS-filtre de Wiener  $\underline{h}_w = \underline{0}$ .

Pour  $\rho = \infty$  :  $\underline{h}_c$  est orthogonal à  $\underline{e}_2$ . Les interférences dues à  $S_2 \underline{e}_2$  sont alors dominantes et on les rejette totalement.

Cette étude nous a montré les connexions existant entre les trois opérateurs : projecteur, filtre de Capon, et RBS-filtre de Wiener. La solution RBS-filtre de Wiener est intéressante car son implantation commerce par la technique classique de projection (formation de voies ou orientation électronique de l'antenne en traitement d'antenne). On peut ensuite évaluer l'intérêt de la seconde étape (filtrage de Wiener) à partir de la mesure des corrélations partielles entre la voie signal et la RBS. Ainsi comme cela a été montré

dans [58, 59], la seconde étape (filtre de Wiener) est parfois nuisible : le critère de choix entre l'usage ou non du filtre de Wiener est la valeur de la corrélation partielle entre la voie signal et la RBS.

#### 6.4. LES FILTRES BLANCHISSEURS DÉDUITS DU MODÈLE AR

Ces filtres blanchisseurs sont très utilisés pour le traitement des signaux à une dimension. L'extension à plusieurs dimensions n'est pas évidente.

##### 6.4.1. Filtres blanchisseurs 1 D

Ils se déduisent directement de l'interprétation des modèles AR dans le cadre de la théorie de la prédiction. Soit un signal 1 D  $R(n)$  et soit :

$$(47) \quad \hat{R}(n) = \sum_{i=1}^p a_i^* R(n-i)$$

le prédicteur linéaire de  $R(n)$  avec un passé de longueur  $p$  optimal en moyenne quadratique. On peut écrire :

$$(48) \quad R(n) = \hat{R}(n) + B(n)$$

$B(n)$  étant le résidu de prédiction. Le résidu est un bruit blanc (innovation) lorsque  $R(n)$  a un modèle AR d'ordre inférieur ou égal à  $p$ . Dans les autres cas, le résidu n'est pas blanc. On peut cependant penser que, dans la plupart des cas pratiques, en choisissant l'ordre  $p$  assez grand, le résidu sera rendu blanc ou presque blanc. L'expression (47) devient :

$$(47) \quad B(n) = R(n) - \sum_{i=1}^p a_i^* R(n-i)$$

montrant que  $B(n)$  est une filtrée linéaire de  $R(n)$  par le filtre MA de réponse impulsionnelle :

$$(50) \quad \underline{W}^+ = (1 - a_1^* \dots - a_p^*)$$

On peut donc écrire :

$$(51) \quad B(n) = \underline{W}^+ \cdot \underline{R}(n).$$

en définissant :

$$(52) \quad \underline{R}^+(n) = (R^*(n) R^*(n-1) \dots R^*(n-p)).$$

Le filtre blanchisseur  $\underline{W}^+$  est obtenu en utilisant le principe d'orthogonalité qui entraîne :

$$(53) \quad E[B^*(n) \underline{R}(n)] = P_B \underline{1}$$

avec :

$$P_B = E[|B(n)|^2] = \text{puissance du résidu}$$

$$(54) \quad \underline{1}^+ = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$$

Soit :

$$(55) \quad \Gamma_R \cdot \underline{W} = P_B \underline{1}$$

avec, comme précédemment :

$$(56) \quad \Gamma_R = E[\underline{R}(n) \underline{R}^+(n)].$$

L'expression de  $B(n)$  donne également :

$$(57) \quad E[|B(n)|^2] = P_B = \underline{W}^+ \Gamma_R \underline{W}$$

d'où l'on déduit :

$$(58) \quad P_B = (\underline{1} + \Gamma^{-1} \underline{1})^{-1}$$

et :

$$(59) \quad \underline{W}^+ = \frac{\underline{1}^+ \Gamma_R^{-1}}{\underline{1} + \Gamma_R^{-1} \underline{1}}$$

Cette expression de  $\underline{W}$  nécessite la connaissance de  $\Gamma(k)$  pour  $0 \leq k \leq p$ . En général, on ne disposera que d'estimations de ces grandeurs et il existe alors une grande variété d'estimateurs de  $\underline{W}^+$  (Yule-Walker, Burg, Marple, etc.).

#### 6.4.2. Filtre blanchisseur ND

L'extension de la technique précédente à plus d'une dimension pose quelques problèmes essentiellement liés à la notion de causalité. En effet, à une dimension, il est naturel de réaliser la prédiction de  $R(n)$  avec les  $p$  échantillons précédents. À plus d'une dimension (disons à 2D pour fixer les idées), on pourra choisir diverses solutions :

- prédiction à partir du 3<sup>e</sup> quadrant;
- prédiction à partir d'un 1/2 plan;
- concaténation des données pour se ramener à un problème à 1D.

Comme pour l'analyse spectrale AR à  $N$  dimensions, ces divers choix conduisent à des filtres différents issus essentiellement de l'absence de propriété de factorisation à plus de deux composantes, et il apparaît important de poursuivre les recherches dans ce sens.

Un autre point important qui doit être exploré est la recherche d'une géométrie de l'échantillonnage adaptée au signal bruité.

Explicitons ce point sur un exemple très simple. Supposons que le signal 2D soit corrélé uniquement selon une certaine ligne non parallèle à l'axe d'échantillonnage. Il est alors clair qu'un échantillonnage aligné sur « l'axe de corrélation » permettra de se ramener à un problème 1D. Dans cet exemple, la corrélation est factorisable et l'on peut se ramener à 1 dimension.

## 7. Conclusion

Le traitement et la modélisation des signaux à une dimension a conduit à la mise au point de toute une gamme de méthodes. Dans ces études, une grande place a été faite à l'estimation des grandeurs du second ordre comme la corrélation ou la densité spectrale de puissance (analyse spectrale) et plusieurs familles de filtres (projecteur, Capon, blanchisseur) ont été développées. L'ensemble de ces études est sous-tendue par quelques principes simples qui s'expriment par l'idée de filtre générateur (ou du filtre d'identification). Les techniques d'estimation des grandeurs fondamentales et le problème dual de l'estimation du filtre générateur sont essentiellement fondés (à l'heure actuelle) sur les moindres carrés (dans

le cas certain) ou l'erreur quadratique moyenne (dans le cas aléatoire). Ces deux techniques, *a priori* différentes, conduisent au même type d'estimateur dans le cas stationnaire et ergodique.

La modélisation et le traitement des signaux à plus d'une dimension puise ses sources dans les techniques 1D. Si certaines techniques (Fourier, Capon, RBS) se généralisent de manière simple, des problèmes nouveaux non totalement maîtrisés se posent. On a pu ainsi développer des techniques de modélisation et de traitement des signaux ND qui étendent les techniques 1D. L'extension de ces techniques requiert seulement (?) le développement des moyens de traitement à la fois dans leur capacité de stockage, dans leur puissance et dans la mise en œuvre de moyens nouveaux de visualisation. Il sera important de développer des architectures et des langages [61] adaptés aux signaux ND. Il apparaît également tout un champ d'investigation nouveau dans lequel nous avons recensé les questions liées à l'extensibilité et l'ensemble des problèmes posés par l'absence de causalité (ou de théorème de factorisation).

Il est sûr que les progrès technologiques et la grande variété des domaines d'application des traitements et modélisation des signaux ND ouvrent de larges perspectives de développement à ce domaine de recherche appliquée.

## Remerciements

*Ce travail a été réalisé avec le soutien de la Direction des Constructions Navales, dans le cadre d'une Convention DCN/CEPHAG.*

*Manuscrit reçu le 29 mai 1987.*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] KOLMOGOROV, Interpolation and extrapolation of stationary random sequences, *B. Acad. Sciences, URSS*, 1941. Trad. DOYLE et SELIN, Rapport Rand Corporation, RM 3090, Santa Monica, Ca, 1962.
- [2] L. E. FRANK, *Signal Theory*, Prentice Hall.
- [3] N. WIENER, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing Time Series with Engineering Applications*, Wiley, NY, 1945.
- [4] J. L. DOOBS, *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, 1953.
- [5] BLANC LAPIERRE et B. PICINBONO, *Fonctions Aléatoires*, Masson.
- [6] WHITTLE, The analysis of multiple stationary time series, *J. Royal, Stat. Soc., Série B*, 15, 1959, p. 125-139.
- [7] B. PICINBONO, White noises, *Signal Processes II, Theories and Applications*, H. W. SCHÜSSLER éd., Elsevier Sci. Pub., 1983, p. 13-16.
- [8] K. S. LIU et M. ROSENBLATT, Deconvolution and estimation of transfer function phase and coefficients for non Gaussian linear processes, *Ann. Statist.*, 10, 1982, p. 1145-1208.

- [9] P. COMON et J. L. LACOUME, A new signal estimation using a reception model, *Signal Processing III, Theories and Application*, IT, Young et al. éd., Elsevier Sci. Pub., 1986, p. 977-980.
- [10] D. R. BRILLINGER, *Time series data analysis and theory*, Holden-day, 1981.
- [11] E. A. ROBINSON et S. TREITEL, *Geophysical Signal Analysis*, Prentice Hall, 1980.
- [12] B. PICINBONO, Représentation des signaux par amplitude et phase instantanée, *Ann. Télécom.*, 38, 1983, p. 179-189.
- [13] R. WIGGINS et E. A. ROBINSON, Recursive solution to the multichannel filtering problem, *J. Geophys. Res.*, 70, Apr. 1965, 1885-1891.
- [14] O. N. STRAND, Multichannel Maximum Entropy Spectral Analysis, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC 22, Aug. 1977.
- [15] M. MORF, A. VIERA, D. T. LEE et T. KAILATH, Recursive multichannel maximum entropy spectral estimation, *IEEE Trans. Geosci. Electron.*, GE 16, Apr. 1978.
- [16] M. GHARBI et N. MARTIN, Filtrage Autorégressif Vectoriel, *Proc. GRETSI*, 1983, p. 971-976.
- [17] J. L. LACOUME, C. LATOMBE, N. MARTIN, M. GHARBI et R. LIDIN, AR and ARMA models in spectral and multispectral analysis, *Proc. ASSP Spectrum Estimation Workshop II*, Tampa, 1983.
- [18] B. S. ATAI et J. R. REMDE, A new model of LPC excitation for producing natural sounding speech at low bit rates, *Proc. ICASSP'82*, 1982, p. 614-617.
- [19] F. HABIBI-ASHRAFI et J. R. MENDEL, Estimation of parameters in lossless layered media systems, *IEEE Trans. on Autom. Control*, AC 27, n° 1, fév. 1982.
- [20] T. J. SHAN et T. KAILATH, Adaptive beamforming for coherent signal and interference, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, ASSP 33, Aug. 1985, p. 806-811.
- [21] J. MAX, *Méthodes et techniques de traitement du signal et application aux mesures physiques*, Masson, 1987.
- [22] S. M. KAY et S. L. MARPLE, Spectrum Analysis. A Modern Perspective, *Proc. of the IEEE*, 69, n° 11, Nov. 1981.
- [23] M. A. LAGUNAS, M. E. SANTAMARIA, A. GASULL et A. MORENO, Maximum likelihood filters in spectral estimation problems, *Signal Proc.*, 1986, p. 20-34.
- [24] J. L., LACOUME, Nouvelles méthodes d'analyse spectrale, *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, J. Max., Masson, 1987, p. 131-165.
- [25] J. P. BURG, A new analysis technique for time series data, *Nato Advance Study Inst. on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics*, Enschede, NL, Aug. 1968.
- [26] J. P. LE CADRE et P. LOPEZ, Estimation d'une matrice interspectrale de structure imposée, *T.S.*, 11, oct.-déc. 1984, p. 3-18.
- [27] V. F. PISARENKO, The retrieval of harmonics from a covariance function, *Geophys. J.R. Ast. Soc.*, 33, 1973, p. 347-366.
- [28] R. PRONY, *Essai Expérimental et Analytique*, 1. Cahier 2, 1795, p. 24-76.
- [29] H. JASIK, *Antenna Engineering Handbook, Array of Linear Elements*, chap. 5, G.C. SOUTHWORTH, éd., McGraw Hill, 1961.
- [30] J. CAPON, High resolution frequency wavenumber spectrum analysis, *Proc. IEEE*, 57, Aug. 1965, p. 1408-1418.
- [31] M. A. LAGUNAS et A. GASUL, An improved maximum likelihood method for power spectral density estimation, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, ASSP 32, Feb. 1984, 170-173.
- [32] R. KUMARESAN et D. W. TUFT, Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole zero modeling in noise, *IEEE Trans. on Acoust. Speech Sign. Proc.*, ASSP30, n° 6, 1982, p. 833-840.
- [33] R. SCHMIDT, Multiple emitter location and signal parameter estimation, *IEEE Trans. Ant. Propa.*, AP 34, March 1986, 276-280.
- [34] G. BIENVENU et L. KOPP, Optimality of high resolution processing using the eigensystem approach, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, ASSP 31, Oct. 1983, 1235-1248.
- [35] M. E. SANTAMARIA et M. A. LAGUNAS, Improved ML Cross-Spectral Estimation, *Signal Processing III, Theories and application*, IT YOUNG et al. éd, 1, Ten Hag, Sept. 86, p. 255-258.
- [36] W. BRADLEY et DICKINSON, Two dimensional Markov Spectrum estimate need not exist, *IEEE Trans. Inform Theory*, IT-26, n° 1, Jan. 1980, p. 120-121.
- [37] W. S. LANG et J. H. MCCLELLAN, Spectral estimation for sensors arrays, *IEEE Trans Acoust. Speech Signal Process.*, ASSP 31, n° 2, Apr. 1983, p. 349-358.
- [38] J. W. WOOD, Two dimensional Markov spectral estimation, *IEEE Trans. Information Theory*, IT 22, n° 5, Sept 1976, p. 552-559.
- [39] J. L. LACOUME, Time reversibility in AR estimators, *Signal Processing (à paraître)*.
- [40] GUANING SU et M. MORF, The signal subspace approach for multiple wideband emitter location, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc.*, ASSP 31, n° 6, Dec 1983.
- [41] H. WANG et M. KAVEH, Coherent signal subspace processing for the Detection and Estimation of angles of arrival of multiple wideband source, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc.*, ASSP 33, n° 4, Aug. 1985, p. 823-832.
- [42] H. HUNG, H. WANG et M. KAVEH, Further results on coherent signal subspace processing. *Proc. Third ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, Boston, 1986, p. 97-100.
- [43] K. M. BUCKLEY et L. GRIFFITHS, Direct broadband array data processing for source location estimation, *Proc. Third ASSP Workshop on Spectrum Estim. and Modeling*, Boston, 1986, p. 145-148.
- [44] S. L. MARPLE, A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm, *IEEE Trans. Acoust. Speech Sign. Proc.*, ASSP28, Aug. 1980, p. 441-454.
- [45] WIDROW et al., Adaptive Antenna Systems, *Proc. IEEE*, 55, 1967, p. 2143-2159.
- [46] B. PICINBONO, Remarques sur les méthodes adaptatives en détection et estimation, *Coll. GRETSI*, Nice, 25/1-25/7, 1977.
- [47] P. COMON, Traitement de signaux magnétiques multivariables, *Thèse Doctorat*, INPG, déc. 1985.
- [48] N. L. OWSLEY, *Sonar Array Processing in Array Signal Processing*, Hakin éd., Prentice Hall, 1985.
- [49] F. GLANGEAUD et J. L. LACOUME, Correction of Seismic traces by adaptive signal processing, *Proc. IASTED*, Paris, June 1986.
- [50] J. L. LACOUME, N. MARTIN, B. BERRIANI, C. CLIET et M. DUBESSET, *Analysis and Modelization of Short-Duration Windows of Seismic Signal*, SEG, New Orleans, Nov. 1987.

- [51] C. LATOMBE, Détection et caractérisation de signaux à plusieurs composantes à partir de la matrice interspectrale, *Thèse de Doctorat d'État*, INPG, Nov. 1982.
- [52] F. GLANGEAUD et C. LATOMBE, Multicomponent filtering of magnetic signals, *Signal Processing*, 11, Sept. 1986, p. 133-143.
- [53] P. COMON et J. L. LACOUME, About Capon Estimator Optimality, *Proc. Third ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, Boston, Nov. 1986, p. 53-56.
- [54] G. VEZZOSI, Séparation de fronts d'ondes par redressement du facteur de Choleski de leur matrice interspectrale, *Ann. Telecom*, 37, Sept-Oct 1982, p. 425-439.
- [55] J. MUNIER, L'identification de fronts d'ondes corrélés et distordus, *TS* (soumis).
- [56] S. SPITZ, Communication personnelle.
- [57] H. MERMOZ, Essai de Synthèse sur les Antennes de Détection Optimales et adaptatives, *Ann. Telecom.*, 25, Jul.-Août 1970, p. 269-280.
- [58] J. L. LACOUME, F. GLANGEAUD, P. LORENZINO, D. BAUDOIS et G. PRETET, Filtrage de signaux multicomposantes utilisant les corrélations intercomposantes, *Proc. GRETSI*, Nice, juin 1981.
- [59] P. COMON et J. L. LACOUME, Noise reduction for an estimated filter using noise reference, *IEEE Trans. information Theory*, IT-32, n° 2, March 1986.
- [60] I. TAS et C. LATOMBE, Détection multiple par les valeurs propres de la matrice spectrale, *TS*, 3, n° 2, 1986, p. 79-90.
- [61] J. LIENARD, Langage Conversationnel pour le Traitement des Multi-Signaux, *Coll. GRETSI*, Nice, 1987.
- [62] B. G. LUCAS et J. P. LE CADRE, Experimentation of spatial processing methods, *Proc. Adaptive Methods in Underwater Acoustics*, H. G. URBAN éd., NATO ASI Series, 51, Luneburg, 1984, p. 317-324.